

Mathematik für Biologinnen und Biologen

Volker Betz

1. Warum Mathematik?

Einige von Ihnen waren nach dem Abitur möglicherweise sehr froh, Mathematik vermeintlich ein für allemal hinter sich zu haben, und nun treffen Sie gleich im ersten Semester schon wieder auf dieses Fach! Sie fragen sich dann möglicherweise (zu Recht), warum Sie schon wieder damit behelligt werden. In diesem ersten Abschnitt möchte ich versuchen, Ihnen darauf ein paar Antworten zu geben, und Ihnen klar zu machen, wie Mathematik auch für Sie als Biologinnen und Biologen nützlich und sogar sehr interessant sein kann.

1.1. Verstehen. Mathematische Modelle helfen uns oft, zu verstehen, wie Prozesse in der Natur ablaufen. Sie suggerieren biologische Mechanismen, nach denen man dann gezielt suchen kann.

Beispiel 1: Fraktale und Farne

Die beiden Abbildungen unten zeigen jeweils ein Farn: das obere eine Abbildung eines Exemplars des schwarzen Streifenfanrs (*Asplenium adiantum-nigrum*), das untere ein mathematisch erzeugtes Farn, ein sogenanntes Fraktal.

Das besondere am mathematisch erzeugten Farn ist, dass man seine sehr regelmäßige und komplexe Struktur durch sehr häufige Wiederholung einer recht einfachen Abbildungsvorschrift erhält. Die folgenden Formeln müssen Sie nicht im Detail verstehen, sie sollen Ihnen nur zeigen, auf wie wenig Platz der Bauplan für das untere Farn passt.

Der grundlegende Baustein für diesen Bauplan sind vier sogenannte affine Abbildungen; eine solche affine Abbildung (in der Ebene) bildet jeden Punkt der Ebene auf einen anderen Punkt ab; hierbei wird der Punkt mit den Koordinaten (x, y) auf den Punkt mit den Koordinaten $x_{\text{neu}} = ax + by + m$ und $y_{\text{neu}} = cx + dy + n$ abgebildet. Hierbei sind a, b, m, c, d, n Platzhalter für irgendwelche Zahlen, die wir noch einsetzen werden. Wir stellen uns nun vor, dass ein Bild auf einem Blatt Papier (beispielsweise das Farn) durch eine Anzahl von Punkten dargestellt wird, und wenden diese Abbildung auf jeden dieser Punkte an. Welches Bild ergeben die neuen Punkte?



Quelle: Wikipedia

Die Wirkung der Zahlen m und n ist noch recht einfach zu verstehen, sie verschieben einfach das ganze Bild um m nach rechts und um n nach oben. Die Wirkung der Zahlen a, b, c, d ist weniger offensichtlich, sie bewirken, je nachdem wie man sie wählt, eine Drehung des Bildes mit oder gegen den Uhrzeigersinn und möglicherweise gleichzeitig eine Streckung oder Stauchung. Der genaue Zusammenhang ist für uns im Moment zu kompliziert, wir betrachten stattdessen

vier für das Farn wichtige Beispiele, nämlich die Abbildungen f_1, f_2, f_3 und f_4 mit

$$f_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i x + b_i y + m_i \\ c_i x + d_i y + n_i \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3, 4$, mit den Koeffizienten

i	a_i	b_i	c_i	d_i	m_i	n_i
1	0	0	0	0.16	0	0
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6
4	-0.15	0.28	0.24	0	0	0.44

Auf den folgenden Bildern ist dargestellt, welche Drehung, Stauchung und Verschiebung jede dieser Abbildungen erzeugt, wenn man sie auf das gesamte Farn anwendet:

	Beschreibung	Visualisierung
f_1	Stauchung auf einen vertikalen Strich	
f_2	Verkleinern, leichte Drehung im Uhrzeigersinn, schieben nach oben	
f_3	Stark verkleinern, Drehung gegen den Uhrzeigersinn, schieben nach oben	
f_4	Stark verkleinern, Drehung im Uhrzeigersinn, Spiegelung	

Bilder Quelle: Wikipedia

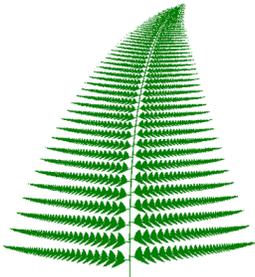
Man sieht, dass jedes mal, wenn man eine der Abbildungen auf das gesamte Farn anwendet, das Ergebnis dieser Abbildung wieder ein Teil des Farnes ist - man kann also mit Hilfe dieser Abbildungen keine zusätzlichen Punkte erzeugen. Man kann sogar beweisen, dass das abgebildete Farn die einzige geometrische Figur ist, für die dies gilt: das Farn ist also die einzige Menge von Punkten, für die das Anwenden jeder der vier Abbildungen f_1 bis f_4 jeweils keine neuen Punkte erzeugt.

Hierfür gibt es einen mathematischen Begriff: eine Punktmenge in der Ebene heißt **selbstähnlich**, wenn die ganze Menge aus Teilen besteht, die wiederum genauso aussehen wie verkleinerte,

eventuell gedrehte oder gestauchte Versionen der Gesamtmenge. Mathematisch gesprochen soll es eine (oder mehrere) affine Abbildungen geben, so dass die Anwendung jeder dieser affinen Abbildungen auf die gesamte Menge eine Teilmenge der ursprünglichen Menge liefert. Umgekehrt bedeutet das natürlich auch, dass die einzelnen Teile genau so aussehen wie die gesamte Menge, nur eben gedreht, gestaucht und verkleinert - und genau das ist ja bei dem Farn für alle „Blätter“ auch der Fall!

So viel also zur Mathematik - aber was kann man daraus verstehen, und was hat das mit Biologie zu tun? Hierbei ist die gerade erwähnte Selbstähnlichkeit ein guter Ansatzpunkt: wenn das Farn beim Wachsen einen Mechanismus benutzt, der immer wieder Verzweigungen hervorruft, dann verzweigt sich zunächst der Stamm zu den Blättern, diese verzweigen sich wieder zu kleineren Blättern und so weiter. Hat man dies erkannt, kann man in den biochemischen Prozessen der Pflanze nach solchen Wachstumsmechanismen suchen und diese zu verstehen versuchen; man weiß also dank der mathematischen Theorie möglicherweise etwas besser, wonach man Ausschau halten sollte.

Noch interessanter wird es aber, wenn man die Parameter a_i , b_i etc. etwas verändert: es ergeben sich dann andere Figuren, die ebenfalls Farnen ähnlich sind, welche wirklich in der Natur vorkommen (siehe Abbildung unten)! Daraus kann man schließen, dass all diese Farne den gleichen Wachstumsmechanismus benutzen, der sich aber im Detail etwas unterscheidet, was zu unterschiedlichen Formen führt. Wenn man mutig ist, kann man sogar vermuten, dass es einige wenige Stellen im Erbgut der Pflanze geben muss, die diese Unterschiede erzeugen, und sich auf die Suche nach diesen Stellen machen.



Thelypteridaceae Quelle: Wikipedia



Leptosporangiate Quelle: Wikipedia



Wer mehr wissen will (insbesondere auch dazu, wie man die Bilder der mathematischen Farne mit Hilfe eines Zufallsmechanismus erzeugt), sollte im Internet nach „Barnsley Fern“ suchen.

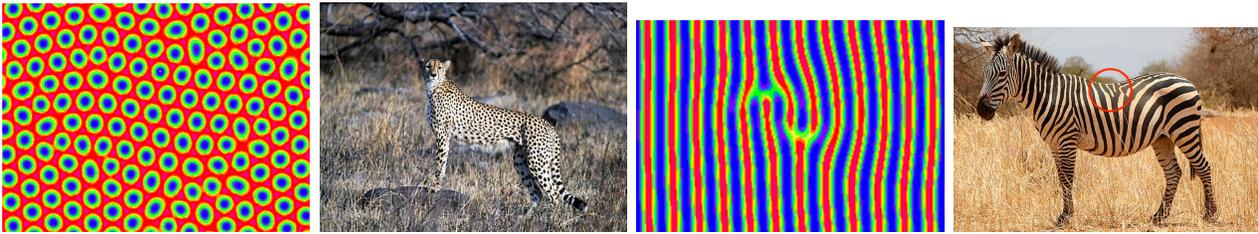
Beispiel 2: Fellmuster

Wie entwickeln sich die Fellmuster bei Leoparden und Zebras? Eine einfache Theorie wäre, dass beim Wachstum die Zellen für dunkle und helle Fellfärbung jeweils bevorzugt gleichfarbige Zellen produzieren, während eine Durchmischung von hellen und dunklen Zellen weniger vorkommt. Eine Möglichkeit, diese Idee quantitativ zu machen und in Mathematik zu verpacken, ist die **Swift-Hohenberg-Gleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - (1 + \nabla)^2 u + f(u),$$

wobei $u = u(x, y, t)$ eine Funktion der Zeit t und des zweidimensionalen Ortes (x, y) ist, r eine reelle Zahl, ∇ der Gradientenoperator, und f eine zum Modell passende nichtlineare Funktion. Die einfache Wahl $f(u) = cu^2 - u^3$ führt schon zu sehr interessanten Ergebnissen.

Diese Gleichung ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, und Sie müssen sie weder zum jetzigen Zeitpunkt noch nach Ende dieses Semesters verstehen können - es geht lediglich darum, zu zeigen, dass es ein exaktes mathematisches Modell gibt, das beschreiben soll, wie sich Muster bilden. Viele Aspekte dieser Gleichung sind immer noch Gegenstand der mathematischen Forschung, selbst die Mathematiker verstehen diese Gleichung also nicht vollständig! Was man aber tun kann, ist, sie mit Hilfe eines Computers zu lösen. Die Bauart der Gleichung führt dazu, dass die Werte der Funktion $u(x, y, t)$ nach einiger Zeit bevorzugt sehr nahe bei nur noch zwei verschiedenen Zahlen liegen - beispielsweise 1 und 0. Wenn wir diese Funktion dann in der Ebene visualisieren, indem wir 1 blau und 0 rot färben (andere Werte gelb bzw. grün), dann ergeben sich je nach Wahl von $f(u)$ verschiedene Muster. Einige Beispiele, mit Analogien bei Tieren:



Quelle: Wikipedia

Eine genauere Untersuchung dieser Gleichung ist uns hier nicht möglich, sie zeigt aber, dass biologische Prozesse durch zum Teil sehr anspruchsvolle (gleichzeitig aber sehr kompakte) mathematische Modelle sehr gut beschrieben werden können.

Beispiel 3: Räuber-Beute-Modelle

Die einfachsten Modelle für das Verhalten von Ökosystemen sind Räuber-Beute-Modelle. Hier wird vereinfachend ¹⁾ angenommen, dass die Anzahl der Beutetiere und Räuber nicht ganzzahlig, sondern reell ist, es sind also auch 17.9835 Beutetiere erlaubt. Es gibt folgende Mechanismen:

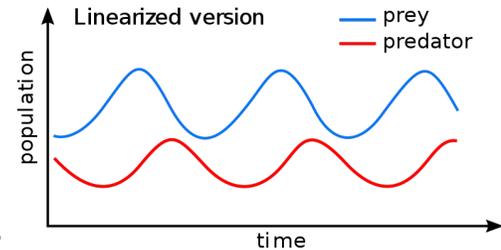
- Beutetiere vermehren sich, sterben aber umso mehr, je mehr Räuber es gibt.
- Räuber vermehren sich stärker, wenn es mehr Beutetiere gibt, sterben aber auch nach einer gewissen Zeit.

¹⁾Man kann natürlich darüber streiten, ob es wirklich einfacher ist, reelle Zahlen statt ganze Zahlen zu betrachten. Aber mathematisch erspart man sich dabei tatsächlich sehr viel Ärger.

Mathematisch kann man dies beispielsweise mit Hilfe der **Lotka-Volterra-Gleichungen** beschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (b - py(t))x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= (rx(t) - d)y(t).\end{aligned}$$

Hier ist $x(t)$ die Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t , und $y(t)$ die Anzahl der Räuber, b , r , p und d sind positive Zahlen, die je nach Modell gewählt werden. Da wir dieses Modell im Verlauf der Vorlesung noch besprechen werden, gehe ich hier noch nicht auf weitere Details ein. Die Abbildung rechts gibt aber ein Beispiel für die Kurven $x(t)$ und $y(t)$.



Quelle: Wikipedia

1.2. Vorhersagen und Steuern. Ein weiterer Einsatzbereich für Mathematik ist die Vorhersage des Verhaltens von Ökosystemen oder anderen komplexen biologischen oder biochemischen Systemen. Im Idealfall kann man sogar berechnen, auf welche Weise und wie stark man in ein System eingreifen muss, um einen gewünschten Effekt zu erzielen oder einen unerwünschten zu vermeiden. Von den folgenden Beispielen können wir nur das erste in dieser Vorlesung behandeln - die beiden anderen sind (viel) zu kompliziert und dienen nur als Ausblick.

- **Mischen und messen von wässrigen Lösungen:** Mit Hilfe des Lambert-Beer-Gesetzes kann man die Konzentration von wässrigen Lösungen bestimmen; dieses Gesetz werden wir bald kennen und hoffentlich verstehen lernen. Hat man andererseits bereits eine wässrige Lösung, möchte diese aber weiter verdünnen, dann stellt sich die Frage, wie viel Wasser man dazu schütten sollte. Diese Frage werden wir mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems bald beantworten können.
- **Kippunkte in Ökosystemen oder Klimamodellen:** diese sind meist durch sehr komplizierte Gleichungen beschrieben, die man nur am Computer simulieren kann. Trotzdem ist es nötig, die Gleichungen bis zu einem gewissen Grad lesen und verstehen zu können, um ein Gefühl dafür zu bekommen, welche Parameter in den Gleichungen realistisch sind, und wie sich die Änderung einzelner Parameter qualitativ auf das Verhalten der Lösungen auswirkt.
- **Genetik, Konformationen, Gensequenzierung:** schon allein die Entdeckung der Doppelhelixgestalt der DNA setzt mathematisches Verständnis voraus. Sehr viel Rechenzeit auf Großrechnern wird heute damit verbracht, räumliche Anordnungen (Konformationen) von Biomolekülen zu berechnen. Hier braucht man Modelle der Quantenmechanik, ebenso wie sinnvolle Vereinfachungen dieser Modelle, damit das Problem numerisch überhaupt behandelbar wird. Auch bei der Sequenzierung und Analyse von Genen benötigt man mathematische Methoden, um Mutationen verstehen oder die Sequenzierung steuern zu können.

1.3. Umgang mit großen Datenmengen. Dies wird einer der zentralen Punkte der zweiten Hälfte dieser Vorlesung sein. In der Biologie hat man es oft mit sehr großen Mengen von gemessenen Größen zu tun, mit denen man etwas sinnvolles anfangen muss. Oft sind die Messungen nicht perfekt, so dass man annehmen muss, dass die Daten mit einem (als zufällig

modellierten) Messfehler behaftet sind. Hier gibt es Methoden der Sichtbar- und Nutzbarmachung der Daten (beschreibende Statistik), des intelligenten Ratens von Gesetzmäßigkeiten (Regressionsrechnung) und Größen (Schätzer); ebenso gibt es Methoden (sogenannte Tests), mit deren Hilfe man recht genau erkennen kann, dass gewisse Gesetzmäßigkeiten vermutlich *nicht* gelten; dies ist beispielsweise wichtig, um ein unwirksames Medikament auch als solches zu erkennen - wenn nämlich die Gesetzmäßigkeit „das Medikament hilft bei Krankheit X“ nicht gilt, dann sollte man das Medikament nicht zulassen, denn sonst zahlen die Krankenkassen und damit wir alle den Hersteller für ein im besten Falle wirkungsloses Produkt.

Da auf diese Anwendungen in der Vorlesung detailliert eingegangen wird, diskutieren wir sie hier nicht weiter.

2. Grundlagen und mathematische Notation

In diesem Kapitel geht es um die mathematische Schreibweise, um grundlegende Rechenregeln, und um Mengen, die Grundbausteine der Mathematik. Vieles davon kennen Sie sicher aus der Schule, manches ist vielleicht neu oder ungewohnt, vor allem im Bereich der Notation.

(2.1) Zahlen

Mathematik handelt von Zahlen, könne man glauben. Das ist aber nicht ganz richtig - in Wirklichkeit handelt Mathematik (formal tatsächlich ausschließlich) von Mengen. Bevor wir zu diesem amüsanten, wenn auch etwas esoterischen und für Sie vielleicht nicht zentral wichtigen Aspekt kommen, wollen wir doch vorher die Zahlen wiederholen. Die für uns wichtigen Zahlen sind:

- **Die natürlichen Zahlen:** Also die Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots$. Manchmal nimmt man auch noch die 0 dazu, das ist Geschmackssache, man muss es aber vorher ausmachen. Für die Menge (siehe unten) aller natürlichen Zahlen benutzen wir das Symbol \mathbb{N} .
- **Die ganzen Zahlen:** Also $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$. Für die Menge der ganzen Zahlen benutzen wir das Symbol \mathbb{Z} .
- **Die Brüche:** Alle Zahlen der Form $\frac{a}{b}$, wobei a eine ganze Zahl und b eine natürliche Zahl ist. Also beispielsweise $1/3$, $-2963/4832$, aber auch $19/19 = 1$. Die Menge aller Brüche schreiben wir mit \mathbb{Q} .
- **Die reellen Zahlen:** Intuitiv sind das alle Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl drauf sind. Natürlich ist das keine zufriedenstellende Beschreibung, die richtige **Definition** der reellen Zahlen ist aber tatsächlich gar nicht ganz so einfach und wird hier weggelassen. Für unsere Zwecke sind die reellen Zahlen einfach „alle Zahlen, die es gibt“, also auch solche wie e , π , $\sqrt{2}$ etc. Die Menge aller reellen Zahlen schreiben wir mit \mathbb{R} .
- **Die komplexen Zahlen:** Tatsächlich sind die reellen Zahlen nicht alle, die es gibt. Es gibt auch noch die komplexen Zahlen, die beispielsweise die nützliche Eigenschaft haben, dass man mit ihrer Hilfe die Gleichung $x^2 = -5$ lösen kann; es gibt also eine komplexe Zahl z (genauer gesagt sogar zwei), deren Quadrat den Wert -5 hat; für jeden anderen negativen Zielwert A gibt es natürlich dann andere komplexe Zahlen, deren Quadrat A ist. Trotz dieser geometrisch nicht sehr intuitiven Eigenschaft (ein Quadrat mit der Seitenlänge z hätte den Flächeninhalt -5) sind die komplexen Zahlen extrem

wichtig in der Mathematik und Physik; die grundlegende Theorie der Quantenmechanik wäre beispielsweise ohne sie gar nicht formulierbar. Die Menge aller komplexen Zahlen schreiben wir mit \mathbb{C} , in dieser Vorlesung werden sie aber keine Rolle spielen.

