[1]

Finanzmathematik

Volker Betz

1. Grundlagen

(1.1) Beispiel: Call- und Put-Optionen

Optionsscheine und andere sogenannte „Derivate“ sind heute ein wichtiger Bestandteil des Finanzmarktes und werden oft (und oft zurecht) als Zockerpapiere bezeichnet. Ihr ursprünglicher Zweck jedoch war (und ist) sehr sinnvoll.

Als Beispiel betrachten wir einen Bauern, der Kartoffeln anbaut. Er möchte sich dagegen „versichern“, dass er seine Kartoffeln zu einem zu billigen Preis verkaufen muss, etwa weil es eine sehr gute Ernte gegeben hat und der Marktpreis der Kartoffeln stark gesunken ist. Daher vereinbart er mit einem Großhändler folgendes Geschäft:

- Der Bauer zahlt dem Großhändler am 1. April des Jahres die Summe von y Euro.
- Dafür verpflichtet sich der Händler, dem Bauern am 1. November des gleichen Jahres genau 1 Tonne Kartoffeln zum Preis von K Euro abzunehmen, egal was der Marktpreis m ist.
- Der Bauer ist jedoch nicht verpflichtet, die Kartoffeln für diesen Preis zu verkaufen. Er wird dies nur tun, wenn der Marktpreis geringer als K ist.
- Falls der Bauer übrigens weniger als 1 Tonne Kartoffeln geerntet hat (oder gar keine angebaut hat!), so kann er trotzdem profitieren, wenn der Marktpreis geringer als x ist - er kauft nämlich dann einfach 1 Tonne zum Marktpreis ein und verkauft sie direkt an den Händler weiter. Er gewinnt dadurch sofort $K - m$ Euro.

Der Bauer kauft sich vom Händler also eine Art begrenzte Versicherung gegen zu niedrige Preise. Man kann es auch so sehen, dass Bauer und Händler eine „Wette“ eingehen: Der Bauer gewinnt, wenn $K - m - y > 0$ ist, andernfalls verliert er.

Daraus sieht man sofort, dass man keinesfalls mehr als K Euro für das Recht zahlen sollte, die Kartoffeln zum Preis K zu verkaufen, denn sonst macht man ein garantiertes Verlustgeschäft (und der Händler einen garantierten Gewinn).

Betrachte nun den Marktpreis m als Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(m)$; man könnte vermuten, dass dann faire Preis für die Option, 1 Tonne Kartoffeln zum Preis von K Euro zu verkaufen, durch

$$y_1 = \max\{K - \mathbb{E}(m), 0\}$$

gegeben ist, mit dem Argument, dass man ja keinesfalls weniger als 0 Euro zahlen sollte (sonst lässt man die Option einfach immer verfallen), dass andererseits aber $K - \mathbb{E}(m)$ der mittlere Ausfall an Einnahmen durch zu niedrige Preise ist. Das ist aber **falsch**! Was einen misstrauisch stimmen sollte, ist allein schon der Fall, wo $K < \mathbb{E}(m)$ ist - dann kostet es den Bauern gar nichts, sich gegen zu niedrige Preise zu versichern, und in den Jahren, wo sie durch Zufall

[1] Basierend auf Vorlesungsfolien von Frank Aurzada

dennoch eintreten, hat er gegenüber dem Händler Anspruch auf Auszahlung - er macht also einen „risikolosen Gewinn“ (sogenannte Arbitrage) gegenüber der Situation, wo der Händler nicht auf dem Markt wäre.

Um den wahren fairen Preis y_{fair} zu ermitteln, müssen wir im Moment eine stark vereinfachte konkrete Situation ansehen. Wir nehmen an, dass es nur zwei mögliche Kartoffelpreise gibt, die jeweils mit W'keit 1/2 eintreten, und zwar

$$\mathbb{P}(m = 10) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(m = 1/10) = 1/2.$$

Wir wählen außerdem $K = 2$. Nach unserer (falschen) Argumentation oben wäre der Preis einer Option mit dem Recht zum Verkauf zum Preis von $K = 2$ Euro dann tatsächlich mit $r = 0$ Euro anzusetzen, weil ja $\mathbb{E}(m) = 5.05 > 2$ ist. Wie hoch der Preis von r aber tatsächlich sein sollte, sieht man, wenn man den erwarteten Gewinn des Bauern aus einem Geschäft beim Preis r ausrechnet:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\text{Gewinn Bauer}) &= \mathbb{P}(m = 10) \cdot \text{„Gewinn bei } m = 10\text{“} + \mathbb{P}(m = 1/10) \cdot \text{„Gewinn bei } m = 1/10\text{“} \\ &= 0.5 \cdot (0 - r) + 0.5 \cdot (2 - \tfrac{1}{10} - r) = 0.5(\tfrac{19}{10} - 2r).\end{aligned}$$

Damit der Handel fair ist, sollte weder der Händler noch der Bauer im Mittel einen Gewinn erzielen, das bedeutet $r = 19/20$.

Eng verwandt ist auch folgendes Geschäft: der Händler zahlt dem Bauern schon im April eine Summe von r' Euro und erwirbt dafür das Recht (aber nicht die Pflicht), im November für den festen Preis von K' Euro eine Tonne Kartoffeln von ihm zu kaufen. Er sichert sich also gegen die Möglichkeit ab, dass der Marktpreis zu hoch wird. So ein Geschäft wird „Call-Option“ genannt - der Händler erwirbt das Recht, ein Basisgut zu einem vorher festgelegten Preis vom Vertragspartner „abzurufen“. Das zu Beginn besprochene Geschäft ist dagegen eine „Put-Option“, hier erwirbt der Käufer der Option das Recht, beim Vertragspartner ein Basisgut zum vorher festgelegten Preis „abzulegen“. Ein wichtiger Unterschied zwischen den beiden Optionen ist, dass bei einer Put-Option der mögliche Verlust für den Verkäufer der Option begrenzt ist, während er bei einer Call-Option im Prinzip unendlich groß werden kann. Denken Sie dazu an den Fall, wo der Bauer gar keine Kartoffeln erntet, der Marktpreis aber bei 10.000 Euro liegt - der Bauer muss dann am Markt für 10.000 Euro Kartoffeln einkaufen und sie an den Händler für beispielsweise $K = 2$ Euro weiterverkaufen, um seinen Vertrag zu erfüllen. Dies gilt natürlich nur, wenn der Preis wirklich nach oben unbeschränkt ist, in unserem oben angegebenen konkreten Beispiel ist er das nicht. Sie sollten zur Übung in diesem Beispiel ausrechnen, wie viel so eine Call-Option wert ist.

Der Inhalt der Vorlesung wird sein, eine Theorie zu entwickeln, die dieses einfache Beispiel auf kompliziertere Situationen ausdehnt, etwa mit mehreren verschiedenen Basisgütern, mit mehr als einem Handelszeitpunkt, und mit mehr als zwei möglichen Preisen.

(1.2) Das Finanzmarktmodell

a) Grundlegende Objekte In der gesamten Vorlesung ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $T \in \mathbb{N}$ und $t \in \{0, \ldots, T\}$. $(\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}$ ist eine **Filtration** von $\mathcal{F}$, d.h. jedes $\mathcal{F}_t$ ist eine σ-Algebra, und

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \qquad \text{für } s \leqslant t \leqslant T.$$

Wir nehmen speziell immer an, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ ist.

b) Finanzmarktmodell: Sei $d \in \mathbb{N}$. Ein **Finanzmarkt** mit $d+1$ Anlagegütern ist eine Familie $(S_t^0, \dots, S_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Eigenschaft dass

(i): S_t^i ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $0 \leqslant i \leqslant d$.

(ii): $S_t^i(\omega) \geqslant 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Wir schreiben oft

$$S^0 := (S_t^0)_{0 \leqslant t \leqslant T} \quad , \quad S := (S_t^1, \dots, S_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}, \quad \text{und} \quad \bar{S} = (S_t^0, \dots, S_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T} = (S^0, S).$$

c) Interpretation:

- Die Zeitpunkte $t \leqslant T$ bezeichnen die (endlich vielen) Gelegenheiten, Güter (meist: Aktien) zu kaufen oder zu verkaufen.
- Es befinden sich $d+1$ Güter am Markt. Der Wert S_t^i ist der (durch den Zufall bestimmte) Marktpreis des i-ten Gutes zum Zeitpunkt t.
- Das Gut mit der Nummer 0 hat eigentlich immer eine Sonderrolle (daher auch die besondere Notation): es repräsentiert das „Geld“ und ist normalerweise keinen zufälligen Schwankungen unterworfen. Im allgemeinen Finanzmarktmodell ist dies jedoch nicht gefordert.
- Die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von S_t^i bedeutet, dass $\mathbb{E}(S_t^i \,|\, \mathcal{F}_t)(\omega) = S_t^i(\omega)$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$. Man kann also aufgrund der Information, die in der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ steckt, den Preis aller Güter zum Handelszeitpunkt t herausfinden. Da $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für $s \leqslant t$ ist, bedeutet das auch, dass man zum Zeitpunkt t (also mit der durch $\mathcal{F}_t$ gegebenen Information) auch die Preise S_s^j, $s \leqslant t$ aus der Vergangenheit kennt.
- Die Bedingung $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ bedeutet, dass wegen der $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit von S_0^i der Preis zu Beginn der Handelsperiode keinem Zufall unterworfen ist: $\omega \mapsto S_i^0(\omega)$ ist $\mathbb{P}-$fast sicher konstant.
- Die Bedingung $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ dient nur der Bequemlichkeit - wäre $\mathcal{F}_T \neq \mathcal{F}$, dann könnte man von vorneherein die globale σ-Algebra $\mathcal{F}$ verkleinern (nämlich zu $\mathcal{F}_T$) und hätte nichts verloren, da unser Modell keine Zufallsvariablen enthält, die nicht $\mathcal{F}_T$-messbar sind.

d) Bemerkungen:

- Ein Objekt $\bar{S} = (S_t^0, \dots S_T^d)$ wie oben definiert heißt **stochastischer Prozess** mit Indexmenge $\{0, \dots, T\}$ und $d+1$ reellen Komponenten. Die einzelnen Prozesse $(S_t^i)_{t \leqslant T}$ (mit je einer reellen Komponente) heißen auch **Preisprozesse**.
- Im Finanzmarktmodell stecken zwei (unrealistische) implizite Annahmen: erstens, dass Kaufs- und Verkaufspreis der Güter für mich als Marktteilnehmer gleich hoch sind (es gibt also keinen sogenannten „spread“), und zweitens, dass der Rest des Marktes völlig unabhängig von meiner eigenen Kaufaktivität funktioniert. Letztere Annahme wird besonders dann falsch, wenn meine Kaufaktivität sehr hoch ist; die Vernachlässigung dieser einfachen Tatsache trug nicht unwesentlich zur Entstehung der Finanzkrise 2009 am amerikanischen Immobilienmarkt bei.

(1.3) Beispiel: Binomialmodell

Das Binomialmodell (oder Cox-Ross-Rubinstein (CRR)-Modell) macht für jede der $d+1$ Zufallsvariablen im Finanzmarktmodell die gleiche Vereinfachung, die wir schon im Beispiel (1.1) gemacht hatten: es gibt nur zwei Basisgüter (eines davon ist nicht zufällig) und nur zwei mögliche Preisänderungen in jedem Handelsschritt. Tatsächlich geht die Spezialisierung noch etwas weiter, denn man verlangt sogar, dass sich in jedem Schritt der Preis entweder um den Faktor u ändert (man denkt an $u > 1$ und daher an eine Erhöhung des Preises, daher u wie „up“), oder um den Faktor d ändert (man denkt an $d < 1$ und daher an eine Reduzierung des Preises, d wie „down“). Achtung: dieses d ist nicht das gleiche wie dasjenige, das die Basisgüter zählt.

Formale Definition: Das Binomialmodell ist ein Finanzmarktmodell mit zwei Basisgütern $(S_t^0)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ und $(S_t^1)_{0 \leqslant t \leqslant T}$. Hierbei ist

$$S_t^0 = (1+r)^t \qquad \text{mit } r > -1,$$

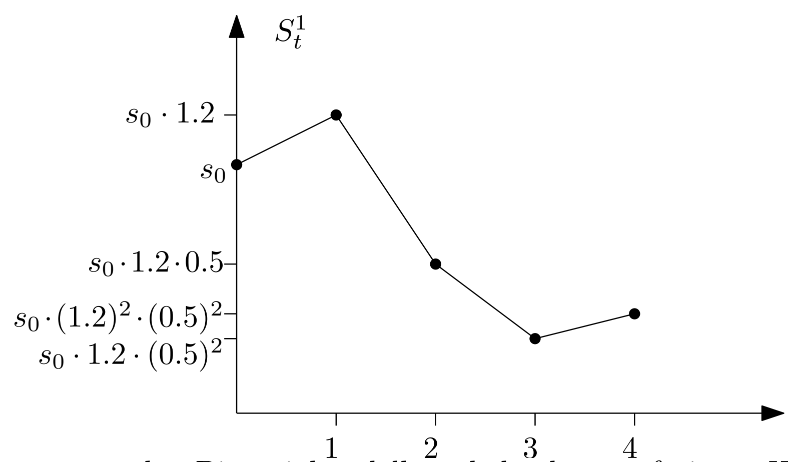
S_t^0 modelliert ein auf einem Konto angelegtes Geld, das $r * 100$ Prozent Zins pro Handelsperiode bringt. Negative Zinsen sind möglich!

Für die Modellierung von $(S_t^1)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ seien $s_0 > 0$, $u, d \in \mathbb{R}$ mit $0 < d < u$, und $p \in (0,1)$. Wir betrachten T unabhängige Zufallsvariable $X_1, \dots, X_T$ mit $\mathbb{P}(X_i = u) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = d)$ für alle i, und setzen

$$S_t^1 = s_0 \prod_{i=1}^{t} X_i.$$

Die Filtration ist durch $(\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t) \overset{!}{=} \sigma(S_1, \dots, S_t)$ gegeben - als Übung sollten sie sich überzeugen, dass die Gleichheit $\overset{!}{=}$ tatsächlich gilt.

Als Beispiel sei $u = 1.2$, $d = 0.5$; angenommen, man hat $X_1 = u$, $X_2 = d$, $X_3 = d$, $X_4 = u$ „gewürfelt“. Die nebenstehende Abbildung zeigt dann die Werte von S_t^1 für $t = 1, \dots, 4$.



Anstatt mit Zufallsvariablen kann man das Binomialmodell auch konkret auf einem W-Raum definieren: man setzt

$$\Omega = \{u, d\}^T = \{(\omega_1, \dots, \omega_T) : \omega_i \in \{u, d\} \ \forall 1 \leqslant i \leqslant T\},$$

und auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ das W-Maß

$$\mathbb{P}\big(\{(\omega_1,\dots,\omega_T)\}\big) = \prod_{t=1}^{T}\Big(p\mathbb{1}_{\{\omega_t=u\}} + (1-p)\mathbb{1}_{\{\omega_t=d\}}\Big) = p^{\sum_{i=1}^{t}\mathbb{1}_{\{\omega_t=u\}}}(1-p)^{\sum_{i=1}^{t}\mathbb{1}_{\{\omega_t=d\}}}.$$

Nun setzt man $X_i(\omega) = \omega_i$ und definiert S_t^1 wie oben, oder man setzt konkret

$$S_t^1(\omega_1,\dots,\omega_T) = s_0\prod_{i=1}^{t}\omega_i.$$

Da S_t^1 nur von $\omega_1,\dots,\omega_t$ abhängt, besteht die σ-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1,\dots,S_t)$ nur aus Mengen $A \subset \Omega$, bei denen es nicht von $\omega_{t+1},\dots,\omega_T$ abhängt, ob $\omega \in A$ ist. Tatsächlich besteht sie sogar genau aus allen solchen Mengen (warum?).

(1.4) Portfolios und Handel

Sei $\bar{S} = (S_t^0,\dots,S_t^d)$ ein Finanzmarktmodell. S_t^i ist der Preis (pro Stück) eines einzelnen Handelsgutes zur Zeit t. Ein Investor, der jeweils H^i Stück des i-ten Handelsgutes besitzt, hat daher ein Gesamtvermögen von $\sum_{i=0}^{d} H^i S_t^i$ zum Zeitpunkt i. Fasst man $S_t = (S_t^i)_{i=0,\dots,d}$ und $\bar{H} = (H^i)_{i=0,\dots,d}$ als $d+1$-dimensionale Vektoren auf, dann kann man das auch mittels des Skalarproduktes kürzer als $\bar{H}\cdot\bar{S}_t$ schreiben. Den Vektor $\bar{H}$ nennt man auch das „Portfolio" des Investors.

Betrachten wir nun einen Investor, der vor der ersten Handelsperiode jeweils H_1^i Stück vom i-ten Handelsgut besitzt. Er startet also mit einem Vermögen von $\bar{H}_1 \cdot S_0$. Nach der ersten Handelsperiode haben sich die Preise geändert, und das Vermögen des Investors ist nun $\bar{H}_1\cdot\bar{S}_1$. Er erhält nun die Gelegenheit, sein Portfolio umzuschichten, also Gewisse Handelsgüter zum aktuellen Marktpreis zu verkaufen und andere zu kaufen. Nach dem Umschichten, aber vor der zweiten Handelsperiode, hat der Investor daher nun H_2^i Stück vom i-ten Handelsgut, und sei Portfolio hat den Wert $\bar{H}_2\cdot\bar{S}_1$. Nun folgt die zweite Handelsperiode, nach der der Investor ein Vermögen von $\bar{H}_2\cdot\bar{S}_2$ besitzt, und so weiter.

Hierbei machen wir zwei wichtige Annahmen: erstens wir gehen davon aus, dass H_i^0 das „Geld" des Investors darstellt, und zwar alles Geld, das er hat. Es ist ihm also nicht möglich, „von außen" Geld in sein Portfolio zuzuschießen, ebenso zieht er nie Geld ab, sondern eventuelle Gewinne, die er nicht re-investieren will, parkt er in H_i^0. Dies bedeutet insbesondere, dass $\bar{H}_1\cdot\bar{S}_1 = \bar{H}_2\cdot\bar{S}_1$ sein muss (oder allgemeiner $\bar{H}_t\cdot\bar{S}_t = \bar{H}_{t+1}\cdot\bar{S}_t$), da ja beim Umschichten der Portfolios das Gesamtvermögen gleich bleiben muss. Zweitens darf der Investor bei der Umschichtung seines Portfolios alle Information nutzen, die er bis zu diesem Zeitpunkt hat - er darf also für die Wahl von $\bar{H}_2$ die Marktpreise der Güter bis zum Zeitpunkt $t=1$, und allgemeiner für die Wahl von $\bar{H}_t$ die Werte von $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \dots \bar{S}_{t-1}$ als Entscheidungskriterium benutzen. Er könnte etwa entscheiden, das dritte Handelsgut völlig zu verkaufen, wenn dessen Preis S_t^3 zum Zeitpunkt t höher ist als jemals zuvor. Was er aber nicht tun darf, ist Information über den Wert von $\bar{S}_t$ in seine Wahl von $\bar{H}_t$ einfließen zu lassen - denn die t-te Handelsperiode findet ja erst nach der t-ten Portfoliobildung statt [1)], und der Investor kann nicht wissen, wie hoch der

[1)] hierbei ist das anfängliche Portfolio H_1 als erste Umschichtung gewertet, wenn man will kann man H_0 so wählen, dass alles Vermögen im 0-ten Handelsgut (Geld) steckt

Preis nach dieser Handelsperiode sein wird.

Im Folgenden wird dies alles mit Hilfe von Definitionen formalisiert.

(1.5) Definitionen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (S_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit $d+1$ Handelsgütern.

a) Eine **Handelsstrategie** ist ein stochastischer Prozess $(H_1, \ldots, H_T)$ mit $H_t := (H_t^1, \ldots, H_t^d) \in \mathbb{R}^d$ und $\bar{H}_t := (H_t^0, \ldots, H_t^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ für alle t, und mit der Eigenschaft, dass jedes H_t eine $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Zufallsvariable ist. Ein stochastischer Prozess mit dieser Messbarkeitseigenschaft heißt auch (bezüglich $(\mathcal{F}_t)$) **vorhersagbarer** Prozess.

b) Der **Wert** des zur Handelsstrategie $\bar{H}$ gehörigen Portfolios **am Ende der t-ten Handelsperiode** ist durch $\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t$ gegeben.

Der **Wert am Anfang der $t+1$-ten Handelsperiode** ist durch $\bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t$ gegeben.

c) Eine Handelsstrategie heißt **selbstfinanzierend**, wenn $\bar{H}_t \cdot \bar{S}_t = \bar{H}_{t+1} \cdot \bar{S}_t$ für alle t.

d) Der (nicht zufällige!) Wert $\bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0$ wird als **Anfangskapital** bezeichnet. e) Der reellwertige stochastische Prozess $(\mathcal{V}_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ mit $\mathcal{V}_0 = \bar{H}_1 \cdot \bar{S}_0$ und $\mathcal{V}_t = \bar{H}_t \cdot \bar{S}_t$ heißt **Vermögensprozess** zur Handelsstrategie $\bar{H}$.

(1.6) Bemerkungen und Beispiele

a) Die Vorhersagbarkeit erzwingt, dass $\bar{H}_t$ nur von den Preisen $S_0, \ldots, S_{t-1}$ abhängt, wir also nicht in die Zukunft sehen können.