Mit Zahlen kann man schon so einiges anfangen (wie ja die Schulmathematik bis zur achten Klasse beweist), aber richtig nützlich wird Mathematik erst mit der Einführung von **Variablen**. Der Trick hierbei ist, statt Zahlen Buchstaben des lateinischen, griechischen oder eines sonstigen (eher unüblich) Alphabets zu benutzen, die man nach Bedarf noch ein wenig dekoriert (mehr dazu weiter unten). Dies hilft beim Aufstellen allgemeiner Gesetzmäßigkeiten und auch beim Rechnen. Hierzu ein Beispiel:

(2.2) Beispiel: Mischen von wässrigen Lösungen und lineares Gleichungssystem

a) Aufgabe und Lösung ohne Variablen:

Aufgabenstellung: Eine wässrige Lösung (d.h. eine Mischung einer Chemikalie mit Wasser) heißt z.B. 30-prozentig, wenn in einem Liter Flüssigkeit 0.3 Liter der Chemikalie und 0.7 Liter Wasser sind. Nehmen Sie an, Sie haben (beliebig viel) 15-prozentige Lösung und beliebig viel reines Wasser (0-prozentige Lösung). Wie viel von jeder Flüssigkeit brauchen Sie, um 40 ml einer 2-prozentigen Lösung anzumischen?

Lösung:

(i): Der Einfachheit halber nimmt man zuerst an, dass man einen ganzen Liter mischen will. In diesem Liter sollen 0.02 Liter Chemikalie sein (2-prozentige Lösung). Natürlich dürfen wir nicht einfach 0.02 Liter der 15-prozentigen Lösung nehmen, denn diese ist ja selbst schon verdünnt - wir hätten dann nur $0.02 \cdot 0.15 = 0.003$ Liter Chemikalie.

(ii): Scharfes Nachdenken kann uns auf die Idee bringen, dass wir stattdessen $\frac{0.02}{0.15} = \frac{2}{15}$ Liter nehmen sollten, denn dann haben wir in der Tat $\frac{0.02}{0.15} \cdot 0.15 = 0.02$ Liter.

(iii): Da wir aber keinen ganzen Liter brauchen, sondern nur 40 ml (also 0.04 Liter), brauchen wir auch nur 0.04 mal die errechnete Menge der ursprünglichen Lösung: also

$$\frac{2}{15} \cdot 0.04[\text{l}] = \frac{2}{15} \cdot 40[\text{ml}] = \frac{16}{3}[\text{ml}] \approx 5.333[\text{ml}].$$

Wir brauchen also etwas mehr als 5 ml der 15-prozentigen Lösung, und etwas weniger als 35 ml des reinen Wassers.

b) Aufgabe und Lösung mit Hilfe von Variablen:

Aufgabenstellung: Sei $0 \leq p \leq 100$ Eine p -prozentige wässrige Lösung einer Chemikalie besteht zu $\frac{p}{100}$ aus der Chemikalie und zu $\frac{100-p}{100}$ aus Wasser. Gegeben seien eine 15-prozentige Lösung und Wasser. Wie viel von jeder Flüssigkeit brauchen Sie, um 40 ml einer 2-prozentigen Lösung anzumischen?

Lösung: x sei das verwendete Volumen der vorhandenen Lösung, y das des Wassers (jeweils in ml). Es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(I) \quad x + y = 40[\text{ml}], \quad \text{Zusammen sind es 40 ml}$$

$$(II) \quad 0.15x + 0y = 0.02(x + y), \quad \text{Gleichung für die Gesamtmenge reiner Chemikalie}$$

Hierbei repräsentiert in (II) die linken Seite die ungemischten Ausgangsprodukte, die rechte die fertige Mischung mit der erwünschten Konzentration von 2 Prozent. Setzt man nun (I) in (II) ein, so erhält man

$$0.15x + 0y = 0.02 \cdot 40 = 0.8, \quad \text{und daher} \quad x = \frac{0.8}{0.15} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}.$$

Also ist $y = 40 - 16/3$, gleiches Ergebnis wie in a).

c) Allgemeine Mischungsformel:

Variante b) sieht zwar etwas kürzer aus, aber vielleicht nicht unbedingt einfacher. Die wahre Stärke der Benutzung von Variablen sieht man erst, wenn man folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung betrachtet:

Sei $0 < p \leq 1$. Gegeben sei eine p -prozentige Lösung einer Chemikalie und Wasser. Wieviel dieser Lösung brauchen Sie, um die M Milliliter einer q -prozentigen Lösung herzustellen, wobei $0 \leq q \leq p$ ist?

Zur Lösung sei wieder x das Volumen der verwendeten Ausgangslösung, y das des Wassers. Dann gilt

$$(I) \quad x + y = M, \quad \text{Zusammen sind es } 40 \text{ ml}$$

$$(II) \quad px + 0y = q(x + y), \quad \text{Gleichung für die Gesamtmenge reiner Chemikalie}$$

Somit ist $px = qM$, und daher

$$x = \frac{q}{p}M, \quad \text{und} \quad y = (M - \frac{q}{p}M) = M(1 - \frac{q}{p})$$

Wir haben also eine allgemeine Formel zum Mischen von Lösungen gefunden; wenn wir eine neue Lösung ansetzen wollen, müssen wir nicht jedes mal die Rechnung von Neuem machen, sondern können (wenn wir p, q und M kennen) die erforderliche Menge direkt ablesen.

Eine Frage zum Nachdenken: oben haben wir verlangt, dass $0 \leq q \leq p$ ist; was passiert wenn $q = 0$ ist, was wenn $q = p$ ist? Für $q > p$ bekommen wir immer noch Werte für x und y heraus - warum ergeben diese im Zusammenhang mit der Anwendung aber keinen Sinn?

(2.3) Regeln für das Aufschreiben von Mathematik mittels Buchstaben

- (1) Buchstaben benutzt man als **Platzhalter** für mathematische Objekte, also für Zahlen, Mengen, Funktionen etc. Vor oder sofort nach der ersten Erwähnung des Buchstabens muss man erklären, wofür dieser stehen soll, also etwa „Sei x eine reelle Zahl“, „Sei $n \in \mathbb{N}$ “, oder „Sei $c > 0$ “, wobei man bei Letzterem impliziert, dass c außerdem eine reelle Zahl ist. ²⁾
- (2) Alle Rechnungen, in denen Buchstaben vorkommen, müssen für jede mögliche Besetzung der Buchstaben mit echten Zahlen stimmen. Hierbei muss man natürlich dann, wenn ein Buchstabe mehrmals in einer Formel vorkommt, für diesen auch immer die

²⁾Der zweite Teil dieser Regel wird (vor allem in der naturwissenschaftlichen Literatur) leider oft nicht beachtet, so dass man dort oft raten muss, wofür die Buchstaben stehen, wenn man mit der relevanten Spezialdisziplin nicht völlig vertraut ist.

gleiche Zahl einsetzen.

Beispiel 1: „Seien a, b reelle Zahlen, dann ist $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.“

Hier hat man eigentlich unendlich viele Aussagen (also etwa $(3 - 2)(3 + 2) = 9 - 4$, $(\pi - \sqrt{2})(\pi + \sqrt{2}) = \pi^2 - 2$ etc) in einer einzigen Formel verpackt.

Beispiel 2: „Seien $x, y > 0$, und sei $x < y$. Dann ist auch $x^2 < y^2$.“

Wenn man also zwei beliebige positive Zahlen quadriert, von denen die erste kleiner als die zweite ist, so ist auch das Quadrat der ersten kleiner als das der zweiten.

- (3) Im Prinzip kann jeder Buchstabe für jedes Objekt benutzt werden, wenn dazugesagt wird, was er bedeutet. Es gibt aber Konventionen: natürliche Zahlen bezeichnet man oft mit Buchstaben, die im Alphabet nahe bei (eigentlich vor) n stehen, also j, k, l, m, n . Reelle Zahlen oft mit Buchstaben nahe bei x , also w, x, y, z , oder vom Anfang des Alphabets: a, b, c, d . Es gibt zu viele solcher (meist ungeschriebenen) Konventionen, um sie hier aufzuführen, und keine davon ist verbindlich: wenn man dazusagt, was man meint, darf man die Dinge so nennen, wie man will.

- (4) Oft sind die 26 Buchstaben des Alphabets nicht genug; hier gibt es verschiedene Abhilfen:

- Benutzung griechischer Buchstaben: $\alpha, \beta, \phi, \Psi, \Omega$ etc.
- Verzierung der vorhandenen Buchstaben: beispielsweise $\tilde{a}, \hat{a}, \bar{a}, a^*$. Alle diese Objekte werden als völlig neue Buchstaben behandelt, d.h. a und \tilde{a} stehen für verschiedene Zahlen (wobei im Einzelfall natürlich $a = \tilde{a}$ erlaubt sein kann), die auch nichts miteinander zu tun haben müssen. Oft benutzt man aber die Verzierungen, um eng verwandte Größen zu beschreiben;

Beispiel: $c \in \mathbb{R}$ sei die Konzentration einer Chemikalie vor einer chemischen Reaktion, \tilde{c} die nach der Reaktion.

- Die Verzierungen f', f'' stehen bei Funktionen oft für die Ableitung, werden aber (was leider erst mal verwirrend ist) oft auch einfach dazu benutzt, um wie oben neue Buchstaben zu erzeugen: a, a', a'' etc.
- Eine besonders wichtige Methode, neue Buchstaben (sogar mit Zusatzfunktionen) zu schaffen, ist die *Indizierung*, die wir gleich in einem eigenen Abschnitt besprechen.

(2.4) Index-Schreibweise:

Beispiel: Mittelwerte. Hat man beispielsweise 5 reelle Zahlen v, w, x, y, z gegeben so kann man deren Mittelwert $m = \frac{1}{5}(v + w + x + y + z)$ dadurch erhalten, dass man dies alle aufaddiert und dann durch die Anzahl der vorhandenen Zahlen (in diesem Fall 5 Stück) teilt. Man kann dann verschiedene Aussagen machen, beispielsweise: falls $v \leq w \leq x \leq y \leq z$, dann ist $v \leq m \leq z$.

Es ist aber klar, dass dies für 100 oder gar 10^5 reelle Zahlen weniger komfortabel aufzuschreiben ist. Hier hilft uns die Indexschreibweise, mit deren Hilfe wir aus einem einzigen Buchstaben beliebig viele verschiedene erzeugen können. In unserem Beispiel nennen wir hierfür die Zahlen nicht v, w, x, y, z , sondern x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 , und beachten, dass jedes dieser Symbole trotzdem eine eigene Zahl darstellt. Damit können wir dann

$$m = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 + \dots + x_5$$

schreiben, und auf der rechten Seite haben wir uns schon etwas Schreibarbeit gespart.

Interessanter wird es, wenn wir 100 Zahlen haben. Wir schreiben dann:

„Seien x_1, \dots, x_{100} reelle Zahlen (zum Beispiel Messwerte), und sei $m = \frac{1}{100}(x_1 + \dots + x_{100})$ ihr Mittelwert. Falls $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{100}$ gilt, dann ist $x_1 \leq m \leq x_{100}$.“

Wir brauchen uns aber gar nicht festzulegen, wie viele Messwerte wir haben, sondern nennen die Anzahl der Messwerte einfach $N \in \mathbb{N}$. Dann lautet die gleiche Aussage:

„Seien x_1, \dots, x_N reelle Zahlen, und sei $m = \frac{1}{N}(x_1 + \dots + x_N)$ ihr Mittelwert. Falls $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N$ gilt, dann ist $x_1 \leq m \leq x_N$.“

Beobachtungen: Wir haben durch die Indexschreibweise also nicht nur beliebig viele Buchstaben erzeugt, die wir als Platzhalter für Zahlen benutzen können, sondern auch eine ganz natürliche Art, über diese Platzhalter Buchhaltung zu machen - wir können sie durchnummerieren! Dies ist sehr wichtig, wenn wir es mit großen Mengen von Daten zu tun haben.

Regeln für die Indexschreibweise:

- (1) Durch Einführung eines Index entstehen aus einem „Grundbuchstaben“ beliebig viele neue Buchstaben, die dann als Variablen dienen können; also etwa a_1, a_2, a_3 etc.
- (2) Die Anzahl der verwendeten Indizes kann selbst eine Variable sein, also etwa a_1, a_2, \dots, a_N mit $N \in \mathbb{N}$.
- (3) Wir dürfen sogar unendlich viele Indizes (und damit unendlich viele Variablen) betrachten, also beispielsweise a_1, a_2, a_3, \dots , für jede natürliche Zahl eine. In diesem Fall verwendet man für den Index eine weitere Variable, man schreibt also beispielsweise „Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei a_i eine reelle Zahl“ und hat damit auf einen Schlag unendlich viele Platzhalter geschaffen. Das gleiche kann man natürlich auch direkt bei endlich vielen tun.
- (4) Indizes lassen sich gut verwenden, um die Zahlen, die man zum Einsetzen in die Platzhalter erlaubt, näher zu beschreiben. Man kann sie beispielsweise der Größe nach ordnen, also verlangen, dass $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. Kürzer und präziser schreibt man dies durch die Forderung „Es sei $a_i < a_j$ falls $i < j$ “.

(2.5) Summen- und Produktzeichen

a) Summenzeichen: Die Indexschreibweise erlaubt beliebig viele Variablen, aber wenn man sie beispielsweise aufsummieren will, muss man immer noch auf die Auslassungspunktchen zurückgreifen. Dies hat zwei Nachteile: zum einen ist es nicht so flexibel, wie man möchte: wenn man etwa aus einer Menge von Zahlen x_1, \dots, x_{100} nur diejenigen mit geradem Index aufsummieren will, so kann man immerhin noch $x_2 + x_4 + \dots + x_{100}$ schreiben und hoffen, dass der Leser das versteht. Will man aber nur diejenigen Zahlen aufsummieren, deren Index eine Quadratzahl ist, so kann man zwar immer noch versuchen, dies mit $x_1 + x_2 + x_4 + x_9 + \dots + x_{100}$ zu tun, muss sich aber dann darauf verlassen, dass der Leser weiß, dass als erste ausgelassene Zahl die x_{16} kommt etc.

Hier hilft die Notation mit dem Summenzeichen: als Beispiel für diese betrachten wir die Gleichung (für gegebenes $N \in \mathbb{N}$ und gegebene $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N.$$

Die rechte Seite kennen wir, was bedeutet die linke? Im Grunde steht dort eine Handlungsvorschrift: Das Zeichen \sum (griechisches großes Sigma für „Summe“) sagt uns, dass wir gleich etwas summieren sollen. Hinter dem Zeichen stehen die Objekte, die summiert werden sollen, also die x_i . Unter dem Zeichen stehen zwei Informationen: nämlich wie der Index heißt, der zum Summieren benutzt wird (in unserem Fall i), und bei welcher Zahl er beginnt (in unserem Fall bei 1). Oben steht, wo er endet. Die Vorschrift lautet also: „Beginne bei $i = 1$, und mit Summe 0. Dann summiere den Wert von x_i zur bisherigen Summe, und erhöhe i um eines, so lange, bis $i = N$ ist.“

Will man nun wie oben nur alle Zahlen mit geraden Indizes oder alle Zahlen mit Quadratzahlen-Indizes summieren, so kann man das exakt ausdrücken: Für x_1, \dots, x_{100} setzen wir

$$s_1 = \sum_{i=1}^{50} x_{2i}, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{10} x_{i^2}.$$

Bevor Sie weiterlesen, versuchen Sie, zu verstehen, was hier vorgeht... falls Sie das geschafft haben, dann herzlichen Glückwunsch, in jedem Fall folgt jetzt die Erklärung:

- Die Bezeichnungen s_1 und s_2 haben keine Bedeutung, insbesondere haben sie nichts mit den Indizes zu tun, die wir für die x_i verwenden. Wir hätten sie auch s und t nennen können. Sie sollten sich nur daran gewöhnen, dass sehr viele Variablen mit Indizes daherkommen.
- Bei der Berechnung von s_1 fangen wir bei $i = 1$ an, und der erste Summand ist dann $x_{2i} = x_{2 \cdot 1} = x_2$. Dann erhöhen wir i um eins, also $i = 2$; für dieses i ist der Summand daher $x_{2i} = x_{2 \cdot 2} = x_4$. Damit wir wirklich nur bis x_{100} und nicht bis x_{200} summieren, müssen wir bei $i = 50$ aufhören, deswegen steht über dem Summenzeichen eine 50.
- Bei der Berechnung von s_2 fangen wir ebenfalls mit $i = 1$ an, der erste Summand ist daher $x_{1^2} = x_1$. Der zweite ist dann $x_{2^2} = x_4$, der dritte $x_{3^2} = x_9$ etc. Wir müssen bei $i = 10$ aufhören, da wir dann schon $x_{10^2} = x_{100}$ erreicht haben.

Man kann sogar die Indizes selbst in der Summe verwenden. Beispielsweise bedeutet $q = \sum_{i=1}^N i^2$, dass man, um q zu erhalten, alle Quadratzahlen von 1 bis N^2 aufsummieren muss. Oder: für gegebene x_1, \dots, x_N bedeutet $\sum_{i=1}^N ix_i$, dass man jedes x_i mit seinem Index i multipliziert und die Resultate alle aufsummiert.

Schließlich ist noch wichtig, dass der Index im Summenzeichen eine sogenannte „stumme Variable“ ist; wie man ihn nennt, hat keinen Einfluss auf das Ergebnis. Hat man beispielsweise die Zahlen x_1, \dots, x_N gegeben, dann ist

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{j=1}^N x_j = \sum_{a=1}^N x_a$$

etc., denn die Vorschrift, was zu tun ist, ändert sich ja nicht dadurch, dass ich den „Zählindex“ von i nach j oder a umbenenne. Ein weiterer Trick ist die Indexverschiebung: Sie sollen sich überzeugen, dass

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=0}^{N-1} x_{i+1} = \sum_{i=1000}^{N+999} x_{i-999}$$

etc. gilt.

b) Produktzeichen: Das Produktzeichen funktioniert genau wie das Summenzeichen, nur dass es für Produkte steht. Für reelle Zahlen x_1, \dots, x_n , $n \in \mathbb{N}$, gilt also

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.$$

Der Buchstabe \prod ist ein großes griechisches Pi und steht für „Produkt“. Die Indizes über und unter dem \prod -Zeichen haben genau die gleiche Bedeutung wie beim Summenzeichen. Ein Beispiel: für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n! := \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

die *Fakultät* von n . Das $:=$ -Zeichen bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird, dass also die linke Seite eine Abkürzung für das ist, was auf der rechten Seite steht.

(2.6) Rechenregeln

Wir üben die Schreibweise mit Buchstaben und Indizes etwas ein, indem wir einige aus der Schule bekannte Rechenregeln wiederholen. Sie sollten versuchen, diese Regeln mit dem zu verbinden, was Sie aus der Schule kennen, etwa indem Sie einige Zahlenbeispiele ausprobieren.

a) Klammernsetzung: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ ist

$$x+(y+z) = x+y+z, \quad x-(y+z) = x-y-z, \quad x+(y-z) = x+y-z, \quad x-(y-z) = x-y+z.$$

sowie

$$x(y+z) = xy + xz$$

Achtung: der Multiplikations-Punkt wird eigentlich immer weggelassen, wenn wir Produkte von Variablen (oder Klammern) bilden. Also xy statt $x \cdot y$. Ebenso schreiben wir eigentlich immer $3x$ statt $3 \cdot x$.

Allgemeiner gilt für $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, und $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^m y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j = x_1 y_1 + x_1 y_2 + \dots x_1 y_m + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_2 y_m + \dots + x_n y_m.$$

Wie Sie sehen, lässt sich das „jeder mit jedem“-Prinzip beim Auflösen von Klammern mit Hilfe von zwei Summenzeichen besonders elegant aufschreiben, und mit einiger Übung lässt sich damit dann auch viel besser rechnen. Wichtig ist hier aber, dass wir die Indizes für die beiden Summen mit verschiedenen Buchstaben bezeichnen, denn es darf ja vorkommen, dass etwa $i = 1$ und $j = 2$ ist, und würde man im mittleren Teil der obigen Gleichung $\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m x_i y_i$ schreiben, dann gäbe es nur die Terme $x_1 y_1, x_2 y_2$ etc, und das zweite Summenzeichen wäre etwas überflüssig. Natürlich können wir statt i und j auch k und l nehmen, nur verschieden müssen die Indizes sein.

b) Bruchrechnen:

(i) Multiplizieren und Teilen:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Falls $c, d \neq 0$, dann

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Falls $b, c \neq 0$, dann

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{cb}.$$

Allgemein gilt für a_i, c_i mit $1 \leq i \leq n$ und $c_i \neq 0$ für alle i :

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n c_i}.$$

(ii) Kürzen: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $b, c \neq 0$ gilt

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}.$$

(iii) Addieren und erweitern:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $c, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \text{aber: } \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \neq \frac{a+b}{c+d} \text{ außer wenn } a = b = 0.$$

Will man Brüche addieren, muss man sie vorher erweitern:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}.$$

Sie können feststellen, dass das Bilden des Hauptnenners ohne Ehrgeiz gemacht wird: da man nicht gezwungen ist, mit Zahlen zu hantieren, kann man hier einfach cd nehmen, statt mühsam das kleinste gemeinsame Vielfache von c und d zu suchen, nur damit man dann nicht so große Zahlen bekommt. In diesem Sinne ist Rechnen mit Buchstaben einfacher als Rechnen mit Zahlen.

Zum Abschluss noch eine etwas schwierigere Formel, nämlich die für die Addition vieler Brüche. Für a_i, c_i mit $1 \leq i \leq n$ und $c_i \neq 0$ für alle i gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i \prod_{j=1, j \neq i}^n c_j)}{\prod_{k=1}^n c_k}.$$

Die Bezeichnung $j \neq i$ im Produktzeichen zeigt an, dass man das Produkt über alle j außer $j = i$ bilden kann. Wenn Sie die letzte Formel übersetzen können und verstehen, warum die gilt, dann dürfen Sie sich etwas darauf einbilden; die ist schon recht kompliziert. Falls nicht, ist das im Moment auch noch nicht so schlimm...

c) Potenzrechnen: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist a^n eine andere Schreibweise für das n -fache Multiplizieren der Zahl 1 mit der Zahl a : setzt man $a_i = a$ für alle $i \leq n$, dann hat man

$$a^n = 1 \cdot \prod_{i=1}^n a_i = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}.$$

Man sieht daraus direkt, dass $a^0 = 1$ (und insbesondere $0^0 = 1$) gelten muss, denn wenn man die Zahl 1 gar nicht (null mal) mit der Zahl a multipliziert, dann bleibt es bei der 1.

Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $a^{1/n}$ eine Schreibweise für die n -te Wurzel: Es ist also

$$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4, \quad 81^{1/4} = \sqrt[4]{81} = 3, \quad 211^{1/100} = \sqrt[100]{211}, \quad \text{allgemein: } a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

Falls $q = \frac{m}{n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) ein Bruch ist, dann führt man die beiden oben genannten Operationen einfach hintereinander aus: Entweder man bildet zunächst a^m und zieht dann die n -te Wurzel, oder man berechnet zuerst $b = a^{1/n}$ und danach b^m . Dass hierbei wirklich beide male das gleiche herauskommt, muss man eigentlich beweisen. Wir verzichten darauf. In Formeln lautet die oben erklärte Vorschrift:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Für $a > 0$ und $x > 0$ (kein Bruch) ist nicht mehr so klar, was a^x intuitiv sein sollte. Hier gibt es mehrere mathematische Möglichkeiten, wie man weiterkommt und den einzig vernünftigen Wert für a^x festlegen kann. Keine davon ist für uns im Moment wichtig; wir begnügen uns mit der Kenntnisnahme folgender Aussagen: erstens gibt es für jedes $a > 0$ und jedes x genau eine vernünftige Wahl für den Wert von a^x ; und zweitens wird (grob gesprochen) dieser vernünftige Wert dadurch festgelegt, dass für Brüche $\frac{m}{n}$, die sehr ähnlich groß wie x sind, auch die Werte von a^x und $a^{m/n}$ sehr ähnlich sein müssen, und zwar um so ähnlicher, je ähnlicher x und m/n sind. Was das wirklich bedeutet, sehen wir erst im nächsten Kapitel.

Als letzte Abmachung legen wir noch fest, dass für $a > 0$ und $x > 0$ gilt:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Wir haben damit für jedes $a > 0$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ einen Wert für a^x abgemacht (auch wenn wir diesen Wert für $x \notin \mathbb{Q}$ nicht wirklich abgemacht haben, sondern nur behauptet, dass es einen vernünftigen gibt). Wir nennen a die **Basis** und x den **Exponent** des Ausdrucks a^x .

Damit sind wir nun in der Lage, die **sehr wichtigen Rechenregeln** für Potenzen zu wiederholen. Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} && \text{„Multiplizieren bei gleicher Basis addiert die Exponenten“} \\ a^x b^x &= (ab)^x && \text{„Multiplizieren bei gleichen Exponenten multipliziert die Basen“} \\ (a^x)^y &= (a^y)^x = a^{xy} && \text{„Potenzen von Potenzen Multiplizieren die Exponenten“} \end{aligned}$$

(2.7) Die geometrische Summe

Eine besonders wichtige Summe ist die sogenannte geometrische Summe $S_n(a) := \sum_{n=0}^n a^n$ mit $a \in \mathbb{R}$. Beispielsweise ist

$$S_9(2) = \sum_{n=0}^9 2^n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 = 1023.$$

Wenn man nun weiß, dass $2^{10} = 1024$ gilt, dann merkt man, dass der Wert von $S_9(2)$ genau um eins kleiner ist als der erste Term, den man nicht mehr dazu addiert hat (das wäre ja genau 2^{10} gewesen). Warum ist das so? Gilt das auch für andere n ?

Wir können das tatsächlich mit Hilfe unserer Rechenregeln selbst ausrechnen: da wir vermuten, dass $2^{n+1} - \sum_{i=0}^n 2^i = 1$ gilt, rechnen wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$2^{n+1} - \sum_{i=0}^n 2^i = 2 \times 2^n - \sum_{i=0}^n 2^i = 2^n + 2^n - (2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + 1) = 2^n - 2^{n-1} - \dots - 2 - 1 = 2^n - \sum_{i=0}^{n-1} 2^i.$$

Wir haben also herausgefunden, dass der Unterschied zwischen 2^{n+1} und $S_n(2)$ genau gleich groß ist wie der Unterschied zwischen 2^n und $S_{n-1}(2)$, der natürlich wieder (da n ja beliebig war) gleich groß ist wie derjenige zwischen 2^{n-1} und $S_{n-2}(2)$. Wir können uns also bis ganz „hinunter“ hangeln: die Zahl $2^{n+1} - S_n(2)$ ist gleich groß wie die Zahl

$$2^1 - S_0(2) = 2 - \sum_{i=0}^0 2^i = 2 - 2^0 = 1.$$

Damit haben wir herausgefunden, dass $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!

Wie sieht es nun mit anderen Zahlen a aus? Hier benutzen wir einen Trick, der vielleicht schwierig zu erraten ist, aber leicht zu verstehen, wenn man ihn erklärt bekommt: diesmal interessiert uns der Ausdruck $a^{n+1} - 1$, der dem Ausdruck $2^{n+1} - 1$ auf der rechten Seite der Formel für $S_n(2)$ entspricht. Wir rechnen

$$a^{n+1} - 1 = a^{n+1} + a^n + a^{n-1} + \dots + a - a^n - a^{n-1} - \dots - 1 = a \sum_{i=0}^n a^i - \sum_{i=0}^n a^i = (a - 1) \sum_{i=0}^n a^i.$$

Falls nun $a \neq 1$ ist, können wir beide Seiten der Gleichung durch $(a - 1)$ teilen, und erhalten die Formel für die geometrische Summe:

$$\text{Für alle } a \neq 1, \text{ alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Der ausgelassene Fall $a = 1$ ist übrigens auch kein Problem, auch wenn die Formel für ihn nicht gilt; können Sie herausfinden, was in diesem Fall herauskommt?

(2.8) Mengen und Elemente

Am Anfang dieses Kapitels stand, dass die gesamte Mathematik auf dem Begriff der Menge aufgebaut ist. Bisher haben wir aber nur Zahlen gesehen. In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einmal Mengen von Zahlen betrachten, allgemeinere Mengen kommen dann kurz im nächsten Abschnitt.

a) grundlegende Mengen: Für unsere Zwecke sind die grundlegenden Mengen

- die leere Menge \emptyset - sie enthält kein Element.
- die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen
- die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen,
- die Menge \mathbb{Q} der Brüche, und
- die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Man sollte sich eine Menge als Ansammlung aller ihrer Elemente vorstellen: schaut man also auf alle unendlich vielen natürlichen Zahlen auf einmal, so ist diese Ansammlung von Zahlen die Menge \mathbb{N} ; ein Element aus \mathbb{N} ist dann eine natürliche Zahl, was auch die schon benutzte Schreibweise $x \in \mathbb{N}$ erklärt - man liest dies als „ x ist ein Element aus \mathbb{N} “.

Als Analogie kann man, wenn man will, daran denken, dass die Menge der natürlichen Zahlen eine Art großer Sack mit Inhalt ist; der Inhalt besteht aus allen natürlichen Zahlen, und greift man in den Sack hinein und holt sich eine Zahl heraus, so hat man ein Element aus der Menge ausgewählt. Das schöne an dieser Analogie ist es, dass jeder zugeben wird, dass man einen Sack auch mit anderen, bereits gefüllten Säcken füllen kann, man kann also Mengen von Mengen

bilden. Das klingt etwas seltsam, wir kommen darauf aber später noch mal zurück.

b) Teilmengen: Eine Teilmenge bildet man, indem man aus einer Menge, die man schon kennt, Elemente mit gewissen Eigenschaften auswählt und in eine eigene Menge („einen eigenen Sack“) packt. Dies sind zum Beispiel die Menge aller geraden Zahlen, aller positiven reellen Zahlen, aller Primzahlen oder ähnliches. Man schreibt das dann so:

- Menge aller geraden Zahlen: $\{z \in \mathbb{Z} : z \text{ ist ohne Rest durch } 2 \text{ teilbar}\}$.
- Menge aller positiven reellen Zahlen: $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- Menge aller Primzahlen: $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ohne Rest nur durch } 1 \text{ und durch sich selbst teilbar}\}$.

Die Syntax hierbei ist immer so: innerhalb der geschweiften Mengenklammern gibt es einen vorderen und einen hinteren Teil, die mit einem Doppelpunkt getrennt sind. Im vorderen erklärt man, was die schon bekannte Menge ist, aus der man Elemente herausnehmen will (in unserem Fall \mathbb{Z} , \mathbb{R} oder \mathbb{N}), und wie man diese Elemente im zweiten Teil nennen will. Im zweiten Teil schreibt man auf, welche Eigenschaften diese Elemente haben müssen, damit man sie herausnimmt. Zwei interessante Aspekte hierbei:

1) wie auch beim Summenzeichen kommt es nicht darauf an, wie ich die Elemente der bekannten Menge nenne; ich dürfte im zweiten Beispiel also auch $\{w \in \mathbb{R} : w > 0\}$ etc. schreiben, das ergibt die gleiche Menge.

2) Es ist egal, ob ich in der Lage bin, die Bedingung wirklich zu überprüfen, nach der ich die Elemente auswähle. Niemand kennt alle Primzahlen, und trotzdem kann ich von der Menge aller Primzahlen sprechen und sogar mathematisch mit ihr arbeiten. Es ist eine der größeren Stärken der Mathematik, dass wir dadurch in der Lage sind, auch mit Objekten sinnvoll zu arbeiten, die wir nur unvollständig kennen.

Konkrete Mengen: Manchmal gibt man auch einfach alle Elemente als Aufzählung an, die man in einer Menge drin haben möchte. Das geht natürlich nur, wenn diese Menge nur endlich viele Elemente enthält. Beispiele sind $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (z.B. für die möglichen Augenzahlen eines 6-seitigen Würfels), oder $\{0, 1\}$ (für die Möglichkeiten Kopf oder Zahl beim Münzwurf). Manchmal definiert man die Menge auch direkt als $\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$, das lassen wir aber lieber bleiben, da wir nicht so genau wissen, was für Objekte Kopf und Zahl mathematisch sein sollen. Lieber codieren wir Kopf und Zahl mit den Zahlen 0 und 1 (oder mit zwei beliebigen anderen unterschiedlichen Zahlen).

Wenn man übrigens ein Element zwei mal in einer Menge aufführt, dann nützt das nichts - jedes Element darf nur einmal drin sein. Die Mengen $\{1, 2, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\}$ sind also gleich. In einem gewissen Sinn bedeutet das, dass es die Zahl 2 nur ein einziges mal im Universum gibt - wenn sie in einer Menge drin ist, ist sie drin, wenn nicht, dann nicht, aber sie kann nicht doppelt drin sein.

(2.9) Bonus-Abschnitt: Mathematik aus dem Nichts, oder die Macht der leeren Menge

Dieser Abschnitt dient lediglich Ihrer Erbauung und Erheiterung und ist für das Folgende nicht von Belang. Hier soll angedeutet werden, wie die natürlichen Zahlen (und damit schließlich die ganze Mathematik) buchstäblich aus dem Nichts, nämlich aus der leeren Menge geschaffen werden.

Ausgangspunkt ist die Erkenntnis, dass wir zwar zu wissen glauben, was natürliche Zahlen sind

(wir alle können schließlich zählen!), aber wenn wir genau darüber nachdenken, was für (mathematische) *Objekte* wir da eigentlich vor uns haben, wissen wir es vielleicht dann doch nicht mehr so genau. Hier kommt die leere Menge ins Spiel. Ihre Existenz ist das erste Zugeständnis (in der Mathematik Axiom genannt), das wir machen müssen - wir müssen uns also einig sein, dass es eine Menge gibt, die keine Elemente enthält. Das zweite Zugeständnis ist, das wir Mengen in andere Mengen verpacken können (man erinnere sich an die obige Analogie mit den Säcken!).

Wenn man diese beiden Dinge glaubt, kann man loslegen. Man nimmt die leere Menge (den leeren Sack) und packt sie in eine weitere Menge, man hat also einen Sack im Sack. Mathematisch sieht das so aus: $\{\emptyset\}$. Diese Menge nennen wir 1 (die Zahl!). Was ist die Zahl 2? Man nimmt die leere Menge und die Menge $\{\emptyset\}$ und baut daraus eine Menge, das Ergebnis ist $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, also eine Menge mit 2 Elementen. Wir nennen diese Menge 2. So machen wir weiter: Die Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ hat 3 verschiedene Elemente, wir nennen diese Menge 3. Von hier aus wird es notationstechnisch immer hässlicher, aber es geht genau so weiter.

Wir haben also eine Methode gefunden, aus der leeren Menge beliebig viele natürliche Zahlen zu erzeugen, die Sie vermutlich je nach Veranlagung für ziemlich verschroben oder recht faszinierend halten. Falls ersteres der Fall ist, dann kann ich Ihre Ansicht noch weiter untermauern - was hier angedeutet wurde, ist nur ein recht grober Hinweis, wie man die natürlichen Zahlen in der Mathematik *wirklich* konstuiert; man muss nämlich beispielsweise auch noch darüber nachdenken (bzw. ein weiteres Axiom spendieren, dass es erlaubt), ob man so wirklich alle unendlich vielen natürlichen Zahlen bekommt oder nur eine beliebige, aber endliche Anzahl - wenn Sie jetzt fragen, was da der Unterschied ist, sind sie in guter Gesellschaft, aber es gibt einen.

Zum Glück beschäftigen wir uns im Rest der Vorlesung mit Themen, die nicht annähernd so esoterisch sind wie dieses, sondern im Gegenteil ziemlich handfest und konkret.

3. Grenzwerte, Funktionen, Differentialrechnung

Auch in diesem Kapitel kommt vermutlich vieles vor, was Sie aus der Schule kennen, aber wie vorher tritt manches vielleicht im neuen Gewand auf. Gleich zu Beginn steht jedoch ein Thema, das Sie vielleicht so noch nicht kennen.