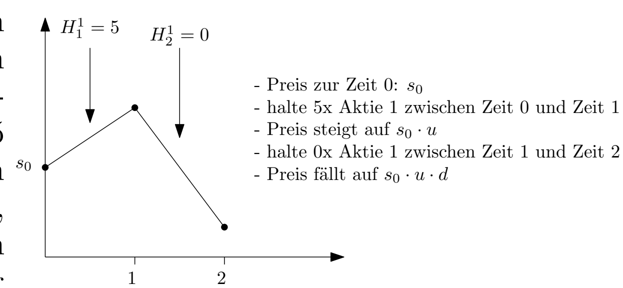
b) Selbstfinanzierend bedeutet wie oben besprochen, dass nach dem Beginn der ersten Handelsperiode kein Geld mehr von außen in das Portfolio einfließen darf, und auch keines abgezogen werden darf.

c) Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie könnte man auch $\mathcal{V}_t = \bar{H}_t \cdot \bar{S}_{t-1}$ für alle $0 \leqslant t \leqslant T-1$ definieren.

d) Das Anfangskapital ist unwichtig - da H_t^0 auch negative Werte annehmen kann, darf man sich auch Geld leihen. Man kann also (wenn man will) immer mit $\bar{H}_1 \cdot S_0 = 0$ starten.

e) Auch die H_t^i mit $i > 0$ können negative Werte annehmen. Dies repräsentiert sogenannte „Leerverkäufe“ von Basisgütern.

f) **Beispiel:** Das Bild rechts stellt den Verlauf einer Aktie dar, die mit dem Wert s_0 startet, in der ersten Handelsperiode steigt, und dann in der zweiten stark fällt. Eine vorteilhafte Handelsstrategie wäre es, zunächst beispielsweise 5 Stück der Aktie zu kaufen, dann nach der ersten Handelsperiode alle zu verkaufen. Also: $H_1^1 = 5$, $H_1^2 = 0$. Der Vermögensprozess würde dann (anders als der Preisprozess der Aktie) in der zweiten Handelsperiode nicht fallen.



Allerdings ist eine Strategie der Form „ich verkaufe eine Aktie in der Handelsperiode, bevor sie fällt“ keine gültige Handelsstrategie im Sinne unserer Definition (warum?). Trotzdem kann man für ein konkretes ω (für einen konkreten Verlauf des Marktes) durchaus das Glück haben, dass es so kommt!

Nehmen wir an, dass $S_0^0 = S_1^0 = S_2^0 = 1$ ist. Eine mögliche Handelsstrategie zum obigen Bild ist

$$H_1^0 = 0, H_1^1 = 5, \quad H_2^1 = 0, H_2^0 = ?,$$

und damit diese Strategie selbstfinanzierend ist, muss man $H_2^0 = 5s_0u$ wählen, falls die Aktie im ersten Schritt steigt; wenn sie aber nicht steigt sondern fällt, dann wäre die Strategie nur mit $H_2^0 = 5s_0d$ selbstfinanzierend. In der Notation aus Beispiel (1.3) muss man also die Handelsstrategie

$$H_1^0 = 0, H_1^1 = 5, \quad H_2^1 = 0, H_2^0 = 5s_0X_1,$$

wählen, wenn man in jedem Fall nach der ersten Handelsperiode verkaufen will. Daran sieht man schon, dass eine selbstfinanzierende Handesstrategie selbst dann meist vom Zufall abhängt, wenn wir uns zum Zeitpunkt 0 schon festlegen, was wir in jedem Schritt tun werden!

Falls nun tatsächlich $X_1 = u$ gilt, dann ist der zugehörige Vermögensprozess durch

$$\mathcal{V}_0 = 5s_0, \mathcal{V}_1 = 5s_0u, \mathcal{V}_2 = 5s_0u$$

gegeben, denn in der letzten Handelsperiode sind wir von dem Wertverlust von S^1 nicht mehr betroffen. In diesem Fall hatten wir ein Anfangskapital von $5s_0$. Mit Anfangskapital 0 wäre die gleiche Handelsstrategie durch

$$H_1^0 = -5s_0, H_1^1 = 5, \quad H_2^0 = -5s_0 + 5s_0X_1, H_2^1 = 0$$

gegeben, wir leihen uns also zunächst $5s_0$ Euro von der Bank, und zahlen nach der ersten Handelsperiode die Summe von $5s_0u$ Euro auf das Konto ein. Der Vermögensprozess ist (im Falle von $X_1 = u$) gegeben durch

$$\mathcal{V}_0 = 0, \mathcal{V}_1 = 5s_0(u-1), \mathcal{V}_2 = 5s_0(u-1),$$

er unterscheidet sich also von dem obigen nur um den konstanten Betrag $5s_0$, das Anfangskapital im ersten Fall. Überlegen Sie sich, dass dies auch in komplizierteren Fällen immer so sein muss.

g) Es gilt: jede $\mathbb{P}$-fast sicher konstante Handelsstrategie (also $H_t^i(\omega) = H_s^i(\omega)$ für $\mathbb{P}$-fast alle ω, alle $i \leqslant d$ und alle $s, t \leqslant T$ ist selbstfinanzierend.

h) Die Menge aller Handelsstrategien bildet einen Vektorraum, einen Teilraum einer des Vektorraums aller stochastischen Prozesse mit Indexmenge $\{0, \dots, T\}$ und Werten in $\mathbb{R}^{d+1}$. Die Menge aller selbstfinanzierenden Handelsstrategien bildet einen linearen Teilraum dieses Vektorraums, ist also selbst ein Vektorraum (Beweis: Übung).

(1.7) Numéraire und Diskontierung

a) Definition: In einem Finanzmarktmodell habe $(S_t^0)_{t \leqslant T}$ die Form

$$S_t^0 = (1+r)^t \qquad \text{mit } r > -1.$$

Dann heißt $(S_t^0)_{t \leqslant T}$ **Numéraire** für dieses Finanzmarktmodell.

b) Bemerkungen: Wir werden im folgenden immer annehmen, dass S_t^0 ein Numéraire ist - dies haben wir auch schon in Beipsiel (1.3) so gemacht. $r > -1$ ist die Zinsrate; mit ihr kann man sowohl Inflation als auch Anlagezinsen bei risikolosen Anlagen modellieren - risikolos deshalb, weil ja S_t^0 nicht vom Zufall abhängt.

c) Definition: Sei $\bar{S} = (S^0, \dots, S^d)$ ein Marktmodell mit Numéraire (S^0). Dann heißt der stochastische Prozess

$$\bar{X} = (X^0, \dots, X^d) = (X_t^0, \dots, X_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T} \quad \text{mit} \quad X_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0} \text{ für alle } t \leqslant T, i \leqslant d$$

das **diskontierte Marktmodell** zu $\bar{S}$.

d) Bemerkungen: Im diskontierten Marktmodell ist immer $X_t^0 = 1$, die Zinsrate / Inflation ist also „herausgerechnet“. Es handelt sich hierbei um eine klassische Reskalierung auf einheitenlose Größen: währen etwa S_t^i den Wert des i-ten Handelsgutes in einer Währung angibt (zum Beispiel im Euro im Jahr 2020), ist X_t^i so etwas wie die Kaufkraft, die in einer Einheit des Handelsgutes steckt. X_t^i ist einheitenfrei, es sagt lediglich, wie viele Einheiten des aktuellen Zahlungsmittels (Geld) man bekommen würde, wenn man eine Einheit von X_t^i verkauft. Insbesondere ist X_t^i unabhängig davon, in welcher Währung der Numéraire angegeben wurde.

(1.8) Lemma

Sei $\bar{S}$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire, $\bar{X}$ das zugehörige diskontierte Modell. Eine Handelsstrategie $\bar{H}$ ist genau dann selbstfinanzierend bezüglich $\bar{S}$, wenn sie selbstfinanzierend bezüglich $\bar{X}$ ist.

Beweis: Übung. $\square$

(1.9) Definition

Sei $\bar{S}$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire, $\bar{X}$ das zugehörige diskontierte Modell, und $\bar{H}$ eine Handelsstrategie.

a) Der stochastische Prozess $(V_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ mit

$$V_0 = \bar{H}_1 \cdot \bar{X}_0, \qquad V_t = \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t \text{ für } t \geqslant 1,$$

heißt **diskontierter Vermögensprozess** zu $\bar{X}$ und $\bar{H}$.

b) Der stochastische Prozess $(G_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ mit $G_0 = 0$ und

$$G_t := (\bar{H} \bullet \Delta\bar{X})_t := \sum_{s=1}^{t} \bar{H}_s \cdot (\bar{X}_s - \bar{X}_{s-1}) = \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} H_s^i (X_s^i - X_{s-1}^i)$$

heißt **diskontierter Gewinnprozess** zu $\bar{X}$ und $\bar{H}$.

(1.10) Bemerkungen

a) Die Notation $(H \bullet \Delta X)_t = \sum_{s=1}^t \bar{H}_s \cdot (\bar{X}_s - \bar{X}_{s-1})$ ist in der stochastischen Analysis üblich und bezeichnet das (hier diskrete) stochastische Integral. Die Analogie zum Integral ergibt sich aus der Formel

$$\int_0^t f(s)g'(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{nt} f\left(\tfrac{s}{n}\right)\Big(g\left(\tfrac{s}{n}\right) - g\left(\tfrac{s-1}{n}\right)\Big),$$

die (under anderem) für beschränkte f, g und stetig differenzierbares g gilt. Formeln dieser Art werden später in der stochastischen Analysis sehr wichtig, im Moment führen wir aber den Grenzwert nicht durch und ersetzen nur f durch $\bar{H}$ und g durch $\bar{X}$.

b) Im Zusammenhang mit Martingalen haben wir in der Vorlesung „Probability Theory“ eine ähnliche Formel kennengelernt. Hier war $\bar{H}$ eine „gambling strategy“, und G die Martingaltransformation von S (falls S ein Martingal ist). H musste ebenfalls vorhersagbar sein. Wir werden noch sehen, das der Zusammenhang zu dieser Theorie weit über diese Beobachtung hinausgeht.

c) Man kann für den diskontierten Gewinnprozess auch den Numéraire weglassen: es gilt

$$G_t = \sum_{s=1}^t \bar{H}_s \cdot (\bar{X}_s - \bar{X}_{s-1}) = \sum_{s=1}^t H_s \cdot (X_s - X_{s-1})$$

(warum?).

(1.11) Lemma

Sei $\bar{X}$ ein diskontiertes Marktmodell und $\bar{H}$ eine Handelsstrategie. $\bar{H}$ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $V_t = V_0 + G_t$ für alle $t \geqslant 0$ gilt.

Beweis: Übung - intuitiv ist das aber klar, denn das Vermögen im Portfolio ist dann genau das Startvermögen plus der Gewinn. □

(1.12) Satz

Sei $\bar{X}$ ein diskontiertes Marktmodell, $H = (H_t^1, \ldots, H_t^d)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-vorhersagbarer Prozess, und $v_0 \in \mathbb{R}$. Sei $G_t := \sum_{s=1}^t H_s(X_s - X_{s-1})$, und für $t \geqslant 1$ setze

$$H_t^0 := v_0 + G_{t-1} - H_t \cdot X_{t-1}.$$

Dann ist $\bar{H} = (H_t^0, \ldots, H_t^d)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ eine selbsfinanzierende Handelsstrategie zu $\bar{X}$ mit Anfangskapital v_0. Zu gegebenem H ist dies die einzige selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Anfangskapital v_0.

Beweis: Zunächst sollten wir wieder intuitiv verstehen, warum H_t^0 so definiert sein muss, wie wir es gemacht haben. Zum Zeitpunkt t haben wir nämlich außer dem Anfangskapital v_0 auch den bisher erzielten Gewinn (oder Verlust) G_{t-1} zur Verfügung. Davon investieren wir $H_t \cdot X_{t-1}$ in die verschiedenen Basisgüter Nummer 1 bis d, der Rest, also $v_0 + G_{t-1} - H_t \cdot X_{t-1}$, muss folglich auf unser „Bargeldkonto“ (Basisgut Nummer 0) gelegt werden. Dies ist dann gerader H_t^0.

Formal geht der Beweis so: $\bar{H}_t$ ist vorhersagbar, denn G_t ist adaptiert, daher ist $G_{t-1} \in m\mathcal{F}_{t-1}$ (das heißt: $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar) für alle t. Ebenso ist $H_t \in m\mathcal{F}_{t-1}$ (da H vorhersagbar) und $X_{t-1} \in m\mathcal{F}_{t-1}$, da X adaptiert. Nach den Rechenregeln für Messbarkeit ist daher auch $\bar{H}_t \in m\mathcal{F}_{t-1}$ für alle t. Also ist $\bar{H}$ eine Handelsstrategie. Außerdem ist $\bar{H}$ selbstfinanzierend, denn wegen $X_t^0 = 1$ für alle t ist

$$\begin{aligned} V_t &= \bar{H}_t \cdot \bar{X}_t = H_t \cdot X_t + H_t^0 = H_t \cdot X_t + v_0 + G_{t-1} - H_t \cdot X_{t-1} \\ &= v_0 + G_{t-1} + H_t \cdot (X_t - X_{t-1}) = v_0 + G_t \qquad (ast) \end{aligned}$$

nun verwende Lemma (1.11).

Sei nun $\tilde{H} = (\tilde{H}^0, H^1, \dots, H^d)$ irgend eine Handelsstrategie, die mit $\bar{H}$ auf den Basisgütern 1 bis d übereinstimmt, und mit Anfangskapital $V_0 = v_0$. Wegen $X_t^0 = 1$ für alle t ist

$$\tilde{V}_t = \tilde{H}_t \cdot \bar{X}_t = \tilde{H}_t^0 + H_t \cdot X_t = \tilde{H}_t^0 + V_t - H_t^0 = V_t + (\tilde{H}_t^0 - H_t^0),$$

und

$$\tilde{G}_t = \sum_{s=1}^t \tilde{H}_s \cdot (\bar{X}_s - \bar{X}_{s-1}) = \sum_{s=1}^t H_s \cdot (X_s - X_{s-1}) = \sum_{s=1}^t \bar{H}_s \cdot (\bar{X}_s - \bar{X}_{s-1}) = G_t.$$

Nach Lemma (1.11) ist $\tilde{H}$ selbstfinanzierend genau dann, wenn für ihren Vermögensprozess $\tilde{V}$ und Gewinnprozess $\tilde{G}$ die Beziehung $\tilde{V}_t = v_0 + \tilde{G}_t$ gilt. Mit den obigen Gleichheiten ist also $\tilde{H}$ selbstfinanzierend genau dann, wenn

$$V_t + (\tilde{H}_t^0 - H_t^0) = v_0 + G_t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tilde{H}_t^0 - H_t^0 = v_0 + G_t - V_t \overset{(*)}{=} 0.$$

Mit anderen Worten: $\tilde{H}$ ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $\tilde{H}_t^0 = H_t^0$ für alle t gilt, also wenn $\tilde{H} = \bar{H}$ ist. □

(1.13) Definition

Sei $\bar{(}S_t)_{t \leqslant T}$ ein Finanzmarktmodell mit d Basisgütern, $K > 0$, $i \leqslant d$

a) Die Zufallsvariable $\mathcal{C}^{\text{put}}$ mit

$$\mathcal{C}^{\text{put}}(\omega) = \mathbb{1}_{\{S_T^i(\omega) < K\}}(K - S_T^i(\omega))$$

heißt **(europäische) Put-Option** (oder europäischer Put) auf das i-te Basisgut mit Fälligkeitsdatum T und Strike-Preis K. Der eigentlich richtige Name wäre „Wert einer europäischen Put-Option am Fälligkeitsdatum“.

b) Die Zufallsvariable $\mathcal{C}^{\text{call}}$ mit

$$\mathcal{C}^{\text{call}}(\omega) = \mathbb{1}_{\{S_T^i(\omega) \geqslant K\}}(S_T^i(\omega) - K)$$

heißt **(europäische) Call-Option** (oder europäischer Call) auf das i-te Basisgut mit Fälligkeitsdatum T und Strike-Preis K. Der eigentlich richtige Name wäre „Wert einer europäischen Call-Option am Fälligkeitsdatum“.

Bemerkungen: $\mathcal{C}^{\text{put}}$ modelliert das Recht, zum Zeitpunkt T eine Einheit des Basisgutes Nummer i zum Preis von K zu verkaufen. Da es nicht sinnvoll ist, dieses Recht auszuüben, wenn man am freien Markt einen höheren Preis als K für das Basisgut bekommt, ist $\mathcal{C}^{\text{put}} = 0$ falls $S_T^i(\omega) \geqslant K$. Im anderen Fall ist dieses Recht genau so viel wert wie die Differenz aus K und dem Preis, den man ohne es erzielen könnte, also $K - S_T^i(\omega)$. Analog gilt das für $\mathcal{C}^{\text{call}}$: man erwirbt das Recht, zum Zeitpuntk T eine Einheit des Basisgutes Nummer i zum Preis von K zu kaufen, und übt es nur aus, falls der Marktpreis höher als (oder gleich hoch wie) K ist.

(1.14) Put-Call-Parität

Eine wesentliche Frage der Vorlesung wird sein, wie viel man bereit sein sollte, zum Zeitpunkt $t < T$ für eine Option mit Fälligkeitszeitpunkt T und Strike-Preis K zu bezahlen. Natürlich wird die Antwort auf diese Frage davon abhängen, wie der Preis S_t^i des relevanten Basisgutes im Moment ist, aber auch davon, was wir über die zukünftige Entwicklung von $(S_s^i)_{t \leqslant s \leqslant T}$ zu wissen glauben, also vom Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, das das Finanzmarktmodell bestimmt. Jetzt schon können wir eine einfach Beobachtung machen:

Sei $P(i,t,T,K)$ der Preis einer Put-Option und $C(i,t,T,K)$ der Preis eine Call-Option zum Zeitpunkt t, jeweils auf das i-te Basisgut, mit Strike-Preis K und Fälligkeit T. Wir nehmen an, dass $S_t^0 = 1$ für alle t, also keine Änderung des Geldwertes. Nehmen wir an, $H_s^i = 1$ für alle $t \leqslant s \leqslant T$ und $H_s^j = 0$ für alle anderen $j \leqslant d$. Nun kaufen wir eine Put-Option auf das i-te Basisgut und *verkaufen* eine Call-Option auf dieses Basisgut. Wenn man die Optionen auch als Basisgüter modellieren will (z.B. die Put-Optionen als $d+1$-tes Basisgut und die Call-Optionen als $d+2$-tes), dann würde dies $H_s^{d+1} = 1$ und $H_s^{d+2} = -1$ bedeuten. Zum Zeitpunkt T gibt es dann zwei Möglichkeiten:

(1) $S_T^i < K$. Dann verkaufen wir unser Basisgut mit Hilfe der Put-Option für den Preis von K. Unser Vertragspartner wird auf die Ausführung der von uns gekauften Call-Option verzichten, da dies Ausführung ihm nur Verlust (und uns Gewinn) bringt. Unser Gesamtportfolio inklusive der Optionen ist also genau K Geldeinheiten wert.

(2) $S_T^i \geqslant K$. Der Käufer unserer Call-Option wird nun von uns ein Basisgut zum Preis von K kaufen wollen. Wir verkaufen ihm unser im Portfolio befindliches Basisgut zu diesem Preis. Unsere Put-Option lassen wir ungenutzt. Auch in diesem Fall haben wir daher genau K Geldeinheiten.

Aus dieser Überlegung können wir ableiten, dass zwingend die Gleichung

$$S_t^i + P(i,t,T,K) - C(i,t,T,K) = K$$

gelten muss - dies ist die sogenannte **Put-Call-Parität**. Warum muss sie gelten? Wäre etwa $S_t^i + P(i,t,T,K) - C(i,t,T,K) = K_0 < K$, dann würden wir uns zum Zeitpunkt T wie oben beschrieben mit einer Einheit des i-ten Basisgutes, einer Put-Option und einer negativen Call-Option zum Gesamtpreis von K_0 eindecken, und zum Zeitpunkt T ohne jedes Risiko K Geldeinheiten besitzen. Wir hätten also eine Möglichkeit gefunden, ohne Risiko mit unserem Investment die Zinsrate (die ja 0 ist) zu schlagen. Wir hätten also eine **Arbitrage-Möglichkeit** gefunden! Da wir sicher nicht die einzigen sein werden, denen das auffällt, wird bald niemand mehr bereit sein, die Optionen zu den bisherigen Preisen anzubieten, da unser sicherer Gewinn ja auf der anderen Seite einen sicheren Verlust erzeugt. Die Preise werden sich also so anpassen, dass dieses Schlupfloch geschlossen wird.[2)]

Die obigen Überlegungen kann man auch in der Gleichung

$$S_T^i(\omega) + \mathcal{C}^{\text{put}}(\omega) - \mathcal{C}^{\text{call}}(\omega) = S_T^i(\omega) + \mathbb{1}_{\{S_T^i(\omega) < K\}}(K - S_T^i(\omega)) - \mathbb{1}_{\{S_T^i(\omega) \geqslant K\}}(S_T^i(\omega) - K) = K$$

ausgedrückt werden, die den Wert unseres Portfolios zum Zeitpunkt T beschreibt. Bilden wir nun die bedingte Erwartung bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ auf beiden Seiten der Gleichung, dann erhalten wir

$$\mathbb{E}(S_T^i \,|\, \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{put}}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{call}}|\mathcal{F}_t) = K.$$

Es ist nun vernünftig, $P(i,t,T,K) = \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{put}}|\mathcal{F}_t)$ und $C(i,t,T,K) = \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{call}}|\mathcal{F}_t)$ zu verlangen: denn die Interpretation von $\mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{put}}|\mathcal{F}_t)$ ist ja genau, dass dies die bestmögliche Vorhersage über den wahren Preis $\mathcal{C}^{\text{put}}$ eine Call-Option zum Zeitpunkt $t < T$ ist, die aufgrund der in $\mathcal{F}_t$ zur Verfügung gestellten Information möglich ist. Diese Größe (die ja eine Zufallsvariable ist und daher insbesondere von den beobachteten Werten von $S_s^i(\omega)$, $s \leqslant t$, abhängen darf) ist also der vernünftige Preis, den man zu zahlen bereit sein sollte, um eine Call-Option zu erwerben.

Wenn man also daher davon ausgeht, dass $P(i,t,T,K) = \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{put}}|\mathcal{F}_t)$ und $C(i,t,T,K) = \mathbb{E}(\mathcal{C}^{\text{call}}|\mathcal{F}_t)$ gilt, dann gilt die Put-Call-Parität genau dann, wenn

$$\mathbb{E}(S_T^i \,|\, \mathcal{F}_t) = S_t^i.$$

Mit anderen Worten: die Put-Call-Parität gilt genau dann, wenn $(S_t^i)_{t \leqslant T}$ ein Martingal ist! Diese Beobachtung ist die Grundlage für die Arbitrage-Theorie, die wir im nächsten Kapitel genauer behandeln werden.

Übungsaufgabe: Übertragen Sie alle obigen Überlegungen auf den Fall mit Diskontierung, also wo $S_t^0 = (1-r)^t$ mit $t \neq 0$ ist.

(1.15) Long- und Shortpositionen, unbegrenzte Verlustrisiken

a) Bei einer **Long-Position** auf Basisgut Nummer i kauft man $H_t^i > 0$ Stück davon ein, das kostet $H_t^i S_t^i$ Geldeinheiten. Nach der nächsten Handelsperiode hat das Paket aus Basisgütern, das man besitzt, den Wert $H_t^i S_{t+1}^i$, und wenn man es dann wieder verkauft, hat man (weil ja $S_{t+1}^i \geqslant 0$ sein muss) einen Gewinn/Verlust von

$$H_t^i (S_{t+1}^i - S_t^i) \geqslant \; - H_t^i S_t^i$$

erzielt. Im schlimmsten Fall verliert man also das gesamte eingesetzte Kapital.

b) Anders sieht es aus, wenn man eine **Short-Position** eingeht. Diese unterscheidet sich formal nur durch das Vorzeichen von der Long-Position, aber in der Praxis ist der Unterschied enorm. Man „bezahlt“ nämlich zunächst $-H_t^i S_t^i$ Geldeinheiten, also bekommt in Wirklichkeit $H_t^i S_t^i$ Geldeinheiten ausgezahlt. Dafür aber verpflichtet man sich, dem Vertragspartner zu jedem von ihm gewünschten Zeitpunkt $T > t$ eine Anzahl von H_t^i Aktien kostenfrei zu überlassen. Wenn

[2)] Zumindest in der ökonomischen Theorie ist das so - in der Wirklichkeit gibt es ganze Industrien, die (etwa mittels High-Freqency-Trading) gerade diesen Arbitrage-Möglichkeiten hinterherjagen. Entgegen der Beteuerungen der Nutznießer dieser Methoden haben solche Auswüchse keinen ökonomischen Nutzen, werden aber (aus naheliegenden Gründen) dank gezielter Lobbyarbeit nicht verboten oder erschwert.

man diese nicht hat, muss man sie sich eben am Markt besorgen, und zwar egal was sie kosten! Der Gewinn/Verlust aus diesem Geschäft ist nach einer Handelsperiode also

$$-H_t^i(S_{t+1}^i - S_t^i),$$

und da S_{t+1}^i nicht nach oben beschränkt ist, kann man hier beliebig viel Geld verlieren - so geschehen in jüngerer Vergangenheit mit Spekulanten auf Werte wie GameStop.

2. Arbitragetheorie

(2.1) Definition

Sei $\bar{S} = (S_t)_{t \leqslant T}$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ heißt **Arbitragemöglichkeit** (oder einfach Arbitrage) zu $\bar{S}$, wenn für ihren diskontierten Vermögensprozess V gilt:
(i): $V_0 \leqslant 0$,
(ii): $\mathbb{P}(V_T \geqslant 0) = 1$, und
(iii): $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$.
Ein Finanzmarkt $\bar{S}$ heißt **arbitragefrei**, wenn keine Arbitragemöglichkeit zu $\bar{S}$ existiert.

Man kann also bei einer Arbitrage mit Vermögen $V_0 \leqslant 0$ starten und hat am Ende mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn erzielt. Andererseits hat man wegen $\mathbb{P}(V_t \geqslant 0) = 1$ sicher (eigentlich: $\mathbb{P}$-fast sicher) nichts verloren. Nur die Forderungen (i) und (ii) kann man übrigens immer durch die leere Handelsstrategie $H_t \equiv 0$ erfüllen. Wenn man risikolos einen Gewinn von 1 erzielen kann, so kann man risikolos einen beliebig hohen Gewinn (mit der gleichen W'keit) erzielen, denn zu einer Arbitrage H ist immer αH für $\alpha > 0$ auch eine Arbitrage.

(2.2) Beispiel

Sei $T = 1, d = 1,\ S_0^0 = S_1^0 = 1,\ S_0^1 = 1$, und

$$\mathbb{P}(S_1^1 = 2) = p = 1 - \mathbb{P}(S_1 = 1).$$

Der Wert des Basisgutes erhöht sich also mit Wahrscheinlichkeit p um eine Einheit, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ bleibt er gleich - er kann aber nicht sinken, das ist das entscheidende. Die Anlagestrategie

$$H_1^0 = -1, H_1^1 = 1$$

führt zu dem Vermögensprozess

$$V_0 = 1 - 1 = 0, \qquad \mathbb{P}(V_1 = 0) = \mathbb{P}(S_1^1 = 1) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(V_1 = 1) = p,$$

somit ist diese Handelsstrategie eine Arbitrage, falls $p > 0$. Es sollte auch klar sein, warum: man kauft ein Gut, das sich mit positiver W'keit schneller als das Geld verteuert, aber sicher nicht langsamer. Das Gut war also zum Zeitpunkt 0 „zu billig“!

(2.3) Lemma

Sei $\bar{S}$ ein Finanzmarkt.

a) Eine Handelsstrategie H ist genau dann eine Arbitrage, wenn für den nicht diskontierten Vermögensprozess $\mathcal{V}$ gilt:

$$\mathcal{V}_0 \leqslant 0, \qquad \mathbb{P}(\mathcal{V}_T \geqslant 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(\mathcal{V}_T > 0) > 0.$$

b) In $\bar{S}$ existiert genau dann eine Arbitrage, wenn es $c \in \mathbb{R}$ und eine Handelsstrategie H gibt, so dass für den zugehörigen diskontierten Vermögensprozess V gilt:

$$V_0 \leqslant c, \qquad \mathbb{P}(V_T \geqslant c) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_T > c) > 0.$$

Beweis: Übung.

(2.4) Lemma

Sei $\bar{S} = (S_t^0, \dots, S_t^d)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ ein Finanzmarkt mit Numéraire. $\bar{S}$ ist arbitragefrei genau dann wenn für jeden vorhersagbaren Prozess $H = (H_t^1, \dots, H_t^d)_{1 \leqslant t \leqslant T}$ gilt: der diskontierte Gewinnprozess G zu H zu erfüllt die Implikation

$$(*) \qquad G_T \geqslant 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \qquad \Longrightarrow \qquad G_T = 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis: Sei zunächst H ein vorhersagbarer Prozess, für den die Implikation $(*)$ nicht gilt, wo also $G_T \geqslant 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, aber $\mathbb{P}(G_T > 0) > 0$. Nach Satz 1.12 kann H zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\bar{H}$ mit $\bar{H}_t^i = H_t^i$ für alle $t \leqslant T$ und $i \geqslant 1$, und mit Anfangskapital $v_0 = 0$, ergänzt werden. Wegen Lemma (1.11) gilt für den zugehörigen Vermögensprozess: $V_T = G_T$. Somit ist $\bar{H}$ eine Arbitrage. Somit ist $\bar{S}$ nicht arbitragefrei.

Nun gelte, dass $(*)$ für jeden vorhersagbaren Prozess wahr ist. Wegen $V_T = V_0 + G_T$ (und weil V_0 deterministisch ist), folgt somit aus $\mathbb{P}(V_T \geqslant V_0) = 1$, dass $\mathbb{P}(V_T > V_0) = 0$. Es gibt daher keine Handelsstrategie, die die Bedingung von Lemma (2.3 b) erfüllt, und daher auch keine Arbitrage. $\square$

Wir lernen jetzt eine hinreichende Bedingung dafür kennen, dass ein Finanzmarkt arbitragefrei ist. Hierzu erweitern wir zunächst den Begriff des Martingals (siehe Probability Theory, Kapitel 4) auf $\mathbb{R}^d$-wertige stochastische Prozesse.

(2.5) Definition

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Filtration von $\mathcal{F}$, und sei für jedes t die Abbildung $\omega \mapsto X_t(\omega) = (X_t^1(\omega), \dots, X_t^d(\omega))$ jeweils $\mathcal{F}_t$-messbar. Dann ist zu jedem W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter stochastischer Prozess gegeben. Man beachte, dass per Definition für ein anderes W-Maß $\mathbb{Q} \neq \mathbb{P}$ ein anderer stochastischer Prozess entsteht, obwohl die Abbildungen $\omega \mapsto X_t(\omega)$ die gleichen sind, denn die Verteilungen der X_t sind ja dann anders.

b) In der obigen Situation heißt ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ ein **Martingal** (genauer: ein $((\mathcal{F}_t),\mathbb{P})$-Martingal), wenn für alle $i \leqslant d$, $t \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{E}(|X_t^i|) < \infty$, und

$$(*) \qquad \mathbb{E}(X_{t+1}^i|\mathcal{F}_t) = X_t^i \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

c) Erweiterung der bedingten Erwartung und des Martingalbegriffes auf nichtnegative Zufallsvariable:
Man kann bedingte Erwartungen auch ohne Integrierbarkeit definieren: Eine zufallsvariable Y heißt bedingte Erwartung unter $\mathcal{F}_t$ zu einer Zufallsvariablen $X \geqslant 0$, falls Y $\mathcal{F}_t$-messbar ist und $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \mathcal{F}_t$ gilt - hierbei dürfen beide Seiten den Wert ∞ annehmen.
Ein stochastischer Prozess (X_t) mit $X_t^i \geqslant 0$ für alle i heißt auch dann Martingal, wenn $(*)$ bezüglich dieser Definition der bedingen Erwartung gilt.

Bemerkungen:

a) Die Existenz einer bedingten Erwartung gemäß c) zeigt man leicht mit der Existenz von integrierbaren bedingten Erwartungen: Man ersetzt X durch $X \wedge n := \min\{X, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann existert $Y_n := \mathbb{E}(X \wedge n|\mathcal{F}_t)$ für alle n. Lässt man nun $n \to \infty$ gehen, dann wächst (Y_n) monoton wegen der Monotonie der bedingten Erwartung, also existiert $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ fast sicher. Die Gültigkeit von $(*)$ für Y und X folgt nun aus dem Satz von der monotonen Konvergenz und der Gültigkeit von $(*)$ für jedes n. Natürlich gilt c) auch dann, wenn $(X_t) \geqslant -c$ für ein beliebiges $c < \infty$ ist.

b) Im Sinne der bekannten Definition eines Martingals muss bei einem d-dimensionalen Martingal also jede Komponente von (X_t) selbst ein Martingal sein. Schreibt man $\mathbb{E}(X_t) = (\mathbb{E}(X_t^1), \ldots, \mathbb{E}(X_t^d))$ für den Erwartungswert-Vektor einer $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariable, und ebenso für bedingte Erwartungen, dann kann man die Bedingung auch wieder als $\mathbb{E}(X_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t) = X_t$ schreiben, also genau so wie in einer Dimension.

Wir erinnern auch an ein anderes Resultat aus der Probability Theory, das wir ebenfalls für mehrere Dimensionen fomrulieren:

(2.6) Satz

Sei $(X_t)_{t\,\geqslant\,0}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiges $((\mathcal{F}_t),\mathbb{P})$ Martingal und (H_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-vorhersagbarer Prozess. Wir definieren das diskrete stochastische Integral wie gehabt durch

$$G_t(\omega) := (H \bullet \Delta X)_t := \sum_{s=1}^{t} H_t(\omega) \cdot (X_t(\omega) - X_{t-1}(\omega)).$$

Falls $\mathbb{E}(|G_t| < \infty)$ oder $\mathbb{P}(G_t \geqslant 0) = 1$ für alle t, dann ist auch (G_t) ein ($\mathbb{R}$-wertiges) Martingal.

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich wie derjenige in der Probability Theory und verbleibt zur Übung. Ebenfalls als Übung verbleibt der Beweis des folgenden Lemmas:

(2.7) Lemma

Sei $(X_t)_{t\,\geqslant\,0}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter Prozess auf $(\Omega,\mathcal{F})$, $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\Omega,\mathcal{F})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i): (X_t) ist ein $((\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$-Martingal.

(ii): $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ für alle t, und für jeden beschränkten, $(\mathcal{F}_t)$-vorhersehbaren stochastischen Prozess H_t ist $(H \bullet \Delta X)_t$ ein $((\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$-Martingal.

Die hinreichende Bedingung für die Arbitragefreiheit ist nun folgende:

(2.8) Proposition

Sei $\bar{S}$ ein Finanzmarkt mit Numéraire. Falls der diskoniterte Preisprozess $\bar{X}_t$ ein Martingal ist, dann ist $\bar{S}$ arbitragefrei.

Beweis: Sei H eine beliebige selbstfinanzierende Handlesstrategie, so dass für den diskoniterten Gewinnprozess G gilt: $G_T \geqslant 0$ fast sicher. Zu zeigen ist dann, dass $G_T = 0$ fast sicher gilt.

Dazu zeigen wir zunächst, dass $(G_t)_{t \leqslant T}$ ein Martingal ist. Zuächst existiert wegen $G_T \geqslant 0$ die bedingte Erwartung, für den Beweis der Martingalgleichung (und der Existenz der bedingten Erwartung von G_t für $t < T$) müssen wir uns aber ein wenig mehr anstrengen als sonst, weil wir die Integrierbarkeit nicht fordern. Er gilt jedoch immerhin mit $A_n := \{|G_{T-1}| \leqslant n, |H_T| \leqslant n\}$ wegen monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(G_T 1\!\!1_{A_n} \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((G_{T-1} + H_T \cdot (X_T - X_{T-1}))1\!\!1_{A_n} | \, \mathcal{F}_{T-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(1\!\!1_{A_n} G_{T-1} + 1\!\!1_{A_n} H_T \cdot (X_T - X_{T-1}) | \, \mathcal{F}_{T-1}).
\end{aligned}$$

Wegen $A_n \in \mathcal{F}_{T-1}$, und weil G_{T-1} und H_T beide $\mathcal{F}_{T-1}$-messbar sind, folgt somit aus den Rechenregeln für integrierbare bedingte Erwartungen

$$\mathbb{E}(G_T \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) = \lim_{n\to\infty} \Big(1\!\!1_{A_n} G_{T-1} + 1\!\!1_{A_n} H_T \cdot \mathbb{E}((X_T - X_{T-1}) \,|\, \mathcal{F}_{T-1}) \Big)$$

Da (X_t) ein Martingal ist, ist der zweite Term gleich 0. Der erste konvergiert punktweise (in ω) gegen G_{T-1}. Dies zeigt, dass $G_{T-1} = \mathbb{E}(G_T \,|\mathcal{F}_{T-1}) \geqslant 0$ jeweils fast sicher, letzteres wegen der Monotonie der bedingten Erwartung. Wir können die Prozedur also nun mit $T-1$ statt T wiederholen, und so weiter machen, bis wir bei $t = 0$ angekommen sind. Somit ist $(G_t)_{t \leqslant T}$ in der Tat ein nichtnegatives Martingal. Nun aber folgt sofort

$$\mathbb{E}(G_T) = \mathbb{E}(G_0) = 0,$$

und weil $G_T \geqslant 0$ vorausgesetzt war, bleibt nur $G_T = 0$ fast sicher als Option übrig. □

(2.9) Beispiel

Wann ist im Binomialmodell $\bar{S}$ ein Martingal? Erinnerung: es ist dort

$$S_t^0 = (1+r)^t, \qquad S_t^1 = s_0 \prod_{i=1}^t Z_i$$

mit Z_i uiv und $\mathbb{P}(Z_i = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_i = d)$, wobei $0 < d < u$. Der diskontierte Preisprozess ist dann durch $X_t^0 = 1$ und $X_t^1 = S_t^1 (1+r)^{-t}$ gegeben. (X_t^0) ist somit ein triviales Martingal, und wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t^1 \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}\Big((1+r)^{-t} s_0 \prod_{i=1}^{t} Z_i \,\Big|\, \mathcal{F}_{t-1}\Big) = s_0 (1+r)^{-(t-1)} \Big(\prod_{i=1}^{t-1} Z_i\Big) \mathbb{E}((1+r)^{-1} Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= X_{t-1}^1 \frac{1}{1+r} \mathbb{E}(Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}^1 \frac{1}{1+r} \mathbb{E}(Z_t).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil Z_t unabhängig von $\mathcal{F}_{t-1}$ ist. Damit (X_t^1) ein Martingal ist, müssen also die Parameter so gewählt sein, dass

$$1 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}(Z_t) = \frac{pu + (1-p)d}{1+r}$$

gilt. Zu festem r, u und d bedeutet dies

$$(*) \qquad p = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

Zusätzlich muss $p \in (0,1)$ sein. Wir fassen zusammen: falls

$$(**) \qquad d < 1 + r < u$$

gilt, dann ist für das durch $(*)$ gegebene p der diskontierte Preisprozess (X_t) ein Martinagl, und daher ist in diesem Fall das Binomialmodell arbitragefrei.

Aus diesem Besipiel scheint zu folgen, dass man die Parameter sehr sorgfältig wählen muss, damit der Markt arbitragefrei ist. Dies ist beunruhigend, das Arbitragefreiheit eine sehr wichtige Eigenschaft ist, auf die wir keinesfalls verzichten wollen. Andererseits ist Proposition (2.8) ja nur eine hinreichende Bedingung, vielleicht gibt es daher auch andere Parameter, wo der Markt noch arbitragefrei ist?

Zum Glück ist dies tatsächlich der Fall: man braucht lediglich $(**)$, damit der Markt arbitragefrei ist. Der Grund ist, dass beispielsweise die Bedingung aus Lemma (2.4) eigentlich sehr wenige Eigenschaften des W-Maßes $\mathbb{P}$ benutzt: es geht hier nur um Mengen von Maß 0, auf denen etwas bestimmtes verlangt wird. Wenn wir diese Bedingung also für ein W-Maß $\mathbb{P}$ nachgeprüft haben, dann stimmt sie automatisch für jedes andere W-Maß, das „die gleichen Nullmengen“ wie $\mathbb{P}$ besitzt. Wir werden dies nun formalisieren.

(2.10) Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, und seien $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ zwei W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

a) $\mathbb{P}$ heißt *absolutstetig* bezüglich $\mathbb{Q}$ (wir schreiben $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, falls für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{Q}(A) = 0$ gilt, dass auch $\mathbb{P}(A) = 0$ ist.

b) Die Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ heißen **äquivalent**, falls $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ gilt. Wir schreiben $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$.

Bemerkung: $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ bedeutet also, dass $\mathbb{P}$ „mehr“ Nullmengen als $\mathbb{Q}$ hat in dem Sinne, dass jede Nullmenge von $\mathbb{Q}$ auch eine Nullmenge von $\mathbb{P}$ ist. $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$ bedeutet, dass beide Maße genau die gleichen Nullmengen haben.

Beispiel: Ist $\mathbb{Q}$ ein W-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion mit $\int \rho(x) \mathbb{Q}(\mathrm{d}x) = 1$, dann ist $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(A) = \int_A \rho(x)\mathbb{Q}(\mathrm{d}x)$ ein W-Maß, und es gilt $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$. Ist außerdem $\rho(x) > 0$ für $\mathbb{Q}$-fast alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$.

(2.11) Beobachtung

Eine direkte Umformulierung der Arbitragefreiheit lautet: Ein Finanzmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn für jeden Vermögensprozess (V_t) zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie mit $V_0 = 0$ gilt: Falls $\mathbb{P}(V_T < 0) = 0$, dann muss auch $\mathbb{P}(V_T > 0) = 0$ sein. Ist also $\mathbb{P}$ das W-Maß zu einem arbitragefreien Finanzmarkt und $\mathbb{Q}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W-Maß, dann gilt

$$\mathbb{Q}(V_T < 0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(V_T < 0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{P}(V_T > 0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{Q}(V_T > 0) = 0,$$

und somit ist der durch $\mathbb{Q}$ gegebene Finanzmarkt ebenfalls arbitragefrei.

Angewendet auf Beispiel (2.9) bedeutet dies: Falls die Bedingung $(**)$ dort gilt, dann kann man die Gleichung $(*)$ lösen, und erhält als Lösung $p_* \in (0,1)$. Nun sind aber alle Maße für das Binomialmodell zueinander äquivalent: denn seien $p, \tilde{p} \in (0,1)$ mit oBdA $p < \tilde{p}$, und bezeichne $\mathbb{P}_p$ das W-Maß mit $\mathbb{P}(Z_i = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Z_i = d)$. Dann gilt für jedes $\omega = \{x_1, \dots, x_T\} \in \Omega = \{u,d\}^T$, dass mit $n_u = |\{t \leqslant T : x_i = u\}|$ und $n_d = |\{t \leqslant T : x_i = d\}|$ die Ungleichungen

$$\mathbb{P}_p(\{\omega\}) = p^{n_u}(1-p)^{n_d} \leqslant \tilde{p}^{n_u}(1-\tilde{p})^{n_d}\frac{(1-p)^{n_d}}{(1-\tilde{p})^{n_d}} \leqslant \mathbb{P}_{\tilde{p}}(\{\omega\})\Big(\frac{1-p}{1-\tilde{p}}\Big)^T \leqslant \mathbb{P}_p(\{\omega\})\Big(\frac{\tilde{p}(1-p)}{p(1-\tilde{p})}\Big)^T.$$

Falls man also überhaupt ein p_* finden kann, das (X_t) zu einem Martingal macht (d.h. falls $(**)$ gilt), dann hat jeder zu einem anderen $\tilde{p}$ gehörige Preisprozess die gleichen Nullmengen wie der zu p_*. Das Binomialmodell ist also auch dann arbitragefrei. Wir formalisieren auch dies allgemeiner:

(2.12) Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell. Ein W-Maß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **äquivalentes Martingalmaß** wenn gilt:

(i): $\mathbb{P} \approx \mathbb{Q}$,

(ii): der diskontierte stochastische Prozess $(\bar{X}_t)$ (also $\bar{X}_t^i = S_t^i / S_t^0$) ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, also:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} \qquad \mathbb{Q}\text{-fast sicher, für alle } t \leqslant T.$$

Bemerkung: Hier ist das Verständnis der Tatsache besonders wichtig, dass eine messbare Abbildung X auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ für sich allein genommen noch keine Zufallsvariable ist - erst, wenn man auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ein W-Maß einführt, wird X zu einer Zufallsvariablen, und für unterschieliche $\mathbb{P}$ erhält man auch unterschiedliche Zufallsvaraiblen - die Verteilungen sind ja anders!