(3.1) Folgen

Eine (reelle) Folge ist eine geordnete, unendlich große Ansammlung reeller Zahlen. „Geordnet“ bedeutet hierbei nicht, dass diese Zahlen etwa der Größe nach geordnet sind oder sonst irgend einer Gesetzmäßigkeit genügen müssen, sondern nur, dass wir uns einig sind, welches die erste, welches die zweite, dritte usw. Zahl ist. Für Folgen ist die Index-Schreibweise wie geschaffen: Sind a_1, a_2, a_3, \dots reelle Zahlen, dann wird die daraus entstehende Folge in der Form $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aufgeschrieben. Die Zahlen a_1, a_2, a_3, \dots heißen die *Folgliedern* von $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, a_1 ist das erste Folgenglied, a_2 das zweite etc. Der Index i ist hierbei übrigens wieder stumm, d.h. wenn man die Zahlen a_1, a_2, \dots festgelegt hat, dann bezeichnet $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die gleiche Folge.

Bevor wir uns überlegen, was wir mit Folgen eigentlich anfangen wollen und wozu wir sie brauchen, sollten wir darüber nachdenken, wie man eigentlich unendlich viele reelle Zahlen „gleichzeitig“ bestimmen kann - mit anderen Worten, wie kann man eigentlich irgend eine konkrete Folge bauen? Hier gibt es einige Möglichkeiten:

1) Man benutzt den Index, um ein sogenanntes **explizites Bildungsgesetz** zu formulieren. Zum Beispiel

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = n^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

beschreibt die Folge aller Quadratzahlen, nach Größe geordnet. Oder:

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } c_n = (-1)^n$$

beschreibt die Folge, in der abwechselnd immer die -1 und dann die 1 auftaucht. Man beachte, dass anders als in Mengen bei Folgen durchaus die gleiche Zahl mehrmals auftreten darf. Das liegt daran, dass wir die Folgenglieder durchnummeriert haben, so dass etwa wir zwischen der -1 an der ersten Stelle von $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der -1 an der dritten Stelle unterscheiden können.

2) Man kann sich auch von Index zu Index hangeln, um die Folge zu definieren. So ein Vorgehen nennt man **rekursives Bildungsgesetz**. Zum Beispiel kann man eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt definieren:

$$b_1 = 2, \text{ und } b_{n+1} = b_n^2 \text{ für } n \geq 1;$$

man startet also bei 2 und quadriert, um das nächste Folgenglied zu erhalten, jeweils das vorherige. Die ersten 5 Glieder der Folge sind somit 2, 4, 16, 256, 65536. In diesem speziellen Fall kann man das rekursive Bildungsgesetz sogar in ein explizites übersetzen, es ist nämlich $b_n = 2^{(2^{n-1})}$ (können Sie das nachvollziehen?). Das geht aber nicht immer so leicht: Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_1 = 1, c_2 = 1, \text{ und } c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \text{ für } n \geq 2$$

erhält man dadurch, dass man ab dem dritten Folgenglied immer die beiden vorherigen Folgenglieder addiert. Dies ergibt die berühmte **Fibonacci-Folge**, die wir uns später noch ein wenig genauer ansehen werden. Auch für diese Folge gibt es ein explizites Bildungsgesetz, das aber gar nicht so leicht zu finden ist - versuchen Sie es mal!

3) Man kann Folgen auch definieren, ohne sie genau zu kennen - beispielsweise indem man festlegt, dass das n -te Glied der Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die n -te Primzahl ist. Die ersten Glieder dieser Folge sind also 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, aber niemand (auch kein Computer) kann Ihnen ohne immensen Aufwand sagen, was das 100.000.000.000-te Glied der Folge ist - auf dieser Tatsache beruht übrigens fast jeder Verschlüsselungsmechanismus im Internet!

4) Schließlich kann man Folgen auch nur teilweise definieren, indem man einfach ein paar Eigenschaften angibt, die sie haben sollen. Meist erhält man dadurch wesentlich mehr als eine Folge, also eine ganze Menge von Folgen. Beispiele sind eine Folge (w_n) mit der Eigenschaft, dass jedes w_n ein Element der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist. Jede solche Folge beschreibt das Resultat eines unendlich lang durchgeführten Spiels mit einem Würfel, bei dem die jeweils geworfene Zahl aufgeschrieben wird. Ein anderes Beispiel wäre eine Folge (x_n) , die die Eigenschaft haben soll, dass $x_n \leq 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folgen mit $x_n = 1/n$ und $x_n = 1/n^2$ sind nur zwei von unendlich vielen Beispielen, die diese Bedingung erfüllen.

(3.2) Konvergenz von Folgen

Nehmen wir an, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreibt in einem Ökosystem die Konzentration von Schadstoffen; Die Zahl a_n ist also die Konzentration am n -ten Tag. Natürlich sollten wir ein Modell für die Bildung von a_n haben, in das vielleicht Eintrag und Abfließen von Schadstoffen, Reaktion der Stoffe mit Organismen etc. eingehen; dieses Gesetz interessiert uns aber im

Moment nicht, sondern wir wollen der Frage nachgehen, wie wir beschreiben können, was mit so einem Ökosystem nach einer sehr langen Zeit passiert. Anders gefragt: was ist a_{1000} , oder $a_{10.000}$, oder $a_{10^{27}}$?

Wenn wir Grund zu der Annahme haben, dass sich im Laufe der Zeit ein Gleichgewicht in dem Ökosystem einstellt, dann sollten sich beispielsweise $a_{10.000}$ und $a_{10^{27}}$ nicht mehr sehr unterscheiden, aber völlig gleich sind die Zahlen vermutlich auch nicht. Es stellt sich also die Frage, ob man bei der Berechnung der Gleichgewichts-Schadstoffkonzentration schon mit a_{1000} zufrieden sein will, oder ob man bis $a_{10^{27}}$ oder sogar noch weiter gehen will - wo ist der richtige Zeitpunkt, um aufzuhören?

Eine mathematische Idealisierung, die sich als sehr praktisch erweist, ist es, in diesem Fall wirklich bis nach a_∞ zu gehen, wobei wir uns natürlich darüber einig werden müssen, was a_∞ sein soll - schließlich ist ∞ keine natürliche Zahl! Die Lösung ist, dass man statt a_∞ den *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nimmt, wobei man hier noch vorher sicherstellen muss, dass man dies auch unfallfrei tun kann. All dies steckt in der folgenden

Definition: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es für jede beliebige Wahl einer Zahl $\delta > 0$ möglich ist, einen Index $N \in \mathbb{N}$ zu finden, so dass gilt:

$$|a_N - a| < \delta, |a_{N+1} - a| < \delta, |a_{N+2} - a| < \delta, \dots$$

Genauer und kürzer ausgedrückt: für jedes $\delta > 0$ lässt sich ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $k \geq N$ gilt: $|a_k - a| < \delta$. Man sagt in diesem Fall, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen den Wert a . Wir schreiben dann

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Um zu verstehen, was hier gemeint ist, stellen Sie sich vor, dass die Zahl a und alle unendlichen vielen Werte a_n , $n \in \mathbb{N}$ auf dem Zahlenstrahl aufgezeichnet sind. Jemand zeichnet nun für irgend ein $\delta > 0$ das Intervall $]a - \delta, a + \delta[$, dessen Mittelpunkt die Zahl a ist, und das nach beiden Seiten von a aus noch um eine Strecke δ weiter geht. Sie haben nun das Recht, beliebig viele (aber endlich viele) von den Punkten, die durch die Zahlen a_n verursacht werden, zu löschen. Wenn es, egal wie δ gewählt wurde, möglich ist, so viele (aber bitte nur endlich viele!) Punkte zu löschen, dass danach alle noch verbliebenen Punkte in dem Intervall $]a - \delta, a + \delta[$ liegen, dann konvergiert die Folge gegen a .

Intuitiv könnte man versuchen, zu sagen: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ bedeutet, dass die Werte von a_n immer näher an den Wert a heranrücken, je größer n wird. Dies ist nicht ganz richtig, wie wir im nächsten Punkt an ein paar Beispielen sehen werden, kann aber zunächst helfen, zu verstehen, was passiert.

Wir können auch die Konvergenz gegen ∞ definieren: wir sagen, eine Folge a_n konvergiert (manchmal auch: „divergiert“) gegen ∞ , wenn für jedes $K > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ gilt: $a_n > K$. Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Mit $-\infty$ geht es genau so: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, falls jedes $K > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ gilt: $a_n < -K$.

(3.3) Beispiele

a) Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Das sieht einleuchtend aus, aber können wir es auch anhand der obigen Definition nachweisen? Ja, denn für einen Abstand $\delta > 0$ brauchen wir nur ein N mit $N > \frac{1}{\delta}$ wählen; für $k > N$ gilt dann

$$-\delta < 0 < a_k < a_N = \frac{1}{N} < \frac{1}{1/\delta} = \delta,$$

also $|a_k - 0| < \delta$.

b) Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

konvergiert auch gegen 0 (rechnen Sie das nach!). Es stimmt aber nicht, dass die Zahlen b_n der Zahl 0 „immer näher kommen“: denn es ist beispielsweise $b_9 = \frac{1}{81}$ aber $b_{10} = \frac{1}{10} > \frac{1}{81}$, und so weiter. Jedes b_n mit geradem n ist also weiter von 0 weg als sein Vorgänger! Hier sieht man die erste Ungenauigkeit der Intuition des „immer näher kommen“.

c) Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

konvergiert nicht. Denn sie rückt der 0 zwar beliebig nahe (zumindest die Glieder mit geradem n tun das) aber c_n ist eben auch für unendlich viele Glieder (die mit ungeradem n) gleich 1, und damit weit weg von der 0. Überlegen Sie sich, wie Sie Anhand der Definition feststellen können, dass (c_n) nicht konvergiert!

(3.4) Rechnen mit Grenzwerten

Um Grenzwerte von Folgen auszurechnen, benötigen wir zunächst einige Grundbausteine, das sind Folgen, wo wir den Grenzwert kennen. Solche Folgen sind beispielsweise:

- (1) Für $a_n = \frac{1}{n}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (2) Das gleiche gilt für $\tilde{a}_n = \frac{1}{n^x}$ für alle $x > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = 0$.
- (3) Für $b_n = y^n$ mit $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \begin{cases} = \infty & \text{falls } y > 1, \\ = 1 & \text{falls } y = 1, \\ = 0 & \text{falls } |y| < 1, \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } y \leq -1. \end{cases}$$

- (4) Für $c_n = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ mit $x > 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Haben wir nun eine kompliziertere Folge gegeben, deren Grenzwert wir kennen wollen, so können wir versuchen, diese aus den einfacheren Folgen zusammenzubauen. Ein Beispiel:

$$d_n = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2 + u_n}{3 + v_n}$$

mit $u_n = \frac{1}{n^2}$ und $v_n = \frac{1}{n}$. Will man nun $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ ausrechnen, so darf man Folgendes versuchen: man ersetzt die Grundbaustein-Folgen u_n und v_n durch ihre bekannten Grenzwerte, und setzt diese in den Ausdruck für d_n ein. Falls dann eine „sinnvolle Zahl“ herauskommt, dann ist dies der Grenzwert. In unserem Fall bedeutet das

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \stackrel{?}{=} \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{2 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}.$$

Da der Bruch $\frac{2+0}{3+0}$ eine „sinnvolle“ Zahl ist, darf das Fragezeichen über der ersten Gleichheit entfernt werden, und die Gleichheit gilt.

Natürlich ist der Begriff „sinnvolle Zahl“ nicht sehr zufriedenstellend; man könnte nun mathematisch präzise formulieren, was gemeint ist, das ist allerdings etwas umständlich und soll hier unterbleiben. Für uns bedeutet dies einfach, dass wir keine Ausdrücke bekommen, die von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ oder ähnliches sind. Ein Beispiel:

$$f_n = \frac{n^3 + 4}{7n^3 + n}, \quad g_n = \frac{n^3 + 4}{2n^2 + n}.$$

In beiden Fällen steht beim Einsetzen der Grenzwerte nach obigem Rezept die „Zahl“ $\frac{\infty+4}{\infty+\infty}$, also funktioniert die Methode nicht.

Allerdings ist es erlaubt, vor Anwendung der Methode an dem Bildungsgesetz der Folge herumzubasteln: Wir können zum Beispiel den Bruch in dem Ausdruck für f_n im Zähler und Nenner mit $\frac{1}{n^3}$ multiplizieren (erweitern), und bekommen :

$$f_n = \frac{\frac{1}{n^3}(n^3 + 4)}{\frac{1}{n^3}(7n^3 + n)} = \frac{1 + \frac{4}{n^3}}{7 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 0}{7 + 0} = \frac{1}{7}.$$

Aufgabe: können Sie mit dieser Methode herausfinden, was der Grenzwert der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist?

Als wichtiges und auch warnendes Beispiel schauen wir uns zum Schluss die Folge

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Eine naive (und falsche) Anwendung unserer obigen Regeln könnte zu dem Schluss führen, dass diese Folge den Grenzwert 1 hat; denn es gilt ja $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, somit wäre der Grenzwert gleich $1^\infty = 1$. Wir haben aber oben extra darauf bestanden, dass wir 1^∞ nicht zulassen, und das hat einen guten Grund. Hier ist es nämlich so, dass zwar mit immer größer werdendem n die Zahl $1 + \frac{1}{n}$ tatsächlich immer näher an die 1 herankommt, aber gleichzeitig auch zu immer höheren Potenzen erhoben wird, was das Gesamtergebnis wieder größer macht! Welcher der beiden Effekte gewinnt also?

Die Antwort ist: keiner von beiden - es gilt nämlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828 \quad (\text{Euler'sche Zahl}).$$

Der Beweis dieser Aussage ist für uns zu schwierig. Um zu verstehen, wie „zerbrechlich“ diese Konvergenzaussage ist, sei aber noch erwähnt, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right)^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } 0 < x < 1, \\ e & \text{falls } x = 1, \\ 1 & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

(3.5) Beispiel: geometrische Reihe

In Beispiel (2.7) haben wir die geometrische Summenformel kennengelernt: Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$S_n(a) := \sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Wir können nun die Zahlen $(S_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ auch als Folge ansehen und uns fragen, was der Grenzwert dieser Folge ist. Wir erinnern uns an den Grundbaustein Nummer (3) aus (3.4), der in unserer momentanen Notation lautet: $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ falls $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ falls $a > 1$, und der Grenzwert existiert nicht falls $a \leq -1$. Wenn wir die Rechenregeln für Grenzwerte benutzen, erhalten wir damit die wichtige geometrische Reihenformel³⁾:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a^i = \frac{0 - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a} \quad \text{falls } |a| < 1.$$

(3.6) Beispiel: Fibonacci-Folge

Dieser Punkt ist mathematisch etwas anspruchsvoller als die übrigen, und ist nicht relevant für die Klausur. Er soll dazu dienen, Ihnen einen weiteren Eindruck davon zu verschaffen, wie Mathematik für die Biologie von Bedeutung ist.

In (3.1) wurde schon die Fibonacci-Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erwähnt: sie ist rekursiv durch

$$c_1 = 1, c_2 = 1, \text{ und } c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Die ersten Glieder sind

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

a) Kaninchen:

Fibonacci hat diese Folge im Jahr 1202 benutzt, um die Population von Kaninchen (oder genauer: Kaninchenpaaren) zu beschreiben:

- Man startet im ersten Monat mit einem neugeborenen Kaninchenpaar ($c_1 = 1$).
- Am Anfang des zweiten Monats ist dieses geschlechtsreif und paart sich - man hat immer noch ein Kaninchenpaar ($c_2 = 1$).
- Nach einem weiteren Monat kommt genau ein Pärchen Junge (ein männliches und ein weibliches) zur Welt, und das ursprüngliche (erwachsene) Pärchen paart sich erneut. Man hat nun 2 Kaninchenpaare ($c_3 = 2$).

³⁾„Reihe“ ist die Vokabel für eine Summe mit unendlich vielen Summanden

- An Anfang des vierten Monats sind die im zweiten Monat geborenen Kaninchen geschlechtsreif. Das ursprüngliche Paar bekommt wieder ein Pärchen Junge. Alle geschlechtsreifen Pärchen paaren sich. Man hat nun 3 Paare ($c_4 = 3$).
- Am Anfang des fünften Monats bekommen sowohl das ursprüngliche als auch das zweite Pärchen Nachwuchs. Es sind nun $c_5 = 5$ Paare.
- und so weiter...

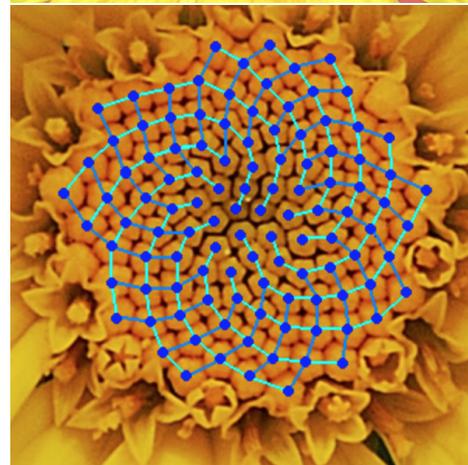
Der Mechanismus ist also: im jeweils folgenden Monat sind die Kaninchen aus dem Vormonat jeweils noch da (keine Todesfälle), und zusätzlich produzieren alle Kaninchen, die 2 Monate alt oder älter sind, jeweils ein neues Pärchen. Die Anzahl c_{n+1} der Kaninchen im Monat $n + 1$ ist also die Summe aus c_n (Kaninchen des Vormonats) und c_{n-1} (Kinder der erwachsenen Kaninchen). So bekommt man die Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge.

Dieses Modell ist allerdings aus verschiedenen Gründen, die Ihnen sicher sofort einfallen, ziemlich unrealistisch. Die Fibonacci-Zahlen hätten nicht die Bedeutung, die sie haben, wenn dies der einzige Platz wäre, an dem sie auftreten. Das schöne an Mathematik ist aber, dass mathematische Strukturen, die man aus einem anderen Zusammenhang kennt, manchmal sehr unerwartet an vielen Stellen der Naturwissenschaft wieder auftauchen. Das ist auch bei den Fibonacci-Zahlen so, wie wir gleich sehen werden.

b) Sonnenblumen und andere Korbblütler

In den Blütenständen verschiedener Korbblütler (z.B. Kamille oder Sonnenblume) kann man Spiralen beobachten, siehe Abbildungen rechts. Zählt man diese, so erhält man für die Anzahl der Spiralen (rechts- bzw. linkslaufend) überraschend häufig eine der Fibonacci-Zahlen. Im Beispiel der Kamille sind diese Spiralen eingezeichnet, es sind 13 bzw. 21 Stück. Im Beispiel der Sonnenblume sind es 34 und 55 Stück.

Das kann eigentlich kein Zufall sein, also sollten wir versuchen herauszufinden, was hier vorgeht. Um das zu verstehen, müssen wir zuerst überlegen, wie so eine Korbblüte wächst: aus der Mitte heraus entstehen immer neue Einzelblüten, die dann nach außen weiter geschoben werden. Etwas vereinfacht kann man sich vorstellen, dass jede neue Blüte eine „Himmelsrichtung“ mitbekommt, in die sie nach außen wandert. Die Pflanze legt den neuen Wachstumswinkel fest, indem sie den vorherigen um einen festen Winkel dreht.



Quelle: Wikipedia

Wäre dieser Drehwinkel beispielsweise 0 Grad, dann würden etwa alle Blüten nach „Norden“ wandern, und man bekäme keine Blüte sondern nur eine Linie. Bei einem Drehwinkel von 90 Grad bekäme man ein „Kreuz“, also ein Gebilde mit 4 Armen, bei einem Drehwinkel von beispielsweise $360/7$ Grad (oder $2\pi/7$ im Bogenmaß) bekäme man 7 Arme. In keinem Falle aber bekäme man eine gefüllte Blüte. Wer ausprobieren will, was andere Winkel für Formen ergeben, kann dies auf der website <https://www.mathsisfun.com/numbers/nature-golden-ratio-fibonacci.html> tun.

Es stellt sich nun heraus, dass der optimale Drehwinkel, also der, bei dem die Korbblütenfläche ganz und ohne Lücken mit Blüten bedeckt ist, bei 137.5 Grad liegt. Was aber hat das mit der Fibonacci-Folge zu tun? Die vollständige Antwort übersteigt leider die Möglichkeiten dieser Vorlesung, aber wir können zwei Hinweisen nachgehen. Der erste Hinweis hat noch gar nichts mit Fibonacci-Zahlen zu tun, sondern mit dem **goldenen Schnitt**.

Der goldene Schnitt (englisch: golden ratio) ist einfach die Zahl $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$. In der Kunst hat φ eine Bedeutung, weil Rechtecke (oder allgemeinere Formen), deren Höhe ein φ -faches der Länge ist, als besonders harmonisch, also ästhetisch ansprechend, gelten. In der Mathematik ist die Bedeutung von φ die, dass dies die „irrationalste reelle Zahl“ ist, also diejenige, die sich am schlechtesten durch Brüche annähern lässt, in dem Sinne, dass man sehr große Zahlen im Nenner braucht, um φ gut anzunähern. Warum das so ist, wollen und können wir hier auch nicht untersuchen, aber die Bedeutung für das Blütenwachstum können wir verstehen: damit sich die Blüte füllt, sollte man möglichst nicht nach einer ganzzahligen Anzahl von Winkeländerungen wieder beim Winkel 0 Grad oder knapp daneben landen, denn dann entsteht ja statt einer gefüllten Blüte ein „Stern“. Dreht man nun um $1.61803 \cdot 360$ Grad nach links, so kann man auch um $(1 - 0.61803) \cdot 360 \approx 137.5$ Grad nach rechts drehen, um auf die gleiche Position zu kommen. Daher der Winkel von 137.5 Grad.

Um unsere Fibonacci-Zahlen wieder zu finden, brauchen wir noch eine zweite Beobachtung: wir formulieren sie als

Behauptung: Die n -te Fibonacci-Zahl c_n ist durch die Formel

$$\tilde{c}_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

gegeben, wobei φ wie oben und $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ist.

Diese Formel sieht erst einmal komplett unglaublich aus, denn c_n ist ja eine ganze Zahl, aber auf der rechten Seite stehen Zahlen, die sicher nicht ganz sind! Allerdings stellen wir zunächst fest, dass sie immerhin für $n = 1$ und $n = 2$ stimmt:

$$\tilde{c}_1 = \frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}/2}{\sqrt{5}} = 1,$$

und

$$\tilde{c}_2 = \frac{\varphi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1,$$

wie erwünscht. Außerdem sind φ und ψ die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

nämlich $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Stellt man das um, erhält man

$$\varphi^2 = \varphi + 1, \quad \psi^2 = \psi + 1,$$

und multipliziert man mit φ^{n-1} oder ψ^{n-1} , dann bekommt man

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}, \quad \psi^{n+1} = \psi^n + \psi^{n-1}.$$

Es folgt

$$\tilde{c}_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n + \varphi^{n-1} - \psi^n - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \tilde{c}_n + \tilde{c}_{n-1}.$$

Wir stellen also fest, dass $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 2$ und $\tilde{c}_{n+1} = \tilde{c}_n + \tilde{c}_{n-1}$ ist. Das ist genau die Vorschrift für die Fibonaccizahlen, also muss die Folge $(\tilde{c}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge sein!

Eine interessante Konsequenz aus dieser Formel (die übrigens Binet'sche Formel heißt) ist die folgende: wenn $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonaccifolge ist, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Wir können das ganz leicht mit Hilfe der Werkzeuge aus (3.4) nachrechnen:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n} = \frac{\frac{1}{\varphi^n}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})}{\frac{1}{\varphi^n}(\varphi^n - \psi^n)} = \frac{\varphi - \psi \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi.$$

Die im letzten Schritt behauptete Konvergenz folgt daraus, dass $\frac{\varphi}{\psi} < 1$ ist, und dass daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n = 0$ gilt. Nun benutzt man die Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten.

Der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonaccizahlen konvergiert also gegen den goldenen Schnitt φ . Man kann daraus ableiten, dass dann die Blüte eines Korbblütlers, die nach dem oben beschriebenen Prinzip des nach außen Wachsens und Drehens wächst, im Lauf der Zeit immer mehr Spiralen ausbildet, deren Anzahl jeweils eine Fibonaccizahl ist; außerdem unterscheidet sich die Anzahl der linksdrehenden Spiralen von der der rechtsdrehenden immer um eine Fibonacci-Ordnung: ist die erste gleich c_n , dann ist die zweite gleich c_{n-1} oder c_{n+1} . Je größer die Blüte, desto mehr Spiralen, desto größer wird auch n . Alle diese Dinge sind aber nun leider viel schwieriger zu verstehen als das bisher Erklärte, so dass wir hier auf eine Erklärung verzichten müssen. Wer es dennoch wissen will, darf in <https://arxiv.org/pdf/1704.02880.pdf> nachsehen...

(3.7) Funktionen

Neben Zahlen und Mengen sind Funktionen ein weiterer ganz wichtiger Baustein der Mathematik. Es gibt mindestens 3 Möglichkeiten, Funktionen zu beschreiben.

a) Intuitive Definition: Die Funktion als Zahlen-Umwandlungsmaschine: Stellen Sie sich eine Funktion am besten als eine Art Automat vor, der einen oder mehrere Einwurfschlitze

hat, in die Sie Zahlen (im Zusammenhang mit Funktionen nennen wir sie **Variablen**) einwerfen können, und der, wenn jeder der Schlitze mit einer Zahl gefüllt wurde, eine Zahl auswirft. Einige Beispiele:

- $f(x) = x^2$ bedeutet: die in die Maschine f eingeworfene Zahl x wird quadriert.
- $g(x) = \frac{1}{2+x}$ bedeutet: die in die Maschine g eingeworfene Zahl x wird um 2 vergrößert und dann der Kehrwert genommen.
- $h(x, y) = x^2 - 3y$ bedeutet: für die Maschine h werden zwei Zahlen x und y als Eingabe benötigt. Die erste wird quadriert, die zweite mit 3 multipliziert; die Ergebnisse werden dann voneinander abgezogen.

An den obigen Beispielen können wir folgende Beobachtungen machen:

- (1) Ebenso wie Zahlen erhalten Funktionen Buchstaben als „Namen“. Man sollte hier genau drauf achten, dass f die Maschine bezeichnet, $f(x)$ aber das Ergebnis, das man erhält, wenn man die Zahl x in die Maschine f hineinsteckt. Das ist ein wichtiger Unterschied.
- (2) Eine weitere Eigenschaft von Funktionen ist, dass sie als Maschine sehr verlässlich sind: der Einwurf einer bestimmten Zahl führt immer zum gleichen Ergebnis, d.h. wenn zwei Zahlen x und y gleich sind, dann sind auch $f(x)$ und $f(y)$ gleich.
- (3) Andererseits kann es vorkommen, dass eine Maschine nicht jede Zahl verarbeiten kann. Die Funktion g beispielsweise „geht kaputt“, wenn man versucht, die Zahl $x = -2$ hineinstecken, denn das Ergebnis $\frac{1}{2+(-2)} = \frac{1}{0}$ ist nicht erlaubt. Die Menge aller Zahlen, die man unfallfrei in eine Funktion einfüttern darf, heißt **Definitionsbereich** von f . Für alle x aus dem Definitionsbereich muss garantiert sein, dass f bei der Fütterung mit dem Wert x einen sinnvollen und eindeutigen Wert y ausspuckt.
- (4) Es ist durchaus erlaubt, dass eine Maschine mehr als eine Zahl benötigt, um arbeiten zu können. Die Maschine h im obigen Beispiel braucht beispielsweise zwei Zahlen x und y , und es ist auch nicht egal, welche Zahl man in welchen „Eingabeschlitz“ steckt: die Zahl, die in den ersten Schlitz kommt, wird quadriert, die zweite verdreifacht, dann werden die Ergebnisse subtrahiert. Genauso einfach ist es, sich Maschinen vorzustellen, die 3, 4 oder 1000 Eingabe-Zahlen brauchen. Die Tatsache, dass man die Graphen solcher Funktionen (siehe Punkt c) unten) nicht mehr zeichnen kann, verleitet manche zu glauben, dass Funktionen von mehreren Variablen schwieriger sind als solche von einer Variablen, was aber zumindest konzeptionell nicht stimmt (rechnerisch manchmal schon).

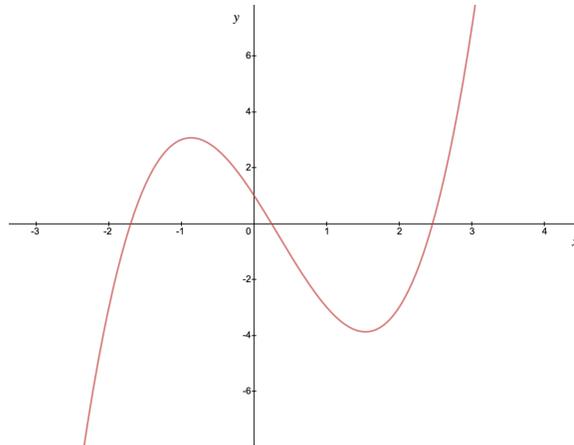
b) Die mathematische Definition: Für den Mathematiker ist eine Funktion (wie so vieles andere) einfach eine Menge: hat man nämlich zwei Mengen X (das sind die möglichen Eingabewerte, der Definitionsbereich) und Y (die möglichen Ausgabewerte) gegeben, dann ist eine Funktion f eine Teilmenge F der Menge der geordneten Paare $\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, die noch die zusätzliche Eigenschaft hat, dass für $(x, y) \in F$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in F$ gelten muss: falls $x = \tilde{x}$, dann auch $y = \tilde{y}$.

Diese Definition ist auf den ersten Blick etwas sperrig und für uns nicht ganz so wichtig. Damit Sie sehen, was sie bedeutet, sollen trotzdem die Beispiele aus a) hier umformuliert werden:

- Die Funktion f entspricht der Menge $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

- Die Funktion g entspricht der Menge $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -2, y = \frac{1}{2+x}\}$.
- Die Funktion h entspricht der Menge $H = \{(x, y), z) \text{ mit } (x, y) \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R} : z = x^2 - 3y\}$.

c) Der Funktionsgraph: Funktionen, die eine reelle Zahl x als Eingabe erhalten und eine reelle Zahl y als Ausgabe erzeugen, kann man (wie aus der Schule bekannt) mit Hilfe eines Funktionsgraphen visualisieren. Ein Beispiel für die Funktion $y = f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$ finden Sie rechts. Funktionsgraphen haben den Vorteil, dass sie sehr anschaulich sind. Allerdings hat die Sichtweise der Funktion als „Maschine“ den Vorteil, dass man das Hintereinanderschalten von Funktionen, den Begriff der Ableitung (siehe unten!) und vieles andere damit viel besser verstehen kann.



(3.8) Wichtige Funktionen

a) Funktionen, die das Argument zu einer festen Potenz erheben: Die einfachste Variante dieser Funktionen berechnet zu jedem Eingabewert x die Zahl

$$f(x) = x^a$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Die Zahl a , die im Exponenten steht, ist für alle Eingabewerte x gleich und gehört zur Beschreibung der Funktion f dazu. Beispielsweise⁴⁾ ergibt sich für $a = 2$ die Quadratfunktion $f(x) = x^2$, für $a = 1/2$ die Wurzelfunktion $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, oder für $a = -1$ die Funktion $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

⁴⁾Falls wir in der Praxis alle drei folgenden Funktionen gleichzeitig betrachten wollen, sollten wir sie natürlich keinesfalls alle mit dem Buchstaben f bezeichnen!

Hier sehen wir übrigens eine der wenigen wirklichen Schwächen der überlieferten mathematischen Notation: Während wir für Funktionen wie \sin , \cos oder \exp einen Namen haben, der wirklich die Funktion selbst beschreibt (also ohne, dass man schon sagt, welchen Wert man einsetzen will), geht das für die sehr wichtige Klasse von Funktionen in diesem Beispiel nicht. Man kann zwar $f(x) = x^2$ zwar schreiben, aber was ist, wenn man einfach eine Notation für die Quadratfunktion selbst will, ohne jedes mal entweder einen eigenen Buchstaben (hier: f) zu erfinden oder das Argument x zu nennen, das beim Namen der Funktion eigentlich nichts zu suchen hat? Das geht nicht so richtig, denn beispielsweise einfach x weglassen (wie beim Sinus) führt zu x^2 , und das sieht gar nicht gut aus. Es gibt zwar Möglichkeiten, das zu tun: beispielsweise schreibt man manchmal $x \mapsto x^2$ um anzudeuten, dass man nicht die Zahl x^2 meint, sondern die Funktion, die jedes x in ein x^2 verwandelt. Hier kommt das Argument x zwar noch vor, aber durch den Pfeil macht man aus, dass man nicht an die Zahl x^2 denkt, sondern an die Maschine, die jedes x in ein x^2 verwandelt. Manchmal schreibt man auch statt des Arguments x einen Punkt, also $f(\cdot)$ statt $f(x)$, wenn man von der Funktion spricht. Im Fall der Quadratfunktion erhält man dann $f = \cdot^2$, was aber auch keinen Schönheitspreis gewinnt.

Natürlich kann man immer alles aufschreiben wie man will, wenn man sowieso weiß, was man meint, aber in den meisten Fällen ist die mathematische Notation so gut gemacht, dass man mit genug Geduld ganz eindeutig nachvollziehen kann, was gemeint ist, auch wenn man sich nicht perfekt auskennt. Hier ist das leider nicht ganz so.

Wenn x nicht ganzzahlig ist, sollten Sie nicht versuchen, negative Werte in die Funktion einzusetzen - der Definitionsbereich ist dann also das Intervall $[0, \infty]$. Wenn x negativ ist, sollten Sie auch die 0 nicht einsetzen, die muss man dann aus dem Definitionsbereich zusätzlich herausnehmen.

Wenn a ganzzahlig und positiv ist, heißen solche Funktionen auch *Monome*. Addiert man mehrere Monome, erhält man die *Polynome*, die Sie sicher aus der Schule kennen, also etwa

$$f(x) = 4x^5 + 6x^4 - 2x + 19.$$

Die „Maschine“ f nimmt hier also die ihr gegebene Zahl x , erhebt sie zu verschiedenen Potenzen (die 5-te, 4-te, und erste), multipliziert vorher festgelegte Vorfaktoren drauf und addiert eine Zahl (hier 19, darf natürlich auch 0 sein) dazu. Dieser Mechanismus ist hier so ausführlich dargestellt, weil es zum Verständnis ganz wichtig ist, die *Funktion* f (also die Maschine, die oben beschriebene Handlungen mit jedem ihr gegebenem x ausführt) von der Zahl $f(x)$ zu unterscheiden, die man bekommt, wenn man ein bestimmtes x einsetzt.

Aufgabe: können Sie mit Hilfe von Buchstaben die allgemeine Form eines Polynoms aufschreiben, also ein Formel, die außer der Variablen x noch andere Variablen (sogenannte Parameter) $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ enthält, und aus der man durch konkretes Einsetzen von Zahlen für diese Parameter jedes beliebige Polynom erhält?

b) Potenzfunktionen: Sei $a > 0$. Die Potenzfunktion zur Basis a ist die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

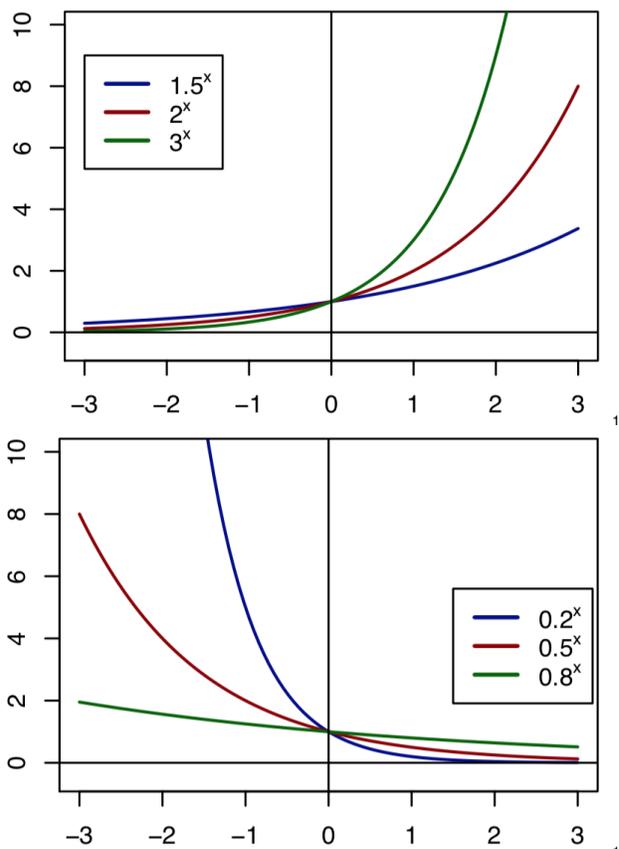
$$g(x) = a^x$$

Es ist wichtig, den Unterschied zwischen den in a) definierten Funktionen und der Potenzfunktion gut zu verstehen: Eine Funktion wie in a), zum Beispiel f mit $f(x) = x^6$, nimmt den „Input“ x , erhebt ihn zu *einer festen Potenz* (in unserem Beispiel 6) und gibt das Ergebnis dieser Rechnung als „Output“ wieder aus. Die Potenzfunktion dagegen (beispielsweise 6^x nimmt den Input x , erhebt eine feste (zur Beschreibung der Funktion gehörige) Zahl a zur x -ten Potenz a^x , und gibt dieses Ergebnis aus - beispielsweise für $a = 6$. Nicht nur die Potenzfunktionen haben daher etwas mit Potenzen zu tun, sondern auch die in a) definierten - das macht die Sache etwas verwirrend. Deshalb ist es besonders wichtig, sich zu merken, dass bei Potenzfunktionen die Basis ein fester Bestandteil der Funktion ist, und diese Basis wird dann zur dem Eingabewert x entsprechenden Potenz erhoben.