(2.13) Proposition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire. Falls ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß existiert, dann ist dieses Finanzmarktmodell arbitragefrei.

Beweis: Sei $\mathbb{Q}$ das äquivalente Martingalmaß, und H eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie. Wegen Proposition (2.8) gilt für den diskontierten Vermögensprozess V zu H:

$$\text{Aus } \mathbb{Q}(V_t < 0) = 0 \text{ folgt } \mathbb{Q}(V_t > 0) = 0.$$

Wie in Bemerkung (2.11) gesehen, folgt daraus auch, dass aus $\mathbb{P}(V_t < 0) = 0$ die Aussage $\mathbb{P}(V_t > 0) = 0$ folgt. Somit ist H keine Arbitrage. $\square$

Der Rest des Kapitels ist der Umkehrung der Aussage von Proposition (2.13) gewidmet: in jedem arbitragefreien Finanzmarkt existiert ein äquivalentes Martingalmaß. Dazu benötigen wir folgendes Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis:

(2.14) Definition

Sei V ein Vektorraum (endlich- oder unendlichdimensional). Eine Abbildung $\|.\| : V \mapsto \mathbb{R}_0^+$ heißt **Norm** auf V wenn gilt:

(i): $\|.\|$ erkennt den Nullvektor: wenn $\|x\| = 0$ gilt, dann muss $x = 0$ sein.

(ii): $\|.\|$ ist homogen: für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in V$ ist $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$.

(iii): $\|.\|$ erfüllt die Dreiecksungleichung: für $x, y \in V$ gilt $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Beipiele sind die euklidische Norm $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$, aber auch die L^1-norm auf dem Vektorraum der integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, also $\|X\|_1 := \mathbb{E}(|X|)$, sowie die L^∞-norm auf dem Raum der beschränkten Funktionen, also $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Bei der L^∞-Norm kann man noch eine Nullmenge erlauben, wo X unendlich ist, das ist aber etwas umständlich aufzuschreiben und wir brauchen es im Folgenden nicht. Die Norm $\|.\|$ erzeugt eine Metrik auf V (mittels $d(x,y) = \|x - y\|$), und daher eine Topologie, und man hat Begriffe wie offene, abgeschlossene und kompakte Mengen.

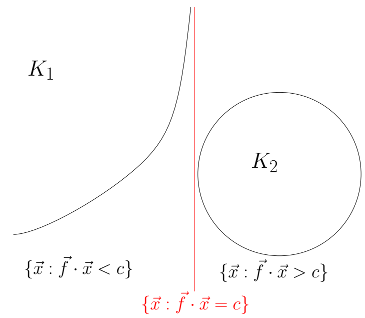
(2.15) Trennungssatz von Hahn-Banach

Sei V ein normierter Vektorraum, und K_1, K_2 seien zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Teilmengen von V. K_1 sei abgeschlossen und K_2 sei kompakt. Dann existiert eine stetige (bezüglich der durch $\|.\|$ induzierten Metrik) lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\sup_{x \in K_1} f(x) < \inf_{y \in K_2} f(y).$$

Beweis: Inhalt der Funktionalanalysis oder der konvexen Optimierung.

Bemerkungen: Die Werte der Abbildung f können also benutzt werden, um eine der beiden Optionen $x \in K_1$ oder $x \in K'$ auszuschließen, also die Mengen K_1 und K_2 zu „trennen". Denn wenn $f(x) \leqslant \sup_{x \in K_1} f(x)$ ist, dann kann x nicht in K_2 sein, analog umgekehrt. Anders ausgedrückt: es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass der lineare Unterraum $U = \{x \in V : f(x) = c\}$ die Mengen K_1 und K_2 trennt, siehe Abbildung im Fall $V = \mathbb{R}^2$.



(2.16) Lemma

In der Situation von Satz (2.15) sei U ein Untervektorraum von V, und es gelte $U \subset K_1$. Dann gilt für das trennende Funktional f: $f(x) = 0$ für alle $x \in U$.

Beweis: Übung.

Wir brauchen noch folgende Variante von Satz (2.6) bzw. Lemma (2.7):

(2.17) Proposition

Sei $(X_t)_{t \leqslant T}$ ein $\mathbb{R}^d$-wertiger, adaptierter stochastischer Prozess. Dann sind äquivalent:

(i): $(X_t)_{t \leqslant T}$ ist ein Martingal

(ii): Es gilt $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$, und für jeden beschränkten, $\mathbb{R}^d$-wertigen, vorhersagbaren stochastischen Prozess $(H_t)_{t \leqslant T}$ ist $(H \bullet \Delta X)_T$ integrierbar und es gilt $\mathbb{E}((H \bullet \Delta X)_T) = 0$.

Der Beweis wir als Übungsaufgabe gemacht - der interessante Teil der Aussage ist, dass ein stochastischer Prozess, bei dem es irgend eine „gambling strategy" gibt, mit der man im Durchschnitt nach T Runden Gewinn macht, kein Martingal sein kann.

(2.18) Erster Hauptsatz der Preistheorie

(i): Ein Finanzmarktmodell mit Numéraire $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß gibt.

(ii): Falls eine der beiden Bedingungen in (i) erfüllt ist, dann kann man die Dichte zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ sogar beschränkt wählen: es gibt dann ein $Z \in L^\infty(\mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}_\mathbb{P}(Z) = 1$ und

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(Z \mathbb{1}_A)$$

für alle $A \in \mathcal{F}$.

Beweis: Wir haben bereits in Proposition (2.13) gesehen, dass die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes die Arbitragefreiheit zur Folge hat. Es bleibt, die umgekehrte Richtung zu zeigen. Dies ist eine ziemliche maßtheoreitische Schlammschlacht, die nur dann erträglich wird, wenn wir eine Zusatzannahme machen, siehe unten. Der allgemeine Beweis findet sich im Buch von Föllmer und Schied.

Die Zusatzannahme besteht darin, dass wir annehmen, dass der Finanzmarkt endlich ist. Im Prinzip bedeutet dies, dass es zu jedem Zeitpunkt für jedes Basisgut nur endlich viele Preise gibt, die dieses Basisgut in der nächsten Handelsperiode annehmen kann. Dies ist sicher in der Praxis immer erfüllt, da Preise am Markt auf endlich viele Nachkommastellen gerundet werden. Formal nennen wir eine Finanzmarktmodell **endlich**, wenn Ω eine endliche Menge ist, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist, und $\mathbb{P}(\{\omega\} > 0)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Wir setzen $|\Omega| = n$ und numerieren die Elemente von Ω durch, also $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Wir machen folgende Beobachtungen:

(1): Die Menge aller Zufallsvariablen auf Ω ist ein n-dimensionaler Vektorraum, man kann ja jede Zufallsvariable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit dem Vektor $(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_n))$ identifizieren kann.

(2): Die Menge

$$K := \{G_T : (G_t)_{t \leqslant T} \text{ ist diskontierter Gewinnprozess für eine s.f. Handelsstrategie}(H_t)\}$$

ist ein linearer Unterraum aller Zufallsvariablen (prüfen Sie das nach!), daher ein endlichdimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^n$. K enthält alle durch selbsfinanzierende Handelsstrategien möglichen Auszahlungen zum Zeitpunkt T.

(3): Die Menge aller Wahrscheinlichkeismaße auf Ω kann man mit der konvexen Menge

$$M := \{(p_1, \ldots, p_n) : p_i \geqslant 0 \ \ \forall i \leqslant n, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

identifizieren; man setzt einfach $p_i = \mu(\{\omega_i\})$ für jedes W-Maß μ.

(4): $\mathbb{Q} \in M$ (mit $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = q_i$) ist ein Martingalmaß genau dann, wenn für alle $u = (u_1, \ldots, u_n) \in K$ gilt:

$$q \cdot u = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}(\{\omega_i\}) G_T(\omega_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(G_T) = 0,$$

denn dann ist ja $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((H \bullet \Delta X)_T) = 0$ für alle selbstfinanzierenden Handelsstrategien. Nach Proposition (2.17) ist dies äquivalent dazu, dass $\bar{X}$ ein Martingal ist. Jedes Martingalmaß wird also repräsentiert durch einen Vektor aus der Menge M, der *senkrecht* auf dem Unterraum K steht.

(5): Damit aber $\mathbb{Q}$ auch ein äquivalentes Martingalmaß ist, muss $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ sein. Dies ist äquivalent zu der Bedingung $q \cdot c > 0$ für alle $c \in M$, wobei $q \cdot c$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bedeutet.

(6) Wenn wir also einen Vektor $q \in \mathbb{R}^d$ mit $q \cdot u = 0$ für alle $u \in K$ und $q \cdot c > 0$ für alle $c \in M$ finden können, dann sind wir fertig: der normierte Vektor $\bar{q}$ mit $\bar{q}_i = q_i / \sum_{i=1}^{n} q_i$ erfüllt nämlich ebenfalls $\bar{q} \cdot u = 0$ und $\bar{q} \cdot c > 0$, und da er durch die Normierung nun selbst in M liegt, repräsentiert er ein äquivalentes Martingalmaß.

Das sieht schon sehr nach dem Trennungssatz aus: K ist eine konvexe Menge, die einen Unterraum von $\mathbb{R}^d$ enthält (sogar ein solcher Unterraum ist!), und M ist eine konvex und beschränkt, wie man sofort nachrechnen kann (und sollte). Was uns noch fehlt ist, dass K und M disjunkt sind, also dass $K \cap M = \emptyset$.

Hierzu brauchen wir die Arbitragefreieheit. Falls nämlich $x \in K \cap M$ existiert, dann existiert (wegen $x \in K$) eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H so dass $x = G_T$ für den entsprechenden diskontierten Gewinnprozess. Wegen $x \in M$ ist aber nun $x_i = G_T(\omega_i) \geqslant 0$ für alle $\omega_i \in \Omega$; wegen $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ist somit $G_T(\omega) > 0$ für mindestens ein $\omega \in \Omega$, und daher $\mathbb{P}(G_T > 0) > 0$. Somit wäre wegen Lemma (2.4) der Markt nicht arbitragefrei. Es folgt daher $K \cap M = \emptyset$ für einen arbitragefreien Markt.

Nach Lemma (2.16) existiert also eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(k) = 0$ für alle $k \in K$ und $f(m) > 0$ für alle $m \in M$. Da jede lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ die Form $f(x) = \sum_{i=1}^n q_i x_i = q \cdot x$ für ein geeignetes $q \in \mathbb{R}^n$ hat, können nach Punkt (6) dasjenige q, das f repräsentiert, auf einen Repräsentanten für ein äquivalentes Martingalmaß normieren. Die Dichte zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ ist durch die Funktion Z mit $Z(\omega_i) = \frac{q_i}{p_i} = \frac{\mathbb{Q}(\{\omega_i\})}{\mathbb{P}(\{\omega_i\})}$ gegeben, denn dann ist ja

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1,$$

und

$$\mathbb{Q}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{Q}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} Z(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A).$$

Diese Dichte ist wegen $p_i > 0$ für alle i beschränkt. □

(2.19) Korollar

Das Binomialmodell (siehe Beispiel (2.9)) ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + r < u$ ist.

Beweis: Die eine Richtung wurde bereits in Beispiel (2.9) nachgerechnet: wenn $d < 1 + r < u$ ist, dann wurde dort ein äquivalentes Martingalmaß konstruiert. Wir zeigen nun, dass kein äquivalentes Martingalmaß existieren kann, wenn $d \geqslant 1 + r$ ist. Denn dann gilt für jedes beliebige W-Maß $\mathbb{Q}$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1^1 \,|\, \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1^1) &= \mathbb{Q}(S_1^1 = u)\frac{s_0 u}{1+r} + \mathbb{Q}(S_1^1 = d)\frac{s_0 d}{1+r} \\
&= \mathbb{Q}(S_1^1 = u)\frac{s_0 u}{1+r} + (1 - \mathbb{Q}(S_1^1 = u))\frac{s_0 d}{1+r} = \mathbb{Q}(S_1^1 = u)\frac{s_0(u-d)}{1+r} + \frac{s_0 d}{1+r} \\
&> \frac{s_0 d}{1+r} \geqslant s_0 = X_0^1,
\end{aligned}$$

somit kann (X_t^1) kein Martingal unter $\mathbb{Q}$ sein. Nach Satz (2.18) ist daher das Binomialmodell in diesem Fall nicht arbitragefrei. Der Fall $u \leqslant 1 + r$ geht analog und verbleibt als Übung. □

Bemerkung: anschaulich ist es klar, warum $d < 1 + r < u$ ist. Denn wenn beispielsweise $d \geqslant 1+u$ ist, dann kann man durch Investition in das erste Basisgut selbst im schlechtesten Fall nicht schlechter dastehen als bei Investition in die risikolose Anlage in (X_t^0). Mit Diskontierung bedeutet dies gerade, dass (X_t^1) auch im ungünstigsten Fall wächst oder zumindest gleich bleibt, im günsitgen Falle aber wächst - eine Arbitragemöglichkeit.

3. Bewertung europäischer Derivate

(3.1) Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire. Eine nichtnegative Zufallsvariable C wird als **Derivat** bezeichnet, wenn man vorhat, sie zur Modellierung einer Option oder einer ähnlichen Wette auf die Basisgüter zu benutzen. Hierbei soll C den *diskontierten* Gewinn bei dieser Wette zur Zeit T darstellen. Man benutzt $\mathcal{C} = S_T^0 C$, um den undiskontierten Wert der gleichen Wette zu bezeichnen.

Bemerkung: Wie schon beim Begriff der Statistik (eine Zufallsvariable heißt „Statistik“) ist die Definition eines Derivates mathematisch sehr unbefriedigend - schließlich ist ein Derivat einfach eine nichtnegative Zufallsvariable, man hat also zwei Begriffe für das gleiche Objekt. Der Grund ist der gleiche wie in der Statistik - man möchte mit dieser speziellen nichtnegativen Zufallsvariable eine Assoziation verbinden. Solche Begrifflichkeiten sind in stark anwendungsgetriebenen Bereichen der Mathematik nicht unüblich.

(3.2) Beispiele

a) Das (undiskontierte) Derivat $\mathcal{C}^i_{\text{call},K} = (S_T^i - K)\mathbb{1}_{S_T^i > K}$ ist der europäische Call auf das i-te Basisgut mit Strikepreis K und Fälligkeit T.

b) Das (undiskontierte) Derivat $\mathcal{C}^i_{\text{put},K} = (K - S_T^i)\mathbb{1}_{S_T^i < K}$ ist der europäische Put auf das i-te Basisgut mit Strikepreis K und Fälligkeit T.

Übung: geben Sie die Formel für die *diskontierten* Optionen $C^i_{\text{call},K}$ und $C^i_{\text{put},K}$ an.

(3.3) Fragestellung und Überlegungen

Wir wollen nun untersuchen, welchen Preis ein Derivat C zum Zeitpunkt t haben sollte. Es gibt zwei wesentliche Grundideen. Die erste ist, dass wir den Preisprozess $(Y_t)_{t \leqslant T}$ (wobei Y_t der Preis der Derivats zur Zeit t sein soll) einfach dem Marktmodell hinzufügen können, also $S_t^{d+1} = Y_t$. Unser Derivat ist also einfach ein neues Basisgut. Dann sollte aber der erweiterte Markt immer noch arbitragefrei sein, sonst könnte man mit diesem Derivat risikolos Gewinn machen, und dies würde (wenn es jeder tut) zum Zusammenbruch des Marktes oder zu Preiskorrekturen führen.

Andererseits kann man sich fragen, ob der Preis des Derivates (bzw. alternativ der Preis des neuen, $d+1$-ten Basisgutes) allein dadurch errechnet werden kann, dass man alle Preise und die Wahrscheinlichkeiten aller zukünftigen Preisentwicklungen der ersten d Basisgüter kennt. Mit anderen Worten: ist das $d+1$-te Basisgut wirklich ein „Derivat“ in dem Sinne, dass sein Preis aus dem Rest des Marktes abgeleitet werden kann? Falls das so ist, dann sollte die Zufallsvariable S_t^{d+1} zumindest messbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}(\{S_r^i : r \leqslant t, i \leqslant d\})$ sein. Das reicht aber noch nicht, wenn man auch Arbitragefreiheit will. Ein zentraler Begriff ist hier die Replizierbarkeit: das heißt, es gibt eine Handelsstrategie, die nur in die Handelsgüter Nummer 0 bis d investiert, und mit deren Hilfe der arbitragefreie Preis des Derivates exakt nachmodelliert werden kann: der Wert dieses Portfolios ist immer gleich groß wie der Preis des Derivates. Wann ein (oder sogar jedes) Derivat replizierbar ist, und was man davon hat, das werden wir nun erarbeiten.

(3.4) Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire, C ein Derivat. Ein stochastischer Prozess $(X_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ heißt **arbitragefreier Preisprozess** für das Derivat C, wenn gilt:

(i): $(X_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ ist $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert.

(ii): $X_T^{d+1} = C$, $\mathbb{P}$-fast sicher.

(iii): Der erweiterte diskontierte Markt $(X_t^0, \dots, X_t^d, X_t^{d+1})$ ist arbitragefrei, hierbei sind die X_t^i, $i \leqslant d$, die diskontierten Preisprozesse zu den S_t^i, $i \leqslant d$.

In diesem Fall nennt man die deterministische Größe X_0^{d+1} den **arbitragefreien Preis** für C (zur Zeit 0).

Aufgabe: Überlegen Sie, wie der undiskontierte Preisprozess (S_t^{d+1}) zum arbitragefreien Preisprozess (X_t^{d+1}) aussieht.

(3.5) Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire, C ein Derivat. $\bar{X} = (X^0, \dots X^d)$ sei der diskontierte Preisprozess.

(i): Sei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß, d.h. $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$ und $\bar{X}$ sei ein Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$. Falls $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty$, dann ist durch $(X_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ mit

$$X_t^{d+1} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

ein arbitragefreier Preisprozess zu C gegeben.

(ii): Ist $(\tilde{X}_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ ein beliebiger arbitragefreier Preisprozess zu C, dann existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ so dass

$$\tilde{X}_t^{d+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

gilt.

(iii): Definiere

$$\Pi(C) := \{y \in \mathbb{R} : y \text{ ist arbitragefreier Preis für } C \text{ (zur Zeit 0)}\}.$$

Dann gilt

$$\Pi(C) = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) : \mathbb{Q} \text{ ist äquivaltentes Martingalmaß}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty\}.$$

Beweis:

(i): Sei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty$. Dann ist durch

$$X_t^{d+1} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t)$$

ein Martingal definiert (Beweis: probability theory, oder Übung). Daher ist (X_t^{d+1}) adaptiert, und $(X^0, \dots, X^{d+1})$ ist ein Martingal, da jede Komponente eines ist. Nach Definition eines Finanzmarktmodells gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, somit ist $X_T^{d+1} = C$ $\mathbb{Q}$-fast sicher, also auch $\mathbb{P}$-ast sicher. Somit ist $(X_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ ein arbitragefreier Preisprozess für C.

(ii): Sei $(\tilde{X}_t^{d+1})$ ein arbitragefreier Preisprozess für C. Dann ist $(X^0, \ldots, X^d, \tilde{X}^{d+1})$ arbitragefrei, und somit existiert (nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie, Satz (2.18)) ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ für den erweiterten Markt $(X^0, \ldots, X^d, \tilde{X}^{d+1})$. Somit ist insbesondere $(\tilde{X}_t^{d+1})_{t \leqslant T}$ ein Martingal unter $\mathbb{Q}$, und es gilt daher

$$\tilde{X}_t^{d+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{X}_T^{d+1} \,|\, \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t).$$

(iii): Zu jedem arbitragefreien Preisprozess $(\tilde{X}_t^{d+1})$ existiert nach (ii) ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty$. Für den Preis zur Zeit 0 gilt dann wegen $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ dass

$$\tilde{X}_0^{d+1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{X}_T^{d+1} \,|\, \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C), \qquad (*)$$

somit ist $\Pi(C) \subset \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) : \mathbb{Q} \text{ ist äquivaltentes Martingalmaß}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty\}$. Ist andererseits $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß, dann ist nach (i) der Prozess mit $X_t^{d+1} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t)$ ein Martingal, und somit gilt wegen $(*)$ dass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) \in \Pi(C)$. Es folgt $\Pi(C) \supset \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) : \mathbb{Q} \text{ ist äquivaltentes Martingalmaß}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty\}$. □

(3.6) Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit Numéraire. Jedes Derivat hat mindestens einen arbitragefreien Preis, mit anderen Worten: $\Pi(C) \neq \emptyset$ für alle Derivate C.

Beweis: Wegen Satz (3.5) genügt es, ein äquaivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty$ zu finden. Dazu ändern wir zunächst das ursprüngliche W-Maß $\mathbb{P}$ wie folgt ab: wir definieren die Zufallsvariable

$$\omega \mapsto \frac{1}{1 + C(\omega)} \in (0, 1],$$

und das W-Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ durch

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A \frac{1}{1+C})}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{1}{1+C})}, \qquad (A \in \mathcal{F})$$

und stellen fest dass $\tilde{\mathbb{P}} \approx \mathbb{P}$ (warum?). Nun wenden wir Satz (2.18) auf das (ebenfalls arbitragefreie!) Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ an. Es existiert somit eine beschränkte Zufallsvariable Z, so dass unter $\mathbb{Q}$ mit

$$\mathbb{Q}(A) = \frac{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbb{1}_A Z)}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(Z)}, \qquad (A \in \mathcal{F})$$

der stochastische Prozess $(X^0, \ldots X^d)$ ein Martingal ist. Außerdem ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) = \frac{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(CZ)}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(Z)} \leqslant \frac{\|Z\|_\infty}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(Z)} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(C) = \frac{\|Z\|_\infty}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(Z)} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{C}{1+C})}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{1}{1+C})} \leqslant \frac{\|Z\|_\infty}{\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(Z)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{1}{1+C})} < \infty.$$

□

(3.7) Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein Finanzmarktmodell mit Numéraire und C ein Derivat. C heißt **replizierbar** (oder: erreichbar), wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\bar{H}$ gibt, für deren Vermögensprozess $(V_t)_{t \leqslant T}$ gilt:

$$V_T = C \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Ein solches $\bar{H}$ wird auch **Hedging-Strategie** oder **Replikation** von C genannt.