Auf den beiden Abbildungen rechts sieht man die wichtigsten Eigenschaften der Potenzfunktionen:

- Falls $a > 1$, dann wird a^x für größere x immer größer (ist monoton wachsend).
- Falls $a < 1$, dann wird a^x für größere x immer kleiner (ist monoton fallend).
- Alle Potenzfunktionen gehen durch den Punkt $(0, 1)$, denn $a^0 = 1$ für alle $a > 0$.
- Alle Potenzfunktionen haben die Eigenschaft, dass man für die richtige Wahl von x jede vorgegebene positive (!) Zahl durch sie „erzeugen“ kann, indem man das richtige x hineinsteckt; außerdem gibt es nicht mehr als ein einziges „richtiges“ x für jeden Zielwert b . Mathematisch ausgedrückt: Sei $a > 0$ gegeben. Für jedes $b > 0$ existiert dann genau ein $x \in \mathbb{R}$ so dass gilt: $a^x = b$.

Dieses „richtige“ x heißt dann **Logarithmus** von b zur Basis a , man schreibt: $x = \log_a b$.



Die wichtigste Potenzfunktion ist die *Exponentialfunktion*:

$$\exp(x) := e^x$$

wobei $e \approx 2.71828$ die Euler'sche Zahl ist. Den Grund hierfür werden wir bald kennenlernen.

Man kann übrigens jede Potenzfunktion als Exponentialfunktion umschreiben, und tut dies auch oft: Nehmen wir an, wir wollen $g(x) = b^x$ für ein $b > 0$ als Exponentialfunktion schreiben. Nach den Rechenregeln für Potenzen ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\exp(\alpha x) = e^{\alpha x} = (e^\alpha)^x.$$

Wenn wir also $\alpha = \log_e b$ wählen (siehe oben!), dann ist $e^\alpha = b$, und $e^{\alpha x} = b^x = g(x)$. Weil der Logarithmus zur Basis e so wichtig ist, nennt man ihn auch den **natürlichen Logarithmus**, und man schreibt $\log_e = \ln$ (für „logarithmus naturalis“).

c) Logarithmusfunktionen: Bei der Logarithmusfunktion ist es besonders nützlich, sich eine Funktion als eine Art Maschine vorzustellen, die eine Zahl als Eingabe bekommt und eine (andere) Zahl ausspuckt. Beim vorigen Punkt hatten wir ja gesagt, dass man zu zwei gegebenen Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ immer genau eine Zahl y finden kann, für die $a^y = b$ gilt, und hatten $y = \log_a b$ genannt.⁵⁾ Andererseits ist natürlich nicht so ganz klar, wie man diese Zahl y nun eigentlich finden soll...

Stellen Sie sich nun vor, jemand hätte eine Maschine konstruiert, die (bei festgelegtem $a > 0$) zu

⁵⁾Wir hatten zwar nicht bewiesen, dass das geht, aber aus den abgebildeten Graphen ist es zumindest glaubhaft. Wir werden außerdem gleich sehen, warum es besser ist, diese Zahl hier y statt x zu nennen.

jeder ihr gegebenen Zahl $b > 0$ zuverlässig die Zahl $\log_a b$ ausspuckt. Als Mathematiker haben wir den großen Vorteil, dass es gar nicht nötig ist, eine solche Maschine wirklich zu haben - wenn wir sie uns nur (im Rahmen der Mathematik) vorstellen können, dann reicht das. Wir nennen diese Maschine nun \log_a , definieren also die Funktion \log_a durch

$$\log_a(b) = \text{die Zahl } y, \text{ für die } a^y = b \text{ ist.}$$

Hierbei muss allerdings $b > 0$ sein, denn sonst gibt es eine solche Zahl nicht; außerdem sollte $a \neq 1$ sein, sonst haben wir (außer wenn auch $b = 1$ ist) ebenfalls keine Chance...

Beachten Sie, dass die Variable, die wir normalerweise x nennen, nun mit b bezeichnen; das passt besser zu der oberen Notation, denn wir haben ja die Lösung y der Gleichung $a^y = b$ gesucht. Im obigen Kontext wäre also $y = \log_a(b)$. Andererseits ist auch die Variable einer Funktion „stumm“ (wie bei Folgen oder Summenzeichen), das heißt, die Funktion, die $b \in \mathbb{R}$ nach $\log_a(b)$ abbildet ist die gleiche wie die, die $x \in \mathbb{R}$ nach $\log_a(x)$ abbildet. Wir kommen also zu folgender

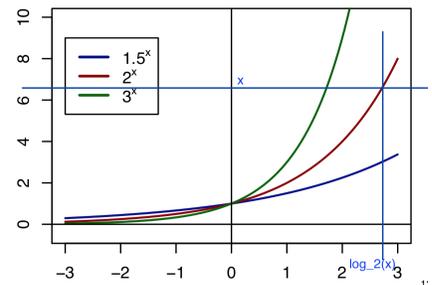
Definition: Die Logarithmusfunktion zur Basis $a > 0, a \neq 1$ ist die (einzige) Funktion, die für jedes $x > 0$ als Ergebnis die (einzige) Lösung y der Gleichung $a^y = x$ ausspuckt. Wir schreiben $y = \log_a(x)$ für diese Lösung.

Graphisch kann man diese Lösung übrigens finden, indem man zu gegebenem x einen waagrechten Strich auf der Höhe x zieht und dann von dessen Schnittpunkt mit der Funktion $g(y) = b^y$ senkrecht auf die waagrechte Achse geht. Siehe Abbildung rechts.

Neben der Basis e ist auch die Basis 10 oft wichtig. Daher gibt es für diese beiden Logarithmusfunktionen Abkürzungen:

$$\ln(x) := \log_e(x), \quad \log(x) := \log_{10}(x).$$

Leider wird (besonders in der englischsprachigen Literatur) auch $\log(x) = \log_e(x)$ benutzt, so dass man hier in der Praxis ein wenig aufpassen muss, was gemeint ist.



Logarithmus als Umkehrfunktion:

Der Logarithmus wurde genau dafür gemacht, dass $\log_a(x)$ die Zahl y ist, für die man $a^y = x$ erhält. Nach Definition gilt also für alle $a > 0, a \neq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$:

$$a^{\log_a(x)} = x, \quad \text{insbesondere} \quad \exp(\ln(x)) = x.$$

Mit anderen Worten: wenden wir zuerst die \ln_a -Funktion auf eine Zahl x an und nehmen dann a hoch das Ergebnis dieser Operation, dann kommen wir wieder bei der ursprünglichen Zahl x heraus. Wir werden weiter unten mit Hilfe der Rechenregeln des Logarithmus ausrechnen, dass dies auch umgekehrt geht: für alle $a > 0, a \neq 1$ und alle $x > 0$

$$\log_a(a^x) = x, \quad \text{insbesondere} \quad \ln(\exp(x)) = x.$$

Nehmen wir also zuerst die Zahl a zur x -ten Potenz und wenden dann \ln_a auf das Ergebnis an, landen wir auch wieder bei der ursprünglichen Zahl x . Wenn zwei Funktionen ihre jeweilige Wirkung auf diese Weise neutralisieren, spricht man von *Umkehrfunktionen*. \log_a und $g(x) = x^a$ sind also Umkehrfunktionen voneinander.

Rechenregeln für Logarithmen: Wie für die Exponentialfunktion (bzw. für Potenzen) gibt es auch für die Logarithmusfunktion sehr praktische (und sehr wichtige!) Rechenregeln: für alle $x \in \mathbb{R}$, $y, z > 0$ und $a > 0, a \neq 1$ gilt:

- (1) $\log_a(a^x) = x$ und $a^{\log_a(y)} = y$:
(Umkehrfunktion-Eigenschaft; das hatten wir oben schon, es steht hier nur nochmal der Übersichtlichkeit halber.)
- (2) $\log_a(yz) = \log_a(y) + \log_a(z)$:
Bei gleicher Basis kann man eine *Multiplikation im Logarithmus* in eine *Addition außerhalb des Logarithmus* verwandeln.
- (3) $\log_a(y^x) = x \log_a(y)$:
hat man im Logarithmus eine Potenz stehen, darf man statt dessen den Exponenten (multiplikativ) *vor den Logarithmus* schreiben.
- (4) $\log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a}$:
Basiswechsel: man kann jeden Logarithmus in den natürlichen umrechnen, indem man ihn durch den \ln seiner Basis teilt.
- (5) $\log_a(1) = 0$, und $\log_a(a) = 1$:
will man die Gleichung $a^x = 1$ lösen, muss man $x = 0$ nehmen; für die Gleichung $a^x = a$ braucht man $x = 1$.

Es ist eine gute Übung, die Rechenregeln (2) bis (5) aus den bekannten Rechenregeln für Potenzen und aus Rechenregel (1) abzuleiten.

Wir benutzen nun die Rechenregeln, um nachzurechnen, dass $\log_a(a^x) = x$ gilt:

$$\log_a(a^x) = x \log_a(a) = x,$$

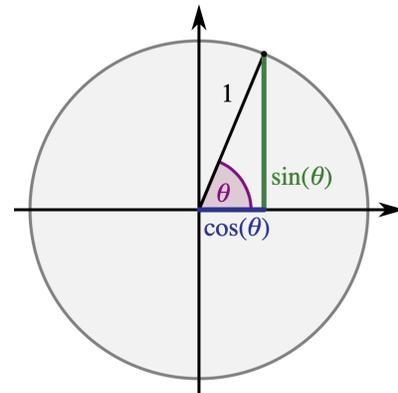
wobei wir im ersten Gleichheitszeichen Regel (3) und im zweiten Regel (5) benutzt haben.

Der Logarithmus hat eine interessante Eigenschaft, die Sie sich merken sollten: einerseits wächst er monoton, d.h. größere Eingabewerte ergeben auch größere Ausgabewerte. Er wächst tatsächlich auch immer weiter, d.h. man kann durch Einsetzen von genügend großen x auch $\log_a(x)$ so groß machen, wie man wünscht. Allerdings wächst er fast unvorstellbar langsam: stellen Sie sich vor, sie bauen ein globales Kunstwerk, das auf dem Äquator die Funktion $f(x) = \ln(x)$ darstellt; Sie fangen also an einem Punkt der Erdoberfläche an, bauen dort eine Säule der Höhe $f(1) = 0$. Dann bauen Sie jeweils in einem Meter Abstand weitere Säulen jeweils der Höhe $f(x)$, wobei x die Entfernung (nach Westen gehend) von Ihrem Ausgangspunkt ist. Wie hoch ist die letzte Säule, wenn Sie einmal um die Erde gekommen sind und wieder am Ausgangspunkt anlangen? Da der Erdumfang etwa 40.000 Kilometer, also $4 \cdot 10^7$ Meter ist, ist die Antwort $f(4 \cdot 10^7) = \ln(4 \cdot 10^7) \approx 17.5$ Meter. Das können Sie also noch relativ bequem bauen. Wenn Sie aber nun nochmals herumlaufen und die Säulen immer weiter bauen, haben Sie am Ende des zweiten Umlaufes eine Höhe von $\ln(8 \cdot 10^7) \approx 18.2$ Meter, sie haben also gerade mal 70 cm gewonnen. Verdoppeln wir die Strecke nochmal, laufen also vier mal herum, so ergeben sich $\ln(16 \cdot 10^7) \approx 18.9$, also wieder nur 70 cm! Das ist kein Zufall, denn bei jedem Logarithmus (nicht nur beim \ln) gilt: wenn ich den Eingabewert jeweils verdopple, erhöht sich der Ausgabewert immer nur um eine feste (von der Basis des Logarithmus abhängige) Zahl. Sie sollten versuchen, sich mit Hilfe der obigen Rechenregeln klar zu machen, warum diese Regel gelten muss, vielleicht können Sie sogar ausrechnen, was diese Zahl (in Abhängigkeit der Basis) sein muss.

Wenn wir übrigens das Kunstwerk (in Gedanken) sogar bis zum Mond bauen, der in einer durchschnittlichen Entfernung von $384400 \text{ km} = 3,844 \cdot 10^8$ Metern von der Erde ist, wären wir bei 19.7 Metern, bis zur der Sonne ($147 \cdot 10^9$ Meter) bei $\ln(147 \cdot 10^9) \approx 25.8$ Metern, und bis nach Alpha Centauri (Entfernung $4.132 \cdot 10^{16}$ Meter) immerhin eine Höhe von $\ln(4.132 \cdot 10^{16}) \approx 38.25$ Metern.

d) Winkelfunktionen:

Die Winkelfunktionen (Sinus- und Cosinusfunktion) sind ein weiteres Beispiel dafür, wie Funktionen als „Lösungsmaschine“ für ein mathematisches Problem verstanden werden kann, und sind sogar deutlich einfacher zu verstehen als der Logarithmus. Auf der Abbildung rechts ist ein Kreis mit Radius 1 abgebildet. Der Winkel θ wird hierbei im Bogenmaß gemessen, das heißt θ bezeichnet eigentlich die Länge der Strecke, die man auf der Kreislinie im Gegenuhrzeigersinn entlanglaufen will - hat man beispielsweise die Strecke $\theta = 3/4$ auf der Kreislinie zurückgelegt und zeichnet zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt, an dem man angekommen ist,



eine gerade Strecke ein, dann schließt diese Strecke mit der (positiven) waagrechten Achse einen Winkel ein, der durch die gelaufene Strecke θ eindeutig festgelegt ist. Man nennt diesen Winkel dann der Einfachheit halber auch θ , anstatt ihn in Grad umzurechnen. Ist man nun eine Strecke θ auf der Kreislinie entlanggegangen (bzw. hat einen Winkel θ gegeben), so kann man sich fragen, welche „Koordinaten“ eigentlich der Punkt hat, auf dem man angekommen ist. Also: wie weit ist man in horizontaler bzw. vertikaler Richtung vom Nullpunkt entfernt (ist man links vom oder unter dem Nullpunkt, dann zählt man das negativ)? Wieder ist diese Frage im konkreten Fall nicht so einfach zu beantworten, aber es ist klar, dass es eine (eindeutige!) Antwort geben muss. Hier kommen wieder die Funktionen ins Spiel - sie sind die „Maschinen“, die diese Antworten erzeugen sollen. Wir definieren daher für $\theta \in \mathbb{R}$:

$\sin(\theta)$ = senkrechter Abstand vom Nullpunkt des Punktes, den man erreicht, wenn man eine Strecke θ auf der Kreislinie (im Gegenuhrzeigersinn) entlangläuft.

$\cos(\theta)$ = waagrechter Abstand vom Nullpunkt des Punktes, den man erreicht, wenn man eine Strecke θ auf der Kreislinie (im Gegenuhrzeigersinn) entlangläuft.

Damit haben wir die Funktionen \sin und \cos mathematisch vollständig zufriedenstellend definiert (auch wenn die Formulierung in der Mathematik anders aussehen würde). Was noch besser ist: obwohl wir nicht so einfach ausrechnen können, was zum Beispiel der Wert von $\sin(3/4)$ ist, können wir doch aus dieser Definition schon viele Eigenschaften der Funktionen ablesen. Alles was wir dazu zusätzlich wissen müssen ist, dass die Gesamtlänge der Kreislinie gleich 2π ist.

- (1) Wenn man jeweils ein Viertel der Kreislinie abgelaufen hat, dann befindet man sich auf einer der Achsen. Daher ist

$$\sin(\pi/2) = 1, \cos(\pi/2) = 0, \sin(\pi) = 0, \cos(\pi) = -1, \sin(3\pi/2) = -1, \cos(\pi/2) = 0.$$

- (2) Wenn man um 2π gelaufen ist, befindet man sich wieder am Ausgangspunkt. Daher gilt für alle $\theta > 0$:

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta).$$

- (3) Geht man statt gegen den Uhrzeigersinn um die gleiche Strecke im Uhrzeigersinn, dann macht das für den waagrechten Abstand zum Nullpunkt keinen Unterschied, während der senkrechte Abstand das Vorzeichen wechselt. Daher ist

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \quad \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$

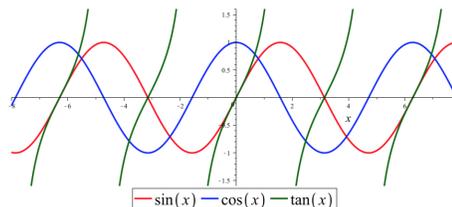
- (4) Nach dem Satz von Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten $a = \cos(\theta)$, $b = \sin(\theta)$ und $c = 1$ (siehe Abbildung) die Gleichheit $c^2 = a^2 + b^2$. Das zeigt uns sofort die sehr wichtige Formel

$$\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1 \quad \text{für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Mit \sin und \cos zu unserer Verfügung können wir außerdem die Tangensfunktion definieren, nämlich einfach als

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{falls } x \notin \{\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots\}$$

Die Sinus, Cosinus- und Tangensfunktionen finden Sie auf der Abbildung rechts.



d) Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Erinnern wir uns, wie wir die Logarithmusfunktion aus der Exponentialfunktion erhalten haben: wir mussten in einem gewissen Sinn die „Maschine“ Exponentialfunktion „rückwärts laufen lassen“: bei Eingabe einer Zahl $x > 0$ gibt der Logarithmus (zur Basis e) die Zahl $y \in \mathbb{R}$ aus, die man braucht, damit $\exp(y) = x$ ist.

Genauso funktioniert das bei den Winkelfunktionen: nehmen wir an, dass wir daran interessiert sind, wie weit wir auf der Kreislinie laufen müssen, damit der horizontale Abstand zum Nullpunkt genau den Wert $x \in \mathbb{R}$ hat.

- Zunächst stellen wir fest, dass diese Aufgabe unlösbar ist, wenn der geforderte Abstand außerhalb von $[-1, 1]$ liegt. Der **Definitionsbereich** der Umkehrfunktion des Cosinus ist also $[-1, 1]$;
- Für $x \in [-1, 1]$ gibt es dagegen mehr als eine Lösung: um Abstand 0 zu bekommen (also auf der vertikalen Achse zu sein), können wir wahlweise $\pi/2$ oder $3\pi/2$ weit gehen. Das ist nicht gut, denn eine der grundlegenden Forderungen an eine Funktion war, dass man zu einem Eingabewert x nie mehr als einen einzigen Ausgabewert bekommen kann!
- Die Lösung ist hier einfach eine Abmachung: von all den Weglängen, die zum waagrechten Abstand x vom Nullpunkt führen, lassen wir nur diejenigen gelten, die im Intervall $[0, \pi]$ liegen. Wenn man das so macht, hat man eine Funktion, die man \arccos nennt: zu jedem $x \in [-1, 1]$ gibt $\arccos(x) \in [0, \pi]$ die Länge des gebogenen Stückes (lateinisch: arcus) an, das man auf der Kreislinie laufen muss, um horizontalen Abstand x vom Nullpunkt zu haben.

Für den Sinus geht es genauso - man legt aber hier fest, dass man nur bis zu einem Viertelkreis im Gegenuhrzeigersinn (also maximal $\pi/2$) oder im Uhrzeigersinn (also minimal $-\pi/2$) laufen

darf. Damit erhält man die Definition: für $x \in [-1, 1]$ ist

$\arcsin(x)$ = die Strecke $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, die man auf der Kreislinie laufen muss,
damit man am Zielpunkt senkrechten Abstand x vom Nullpunkt hat
= der Wert $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, den man in die Sinusfunktion einsetzen muss,
damit $\sin(y) = x$ gilt.

$\arccos(x)$ = die Strecke $y \in [0, \pi]$, die man auf der Kreislinie laufen muss,
damit man am Zielpunkt waagrechten Abstand x vom Nullpunkt hat
= der Wert $y \in [0, \pi]$, den man in die Cosinusfunktion einsetzen muss,
damit $\cos(y) = x$ gilt.

Genauso kann man auch noch den Tangens „rückwärts laufen lassen“, allerdings hat man hier nicht mehr das Bild der Kreislinie, sondern muss so vorgehen wie wir das bei Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion gemacht haben:

$\arctan(x)$ = die Zahl $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, für die $\tan(y) = x$ gilt.

Wie für alle Umkehrfunktionen gilt übrigens:

$$\cos(\arccos(x)) = \arccos(\cos(x)) = x, \quad \ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x \quad \text{etc.}$$

für alle x im Definitionsbereich der jeweils inneren Funktion. Mit dem Bild von der „rückwärts laufenden Maschine“ ist auch (hoffentlich?) sofort klar, warum das so sein muss.

(3.9) Beispiel: Lambert-Beer Gesetz

Als Beispiel für die Verwendung der Logarithmusfunktion (und auch des Begriffs Umkehrfunktion allgemein) leiten wir hier das Lambert-Beer-Gesetz her, das dazu benutzt wird, die Konzentration einer (farbigen) Chemikalie in einer wässrigen Lösung zu bestimmen, indem man misst, wie viel Licht von dieser Lösung verschluckt wird.

Der Versuchsaufbau ist folgender: wir haben die wässrige Lösung in einer Küvette (mit sehr dünnen Wänden, die kein Licht schlucken). Wir leuchten mit einer uns bekannten Lichtstärke auf die eine Seite der Küvette und messen, wie viel von dem Licht auf der anderen Seite ankommt. Daraus wollen wir erkennen, wie hoch die Konzentration in der Küvette ist. Um das Gesetz herzuleiten, müssen wir zunächst Namen für die interessanten Größen einführen.

- I_0 bezeichnet die Stärke des eingestrahnten Lichtes (gemessen in Lux).
- I_1 bezeichnet die Stärke des beim Austritt gemessenen Lichtes (gemessen in Lux).
- c bezeichnet die Konzentration der Chemikalie (gemessen in mol pro Liter).
- L bezeichnet die Breite der Küvette (diese ist rechteckig!).

1. Schritt: Um überhaupt anfangen zu können, ein Gesetz aufzustellen, muss man (mit Hilfe eines Experimentes) folgende Beobachtung gemacht haben: Wenn man bei zwei aufeinanderfolgenden Experimenten die Stärke des Lichtes bei Experiment 2 im Vergleich zu Experiment 1 verdoppelt (oder verdreifacht, halbiert etc), dann kommt auch im Vergleich zum ersten Experiment doppelt (oder dreimal, oder halb) so viel Licht durch. Mit anderen Worten, man stellt fest, dass I_1 proportional zu I_0 ist, das heißt, es gibt eine Formel der Art

$$I_1 = \alpha(c, L)I_0$$

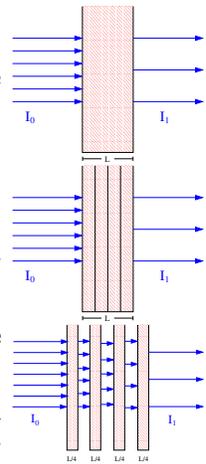
mit einer Proportionalitätskonstante $\alpha = \alpha(c, L)$, die vermutlich von der Konzentration c und der Breite L abhängen wird. Die Tatsache, dass I_1 proportional zu I_0 ist, ist keineswegs „sowieso klar“, sondern muss experimentell herausgefunden werden. Um aber von dieser Stelle aus herauszufinden, wie groß $\alpha(c, L)$ in Abhängigkeit von c und L ist, brauchen wir keine echten Experimente mehr, sondern nur noch sogenannte „Gedankenexperimente“.

2. Schritt: Zunächst stellen wir fest, dass die Proportionalitätskonstante α mathematisch gesehen **eine Funktion** ist, und zwar mit den zwei Variablen c und L . Wir wollen nun herausfinden, was die Vorschrift ist, nach der $\alpha(c, L)$ die ihr eingegebenen Zahlen c und L in die Zahl $\alpha(c, L)$ verwandelt.

Dazu stellen wir uns zunächst vor, dass wir statt einer Küvette der Breite L beispielsweise 4 Küvetten der Breite $L/4$ und gleicher Konzentration c haben.

- Nachdem das Licht der Stärke I_0 durch die erste der vier dünneren Küvetten hindurchgegangen ist, ist noch Licht der Stärke $\alpha(c, L/4)I_0$ übrig: denn genau das sollte ja unsere Funktion α leisten: für jede beliebige Küvettenbreite \tilde{L} berechnet sie die Proportionalitätskonstante zwischen einfallendem und durchgehendem Licht.
- Dieses Licht der Stärke $\alpha(c, L/4)I_0$ muss nun durch die zweite Küvette; danach ist noch Licht der Stärke $\alpha(c, L/4)\alpha(c, L/4)I_0 = \alpha(c, L/4)^2 I_0$ übrig.
- Nach insgesamt vier solchen dünnen Küvetten ist daher noch Licht der Stärke $\alpha(c, L/4)^4 I_0$ übrig.
- Andererseits hätte man das Licht ja auch durch eine einzige Küvette der Breite L schicken können, dann wäre noch $\alpha(c, L)I_0$ übrig gewesen. Da man annimmt, dass die Wände der Küvetten kein Licht schlucken (und man die Küvetten so dicht aneinanderhalten kann, dass alle vier genau wie eine große wirken), muss daher gelten:

$$\alpha(c, L) = \alpha(c, L/4)^4.$$



Das gleiche geht natürlich mit 6, 17 oder 123 Küvetten, und mit etwas Mut auch für eine nicht ganzzahlige Anzahl. Wir haben also den ersten Teil unseres Gesetzes gefunden: für jedes $x > 0$, jedes $c > 0$ und jedes $L > 0$ muss gelten:

$$\alpha(c, L) = \alpha(c, L/x)^x.$$

Besonders nützlich wird dies, wenn man $x = L$ einsetzt, denn dann bekommt man

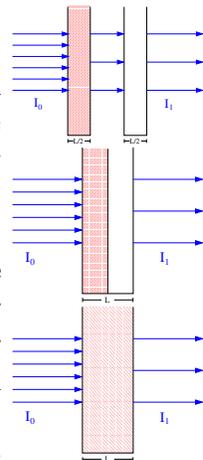
$$\alpha(c, L) = \alpha(c, 1)^L. \quad (*)$$

Das bedeutet, dass man nicht für jede Küvettenbreite L eigene Proportionalitätskonstanten ausrechnen (oder ausmessen) muss, sondern nur für eine einzige Breite (z.B. Breite 1), und für alle anderen Breiten lässt sich α dann aus dieser ausrechnen.

3. Schritt:

Wie hängt $\alpha(c, L)$ von der Konzentration c ab? Um das herauszufinden, stellen wir uns zunächst folgende Frage: angenommen, wir haben eine Küvette doppelter Konzentration $2c$, aber halber Breite $L/2$. Wie viel Licht lässt die durch? Eigentlich sollte man dies experimentell ausmessen, wir können aber auch ein (etwas mutigeres) Gedankenexperiment machen: wir gehen davon aus, dass die Verringerung der Lichtintensität daher kommt, dass einzelne Lichtstrahlen (oder Photonen) auf Moleküle der Chemikalie treffen, von denen sie dann gestoppt werden, während andere durchkommen.

Wenn wir nun den Inhalt der Küvette mit Konzentration $2c$ von der Küvette mit Breite $L/2$ in eine Küvette der Breite L einfüllen und den Rest mit Wasser aufgießen (also die Konzentration von $2c$ auf c herunterverdünnen), haben wir wieder die ursprüngliche Situation: eine Küvette der Breite L mit Konzentration c . Da sich die Anzahl der Moleküle, an denen unser Licht „vorbei“ muss, nicht geändert hat, würden wir erwarten, beide Versuchsanordnungen (also Breite $L/2$ und Konzentration $2c$, und Breite L und Konzentration c) gleich viel Licht schlucken, in Formeln:



$$\alpha(2c, L/2) = \alpha(c, L).$$

Wieder können wir statt $2c$ und halber Breite auch $3c$ und eine Drittelbreite etc. nehmen und kommen zu der Formel

$$\alpha(yc, L/y) = \alpha(c, L) \quad \text{für alle } y > 0.$$

Für $y = 1/c$ ist die linke Seite der obigen Gleichung $\alpha(\frac{1}{c}c, \frac{L}{1/c})$, und wegen $\frac{1}{c}c = 1$ und $\frac{L}{1/c} = cL$ lautet die Gleichung $\alpha(yc, L/y) = \alpha(c, L)$ in diesem Spezialfall

$$\alpha(1, cL) = \alpha(c, L).$$

Mit Gleichung (*) (angewandt im Spezialfall $c = 1$) oben erhalten wir

$$\alpha(c, L) = \alpha(1, cL) \stackrel{(*)}{=} \alpha(1, 1)^{cL}.$$

Das bedeutet, dass wir lediglich die Proportionalitätskonstante $\alpha(1, 1)$ für Breite 1 und Konzentration 1 kennen müssen, dann können wir diejenige für beliebiges c und L ausrechnen. Die Größe von $\alpha(1, 1)$ hängt von der verwendeten Chemikalie ab und wird experimentell ermittelt. Aus historischen Gründen schreibt man $\alpha(1, 1)$ in der Form $\alpha(1, 1) = 10^{-\varepsilon}$ (also $\varepsilon = -\log_{10} \alpha(1, 1)$), und nennt die Zahl $\varepsilon > 0$ den (von der Chemikalie abhängigen) *dekadischen Extinktionskoeffizienten*. Mit dieser Notation lautet das **Lambert-Beer Gesetz**:

Für die Lösung der Konzentration $c > 0$ einer Chemikalie mit dekadischem Extinktionskoeffizienten $\varepsilon > 0$ gilt bei Küvettenbreite L und einfallender Lichtstärke I_0 folgende Formel zur Berechnung der transmittierten Lichtstärke I_1 :

$$I_1 = 10^{-\varepsilon c L} I_0.$$

4. Schritt: In der Praxis muss man das Lambert-Beer-Gesetz meist rückwärts anwenden: man hat eine Lösung unbekannter Konzentration c gegeben, kennt aber die gelöste Chemikalie (und damit den dekadischen Extinktionskoeffizienten ε) und die Küvettenbreite L . Nun strahlt man Licht der Intensität I_0 auf die Probe und erhält Licht der Intensität I_1 auf der anderen Seite. Wie groß ist nun die Konzentration?

Das lässt sich nun mit einfachen Umformungen herausfinden:

$$I_1 = 10^{-\varepsilon c L} I_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_0} = 10^{-\varepsilon c L} \quad \Rightarrow \quad \log_{10} \frac{I_1}{I_0} = -\varepsilon c L \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\varepsilon L} \log_{10} \frac{I_1}{I_0} = c.$$

Die Größe $-\log_{10} \frac{I_1}{I_0} = \log_{10} \frac{I_0}{I_1}$ wird auch manchmal als die *Extinktion* bezeichnet und bekommt einen eigenen Buchstaben (beispielsweise E). Das Gesetz lautet dann

$$c = \frac{E}{\varepsilon L}.$$

(3.10) Stetigkeit

In der Schule haben Sie möglicherweise gelernt, dass eine Funktion dann stetig ist, wenn man sie in einem Strich durchzeichnen kann, ohne den Stift vom Papier abzuheben. Hier wollen wir eine andere Intuition für Stetigkeit einführen, die den Vorteil hat, dass sie direkt zur mathematischen Definition führt.

Wenn Sie sich wieder eine Funktion als Maschine vorstellen, die reelle Zahlen in andere reelle Zahlen verwandelt, dann können wir hoffen, dass diese Maschine „fehlertolerant“ ist: nehmen Sie an, Sie haben vor, der Funktion die Zahl 5.73 einzugeben, aber aufgrund einer Ungenauigkeit oder anderer unglücklicher Umstände geben Sie die Zahl 5.73001 ein. Sie würden jetzt hoffen, dass sich das Ergebnis, das die Maschine Ihnen auswirft, nicht drastisch von dem Ergebnis unterscheidet, das Sie mit 5.73 bekommen hätten. Wenn Sie also bei Eingabe von 5.73 die Zahl 7 als Ergebnis erwartet hätten, sollte bei 5.73001 nicht die Zahl 10000 herauskommen.

Eine solche „fehlertolerante“ Maschine sollte also die Eigenschaft haben, dass sehr ähnliche Eingabewerte auch sehr ähnliche Ausgabewerte erzeugen. Allerdings ist diese Beschreibung zu vage, um damit Mathematik zu machen, und (insbesondere im Bezug auf das obige Beispiel) vielleicht sogar ein wenig irreführend (siehe unten!). Was man stattdessen mathematisch fordert ist, dass der Ausgabefehler (nennen wir ihn $\varepsilon > 0$) der Maschine so klein wie erwünscht gemacht werden kann, wenn man nur den Eingabefehler (genannt $\delta > 0$) genug begrenzt. Manchmal ist man an dieser Eigenschaft auch nur dann interessiert, wenn der Eingabeparameter (ohne Fehler) den Wert $x \in \mathbb{R}$ hat - die Maschine soll also nur bei $x \in \mathbb{R}$ fehlertolerant sein, für andere Eingabewerte fordert man das ggf. nicht. Dies führt zu folgender

Definition Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden lässt, so dass Eingabefehler von δ oder weniger für den Wert x zu Ausgabefehlern von höchstens ε führen.

Etwas mathematischer formuliert: Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden lässt, so dass für alle (fehlerhaften Eingabewerte) $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$ gilt: die Abweichung der Ausgabewerte ist kleiner als ε .

Noch mathematischer formuliert: Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta$ die Ungleichung $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ wahr ist. Eine Funktion f heißt stetig auf einem Intervall, wenn sie für jedes x aus diesem Intervall stetig ist, und sie heißt stetig (ohne weitere Zusätze!), wenn sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist

Kommen wir nochmals auf das vorige Beispiel zurück: nehmen Sie an, Sie haben herausgefunden, dass tatsächlich für eine Funktion f gilt: $f(5.73) = 7$, aber $f(5.73001) = 10000$. Können Sie daraus schließen, dass diese Funktion unstetig bei 5.73 ist?

Die Antwort ist: leider nicht! Der Grund ist, dass unsere schöne Definition der Stetigkeit unglücklicherweise keine Aussage darüber macht, wie klein Ihr Eingabefehler δ sein muss, um ein gewünschtes Niveau des Ausgabefehlers ε zu erreichen. Im Beispiel könnte es also sein, dass Sie einen Eingabefehler von 10^{-22} oder kleiner brauchen, um den Ausgabefehler unter das Niveau $\varepsilon = 99993$ zu drücken. Sie sehen also, dass Stetigkeit nicht automatisch bedeutet, dass eine Funktion sich besonders stetig „anfühlt“. Eine viel bessere Kontrolle über das Verhalten der Funktion bei kleinen Fehlern im Eingabeparameter bietet der Begriff der Ableitung, der jetzt gleich kommt.

(3.11) Ableitung

a) Im Gegensatz zur Stetigkeit erlaubt die Ableitung einer Funktion eine viel bessere Kontrolle darüber, wie sich „leicht falsche“ Eingabewerte auf die Ausgabewerte dieser Funktion auswirken. Der *Ausgabefehler* einer Funktion f an der Stelle x bei Eingabefehlergröße δ ist einfach der Unterschied zwischen der Ausgabe $f(x)$ bei der „richtigen“ Eingabe x und der Ausgabe $f(x + \delta)$ bei der „verfälschten“ Eingabe $x + \delta$. Es stellt sich heraus, dass bei sehr vielen Funktionen dieser Ausgabefehler zumindest für kleine δ recht gut durch eine proportionale Zuordnung angenähert wird, in Formeln:

$$f(x + \delta) - f(x) = c\delta + \text{„etwas, das viel kleiner ist als } \delta\text{“}. \quad (*)$$

Hier bei ist c die Proportionalitätskonstante, die vermutlich für verschiedene x auch verschiedene Werte annehmen wird. Falls so eine Gleichung für eine Funktion gilt, so ist das sehr praktisch, denn um abzuschätzen wie sehr sich eine leicht falsche Eingabe auf den Funktionswert auswirkt, muss man nur die Proportionalitätskonstante c kennen, sofern man daran glaubt, dass der Term in Anführungszeichen keine wichtige Rolle spielt. Bei diesem Term ist allerdings erst mal nicht so klar, was er wirklich bedeuten soll, wir sehen uns daher zunächst ein Beispiel an.