Bemerkungen:

a) Man kann für ein replizierbares Derivat C also mittels $\bar{H}$ zu jedem Zeitpunkt $t \leqslant T$ genau so viele Basisgüter kaufen und verkaufen, dass man, egal wie der Markt sich entwickelt, zum Schluss genau das Vermögen C besitzt.

b) Der faire Preis von C für $t = 0$ ist dann durch das Anfangsvermögen V_0 gegeben, das man für diese Handelsstrategie benötigt. Es kann durchaus sein, dass dazu (bei bestimmten Marktlagen) Entscheidungen nötig sind, die man sonst nicht treffen würde!

c) Es kann durchaus mehrere verschiedene Portfolios geben, die ein Derivat C replizieren, insbesondere dann, wenn schon die Basisgüter nicht unabhängig voneinander sind. Finden Sie hierzu zur Übung verschiedene Beispiele!

d) Allerdings haben diese verschiedenen Strategien zu allen Zeitpunkten t immer den gleichen Vermögensprozess, zumindest dann, wenn der Markt arbitragefrei ist. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes:

(3.8) Satz („Law of one price“)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit Numéraire, C ein replizierbares Derivat. Dann gilt für die Preisprozesse $V, \tilde{V}$ von zwei beliebigen Replikationen von C, dass

$$V_t = \tilde{V}_t \qquad \text{für alle } t \leqslant T, \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Konkret gilt

$$V_t = \tilde{V}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t) \qquad \text{für alle } t \leqslant T, \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

wobei $\mathbb{Q}$ ein beliebiges zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß ist. Außer V_t gibt es keine weiteren arbitragefreien Preisprozesse für C.

Beweis: Sei H eine Replikation von C. Da der Markt arbitragefrei ist, existiert (mindestens) ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Da der diskontierte Preisprozess $\bar{X}$ unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal ist, gilt dies auch für den Vermögensprozess $V = V_0 + H \bullet \Delta X$. Für diesen gilt daher $\mathbb{P}$-fast sicher:

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_T \,|\, \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C \,|\, \mathcal{F}_t),$$

letzteres weil nach Definition der Replikation $V_T = C$ $\mathbb{P}$-fast sicher ist.

Sei nun (Y_t) ein bliebiger arbitragefreier Preispprozess für C. Angenommen, $\mathbb{P}(Y_t \neq V_t) > 0$ für ein $t < T$: dann hätten wir eine Arbitragemöglichkeit. Wir starten nämlich mit einem leeren Portfolio und kaufen, wenn zum ersten mal $V_t(\omega) > Y_t(\omega)$ ist, sehr viele Einheiten von C und verkaufen gleichzeitig viele Einheiten des replizierenden Portfolios. Wegen $V_t(\omega) > Y_t(\omega)$

machen wir hierbei zum Zeitpunkt t einen nichtnegativen Gewinn. Nun warten wir bis zur Zeit T, wenn nach Voraussetzung $V_T(\omega) = Y_T(\omega)$ ist, und verkaufen beide Investments wieder. Da sie nun gleich teuer sind, dürfen wir den Gewinn von Zeit t behalten, ohne Risiko. Analog verfahren wir, wenn wir jemals $V_t(\omega) < Y_t(\omega)$ beobachten sollten. Natürlich kann es sein, dass wir (durch Pech) auf einem ω sitzen, bei dem $V_t(\omega) = Y_t(\omega)$ für alle t gilt, aber so lange $\mathbb{P}(V_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) > 0$ für ein $t < T$ gilt, machen wir mit dieser Strategie eben doch mit positiver Wahrscheinlichkeit risikolos Gewinn - eine Arbitragemöglichkeit. Da der Preis des Derivates aber arbitragefrei sein sollte, muss somit $\mathbb{P}(V_t(\omega) \neq Y_t(\omega)) = 0$ für alle t gelten.

□

Bemerkung: Die Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t \leqslant T}$ mit $\mathcal{G}_t := \sigma(\{X_r^0, \ldots, X_r^d : 0 \leqslant r \leqslant t\})$ beschreibt genau die Information, die nur durch Beobachtung der Preise der Basisgüter bis zur Zeit t verfügbar ist. Der Preisprozess eines replizierbaren Derivates ist also insbesondere allein durch die Kenntnis dieser Preise festgelegt. Allerdings garantiert dies nicht die Replizierbarkeit eines Derivates. Dies sehen wir an folgendem

(3.9) Beispiel

Sei $d = 1$, $T = 1$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i > 0$ für $i \leqslant 3$. Setze

$$S_0^0 = S_1^0(\omega) = 1, \qquad \forall \omega,$$

und

$$S_0^1(\omega) = 80 \quad \forall \omega, \qquad S_1^1(\omega_i) = \begin{cases} 100 & \text{falls } i = 1, \\ 80 & \text{falls } i = 2, \\ 75 & \text{falls } i = 3. \end{cases}$$

Betrachte

$$C_{\text{put}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 1, \\ 0 & \text{falls } i = 2, \\ 5 & \text{falls } i = 3. \end{cases}$$

Wir versuchen nun, eine Handelsstrategie $\bar{H}$ zu finden, so für den Vermögensprozess V gilt: $V_1(\omega) = C_{\text{put}}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Wegen

$$V_1(\omega) = H_0^0 S_0^1(\omega) + H_0^1 S_1^1(\omega)$$

führt dies auf die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} H_0^0 + 100 H_0^1 &= 0 \qquad \text{falls } \omega = \omega_1, \\ H_0^0 + 80 H_0^1 &= 0 \qquad \text{falls } \omega = \omega_2, \\ H_0^0 + 75 H_0^1 &= 5 \qquad \text{falls } \omega = \omega_3, \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind natürlich nicht alle gleichzeitig lösbar - das liegt nur daran, dass der Wert S_1 des ersten Basisgutes mit positiver Wahrscheinlichkeit drei verschiedene Werte annehmen konnte! Im Binomialmodell, wo ja in jedem Schritt nur zwei Werte erlaubt sind, haben wir dieses Problem nicht. Wir werden später sehen, dass hier tatsächlich alle Kontrakte replizierbar sind. Ebenso klar sollte es sein, dass man sofort Probleme bekommt, wenn man auch nur minimal davon abweicht (so wie wir das soeben getan haben).

Andere Frage: ist unser Modell arbitragefrei? Das ist der Fall, denn um ein Martingalmaß mit $\mathbb{Q}(\omega_i) = q_i > 0$ für alle i zu finden, müssen wir (wegen $S_1 = X_1$) nur die Gleichungen

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1^1 \,|\, \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1^1) = 100q_1 + 80q_2 + 75q_3 \stackrel{!}{=} X_0^1 = 80$$

und

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_0^1 \,|\, \mathcal{F}_0) = q_1 + q_2 + q_3 = X_0^0 = 1$$

lösen. Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen, wieder *weil* das Modell drei Werte für S_1^1 zulässt; wären es nur zwei Werte, dann wäre die Lösung eindeutig! Wegen Satz (3.5 (iii)) ist somit $\Pi(C_{\text{put}})$ nicht einelementig. Daraus sieht man schon einmal, dass die Voraussetzung der Replizierbarkeit in Satz (3.8) notwendig war, um einen eindeutigen Preisprozess für ein Derivat zu erhalten. Genaueres sagt uns der folgende Satz.

(3.10) Satz

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \leqslant T}, (\bar{S}_t)_{t \leqslant T})$ ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit Numéraire, C ein Derivat.

(i): C ist replizierbar genau dann, wenn der arbitragefreie Preis von C eindeutig ist, wenn also $\Pi(C)$ eine einelementige Menge ist.

(ii): Falls C nicht replizierbar ist, dann ist $\Pi(C)$ ein offenes Intervall.

Beweisskizze: (i) In Satz (3.8) wurde bereits bewiesen, dass $\Pi(C)$ eindeutig ist, falls C replizierbar ist. In (ii) gleich unten zeigen wir, dass für ein nicht replizierbares Derivat $\Pi(C)$ ein offenes Intervall, also nicht einelementig, ist. Daher gilt (i), falls wir (ii) zeigen können.

(ii): Betrachte die Menge

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \text{ ist zu } \mathbb{P} \text{ äquivalentes Martingalmaß}\}.$$

$\mathcal{M}$ ist eine konvexe Menge, d.h. zu $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, ist auch $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu \in \mathcal{M}$ (Übung!). Da die Abbildung $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C)$ linear ist, muss auch die Menge

$$\Pi(C) = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C) < \infty\}$$

konvex sein (warum?). Also ist $\Pi(C)$ ein Intervall (könnte aber im Moment auch noch das einpunktige Intervall sein). Was daher noch zu zeigen bleibt, ist, dass $\Pi(C)$ offen ist.

Da der Beweis recht technisch ist und die Aussage für uns nicht sehr wichtig ist, verweisen wir hierfür auf die Literatur (Völlmer/Schied). □

(3.11) Definition

Ein Marktmodell heißt **vollständig**, wenn jedes beschränkte Derivat (d.h. ein Derivat mit $\sup\{C(\omega) : \omega \in \Omega\} < \infty$) replizierbar ist.

Bemerkung: die Vollständigkeit ist eine sehr starke Annahme. Man kann zeigen, dass sie nur auf (im Wesentlichen) endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen gelten kann, genauer: falls ein arbitragefreier Markt vollständig ist, dann gibt es keine abzählbar unendliche disjunkte Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ messbarer Mengen, so dass $\mathbb{P}(A_i) > 0$ für alle A_i gilt. Ein vollständiger Markt kann also immer auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum modelliert werden.

(3.12) Zweiter Hauptsatz der Preistheorie

Für ein arbitragefreies Marktmodell $\bar{S}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i): $\bar{S}$ ist vollständig.

(ii): Es existiert *genau* ein äquivalentes Martingalmaß.

In diesem Fall sind alle Derivate (nicht nur beschränkte) replizierbar.

Beweis:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\bar{S}$ vollständig, und seien $\mathbb{Q}$ und $\tilde{\mathbb{Q}}$ zwei äquivalente Martingalmaße. Zu allen $A \in \mathcal{F}$ ist die Zufallsvariable $\mathbb{1}_A$ ein beschränktes Derivat. Nach Annahme ist $\mathbb{1}_A$ replizierbar, und nach Satz (3.8) ist der Preis für A daher eindeutig, es gilt also

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A) \overset{(3.8)}{=} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}(\mathbb{1}_A) = \tilde{\mathbb{Q}}(A).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Unter Annahme von Satz (3.10) ist der Beweis sehr kurz: Sei C ein beliebiges Derivat. Nach Satz (3.5 (iii)) ist $\Pi(C)$ einelementig, da es nur ein einziges äquivalentes Martingalmaß gibt. Also ist $\Pi(C)$ kein offenes Interval, und nach Satz (3.10) ist daher C replizierbar.

Da wir Satz (3.10) aber nicht vollständig bewiesen haben, geben wir einen alternativen Beweis für den einzigen in der Praxis relevanten Fall, nämlich den, wo Ω endlich ist (bzw. wo $\mathcal{F}$ nur endlich viele disjunkte Teilmengen mit positivem Maß enthält, die man als Atome eines neu definierten Ω' wählen kann, welches dann endlich ist.

Sei also Ω endlich, $|\Omega| = n$. Wir nehmen an, dass $\bar{S}$ nicht vollständig ist und zeigen die Existenz von unendlich vielen äquivalenten Martingalmaßen. Wie im Beweis von Satz (2.18) definieren wir

$$K := \{G_T : (G_t)_{t \leqslant T} \text{ ist diskontierter Gewinnprozess für eine s.f. Handelsstrategie } (H_t)\}$$

und

$$M := \{(p_1, \ldots, p_n) : p_i \geqslant 0 \ \ \forall i \leqslant n, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}.$$

Zusätzlich definieren wir

$$K' := \{G_T + v_0 : (G_t)_{t \leqslant T} \text{ ist diskontierter Gewinnprozess für eine s.f. Handelsstrategie}(H_t), v_0 \in \mathbb{R}\}$$

K' repräsentiert die Auszahlungen aller möglichen Vermögensprozesse, die man mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien erreichen kann während K nur die Auszahlungen derjenigen Vermögensprozesse repräsentiert, die Anfangsvermögen $v_0 = 0$ haben (siehe Lemma (1.11)!). Auch K' ist somit ein Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ aller Zufallsvariablen, und wir werden zeigen, dass

$$K \subsetneqq K' \subsetneqq \mathbb{R}^n$$

Die Implikationen $\subseteq$ sind dabei klar. Da jede Zufallsvariable aus K' replizierbar ist, unser Markt aber nach Annahme nicht vollständig ist, muss $K' \subsetneqq \mathbb{R}^n$ gelten. Für die erste Implikation nehmen wir an, dass $K = K'$ ist. Sei dann $\tilde{H}_t$ eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie, für deren Vermögensprozess $\tilde{V}$ die Gleichung $\tilde{V}_0 = 1$ gilt. Dann ist $Y := \tilde{V}_T \in K'$. Wegen $K' = K$ ist nun aber auch $Y \in K$, daher existiert eine (andere) Handelsstrategie H mit Startvermögen $V_0 = 0$ und Endvermögen $V_T(\omega) = Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach dem law of one price ist dies unmöglich (konkret: $H - \tilde{H}$ wäre eine Arbitragemöglichkeit!). Somit muss $K \subsetneqq K'$ gelten.

Wir haben also festgestellt, dass K höchstens $n-2$-dimensional ist. Nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie existiert ein zu K orthogonaler einen Vektor $q \in M$, der ein äquivalentes Martingalmaß repräsentiert, wegen $\dim(K) \leqslant n-2$ muss es aber einen weiteren Vektor $q' \in \mathbb{R}^n$ geben, der sowohl zu q als auch zu K orthogonal ist. Wir setzen

$$Q' := \{q + \lambda q' : \lambda \in \mathbb{R} \text{ so dass } q_i + \lambda q'_i > 0 \text{ für alle } i \leqslant n\}$$

Wegen $q_i > 0$ für alle i ist $Q' \supsetneqq \{q\}$, denn kann man $\lambda_0 > 0$ klein genug wählen, damit für $|\lambda| < \lambda_0$ alle Komponenten strikt positiv bleiben. Normiert man nun die unendlich vielen Elemente von Q' so, dass die Summe ihrer Komponenten gleich 1 ist, so erhält man unendlich viele verschiedene(!) äquivalente Martingalmaße. Das war zu zeigen. $\square$

(3.13) Satz

Sei $\bar{S}$ ein arbitragefreies Binomialmodell, also mit $d < 1 + r < u$. Dann existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Für die Darstellung $\Omega = \{(\omega_t)_{1 \leqslant t \leqslant T} : \omega_t \in \{u, d\} \, \forall t \leqslant T\}$ ist es durch

$$\mathbb{Q}_*(\{(\omega_1, \dots, \omega_T)\}) = p_*^{|\{t \leqslant T : \omega_t = u\}|}(1 - p_*)^{|\{t \leqslant T : \omega_t = d\}|}$$

mit

$$p_* = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

gegeben, ist als das in Beipiel (2.9) konstruierte.

Insbesondere ist das Binomalmodell in diesem Fall vollständig.

Beweis: Wir wissen schon, dass das angegeben $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist. Was wir noch zeigen müssen ist, dass es kein weiteres W-Maß (das möglicherweise eine ganz andere Gestalt haben könnte) geben kann, so dass $\bar{X}$ ein Martingal ist. Sei also $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß, wir zeigen dass $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_*$ ist.

Wir erinnern an die Darstellung des Binomialmodells mittels

$$S_t^0 = (1 + r)^t, \qquad S_t^1 = s_0 \prod_{i=1}^{t} Z_i,$$

nehmen aber nun nicht mehr an, dass die Z_i uiv (unter dem Maß $\mathbb{Q}$) sind. Trotzdem gilt (wegen der immer noch verlangeten Adaptiertheit) nach wie vor folgende Rechnung aus Beispiel (2.9):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t^1 \,|\, \mathcal{F}_{t-1})(\omega) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big((1 + r)^{-t} s_0 \prod_{i=1}^{t} Z_i \,\Big|\, \mathcal{F}_{t-1}\Big)(\omega) \\
&= s_0(1 + r)^{-(t-1)}\Big(\prod_{i=1}^{t-1} Z_i(\omega)\Big)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((1 + r)^{-1} Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = X_{t-1}^1(\omega)\frac{1}{1 + r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})(\omega)
\end{aligned}$$

Damit dies ein Martingal ist, muss somit

$$1+r = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = u\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{Z_t=u\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) + d\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{Z_t=d\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{Z_t=u\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1})(u-d)+d,$$

oder

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{Z_t=u\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1})(\omega) = \frac{1+r-d}{u-d}$$

für alle $\omega \in \Omega$ gelten. Nun ist aber für jedes $A \in \mathcal{F}_{t-1}$ wegen der definierenden Eigenschaft der bedingten Erwartung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Z_t=u\}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\{Z_t=u\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = \frac{1+r-d}{u-d}\mathbb{Q}(A),$$

und mit $A = \Omega$ bekommen wir außerdem $\mathbb{Q}(Z_t = u) = \frac{1+r-d}{u-d} = p_*$, und somit insgesamt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Z_t=u\}}) = \mathbb{Q}(\mathbb{1}_A)\mathbb{Q}(Z_t = u)$, also die Unabhängigkeit von Z_t und $\mathcal{F}_{t-1}$. Es folgt (induktiv) dass die Z_i alle unabhängig sein müssen, es muss also $\mathbb{Q}$ die Form

$$\mathbb{Q}(Z_1 = \omega_1, \dots Z_T = \omega_T) = p_*^{|\{t \leqslant T : \omega_t = u\}|}(1-p_*)^{|\{t \leqslant T : \omega_t = d\}|}$$

haben. Somit ist $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_*$. □

(3.14) Arbitragefreier Preis einer Call-Option im Binomialmodell

Der eindeutige arbitragefreie Preis C_{call} einer Call-Option auf das erste (und einzige nichttriviale) Basisgut S^1 im Binomialmodell mit Strike-Preis K und Fälligkeit T ist zur Zeit $t = 0$ gegeben durch

$$\pi_{\text{call}} = s_0 \Psi_{T,p_{**}}\big(h(s_0,u,d,T)\big) - \frac{K}{(1+r)^T}\Psi_{T,p_*}\big(h(s_0,u,d,T)\big),$$

wobei

$$h(s_0,u,d,T) = \frac{\ln K - \ln s_0 - T\ln d}{\ln u - \ln d},$$

$$p_* = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad p_{**} = p_* \frac{u}{1+r} = \frac{u(1+r-d)}{(u-d)(1+r)},$$

und

$$\Psi_{p,T}(h) = \sum_{k>h, k \leqslant T} \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k}.$$

$\Psi_{p,T}(h)$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass eine binomalverteite Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlicheit p und T Versuchen einen Wert größer als h annimmt.

Um diese etwas unhandliche Formel auszurechnen, erinnern wir uns zunächst an die einfachere Tatsache, dass

$$\pi_{\text{call}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_{\text{call}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{(S_T^1 - K)\mathbb{1}_{\{S_T^1 > K\}}}{(1+r)^T}\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_T^1 \mathbb{1}_{\{S_T^1 > K\}}}{(1+r)^T}\right) - \frac{K}{(1+r)^T}\mathbb{Q}(S_T^1 > K)$$

gilt, wobei $\mathbb{Q}$ das eindeutige Martingalmaß ist. Der zweite Ausdruck sieht einfacher aus, wir machen ihn zuerst. Mit Hilfe der Zufallsvariable

$$Y(\omega) = |\{t \leqslant T : Z_t(\omega) = u\}|$$

erhalten wir die Gleichung

$$S_T(\omega) = s_0 u^{Y(\omega)} d^{T-Y(\omega)} = \left(\frac{u}{d}\right)^{Y(\omega)} d^T$$

Außerdem ist unter $\mathbb{Q}$ die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_* und T Versuchen. Wir berechnen

$$\mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{Q}\left(s_0 \left(\frac{u}{d}\right)^{Y(\omega)} d^T > K\right) = \mathbb{Q}\left(Y > \frac{\ln \frac{K}{s_0 d^T}}{\ln(u/d)}\right).$$

Dies ist der zweite Term der behaupteten Formel. Der erste Term ist nicht etwas ekelhafter, aber mit einem Trick machbar. Er lautet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_T^1 \mathbb{1}_{\{S_T^1 > K\}}}{(1+r)^T}\right) &= s_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{u^Y}{(1+r)^Y}\frac{d^{T-Y}}{(1+r)^{T-Y}} \mathbb{1}_{\{Y > \ln \frac{K}{s_0 d^T} / \ln \frac{u}{d}\}}\right) = \\ &= s_0 \sum_{\ln \frac{K}{s_0 d^T} / \ln \frac{u}{d} < k \leqslant T} \binom{T}{k} \left(\frac{u p_*}{1+r}\right)^k \left(\frac{d(1-p_*)}{1+r}\right)^{T-k} = (*)\end{aligned}$$

Mit der Definition $p_{**} = \frac{u}{1+r} p_*$ bekommen wir

$$1 - p_{**} = \frac{1 + r - u p_*}{1+r} = \frac{(1+r)(u-d) - u(1+r-d)}{(1+r)(u-d)} = \frac{d(u-d-(1+r-d))}{(1+r)(u-d)} = \frac{d(1-p_*)}{1+r}$$

Damit ist tatsächlich

$$(*) = s_0 \sum_{\ln \frac{K}{s_0 d^T} / \ln \frac{u}{d} < k \leqslant T} \binom{T}{k} p_{**}^k (1-p_{**})^{1-k} = s_0 \Psi_{T, p_{**}}\big(h(s_0, u, d, T)\big),$$

also der erste Term.

Übungsaufgaben:

a) Berechnen Sie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T^1/(1+r)^T)$ mit Hilfe der Zufallsvariablen Y aus der obigen Rechnung.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T^1/(1+r)^T)$ mit Hilfe der Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ das äquivalente Martingalmaß ist.

c) Begründen Sie mit Hilfe der bisher gemachten Theorie, warum $\pi_{\text{call}} > 0$ sein muss.

d) Rechnen Sie mit Hilfe der Formel die Ungleichung $\pi_{\text{call}} > 0$ nach.

e) Erinnern Sie sich, dass der zentrale Grenzwertsatz für eine Folge binomialverteilter Zufallsvariablen (Y_n) mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und je n Versuchen die Form

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\Big(\frac{Y_n - np}{\sqrt{n p(1-p)}} > c\Big) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{0,1} > c)$$

hat, wobei $\mathcal{N}_{0,1}$ die Standard-Normalverteilung ist. Bestimmen Sie damit eine geeignete Skalierung der Terme $u = u(T)$ und $d = d(T)$, $K = K(T)$, so dass die Formel für π_{call} im Grenzwert $T \to \infty$ gegen eine nichttriviale Größe konvergiert.

(3.15) Proposition

Sei $C = \frac{f(S_T^1)}{S_T^0}$ ein Derivat im Binomialmodell, das nur vom Endwert des ersten Basisigutes abhängt. Dann ist der eindeutige arbitragefreie Preis von C zur Zeit 0 durch

$$\pi(C) = \mathbb{E}_{p_*}\Big(\frac{f(S_T^1)}{S_T^0}\Big) = \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k}p_*^k(1-p_*)^{T-k}f\big(s_0u^kd^{T-k}\big)$$

gegeben, wobei $p_* = \frac{1+r-d}{u-d}$, und $\mathbb{P}_{p_*}$ das entsprechende Martingalmaß ist.

Beweis: Übung - siehe Beweis von (3.14). □

4. Die Black-Scholes-Formel

(4.1) Das Binomialmodell im Grenzwert unendlich vieler, unendlich kleiner Zeitschritte

Erinnerung: das Binomailmodell besteht aus der (deterministischen) Folge

$$S_n^0 = (1+r)^n, \qquad 0 \leqslant n \leqslant T,$$

und dem stochstischen Prozess

$$S_n^1 = s_0\prod_{i=0}^{n}Y_i \qquad 0 \leqslant n \leqslant T,$$

wobei Y_i uiv Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = p, \qquad \mathbb{P}(Y_i = d) = 1-p$$

gilt. Hierbei muss $d < 1+r < u$ sein, damit das Modell arbitragefrei ist. In diesem Fall ist es auch vollständig, also jedes Derivat ist replizierbar, und das eindeutige äquivalente Martingalmaß ist mit $p = p_* = \frac{1+r-d}{u-d}$ gegeben.

Bisher hatten wir angenommen, dass jedes $n \leqslant T$ eine Handelsperiode darstellt, also etwa einen Tag, eine Stunde oder eine Minute. Wir wollen nun den Grenzübergang zu unendlich vielen, unendlich kleinen Zeitschritten machen. Der Endzeitpunkt soll aber nach wie vor gleich T sein, wir wollen also nur die Anzahl der möglichen Käufe und Verkäufe erhöhen, nicht die tatsächliche Zeit T, die wir am Markt verbringen. Wir teilen also das Zeitintervall $[0, T]$ statt in T Schritte nun in N Schritte und senden $N \to \infty$. Damit hierbei etwas sinnvolles herauskommt, ist es plausibel, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sein sollten:

- Die Zinsrate r muss so angepasst werden, dass nach N Schritten eine Größe herauskommt, die im Grenzwert $N \to \infty$ noch konvergiert. Das kennt man so schon aus der elementaren Zinsrechnung, mit $r_N = \frac{\tilde{r}T}{N}$ ist dann $S_N^0 = (1 + r_N)^N \to \exp(\tilde{r}T)$ wenn $N \to \infty$. Mit der Wahl $\tilde{r} = \ln(1 + r)$ erhält man wieder $S_N^0 = (1 + r)^T$ wie im ursprünglichen Modell.
- Die Preissprünge für jede einzelne Handelsaktion sollten mit $N \to \infty$ immer kleiner werden. Denn sonst würde der Preis in immer kürzeren Zeitabschnitten wild hin und her springen, und im Grenzwert vermutlich nicht mehr definiert sein.

- Die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten und die Parameter u und d müssen so eingerichtet werden, dass im Grenzwert $N \to \infty$ der zu erwartende Gewinn aus S^1 immer noch mit dem reinen Zinsgewinn vergleichbar ist. Wenn nämlich beispielsweise $S_N^1 \to \infty$ (beispielsweise fast sicher) wenn $N \to \infty$, dann ist das Modell nicht sinnvoll, weil man dann niemals die risikolose Anlage wählen würde.

Es stellt sich heraus, dass die folgenden Skalierungen die richtigen sind:

$$\begin{aligned}
r_N &= \frac{rT}{N},\\
u_N &= 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{rT}{N},\\
d_N &= 1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{rT}{N},\\
p_N &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}}\right),\\
S_{n,N}^0 &= (1 + r_N)^n,\\
S_{n,N}^1 &= s_0 \prod_{i=1}^{n} Y_{i,N} \qquad \text{mit } (Y_{i,N})_{i\in\mathbb{N}} \text{ uiv und } \mathbb{P}(Y_i = u_N) = p_N = 1 - \mathbb{P}(Y_i = d_N).
\end{aligned}$$

Hierbei sind $r \in \mathbb{R}$ (aber dann nur für N mit $\frac{rT}{N} > -1$), $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $T > 0$.

Beobachtungen: Die Ausdrücke für u_N und d_N sind „der Größe nach" geordnet, aber eine andere Schreibweise ist vielleicht erhellender:

$$u_N = 1 + r_N + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}, \qquad d_n = 1 + r_N - \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.$$

Das heißt, dass sich beim Basisgut S_n^1 in jeder Handelsperiode zu dem deterministischen Term $1 + r_N$, der ja die multiplikative Veränderung von S_n^0 beschreibt, jeweils ein zufälliger Term $\pm\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$ dazugezählt wird. Die Wahrscheinlichkeit für $+$ oder $-$ ist hier sehr nahe bei $1/2$, wenn N groß ist, die Größe $\frac{\mu-r}{\sigma}$ gibt an, ob ein leicht besseres Wachstum als S^0 wahrscheinlicher ist (falls $\mu > \sigma$), oder ob S^1 eher schwächer wächst als S_0 (falls $\mu < \sigma$).

(4.2) Proposition

Im gemäß (4.1) skalierten Binomialmodell gilt:

a) $\lim_{N\to\infty} S^0_{\lfloor tN\rfloor,N} = \mathrm{e}^{rtT}$ für alle $0 \leqslant t \leqslant 1$.

b) Für alle N ist das Modell arbitragefrei.

c) Das äquivalente Martingalmaß ist durch $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_{1/2}$ gegeben, also $\mathbb{Q}(Y_{n,N} = u_N) = \mathbb{Q}(Y_{n,N} = d_N) = \frac{1}{2}$.

d) Für alle N, i gilt:

$$\mathbb{E}(Y_{i,N}) = 1 + \frac{\mu T}{N}, \qquad \mathbb{V}(Y_{i,N}) = \frac{\sigma^2 T}{N}\Big(1 - (2p_N - 1)^2\Big),$$

insbesondere $\lim_{N\to\infty} N\mathbb{V}(Y_{i,N}) = \sigma^2 T$.

Beweis:
a) Es gilt

$$S^0_{\lfloor tN\rfloor,N} = \Big(1+\frac{rT}{N}\Big)^{\lfloor tN\rfloor} = \Big(1+\frac{rtT}{tN}\Big)^{tN}\Big(1+\frac{rtT}{tN}\Big)^{-\varepsilon(N)}$$

mit $0 \leqslant \varepsilon(N) \leqslant 1$. Der erste Faktor konvergiert gegen e^{rtT} wenn $tN \to \infty$, der zweite gegen 1.
b) Das gilt wegen $d_N < 1 + r_N < u_N$.
c) Das äquivalente Martingalmaß ist gegeben durch $\mathbb{P}_{p_*}$ mit

$$p_* = \frac{1+r_N-d_N}{u_N-d_N} = \frac{\sigma\sqrt{T/N}}{2\sigma\sqrt{T/N}} = \frac{1}{2}.$$

d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{i,N}) - 1 - \frac{rT}{N} &= \mathbb{E}(Y_{i,N} - 1 - \frac{rT}{N}) = p_N\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} + (1-p_N)(-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}) = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}(2p_N-1) = \\ &= \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}} = (\mu-r)\frac{T}{N},\end{aligned}$$

stellen die Gleichung um, und erhalten $\mathbb{E}(Y_{i,N}) = 1 + \frac{\mu T}{N}$. Um $\mathbb{V}(Y_{i,N})$ halbwegs schmerzfrei zu berechnen greifen wir zu einem Trick: wir schreiben

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y_{i,N}) &= \mathbb{V}(Y_{i,N} - 1 - \tfrac{rT}{N}) = \mathbb{V}\Big(\sigma\sqrt{\tfrac{T}{N}}\mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=u_N\}} - \sigma\sqrt{\tfrac{T}{N}}\mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=d_N\}}\Big) = \\ &= \sigma^2\frac{T}{N}\mathbb{V}(\mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=u_N\}} - \mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=d_N\}}) = \\ &= \sigma^2\frac{T}{N}\mathbb{E}\Big((\mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=u_N\}} - \mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=d_N\}})^2\Big) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=u_N\}} - \mathbb{1}_{\{Y_{i,N}=d_N\}})^2 = \\ &= \sigma^2\frac{T}{N}(1-(2p_N-1)^2).\end{aligned}$$

□

Als nächstes wollen wir ausrechnen, was der Grenzwert des arbitragefreien Preises eines Derivates der Form $C_N = f(S^1_{T,N})/S^0_{T,N}$ im Grenzwert $N \to \infty$ ist. Mit Proposition (3.15) könnte man das mit viel Mühe tun, indem man die in (4.1) eingeführte Skalierung einsetzt. Es gibt aber einen besseren Weg, nämlich die Konvergenz der Zufallsvariablen $S^1_{\lfloor tN\rfloor,N}$ (in Verteilung) zu zeigen. Um dies zu tun, brauchen wir einen einfachen, aber nützlichen allgemeinen Satz.

(4.3) Satz von Slutzky

Seien X, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable, und es gelte

$$X_n \to X \quad \text{in Verteilung, und} \qquad \|X_n - Y_n\| \to 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Dann gilt $Y_n \to X$ in Verteilung.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{E}(f(Y_n) - f(X)) \to 0$ für alle beschränkten, stetigen Funktionen f. Hierzu stellen wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(f(Y_n) - f(X)) = \mathbb{E}(f(Y_n) - f(X_n)) + \mathbb{E}(f(X_n) - f(X)),$$

und da der zweite Term nach Voraussetzung gegen 0 konvergiert, müssen wir uns nur noch um den ersten kümmern.

Sei dazu zunächst f sogar Lipschitz-stetig, es existiere also ein $L < \infty$ mit $|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $c > 0$ die Ungleichung

$$|f(X_n) - f(Y_n)| \mathbb{1}_{\{\|X_n - Y_n\| \leqslant c\}} \leqslant L\|X_n - Y_n\| \mathbb{1}_{\{\|X_n - Y_n\| \leqslant c\}} \leqslant Lc \mathbb{1}_{\{\|X_n - Y_n\| \leqslant c\}} \leqslant Lc,$$

und somit

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(Y_n) - f(X_n))| &\leqslant \mathbb{E}(|f(Y_n) - f(X_n)| \mathbb{1}_{\{\|X_n - Y_n\| \leqslant c\}}) + \mathbb{E}(|f(Y_n) - f(X_n)| \mathbb{1}_{\{\|X_n - Y_n\| > c\}}) \\ &\leqslant Lc + \|f\|_\infty \mathbb{P}(\|X_n - Y_n\| > c). \end{aligned}$$

Da der zweite Term nach Voraussetzung mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt

$$\limsup_{n \to \infty} |\mathbb{E}(f(Y_n) - f(X_n))| \leqslant Lc$$

für alle $c > 0$, somit ist der $\limsup$ gleich null für alle Lipschitz-stetigen, beschränkten f.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es für die Konvergenz in Verteilung ausreicht, Lipschitz-stetige (statt alle stetigen) Funktionen zu betrachten. Dies verbleibt als Übung. □

(4.4) Satz

Sei $0 \leqslant t \leqslant 1$. Im Binomialmodell mit der Skalierung aus ((4.1)) konvergiert die Verteilung von $\ln S^1_{\lfloor tN \rfloor, N}$ unter dem Martingalmaß $\mathbb{P}_{p_*}$ für $N \to \infty$ gegen eine Normalverteilung mit Mittelwert

$$m = \ln s_0 + rtT - \sigma^2 tT/2$$

und Varianz $\sigma^2 tT$. Anders ausgedrückt: für jede stetige, beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}_{p_*}\big(f(\ln S^1_{\lfloor tN \rfloor, N})\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 tN}} \int f(x)\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2 tT}}\, \mathrm{d}x.$$

Interpretation der Parameter: $t \in [0, 1]$ bstimmt den Zeitpunkt tT innerhalb des (stetigen) Intervalls $[0, T]$, zu dem man den Preis wissen möchte. Zum Zeitpunkt 0 erhält man die degenerierte Gaußverteilung und bekommt fast sicher den Preis s_0 für das Handelsgut, so wie es sein sollte. Der Parameter μ aus (1.1) taucht hier nicht auf, da er nur im Maß p_N enthalten ist, das aber hier gar nicht verwendet wird! Stattdessen betrachten wir nur das Martingalmaß, also $\mathbb{P}_{p_*}$ mit $p_* = 1/2$. Siehe aber auch (4.5) unten.

Interessant ist, der asyptotische Mittelwert von $\ln S^1_{\lfloor tN \rfloor, N}$: man könnte meinen, dass er durch $\ln s_0 + rtT$ gegeben ist, weil ja unter dem Martingalmaß „im Mittel“ eine Überschreitung der Zinsrate rT/N ebenso wahrscheinlich ist wie eine Unterschreitung, und u_n und d_N ja symmetrisch um $1 + rT/N$ gelegen sind. Daher wäre $S^1_{\lfloor tN \rfloor, N} \sim s_0\, \mathrm{e}^{rtT}$ zumindest plausibel. Die Anwesenheit des Korrekturterms $tT\sigma^2/2$ kommt daher, dass wir eine Taylor-Entwicklung des Logarithmus machen werden, und es stellt sich heraus, dass hierbei nicht nur der Term erster Ordnung (der kein σ enthält) wichtig ist, sondern auch der Term zweiter Ordnung. Dies sieht man am besten direkt am

Beweis von Satz (4.4):
Wr schreiben zunächst

$$Y_{i,N} = 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N}$$

mit (ξ_i) uiv und $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Dann hat

$$\tilde{S}_{t,N} := s_0 \prod_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \left(1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N}\right)$$

die gleiche Verteilung wie $S_{\lfloor tN \rfloor, N}$ unter $\mathbb{P}_{p_*}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \ln \tilde{S}_{t,N} &= \ln s_0 + \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \ln\left(1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N}\right) \\ &= \ln s_0 + \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \left(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N} - \frac{(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N})^2}{2} + R_2\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N}\Big)\right), \qquad (*) \end{aligned}$$

letzteres wegen der Taylorentwicklung zweiter Ordnung des Logarithmus, nämlich

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R(x) \qquad \text{mit} |R_2(x)| \leqslant c|x|^3$$

für alle $|x| < 1/2$ und ein geeignetes $c < 0$ (Übungsaufgabe!). Wir können nun die einzelnen Terme getrennt betrachten. Zunächst $|\xi_i| = 1$, und daher für $N > 1$ groß genug

$$\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N} < \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{(\sigma\sqrt{T} + rT)}_{=:c_0} < 1/2.$$

Somit ist

$$|R_2\Big(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N}\Big)| \leqslant c_0 N^{-3/2},$$

und da die Summe in $(*)$ nur N Terme hat, verschwindet die Summe über die R_2 für $N \to \infty$, $\mathbb{P}$-fast sicher (eigentlich sogar für alle ω). Die Summe $\sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \frac{rT}{N}$ konvergiert einfach gegen rtT, und wegen des zentralen Grenzwertsatzes gilt

$$\sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i = \sigma\sqrt{tT}\frac{1}{\sqrt{tN}} \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \xi_i \xrightarrow{d} \sigma\sqrt{tT}\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0, \sigma^2 tT).$$

Der letzte verbleibende Term ist

$$-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}\xi_i + \frac{rT}{N})^2 = -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{N}\xi_i^2 - \sigma r T^{3/2} N^{-3/2}\xi_i - \frac{1}{2}\frac{r^2T^2}{N^2}.$$

Hierbei ist der erste Term wegen $|\xi| = 1$ einfach nur $-\frac{\sigma^2 T}{2N}$, und da der $\lfloor tN \rfloor$ mal summiert wird, konvergiert das gegen $-\sigma^2 tT/2$. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \sigma r T^{3/2} N^{-3/2} \xi_i = r \frac{t^{1/2} T^{3/2}}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{tN}} \sum_{i=1}^{\lfloor tN \rfloor} \sigma \xi_i \right)$$

konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0, da die eingeklammerte Summe in Verteilung konvergiert (Übung). Der letzte Term konvergiert einfach gegen 0, da die $\lfloor tN \rfloor$ Summanden nicht gegen den N^{-2}-Abfall ankommen. Somit ist $\ln \tilde{S}_{t,N}$ eine Summe aus Termen, die in Verteilung gegen

$$\ln s_0 + rtT - \frac{\sigma^2 T}{2N} + \mathcal{N}(0, \sigma^2 tT) = \mathcal{N}(m, \sigma^2 tT)$$

konvergieren und anderen, die fast sicher (und damit in Wahrscheinlichkeit) gegen 0 konvergieren. Eine (ziemlich triviale) Anwendung des Satzes von Slutzky konvergiert daher $\ln \tilde{S}_{t,N}$ selbst in Verteilung gegen $\mathcal{N}(m, \sigma^2 tT)$. □

(4.5) Übungsaufgabe

Gehen Sie den Beweis von Satz (4.4) durch und ändern Sie hierbei das Martingalmaß $\mathbb{P}_{p_*}$ in das ursprünglich gegebene Maß $\mathbb{P}_{p_N}$ ab. Berechnen Sie also den distributionellen Grenzwert der Verteilungen von $S^1_{n,N}$ unter $\mathbb{P}_{p_N}$ wenn $N \to \infty$. Vergleichen Sie dies mit der Aussage von Satz (4.4).

(4.6) Korollar

f sei eine beschränkte Funktion. Im wie in (1.1) parametrisierten Binomialmodell sei $C_N := f(S^1_{N,N})/S^0_{N,N}$ der abdiskontierte Wert eines Derivates, dessen Wert nur vom Endpreis des ersten Basisgutes abhängt. Der eindeutige arbitragefreie Preis $\pi_N(C_N)$ von C_N konvergiert dann für $N \to \infty$, und zwar ist

$$\lim_{N\to\infty} \pi_N(C_N) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{1/2}\big(f(S^1_{N,N})/S^0_{N,N}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\,\mathrm{e}^x\,)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x - \ln s_0 - (r - \sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 T}}\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Es gilt

$$\pi_N(C_N) = \mathbb{E}_{1/2}\Big(f\big(S^1_{N,N}\big)/S^0_{N,N}\Big) = \frac{1}{(1+r_N)^N} \mathbb{E}_{1/2}\Big(g\big(\ln S^1_{N,N}\big)\Big),$$

mit $g(x) = f(\,\mathrm{e}^x\,)$. Der Vorfaktor konvergiert gegen e^{-rT}, und nach Satz (4.4) konvergiert $\ln S^1_{N,N}$ in Verteilung gegen die Normalverteilung mit Mittelwert $\ln s_0 + (r - \sigma^2/2)T)^2$ und Varianz $\sigma^2 T$. Da f stetig und beschränkt ist, gilt dies auch für $g(x) = f(\,\mathrm{e}^x\,)$, somit eine erlaubte Testfunktion für die Konvergenz in Verteilung. Es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{1/2}\Big(g\big(\ln S^1_{N,N}\big)/S^0_{N,N}\Big) &= \mathbb{E}(g(Y)) \qquad (\text{mit } Y \sim \mathcal{N}(\ln s_0 + (r-\sigma^2/2)T, \sigma^2 T) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\,\mathrm{e}^x\,)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\ln s_0-(r-\sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 T}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

(4.7) Die Black-Scholes-Formel

Im reskalierten Binomialmodell betrachten wir die diskontierte Put-Option

$$C_{\mathrm{put},N} = (K - S^1_{N,N})_+/S^0_{N,N}.$$

Für ihren arbitragefreien Preis gilt

$$\lim_{N\to\infty} \pi(C_{\mathrm{put},N}) = K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big) - s_0\Phi\Big(-h - \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big),$$

wobei

$$h = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}}\Big(\ln\frac{s_0}{K} + rT\Big),$$

und

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

Beweis: Da $f(x) = (K-x)_+$ stetig und beschränkt ist, ist dies ein Spezialfall von (4.6), und wir müssen den Ausdruck

$$I = \frac{\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(K - \,\mathrm{e}^x\,\big)_+\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\ln s_0-(r-\sigma^2/2)T)^2}{2\sigma^2 T}}\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Wir benutzen die Substitution

$$y = \frac{x - \ln s_0 - (r-\sigma^2/2)T}{\sqrt{\sigma^2 T}},$$

damit ist $x = \sqrt{\sigma^2 T}y + \ln s_0 + (r-\sigma^2/2)T$, $\mathrm{d}x = \sqrt{\sigma^2 T}\,\mathrm{d}y$, und

$$I = \frac{\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\big(K - \,\mathrm{e}^{\sqrt{\sigma^2 T}y+\ln s_0+(r-\sigma^2/2)T}\,\big)_+\,\mathrm{e}^{-\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

Der erste Faktor im Integranden ist ungelich Null genau dann, wenn

$$\begin{aligned} K - \,\mathrm{e}^{\sqrt{\sigma^2 T}y+\ln s_0+(r-\sigma^2/2)T} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\sigma^2 T}y + \ln s_0 + (r-\sigma^2/2)T < \ln K \\ &\Longleftrightarrow \quad y < \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}}\Big(\ln K - \ln s_0 - (r-\sigma^2/2)T\Big) = -h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}.\end{aligned}$$

Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-h+\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}} \Big(K - \mathrm{e}^{\sqrt{\sigma^2 T} y + \ln s_0 + (r-\sigma^2/2)T}\Big)\, \mathrm{e}^{-\frac{-y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-rT} K \Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big) - \frac{\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-h+\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}} \mathrm{e}^{\sqrt{\sigma^2 T} y}\, s_0\, \mathrm{e}^{rT}\, \mathrm{e}^{-(\sigma^2/2)T}\, \mathrm{e}^{-\frac{-y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-rT} K \Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big) - \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-h+\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}} \mathrm{e}^{\sqrt{\sigma^2 T} y - \frac{\sigma^2 T}{2} - \frac{-y^2}{2}} \,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{-rT} K \Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big) - \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-h+\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{\sigma^2 T})^2} \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Im letzen Integral setzen wir nun $z = y - \sqrt{\sigma^2 T}$, dann ist $\mathrm{d}z = \mathrm{d}y$, und aus der oberen Integralgrenze $y_+ = -h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}$ wird $z_+ = -h - \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}$. Es folgt

$$
I = \mathrm{e}^{-rT} K \Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big) - s_0 \Phi\Big(-h - \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big),
$$

wie behauptet. □

(4.8) Put-Call-Parität, Black-Scholes-Formel für Call-Optionen

a) Seien $C_{\mathrm{call},N} = (S^1_{N,N} - K)_+$ die Call-Option und $C_{\mathrm{put},N} = (K - S_{N,N})_+$ die Put-Option im reskalierten Binomialmodell. Dann gilt für die arbitragefreien Preise dieser Optionen

$$
\pi(C_{\mathrm{call},N}) - \pi(C_{\mathrm{put},N}) = s_0 - \frac{K}{(1 + rT/N)^N}.
$$

b) Es gilt

$$
\lim_{N\to\infty} \pi(C_{\mathrm{call},N}) = s_0\Big(1 - \Phi\Big(-h - \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big)\Big) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\Big(1 - \Phi\Big(-h + \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big)\Big),
$$

wobei

$$
h = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}}\Big(\ln\frac{s_0}{K} + rT\Big),
$$

und

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,\mathrm{d}u
$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

Beweis:

a) Zunächst stellen wir fest, dass

$$
C_{\mathrm{call},N} - C_{\mathrm{put},N} = (S^1_{N,N} - K)_+ - (K - S^1_{N,N})_+ = S^1_{N,N} - K.
$$

Daher ist

$$
\pi(C_{\mathrm{call},N}) - \pi(C_{\mathrm{put},N}) = \frac{1}{(1+r_N)^N}\Big(\mathbb{E}_{1/2}(C_{\mathrm{call},N}) - \mathbb{E}_{1/2}(C_{\mathrm{put},N})\Big) = \mathbb{E}_{1/2}\Big(\frac{S^1_{N,N}}{(1+r_N)^N}\Big) - \frac{K}{(1+r_N)^N}.
$$

Da $\left(\frac{S^1_{i,N}}{(1+r_N)^i}\right)_{i\leqslant N}$ unter $\mathbb{P}_{1/2}$ ein Martingal ist, gilt

$$\mathbb{E}_{1/2}\Big(\frac{S^1_{N,N}}{(1+r_N)^N}\Big) = \mathbb{E}_{1/2}\Big(\frac{S^1_{0,N}}{(1+r_N)^0}\Big) = s_0,$$

dies zeigt a).
b) Wegen a) ist

$$\lim_{N\to\infty}\pi(C_{\mathrm{call},N}) = \lim_{N\to\infty}\pi(C_{\mathrm{put},N}) + s_0 - \lim_{N\to\infty}\frac{K}{(1+rT/N)^N} = \lim_{N\to\infty}\pi(C_{\mathrm{put},N}) + s_0 - K\,\mathrm{e}^{-rT}.$$

Die Behauptung folgt nun mit (4.7) und Umformung. □

(4.9) Die Ableitungen der Black-Scholes-Formel, „The Greeks"

Die Formel für den Preis eine Call-Option im Grenzwert des reskalierten Binomialmodells hängt von mehreren Parametern ab. Wir untersuchen nun, wie sich der faire Preis ändert, wenn man an diesen Parametern kleine Änderungen vornimmt. Das geeignete Werkzeug dazu sind natürlich Ableitungen.
Wir ändern etwas die Notation und definieren

$$u(s_0,\sigma,K,r,T) = \lim_{N\to\infty}\pi(C_{\mathrm{call},N}) = s_0\Big(1-\Phi(-h_+)\Big) - K\,\mathrm{e}^{-rT}\Big(1-\Phi(-h_-)\Big),$$

mit

$$h_\pm = h_\pm(s_0,\sigma,K,r,T) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}}\Big(\ln\frac{s_0}{K} + rT \pm \frac{\sigma^2 T}{2}\Big),$$

und

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$$

wie in (4.8). Bezeichne außerdem $\varphi(x) := \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ die Dichte der Normalverteilung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta &:= \partial_{s_0}u = 1-\Phi(-h_+),\\
\Gamma &:= \partial^2_{s_0}u = \frac{1}{s_0\sqrt{\sigma^2 T}}\varphi(h_+),\\
\Theta &:= \partial_T u = s_0\varphi(h_+)\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\big(1-\Phi(-h_-)\big),\\
\Lambda &:= \partial_\sigma u = s_0\varphi(h_+)\sqrt{T},\\
\rho &:= \partial_r u = KT\,\mathrm{e}^{-rT}\,(1-\Phi(-h_-)),\\
&\ \partial_K u = -\,\mathrm{e}^{-rT}\,(1-\Phi(-h_-)).
\end{aligned}$$

Aufgrund der griechischen Buchstaben werden diese Größen in der Finanzwelt auch „the Greeks" genannt. Interessant ist zum Beispiel die Tatsache dass $\Lambda > 0$ ist: dies bedeutet, dass ein Ansteigen der Volatilität immer dazu führen muss, dass der Preis einer Call-Option sich erhöht.

Um die behaupteten Formeln zu berechnen, schreiben wir

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \Phi'(x)$$

für die Dichte der Normalverteilung, und stellen fest, dass wegen

$$h_\pm^2 = \Big(h \pm \frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2}\Big)^2 = h^2 \pm \sqrt{\sigma^2 T} h + \frac{\sigma^2 T}{4} = h^2 \pm (\ln \frac{s_0}{K} + rT) + \frac{\sigma^2 T}{4}$$

die Gleichung

$$\varphi(\pm h_+) = \varphi(\pm h_-) \frac{K}{s_0} \mathrm{e}^{-rT}$$

gilt. Wegen $\partial_{s_0} h_- = \partial_{s_0} h_+ = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T} s_0}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Delta = \partial_{s_0} u &= 1 - \Phi(-h_+) + s_0 \varphi(-h_+) \partial_{s_0} h_+ - K \mathrm{e}^{-rT} \varphi(-h_-) \partial_{s_0} h_- \\ &= 1 - \Phi(-h_+) + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}} \Big(\varphi(-h_+) - \frac{K \mathrm{e}^{-rT}}{s_0} \varphi(-h_-) \Big) = 1 - \Phi(-h_+).\end{aligned}$$

Außerdem folgt dann sofort

$$\Gamma = \partial_{s_0} \Delta = \varphi(h_+) \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T} s_0}.$$

Weiter gilt

$$\partial_T h_+ = \partial_T h_- + \partial_T \sqrt{\sigma^2 T} = \partial_T h_- + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}},$$

und daher

$$\begin{aligned}\Theta = \partial_T u &= s_0 \varphi(-h_+) \partial_T h_+ + rK \mathrm{e}^{-rT} (1 - \Phi(-h_-)) - K \mathrm{e}^{-rT} \varphi(-h_-) \partial_T h_- \\ &= rK \mathrm{e}^{-rT} (1 - \Phi(-h_-)) + s_0 \varphi(-h_+) \Big(\partial_T h_- + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \Big) - K \mathrm{e}^{-rT} \varphi(-h_-) \partial_T h_- \\ &= s_0 \varphi(-h_+) \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} + rK \mathrm{e}^{-rT} (1 - \Phi(-h_-)).\end{aligned}$$

Als nächstes haben wir $\partial_\sigma h_+ = \partial_\sigma h_- + \sqrt{T}$, und daher

$$\Lambda = \partial_\sigma u = s_0 \varphi(h_+)(\partial_\sigma h_- + \sqrt{T}) - K \mathrm{e}^{-rT} \varphi(h_-) \partial_\sigma h_- = s_0 \sqrt{T} \varphi(h_+).$$

Die restlichen beiden Größen gehen genauso und verbleiben zur Übung.

(4.10) Die Black-Scholes Differentialgleichung

Wir fassen die Funktion u aus (4.9) nun nur noch als Funktion des anfänglichen Preises s_0 des Basisgutes und der Gesamtlaufzeit T auf. σ, K und r betrachten wir als Parameter. Wir schreiben dann $u(s_0, T)$ statt $u(s_0, \sigma, K, r, t)$. Die Funktion u löste dann die folgende partielle Differentialgleichung (die sogenannte Black-Scholes Differentialgleichung)

$$\partial_T u(s_0, T) = \frac{\sigma^2 s_0^2}{2} \partial_{s_0}^2 u(s_0, T) + r s_0 \partial_{s_0} u(s_0, T) - r u(s_0, T),$$

mit der Anfangsbedingung $u(s_0, 0) = (s_0 - K)_+$ für alle s_0 und der Randbedingung $u(0, T) = 0$ für alle T.

Beweis: Wir haben in (4.9) ausgerechnet, dass

$$\begin{aligned}
&\partial_T u(s_0, T) - \frac{\sigma^2 s_0^2}{2} \partial_{s_0}^2 u(s_0, T) - r s_0 \partial_{s_0} u(s_0, T) = \Theta - \frac{\sigma^2 s_0^2}{2} \Gamma - r s_0 \Delta \\
&= s_0 \varphi(h_+) \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} + rK\,\mathrm{e}^{-rT}\,(1 - \Phi(-h_-)) - \frac{s_0 \sigma}{2\sqrt{T}} \varphi(h_+) - r s_0 (1 - \Phi(-h_+)) = -r u(s_0, T).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Gültigkeit der Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung ergibt sich aus dem Wert der Call-Option zur Zeit 0, die Randbedingung aus der Tatsache, dass $S^1_{\lfloor tN \rfloor, N} = 0$ für $s_0 = 0$, und daher hat die Call-Option in diesem Fall immer den Wert 0. Sowohl Anfangs- als auch Randbedingung kann man auch durch Bildung entsprechender Grenzwerte in der expliziten Formel für u finden. □

(4.11) Die Black-Scholes Differentialgleichung für Put-Optionen

Sei nun $v = \lim_{N \to \infty} \pi(C_{\mathrm{put},N})$ der Preis der Put-Option, siehe (4.7). Dann löst auch v die Black-Scholes Differentialgleichung

$$\partial_T v(s_0, T) = \frac{\sigma^2 s_0^2}{2} \partial_{s_0}^2 v(s_0, T) + r s_0 \partial_{s_0} v(s_0, T) - r v(s_0, T),$$

aber diesmal mit der Anfangsbedingung $v(s_0, 0) = (K - s_0)_+$ für alle s_0 und der Randbedingung $v(0, T) = K\,\mathrm{e}^{-rT}$ für alle T.

Beweis: Übung.

(4.12) Stochastische Prozesse in stetiger Zeit

Bisher war unsere Strategie folgende

(1) Betrachte eine Binomialmodell für endlich viele Zeitschritte
(2) Berechne den fairen Preis einer Option mit Endwert $f(S^1_N)/S^0_N$ mittels der Formel $\pi_N(C) = \mathbb{E}_{p_*}(f(S^1_N)/S^0_N)$.
(3) Reskaliere das Binomialmodell gemäße (4.1) und betrachte den Grenzwert $\pi_N(C)$.

Eigentlich wäre es natürlicher, die Schritte 2) und 3) in umgekehrter Reihenfolge zu machen. Das bedeutet, zuerst ein Finanzmarktmodell in stetiger Zeit als Grenzwert von Binomialmodellen zu konstruieren, und dann in diesem Modell die Fragen nach dem fairen Preis einer Option zu stellen und zu beantworten. Es wäre natürlich auch sehr wünschenswert, wenn sich dadurch die Formel für den fairen Preis einer Option nicht ändern würde!

Konkret suchen wir einen Grenzwert des Preisprozesses $S^1_{n,N}$ aus (4.1), wenn wir $n = \lfloor tN \rfloor$ mit $t \in [0, 1]$ setzen. Wenn so ein Grenzwert $Z_t := \lim_{N\to\infty} S^1_{\lfloor tN \rfloor, N}$ für alle $t \leqslant 1$ existiert, dann stellt Z_t den Preis des ersten Basisgutes zur Zeit $tT \leqslant T$ dar. Bevor wir die Konvergenz der Folge untersuchen, müssen wir jedoch das Grenzobjekt selbst definieren und kennen lernen. Bei der Definition machen wir es uns zunächst sehr einfach:

Definition: Ein (reellwertiger) **stochastischer Prozess in stetiger Zeit** mit Zeitintervall $[0, T]$ ist eine Familie $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ von Zufallsvariablen (mit Werten in $\mathbb{R}$).

Das ist wirklich das Minimum, was wir verlangen können, und es ist tatsächlich so minimalistisch, dass es nicht besonders erhellend ist. Typischerweise wollen wir alle X_t auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definieren. Hierbei kommt beispielsweise die Menge $\Omega = \{f : [0,T] \to \mathbb{R}\}$ aller Funktionen von $[0,T]$ nach $\mathbb{R}$ in Frage. Als σ-Algebra nehmen wir einfach das Minimum dessen, was nötig ist:

$$\mathcal{F} = \sigma\Big(\big\{A \subset \Omega : f(t) \in B \; \forall f \in A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in [0,T]\big\}\Big)$$

Mit anderen Worten, $\mathcal{F}$ ist die kleinste σ-Algebra, die garantiert, dass die Punktauswertungen $\pi_t : \Omega \to \mathbb{R}, f \mapsto f(t)$ für alle t messbar sind. Wir setzen dann $X_t = f(t)$, und jedes W-Maß auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ liefert uns einen stochastischen Prozess.

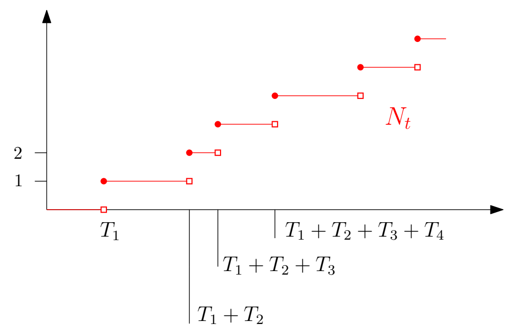
(4.13) Beispiel: der Poisson-Prozess

Seien $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uiv Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, also exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Erinnerung: die Dichte von T_1 ist dann $\rho(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\{x \geqslant 0\}}$.

Definiere die stückweise stetige, zufällige Funktion

$$N_t := \max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n T_i \leqslant t\}.$$

Siehe Abbildung rechts für eine Visualisierung des Zusammenhangs zwischen (T_i) und N_t.



Da N_t für jedes t eine Zufallsvariable ist, ist $(N_t)_{t\geqslant 0}$ ein stochastischer Prozess, der sogenannte **Poisson-Prozess** zum Parameter λ. Wegen des starken Gesetzes der großen Zahl ist

$$\mathbb{P}(N_t = \infty) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n T_i \leqslant t) \leqslant \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = 0) = 0,$$

denn es gilt ja $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i \to \mathbb{E}(T_1) > 0$ fast sicher. Also ist jedes N_t sogar eine reelle Zufallsvariable. Ist Ω_0 der W-Raum, auf dem die T_i definiert sind, so ist damit die Abbildung

$$F : \Omega_0 \to \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\}, \qquad \omega \mapsto (N_t(\omega))_{t\geqslant 0} = (\max\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n T_i(\omega) \leqslant t\})_{t\geqslant 0}$$

wohldefiniert. Man kann also den Poisson-Prozess auch auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ aus (4.12) betrachten, wenn man einfach das Bildmaß $\mathbb{P} \circ F^{-1}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ als W-Maß auf Ω nimmt. (**Übung:** prüfen Sie dazu nach, dass die Abbildung F tatsächlich $\mathcal{F}$-messbar ist!)

Wir rechnen jetzt die Verteilung der Zufallsvariable N_t aus. Da sie nur Werte in $\mathbb{N}$ annehmen kann, reicht es, $\mathbb{P}(N_t = n)$ für alle n zu kennen. Es gilt wegen der Unabhängigkeit der T_i

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n T_i \leqslant t, \sum_{i=1}^{n+1} T_i > t) = \int_0^t \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n T_i \in \mathrm{d}x)\mathbb{P}(T_{n+1} > t - x),$$

und mit der Faltungsformel

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} T_i \in \mathrm{d}x_1) &= \mathrm{d}x_1\, \rho^{*n}(x_1) = \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2\, \rho(x_1 - x_2)\rho^{*(n-1)}(x_2) \\ &= \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2\, \rho(x_1 - x_2) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_3\, \rho(x_2 - x_3)\rho^{*(n-2)}(x_3) = \ldots \\ &= \mathrm{d}x_1 \prod_{i=2}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i\, \rho(x_{i-1} - x_i)\Big)\rho(x_n) \\ &= \mathrm{d}x_1 \prod_{i=2}^{n} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_i\Big) \prod_{i=2}^{n} \rho(x_{i-1} - x_i)\rho(x_n).\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{n} \rho(x_{i-1} - x_i)\rho(x_n) &= \lambda^n \prod_{i=2}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda(x_{i-1}-x_i)}\, \mathbb{1}_{\{x_{i-1}-x_i \,\geqslant\, 0\}}\, \mathrm{e}^{-\lambda x_n}\, \mathbb{1}_{\{x_n \,\geqslant\, 0\}} \\ &= \lambda^n\, \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\, \mathbb{1}_{\{0 \,\leqslant\, x_n \,\leqslant\, x_{n-1} \,\leqslant\, \ldots \,\leqslant\, x_1\}}\end{aligned}$$

und $\mathbb{P}(T_{n+1} > t - x) = \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}$ gilt dann

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \lambda^n \int \mathrm{d}x_1 \ldots, \mathrm{d}x_n \mathbb{1}_{\{0 \,\leqslant\, x_n \,\leqslant\, x_{n-1} \,\leqslant\, \ldots \,\leqslant\, x_1 \,\leqslant\, t\}} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \lambda^n \frac{t^n}{n!}.$$

Die letzte Gleichung sieht man ganz einfach so: das Integral $\int_0^t \mathrm{d}x_1 \ldots, \int_0^t \mathrm{d}x_n$ ist einfach der Rauminhalt t^n des n-dimensionalen Würfels. Durch die Einschränkung $x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots x_1$ integriert man aber nur über einen Teil dieses Würfels. Da es $n!$ Möglichkeiten gibt, die Koordinaten der Größe nach zu ordnen, muss dieser Teil genau ein $n!$-tel des Würfels sein (man mache sich das für $n = 2$ klar!).

Die Verteilung von N_t ist also die Poisson-Verteilung, daher auch der Name des Prozesses. Allerdings reicht es bei einem stochastischen Prozess nicht, die Verteilungen von X_t für alle t zu kennen. Das sieht man beim Poisson-Prozess daran, dass ja sicher $\mathbb{P}(N_s = n, N_t = m) \neq \mathbb{P}(N_s = n)\mathbb{P}(N_t = m)$ gelten muss, denn die linke Seite ist gleich Null für $n > m$ und $s < t$, und die rechte nicht. Die Werte von N_t sind also für verschiedene t nicht unabhängig. Um einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \,\geqslant\, 0}$ wirklich zu kennen, brauchen wir also mindestens die gemeinsamen Verteilungen der (X_t, X_s) für alle $s \neq t$. Man kann sich aber leicht überlegen, dass dies auch nicht reicht, denn was ist mit drei verschiedenen Zeitpunkten, etc? Daher machen wir folgende Definition:

(4.14) Definition

a) $(X_t)_{t \,\geqslant\, 0}$ sei ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$. Für jedes n-Tupel $(t_1, \ldots, t_n)$ mit $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ ist durch

$$\pi_{t_1,\ldots,t_n} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1], \qquad \pi_{t_1,\ldots,t_n}(B) := \mathbb{P}((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in B)$$

ein W-Maß definiert. Die Familie

$$\{\pi_{t_1,\ldots,t_n} : 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n, n \in \mathbb{N}\}$$

heißt die **Familie der endlichdimensionalen Verteilungen** des stochastischen Prozesses (X_t).

b) für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion $t \to X_t(\omega)$ **Pfad** des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \geqslant 0}$.

(4.15) Bemerkung

Wenn man die Familie der endlichdimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses kennt, dann kennt man den Prozess „fast“ vollständig. Warum nicht ganz vollständig? Der Grund sind pathologische Beispiele wie das folgende: Sei T eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilung auf $[0, \infty]$, beispielsweise $\mathbb{P}(T > c) = \mathrm{e}^{-c}$. Definiere $X_t(\omega) = 0$ falls $T(\omega) \neq t$ und $X_t(\omega) = 1$ falls $T(\omega) = t$. Dann ist $(X_t)_{t \geqslant 0}$ ein stochastischer Prozess, und es gilt $\mathbb{P}(X_{t_1} = 0, \ldots, X_{t_n} = 0) = 1$ für alle $t_1, \ldots, t_n$. Der Prozess (X_t) hat also die gleichen endlichdimensionalen Verteilungen wie der (nicht wirklich stochastische) Prozess (Y_t) mit $Y_t(\omega) = 0$ für alle t. Der Grund ist, dass der einzige (zufällige) Werte $t = T(\omega)$, bei dem X_t den Wert 1 annimmt, durch die stetige Verteilung von T so gut „versteckt“ ist, dass er mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht dadurch gefunden werden kann, dass man vorher die $t_1, \ldots, t_n$ festlegt und dann nachschaut, ob man ihn gefunden hat.

Natürlich sind solche Beispiele in der Praxis nicht wichtig, aber da sie nun mal existieren, muss man damit umgehen und kann eben nicht einen stochastischen Prozess nur dadurch festlegen, dass man seine endlichdimensionalen Verteilungen festlegt. Man braucht noch gewisse Zusatzinformationen, zum Beispiel, dass alle Pfade $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig oder monoton wachsend sind - das bereitet aber wieder andere Probleme, denn beispielsweise ist die Menge $\{f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$ überhaupt keinen messbare Menge bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{F}$ aus (4.12) (dies zu zeigen ist eine nicht ganz so einfache Übung). Das Problem liegt hier in allen Fällen darin, dass man es bei einen stochastischen Prozess in stetiger Zeit plötzlich mit den überabzählbar viele Zufallsvariablen $(X_t)_{t \geqslant 0}$ zu tun hat, aber der Begriff der σ-Algebra und auch des Maßes sehr stark von Abzhählbarkeit lebt, siehe σ-Additivität und definierende Eigenschaften der σ-Algebra. Man kann diese Schwierigkeiten mit einigem technischen Aufwand beseitigen und eine sehr schöne Theorie stochastischer Prozesse entwickeln, dies wird allerdings erst in der Vorlesung „stochastische Prozesse“ passieren. Hier begnügen wir uns mit den endlichdimensionalen Verteilungen und formulieren einfach unsere Aussagen etwa vorsichtiger.

(4.16) Definition

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $(X_t^{(n)})_{t \geqslant 0}$ ein stochastischer Prozess. Man sagt, die Folge $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von stochastischen Prozessen **konvergiert im Sinne der edlichdimensionalen Verteilungen** gegen einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \geqslant 0}$, wenn gilt: für jede Wahl von $0 < t_1 < \ldots < t_m$ konvergiert die Folge von W-Maßen $\mu^{(n)}_{t_1,\ldots,t_m}$ in Verteilung gegen $\mu_{t_1,\ldots,t_m}$, wobei $\mu^{(n)}_{t_1,\ldots,t_m}$ jeweils die zu $(X_t^{(n)})_{t \geqslant 0}$ gehörigen Verteilungen und $\mu_{t_1,\ldots,t_m}$ die zu $(X_t)_{t \geqslant 0}$ gehörige Verteilung ist.

Die Abkürzung „fdd-Konvergenz“ (fdd steht für finite dimensional distributions) ist gebräuchlich.

(4.17) Erinnerung und Bemerkung

Wir erinnern uns an Satz (4.4) und benutzen unsere neue Nomenklatur. Wir haben dort den reskalierten Preisprozess bei $n = \lfloor tN \rfloor$ ausgewertet, haben

$$\tilde{S}_{t,N} := \ln S^1_{\lfloor tN \rfloor, N}$$

gesetzt, und haben gezeigt, dass $\tilde{S}_{t,N} \to \mathcal{N}(\ln s_0 + rtT - tT\sigma^2/2, \sigma^2 tT)$ in Verteilung, wenn $N \to \infty$. Mit anderen Worten: wir haben gezeigt, dass die Folge $(\tilde{S}_{\cdot,N})_{N\in\mathbb{N}}$ von stochastischen Prozessen im Sinne der *ein*dimensionalen Verteilungen gegen etwas konvergiert, das ein stochastischer Prozess sein könnte. Wenn es einen solchen stochastischen Prozess $(W_t)_{t \leqslant 1}$ gibt, der ein Grenzprozess sein sollte, dann muss zumindest $W_t \sim \mathcal{N}(\ln s_0 + rtT - tT\sigma^2/2, \sigma^2 tT)$ gelten. Das reicht aber noch nicht, um W_t zu bestimmen, aus dem gleichen Grund wie beim Poisson-Prozess. Um hier weiterzukommen, brauchen wir noch ein paar Vorbereitungen.

(4.18) Die Mehrdimensionale Normalverteilung

a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei ein W-Raum. Eine Zufallsvariable $X = (X_1, \dots X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt ***n*-dimensional normalverteilt** (oder Gaußverteilt), wenn für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Bildmaß von $L \circ X$ eine eindimensionale Normalverteilung ist. In diesem Fall heißt $\mu = (\mathbb{E}(X_1), \dots \mathbb{E}(X_n))$ der **Mittelwert** (oder Mittelwert-Vektor) von X und die symmetrische Matrix

$$C = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \Big(\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

heißt **Kovarianzmatrix** von X. Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, C)$. Falls $\mu = 0$ und $C = \mathrm{id}_n$, dann heißt X **standard-normalverteilt**.

b) Durch die Angabe von μ und C ist die Verteilung eines Gaußmaßes X vollständig festgelegt. Ebenso ist X durch seine charakteristische Funktion $\phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\phi_X(t) := \mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot X}\,)$ eideutig festgelegt. Es ist nämlich X normalverteilt mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix C genau dann, wenn

$$\phi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot\mu - \frac{1}{2}t\cdot(Ct)} \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t,\mu) - \frac{1}{2}(t,Ct)},$$

wobei ganz rechts die Klammernschreibweise für das Skalarprodukt benutzt wurde.

Bemerkung: Die Bedingung, dass $L \circ X$ für alle linearen L normalverteilt sein muss, ist echt stärker als die Bedingung, dass dies nur für die Koordinatenprojektionen der Fall sein muss, dass also $X_1, \dots, X_n$ sämtlich normalverteilt sein müssen. Der Grund ist, dass das „nicht normalverteilt sein“ gewissermaßen auf einer Diagonale stattfinden kann, und dass dieser Effekt von den Koordinatenprojektionen dann wieder unsichtbar gemacht werden kann. Sie können sich als Übung versuchen, ein Beispiel zu überlegen.

Da allerdings alle linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ durch Skalarprodukte dargestellt werden können (Satz von Riesz im Endlichdimensionalen), kann man, anstatt $L \circ X$ als normalverteilt für alle linearen L zu fordern, auch verlangen, dass $t \cdot X$ normalverteilt ist für alle $t \in \mathbb{R}^n$.

Die Beweise der obigen Aussagen über n-dimensionale Normalverteilungen werden in der Vorlesung „stochastische Prozesse“ gemacht.

(4.19) Definition

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geqslant 0}$ heißt **Gaußprozess**, wenn alle seine endlichdimensionalen Verteilungen Normalverteilungen sind.

(4.20) Proposition

Sei X eine n-dimensionale Gaußverteilung mit Mittelwert μ und Kovarianzmatrix C. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann ist die Zufallsvariable AX eine m-dimensionale Normalverteilung mit Mittelwert $A\mu$ und Kovarianzmatrix ACA^*.

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t,AX)}\,) = \mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A^*t,X)}\,) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(A^*t,\mu)-\frac{1}{2}(A^*t,CA^*t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t,A\mu)-\frac{1}{2}(t,ACA^*t)}.$$

Die mittlere Gleichheit gilt wegen der angenommenen Normalverteilung von X. Nach (4.17 b) gilt die Behauptung. □

(4.21) Die Brown'sche Bewegung

a) Definition: Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t \geqslant 0}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt **Brown'sche Bewegung**, wenn gilt:

(i): $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

(ii): Für alle $t \geqslant 0$ ist $B_t \sim \mathcal{N}_{0,t}$.

(iii): Die *Zuwächse* von B sind stationär: es gilt nämlich

$$B_{t+h} - B_{s+h} \sim B_t - B_s \qquad \text{für alle } 0 < s < t, h \geqslant 0.$$

(iv): Die Zuwächse von B sind unabhängig: für alle $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots, \leqslant t_n$ sind die Zufallsvariablen $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ unabhängig.

(v): B hat fast sicher stetige Pfade. Das heißt, es gibt eine messbare Menge $A \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) = 1$ und $t \mapsto B_t(\omega)$ stetig für alle $\omega \in A$.

b) Bemerkungen: Wir haben hier nichts darüber gesagt, ob eine Brown'sche Bewegung existiert, ob es also überhaupt einen stochastischen Prozess gibt, der all diese Bedingungen erfüllt. Dies wird erst in der Vorlesung „stochastic processes“ gemacht. Wenn es aber einen solchen Prozess gibt, dann legen (ii),(iii) und (iv) die endlichdimensionalen Verteilungen eindeutig fest: es gilt nämlich zunächst (mit der Abkürzung $B_{s,t} = B_t - B_s$) für $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$\mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n u_i B_{t_{j-1},t_j}}\,) \overset{(iv)}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j B_{t_{j-1},t_j}}\,) \overset{(iii)}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_j B_{t_j - t_{j-1}}}\,) \overset{(ii)}{=} \prod_{j=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u_j^2(t_{j+1}-t_j)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u,Cu)}$$

mit $C_{j,k} = \delta_{j,k}(t_{j+1} - t_j)$. Daher ist die Verteilung von $(B_{t_j,t_{j-1}})_{j=1,\ldots,n}$ eine n-dimensionale Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Kovarianzmatrix C. Die lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1})$$

ist bijektiv, daher ist die dazugehörige Matrix (die wir auch A nennen) invertierbar. Mit Hilfe von Proposition 4.20 können wir nun schießen, dass $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ normalverteilt mit Mittelwert $A^{-1}0 = 0$ und Kovarianzmatrix $A^{-1}C(A^{-1})^*$ ist. Daher sind die endlichdimensionalen Verteilungen der Brown'schen Bewegung tatsächlich bestimmt, wenn wir (ii)-(iv) kennen. (i) ist eigentlich redundant, denn der (singuläre) Fall $t = 0$ in (ii) beinhaltet es bereits. (v) hat nichts mit den endlichdimensionalen Verteilungen zu tun und ist technisch etwas schwieriger zu fassen, wir kümmern uns in dieser Veranstaltung aber nicht darum.

Wir wollen nun zeigen, dass die endlichdimensionalen Verteilungen der Prozesse $\tilde{S}_{t,N}$ gegen die endlichdimensionalen Verteilungen eines Prozesses konvergieren, der mittels der Brown'schen Bewegung dargestellt werden kann. Dazu zunächst:

(4.22) Lemma

$(X_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (X_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen von Zufallsvariablen, und es seien $(X_{1,n}, \dots, X_{k,n})$ unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiere für alle $j \leqslant k$ die Folge $(X_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable $\tilde{X}_j$. Seien nun $X_1, \dots, X_k$ Zufallsvariablen mit $X_j \sim \tilde{X}_j$ für alle j und $(X_1, \dots, X_j)$ unabhängig. Dann konvergiert die Folge $(X_{1,n}, \dots, X_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^k$-wertigen Zufallsvariablen in Verteilung gegen die $\mathbb{R}^k$-wertige Zufallsvariable $(X_1, \dots, X_k)$.

Beweis: Für die Konvergenz müssen wir $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_{1,n}, \dots, X_{k,n})) = \mathbb{E}(g(X_1, \dots, X_k))$ für alle stetigen, beschränkten $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zeigen. Zunächst betrachten wir nur g mit Produktstruktur, also von der Form $g(x_1, \dots, x_k) = g_1(x_1) \cdots g_k(x_k)$ mit $g_k \in C_b(\mathbb{R})$. Für solche g ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X_{1,n}, \dots, X_{k,n})) &= \mathbb{E}(g_1(X_{1,n})) \cdots \mathbb{E}(g_k(X_{k,n})) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(g_1(\tilde{X}_1)) \cdots \mathbb{E}(g_k(\tilde{X}_k)) \\ &= \mathbb{E}(g_1(X_1)) \cdots \mathbb{E}(g_k(X_k)) = \mathbb{E}(g(X_1, \dots X_k)).\end{aligned}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt dies nun auch für Funktionen der Form $g(x) = \sum_{i=1}^N g_i(x)$, wobei die g_i wieder alle eine Produktstruktur haben müssen. Schließlich kann man jede beschränkte, stetige Funktion im $\mathbb{R}^d$ durch solche Linearkombinationen von Funktionen mit Produktstruktur in der Supremumnsnorm beliebig gut approximieren. Mit den üblichen Methoden (Übung!) der Approximation folgt dann die Behauptung. □

(4.23) Satz

Sei $(S^1_{n,N})_{n\leqslant N}$ der Preisprozess im reskalierten Binomialmodell, siehe (4.1). Betrachte die stochastischen Prozesse (mit stückweise konstanten Pfaden) $(W_t^{(N)})_{0\leqslant t\leqslant 1}$ mit

$$W_t^{(N)}(\omega) = \log S^1_{\lfloor tN\rfloor,N}(\omega),$$

und den stochastischen Prozess (mit stetigen Pfaden)

$$W_t(\omega) = \ln s_0 + (r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t(\omega),$$

wobei (B_t) eine Brown'sche Bewegung ist. Dann konvergieren die Prozesse $(W^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ mit $N \to \infty$ gegen den Prozess W, im Sinne der fidi-Konvergenz. Hierbei wird angenommen, dass die Verteilung der $W_t^{(N)}$ bezüglich des Martingalmaßes $\mathbb{P}_{1/2}$ verwendet wird.

Beweis: Aus Satz 4.4 wissen wir, dass $\ln S^1_{\lfloor tN,N \rfloor}$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(\ln s_0 + (r - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$-verteilte Zufallsvariable konvergiert. Mit exakt der gleichen Rechnung sehen wir, dass für $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ in Verteilung

$$W_t^{(N)} - W_s^{(N)} = \ln S^1_{\lfloor tN,N \rfloor} - \ln S^1_{\lfloor sN,N \rfloor} \to \mathcal{N}((r - \sigma^2/2)(t-s), \sigma^2(t-s))$$

gilt - die entsprechenden Summen haben dann einfach eine andere Anzahl an Termen, und das $\ln s_0$ hebt sich heraus. Außerdem sind $(W_{t_i}^{(N)} - W_{t_{i-1}}^{(N)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ unabhängige ZVen für alle N und jede Wahl von $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$, denn in den Differenzen kommen ja immer nur unterschiedliche ξ_i vor, siehe Beweis von Satz (4.4). Nach Lemma (4.22) konvergiert also die $\mathbb{R}^n$-wertige Folge von Zufallsvariablen $(W_{t_i}^{(N)} - W_{t_{i-1}}^{(N)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ gegen die $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable $(Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})_{1 \leqslant i \leqslant n}$, mit

$$Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}((r - \sigma^2/2)(t_i - t_{i-1}), \sigma^2(t_- t_{i-1})) \sim W_{t_i} - W_{t_{i-1}}.$$

Um die letzte Gleichheit in Verteilung zu bestätigen, rechne man einfach Erwartungswert und Varianz von $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ aus und vergleiche. Daher konvergieren die endlichdimensionalen Verteilungen der Zuwächse gegen diejenigen von W, und ebenso wie in (4.21 b) sieht man, dass dies dann auch für die endlichdimensionalen Verteilungen der Prozesse gilt. Einziger Unterschied ist, dass $W_0^{(N)} = \ln s_0$ fast sicher, daher muss auch $W_t(0) = \ln s_0$ fast sicher gelten, was den ersten Summanden in der behaupteten Formel für W_t ergibt. $\square$

(4.24) Korollar

Unter dem Martingalmaß $\mathbb{P}_{1/2}$ konvergiert der reskalierte und diskontierte Preisprozess

$$Y_t^{(N)} := \frac{S^1_{\lfloor tN \rfloor, N}}{S^0_{\lfloor tN \rfloor, N}}$$

gegen die *korrigierte exponentielle Brown'sche Bewegung*

$$Y_t(\omega) = s_0 \exp\big(\sigma B_t(\omega) - t\sigma^2/2\big).$$

Der Prozess (Y_t) ist ein Martingal (in stetiger Zeit), es gilt also $\mathbb{E}(Y_t \,|\, \mathcal{F}_s) = Y_s$ für $s \leqslant t$. Hierbei ist $\mathcal{F}_s$ die von $\{Y_r : r \leqslant s\}$ erzeugte σ-Algebra.

Beweis: Übung.

(4.25) Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben gesehen, dass wir das Binomailmodell so reskalieren können, dass im Grenzwert der Preisprozess eine (korrigierte) exponentielle Brown'sche Bewegung ist. Der Grund für die *exponentielle* Brown'sche Bewegung ist einfach: eine gewöhnliche Brown'sche Bewegung ist das stetige Analogon einer einfachen Irrfahrt, geht also mit gleicher Wahrscheinlichkeit in infinitesimal kleinen Zeitschritten jeweils hinauf oder hinunter. Das bedeutet aber, dass sie auch negativ werden kann, was für Preise ja nicht sinnvoll ist. Andererseits werden die Preise in unserem

Binomialmodell immer um einen gewissen *Faktor* größer oder kleiner - das entspricht im Prinzip genau dem Exponentieren der Brown'schen Bewegung. Die einzige Schwierigkeit ist der Faktor $\sigma^2/2t$, der bei uns durch die T Taylorentwicklung entsteht, wenn man den Grenzübergang unendlich kleiner Schritte macht.

Nachdem wir nun einen Preisprozess im stetigen Modell haben, sollten wir eigentlich die gesamte Theorie der Bewertung von Derivaten nochmals machen - das heißt, wir sollten nun den stetigen Preizprozess als grundlegendes Objekt verstehen und versuchen, hiermit die faire Bewertung eines Derivates zu erhalten. Dies ist auch möglich, am elegantesten geht es mit der Theorie der stochstischen Differentialgleichungen. Diese Theorie können wir aber hier nicht einführen, sir kommt (wie so vieles andere) in der Vorlesung „stochastic processes" dran. Glücklicherweise stellt sich heraus, dass bei diesem Vorgehen wieder die gleiche Black-Scholes Formel herauskommt - die Operation „Grenzübergang zu unendlich kleinen Schritten" und „Bestimmung eines fairen Preises für ein Derivat" vertauschen also, es ist egal in welcher Reihenfolge man sie ausführt. Das ist im Allgemeinen nicht immer so, wenn Grenzübergänge im Spiel sind. Für diese Theorie (und viel mehr) sei auf das Buch von Völlmer und Schied verwiesen.

Weitere interessante Punkte, die wir hier nicht behandelt haben sind:

- **amerikanische und exotische Optionen:** bei uns durfte man die Call- oder Putoption nur am Ende des Zeitraumes, bei $t = T$, ausführen. Bei einer amerikanischen Option ist das anders - Sie dürfen jederzeit die Option aktivieren, natürlich ergibt das nur Sinn, wenn der Preis der Option so ist, dass Sie mehr als 0 bekommen. Natürlich sollten amerikanische Optionen mindestens so teuer sein wie europäische, denn man kann sie ja immerhin auch ganz zum Schluss ausüben, d.h. es gibt eine Strategie der Ausübung, die mindestens den Gewinn einer europäischen Option bringt. Tatsächlich sind sie in der Regel teurer. Es gibt Methoden, hier faire Preise zu berechnen, aber keine so schönen expliziten Formeln.
- **stochastische Volatilität:** Wir haben angenommen, dass sich die *Voaltilität* σ im Laufe der Zeit nicht ändert. Dies ist nicht so realistisch, in echten Märkten schwanken die Preise mal mehr, mal weniger, was mit politischen oder wirtschaftlichen Unsicherheiten oder ähnlichen Dingen zu tun haben kann. Eine Methode, dies zu modellieren, ist, σ (etwa in der Formel (4.24)) selbst als einen geeigneten stochastischen Prozess zu modellieren. Natürlich wird das ganze Modell sofort viel schwieriger, und es gibt keine expliziten Formeln mehr. Mit Hilfe von Numerik oder Simulation kann man aber auch hier faire Preise bestimmen.
- **Endliche Märkte, makroskopische Einflüsse:** eine de Grundannahmen in unserem Modell war es immer, dass wir in einem unendlich großen Markt agieren, und dass alle anderen Akteure keine Notiz von unseren Handlungen nehmen und völlig zufällig agieren. Das ist offensichtlich spätestens dann falsch, wenn wir ein großes Bankhaus sind. Die Tatsache, dass man selbst durch seine Handlungen den Markt bewegen kann, wird gerne genutzt (und ist oft gesetzlich verboten, was aber nichts nützt), und führt hin und wieder auch zu Rückkopplungen und Finanzkrisen. Modelle, die dies berücksichtigen, sind eigentlich immer nur noch empirisch aufzustellen und können mathematisch kaum noch analysiert werden.
- Generell gilt: **Spitzenforschung in der Finanzmathematik** findet fast gar nicht an Universitäten statt. Der Grund ist einerseits, dass ein erfolgreiches Modell so schnell so

viel Geld bringen kann, dass auch der integerste Mensch dadurch leicht korrumpierbar ist - man bietet dann seine Dienste lieber einer Bank als der Gesellschaft an. Andererseits haben viele Modelle auch die unangenehme Eigenschaft, ihren Nutzen zum Geldverdienen zu verlieren, wenn andere wissen, wie sie funktionieren und sie ebenfalls benutzen. Daher findet ein sehr großer Teil der Forschung hinter den verschlossenen Türen der Finanzfirmen statt; natürlich interessiert dort auch niemanden ein Beweis, es geht dabei mehr um die ingenierusmäßige Sicht der Dinge - was funktioniert, hat Recht, zumindest bis zum nächsten großen Crash, den dann die Allgemeinheit dankenswerterweise bezahlt. Das bedeutet nicht, dass in den Finanzfirmen nicht sehr clevere Leute sitzen, die interessante und aufregende Dinge tun - es wäre halt eben nur schöner, sie täten diese Dinge zum Nutzen der Allgemeinheit statt zum Zwecke der Selbstbereicherung...