Wählen wir die Quadratfunktion: $f(z) = z^2$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}$ und kleines $\delta \in \mathbb{R}$

$$f(x + \delta) - f(x) = (x + \delta)^2 - x^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2.$$

Ein Vergleich mit der obigen „erwünschten“ Form (*) zeigt, dass hier $c = 2x$ und der Term in Anführungszeichen gleich δ^2 ist. Wenn δ viel kleiner als x ist, dann ist δ^2 viel kleiner als $2\delta x$, und dann ist der hintere Term wirklich unwichtig (beachten Sie: bei $x = 0$ scheint hier ein Problem zu sein, denn dann ist ja δ^2 immer größer als der Term $2x\delta = 0$. Das lösen wir aber gleich unten).

Leider können wir so eine Rechnung nicht für sehr viele Funktionen machen, also brauchen wir eine bessere Methode, um herauszufinden, wann eine Gleichung der Form (*) gilt und was sie bedeuten soll. Hierbei sind uns die Folgen sehr nützlich, die wir vorhin eingeführt haben. Wir betrachten nämlich irgend eine Folge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_n \neq 0$ für alle n aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ (beispielsweise $\delta_n = 1/n$), und setzen diese in (*) ein, das ergibt

$$f(x + \delta_n) - f(x) = c\delta_n + \text{„etwas, das viel kleiner ist als } \delta_n\text{“}.$$

Wenn wir nun für jedes n durch δ_n teilen, dann bekommen wir

$$\frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n} = c + \frac{\text{„etwas, das viel kleiner ist als } \delta_n \text{“}}{\delta_n}. \quad (**)$$

Wenn wir den Text in Anführungszeichen ernst nehmen, dann würden wir erwarten, dass der letzte Bruch gegen 0 konvergiert; im Fall der Quadratfunktion ist das auch so: dort lautet die Gleichung

$$\frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n} = 2x + \frac{\delta_n^2}{\delta_n} = 2x + \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2x.$$

Wir haben bei dieser Rechnung (und auch in der Definition, die wir gleich bringen werden) übrigens gleich das vorhin angesprochene Problem mitgelöst, dass der Fehler δ_n^2 für $x = 0$ gar nicht kleiner ist als der Term $2x\delta$ - das ist für uns gar nicht wichtig, solange nur der Fehlerterm (hier: δ_n^2) auch dann noch gegen 0 konvergiert, wenn man ihn durch den Eingabefehler δ_n teilt. Man sieht hier wieder den Vorteil von genauen mathematischen Begriffen!

Für andere Funktionen kann man (**) wie gesagt nicht so leicht nachprüfen, wir können aber zumindest allen Funktionen einen Namen geben, die sich so verhalten, wie wir uns das wünschen (das tun Mathematiker sehr gern!). Hier bedeutet das konkret:

Definition: Eine Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\delta_n \neq 0$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ gilt: der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \delta_n) - f(x)}{\delta_n}$$

existiert. Die Zahl $f'(x)$ heißt dann **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x .

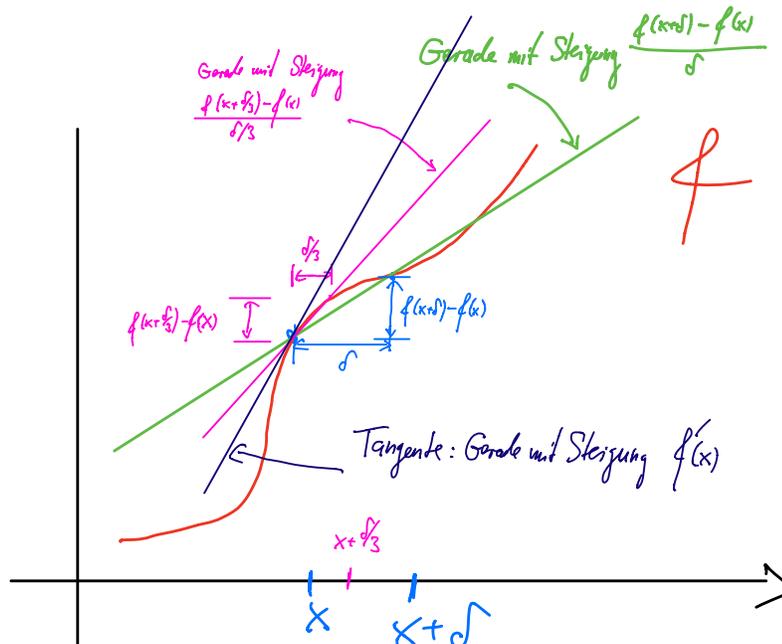
Alternative Schreibweisen für die Ableitung sind auch

$$\frac{df(x)}{dx} := f'(x), \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x) := f'(x).$$

Sie sollten beachten, dass wir hier sehr viel gefordert haben: theoretisch müssten Sie die geforderte Konvergenz für jede nur denkbare Folge δ_n mit den entsprechenden Eigenschaften nachprüfen - leider reicht es beispielsweise nicht, sich hier auf die Folge $\delta_n = 1/n$ zu beschränken; warum das so ist, wollen wir hier nicht weiter diskutieren. Zum Glück werden Sie aber auch eigentlich nie in die Verlegenheit kommen, Ableitungen nach der obigen Definition zu berechnen, sondern können sich auf die aus der Schule bekannten Formeln verlassen, die wir weiter unten noch mal zusammenstellen werden. Wir haben diese sehr ausführliche Diskussion aber deshalb gemacht, damit Sie folgenden wichtigen Merksatz verstehen können:

Merksatz: Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion f an der Stelle x beschreibt das Verhalten der Funktionswerte $f(x + \delta)$ für sehr kleine δ : bis auf winzig kleine Fehler (genauer: Fehler, die mit $\delta \rightarrow 0$ schneller als δ gegen 0 gehen) gilt nämlich $f(x + \delta) = f(x) + \delta f'(x)$.

b) Das aus der Schule bekannte Bild der Steigung eines Graphen ist übrigens ebenfalls mit der obigen Formel erklärbar: Für $\delta > 0$ ist die linke Seite der Abweichungsformel (***) ja genau gleich $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, also die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x + \delta, f(x + \delta))$. Dieser Ausdruck konvergiert einerseits gegen die Ableitung (so wie wir sie definiert haben), andererseits nähert sich die entsprechende Steigung bei immer kleinerem δ gegen der Steigung der Tangente an und konvergiert für $\delta \rightarrow 0$ schließlich gegen diese.



c) Als letztes wollen wir noch die Ableitungsfunktion diskutieren; hier kommt wieder die wichtige Unterscheidung zwischen einer Funktion und einer Zahl ins Spiel. Für festes x ist die Zahl $f'(x)$ die Ableitung von f bei x , wie oben beschrieben. Allerdings können wir uns nun eine Maschine vorstellen, die (zu einer fest vorgegebenen Funktion f) für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ automatisch die Ableitung $f'(x)$ an diesem Punkt ausrechnet. Diese Maschine entspricht einer Funktion f' , der Ableitungsfunktion von f . Natürlich kommt, wenn man in f' den Wert x einsetzt, genau die Zahl $f'(x)$ heraus, so hatten wir f' ja gebaut. Trotzdem ist die Funktion f' ein ganz anderes Objekt als die Zahl $f'(x)$ (für gegebenes x).

Man kann übrigens auch Maschinen bauen, die eine Funktion als Eingabe bekommen und die Ableitungsfunktion ausspucken. Nach unserer Lesart sind dies dann Funktionen, in deren „Eingabeschlitz“ nicht Zahlen, sondern andere Funktionen eingeworfen werden. Wem das jetzt etwas ungeheuerlich vorkommt, der denke an eine Maschine, die zur Produktion von anderen Maschinen (z.B. von Fahrkartenautomaten) benutzt wird. Solche funktionenfressenden Funktionen nennt man in der Mathematik manchmal Operatoren, und das Symbol ∇ in der Gleichung in Beispiel 2 des ersten Kapitels ist ein solcher Operator - tatsächlich genau der Ableitungsoperator, aber in zwei Dimensionen. Dies geht aber über den Stoff der Vorlesung etwas hinaus und wir wollen es daher nicht weiter diskutieren.

(3.12) Ableitungsregeln

Mit der Definition der Ableitung als Grenzwert können wir nicht besonders viel anfangen, wenn wir beispielsweise wissen wollen, was die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ ist. Glücklicherweise gibt es ein Baukastensystem aus bekannten Ableitungsfunktionen („Grundbausteine“) und Rechenregeln („Bauanleitungen“), mit dessen Hilfe wir uns auch kompliziertere Ableitungsfunktionen errechnen können.

a) Die Grundbausteine:

- (1) **Konstante Funktionen:** Für eine Funktion, die immer den gleichen Wert ausspuckt (also $f(x) = a$ für alle x im Definitionsbereich und eine Zahl a) ist die Ableitung gleich null: $f'(x) = 0$. Das kann man sogar noch sofort aus der Folgen-Definition sehen!
- (2) **Funktionen vom Typ $f(x) = x^a$ mit festem a :**

$$f(x) = x^a \quad \implies \quad f'(x) = ax^{a-1}$$

Regel: Der (feste) Exponent a wird als Faktor nach vorne geschrieben und der Exponent von f' gegenüber dem von f um genau 1 verringert.

- (3) **Exponentialfunktion:**

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \text{anders aufgeschrieben:} \quad \frac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x).$$

Regel: Die Exponentialfunktion ist die (einzige) Funktion, deren Ableitungsfunktion gleich ist wie sie selbst.

- (4) **Funktionen vom Typ a^x mit festem $a \neq 1$:**

$$\frac{da^x}{dx} = \ln(a)a^x.$$

Regel: Fast wie bei der Exponentialfunktion ändert sich nichts, lediglich $\ln(a)$ kommt als Vorfaktor dazu. Deswegen geht auch $a = 1$ nicht (wieso?), allerdings ist der Fall auch nicht schwer von Hand zu lösen (nämlich wie?).

Diese Regel bräuchte man eigentlich nicht als Grundbaustein (wir werden unten sehen, wie wir sie mittels der Regel für die Exponentialfunktion und der Bauanleitungen ausrechnen können), wir nehmen sie aber auf, weil es gut ist, sich diese Regel zu merken.

- (5) **Der natürliche Logarithmus:**

$$\frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Regel: Der natürliche Logarithmus hat als Ableitung die einzige Funktion vom Typ x^b mit $b \in \mathbb{R}$, die beim Punkt (2) nicht als Ergebnis auftauchen kann (warum das?), nämlich $x^{-1} = 1/x$.

- (6) **Logarithmen zu allgemeiner Basis $a > 0$, $a \neq 1$:**

$$\frac{d \log_a(x)}{dx} = \frac{1}{\ln(a)} \frac{1}{x}.$$

Regel: ähnlich wie beim natürlichen Logarithmus, aber mit zusätzlichem Vorfaktor $\frac{1}{\ln(a)}$.

(7) **Winkelfunktionen:**

$$\begin{aligned}\frac{d \sin(x)}{dx} &= \cos(x) \\ \frac{d \cos(x)}{dx} &= -\sin(x), \\ \frac{d \tan(x)}{dx} &= \frac{1}{\cos(x)^2}.\end{aligned}$$

Regel: Die grundlegenden Winkelfunktionen \sin und \cos haben sich im Wesentlichen gegenseitig als Ableitung, wobei man beachten muss, beim Cosinus die Ableitung nicht Sinus, sondern minus Sinus (reimt sich) ist.

Der Tangens hat eine etwas schwierigere Ableitung, die man aber mit der Quotientenregel (siehe unten) und der wichtigen Formel $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ ausrechnen kann (Übung!).

(8) **Inverse Winkelfunktionen:** (für $x \in]-1, 1[$):

$$\frac{d \arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d \arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d \arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Diese letzten Ableitungen müssen Sie sich nicht unbedingt auswendig merken (bei den anderen wäre das schon gut). Was Sie aber bemerken sollten ist, dass die inversen Winkelfunktionen, obwohl sie von allen Beispielen für Funktionen, die wir behandelt haben, vielleicht die „esoterischsten“ sind, recht einfache und sehr konkrete Ableitungen haben!

b) Die Ableitungsregeln:

Wir nehmen die Gelegenheit wahr, uns gleich ganz genau zu überlegen, was es eigentlich bedeutet, zwei Funktionen zu addieren, zu multiplizieren oder hintereinanderschalten. Danach stellen wir dann Ableitungsregeln für diese Operationen auf. **Summenregel:**

Die **Summe von zwei Funktionen** f und g ist wieder eine Funktion, und zwar diejenige, die zu gegebenem Input x die Summe der Ergebnisse von f und g , also $f(x) + g(x)$, ausspuckt. Diese Funktion schreiben wir $f + g$.

Die **Summenregel der Ableitung** lautet: für differenzierbare Funktionen f und g , und für in f und g erlaubte Eingabewerte x , ist

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Merksatz: Die Ableitung der Summe ist die Summe der Ableitungen.

Beispiel: $f(x) = x^5$, $g(x) = x^2$, dann $(f + g)(x) = x^5 + x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^5 + x^2) = 5x^4 + 2x^1 = 5x^4 + 2x.$$

Produktregel:

Das **Produkt von zwei Funktionen** f und g ist wieder eine Funktion, und zwar diejenige,

die zu jedem erlaubten Eingabewert x das Produkt der Ergebnisse $f(x)$ und $g(x)$ der beiden Einzelfunktionen ausspuckt. Diese Funktion schreiben wir mit fg (oder seltener auch $f \cdot g$). Es gilt also: $(fg)(x) := f(x)g(x)$.

Die **Produktregel der Ableitung** lautet: für differenzierbare Funktionen f und g , und für in f und g erlaubte Eingabewerte x , ist

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \text{oder kürzer} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Man beachte in der zweiten Form auch die sehr wichtige Klammersetzung!

Merksatz: Die Ableitung eines Produktes zweier Funktionen erhält man, indem man jeweils eine Funktion ableitet, die andere ohne Änderung abschreibt, und beide miteinander multipliziert. Dies kann man auf zwei verschiedene Arten tun, die beiden Ergebnisse addiert man.

Beispiel 1: $f(x) = x^4$, $g(x) = \sin(x)$, also $(fg)(x) = x^4 \sin(x)$ und

$$\frac{d}{dx}(x^4 \sin(x)) = 4x^3 \sin(x) + x^4 \cos(x).$$

Bemerkung: Ein Spezialfall entsteht, wenn $f(x) = a$ konstant ist, also für alle x den gleichen Wert $a \in \mathbb{R}$ ausspuckt. Dann ist $f'(x) = 0$, und die Produktregel lautet einfach $(ag)'(x) = 0g(x) + ag'(x) = ag'(x)$.

Kettenregel:

Die **Hintereinanderschaltung** von zwei Funktionen f und g ist wieder eine Funktion, und zwar diejenige, die die eingegebene Zahl x nimmt, in eine der Funktionen (sagen wir in g) hineinsteckt, dann das Ergebnis $g(x)$ dieser Aktion in die andere Funktion (hier f) hineinsteckt, und schließlich das Ergebnis dieser zweiten Aktion auswirft. $f \circ g$, wenn zuerst g mit x und dann f mit $g(x)$ gefüttert wird, und spricht das „ f nach g “, um sich daran zu erinnern, welche Funktion zuerst und welche danach drankommt. In Formeln:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \text{für erlaubte } x \in \mathbb{R}.$$

Damit ein $x \in \mathbb{R}$ erlaubt ist, muss es natürlich zunächst von der Funktion g vertragen werden (in deren Definitionsbereich sein), dann muss aber auch noch die Zahl $g(x)$ für die Funktion f akzeptabel (also in ihrem Definitionsbereich) sein.

Ein Beispiel ist die Funktion $h(x) = \exp(-x^2)$: zunächst nimmt man den Input x , quadriert ihn und nimmt das Negative: $g(x) = -x^2$. Dann setzt man das Ergebnis in die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$ ein, also $h(x) = f(g(x)) = \exp(g(x)) = \exp(-x^2)$. Man sieht hier auch nochmal deutlich, dass es nicht egal ist, welche Funktion man zuerst anwendet (was wäre im obigen Beispiel $g \circ f$?), und dass man immer in die hintere Funktion zuerst einsetzt - der Eingabeparameter x frisst sich sozusagen von hinten nach vorne durch!

Die **Kettenregel der Ableitung** lautet: Für differenzierbare Funktionen f und g , und für erlaubte x , ist $f \circ g$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Merksatz: Wenn f die „äußere“ (also als letztes angewandte) und g die „innere“ (also zuerst angewandte) Funktion ist, geht man so vor: zunächst bildet man die Ableitungen f' und g' beider Funktionen getrennt. Dann setzt man in f' anstatt x den Wert $g(x)$ ein, während man in g' ganz normal x einsetzt. Die beiden entstehenden Zahlen multipliziert man, um das Ergebnis

$(f \circ g)'(x)$ zu erhalten.

Beispiel: Die Hauptschwierigkeit bei der Kettenregel ist es, aus einer gegebenen Formel zu erkennen, welche Funktionen hintereinandergeschaltet wurden. In unserem Beispiel $h(x) = \exp(-x^2)$ haben wir das oben schon getan. Wir haben $h(x) = f \circ g(x)$ mit $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = -x^2$, also $f'(x) = \exp(x)$, $f'(g(x)) = \exp(g(x)) = \exp(-x^2)$, und $g'(x) = -2x$. Also ist

$$\frac{d}{dx} \exp(-x^2) = \exp(-x^2) \cdot (-2x) = -2x \exp(-x^2).$$

Beispiel 2: Die Regel für die Ableitung von $h(x) = a^x$ kann aus der Regel für die Ableitung von $\exp(x)$ hergeleitet werden: Nach den Rechenregeln der Logarithmus ist

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a)),$$

und daher $a^x = f \circ g(x)$ mit $f(x) = \exp(x)$ und $g(x) = x \ln(a)$; da $f'(x) = \exp(x)$ und $g'(x) = \ln(a)$ gilt, ist

$$\frac{d}{dx} a^x = f'(g(x))g'(x) = \exp(x \ln a) \ln(a) = \ln(a)x^a,$$

wobei im letzten Schritt wieder die vorletzte Zeile rückgängig gemacht wurde.

Quotientenregel:

Der **Quotient von zwei Funktionen** ist wieder eine Funktion, und zwar diejenige, die zu jedem erlaubten Eingabewert x den Quotienten der Werte $f(x)$ und $g(x)$ ausgibt: $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. Hierbei reicht es diesmal nicht, dass man x in f und g einsetzen darf, es muss auch $g(x) \neq 0$ sein, damit x erlaubt ist.

Die **Quotientenregel der Ableitung** lautet:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Merksatz: Die hintere, etwas symmetrischere Form ist leichter zu merken: man quadriert den Nenner, und multipliziert im Zähler (ähnlich wie bei der Produktregel) jeweils eine abgeleitete und eine unveränderte Funktion. Der wichtige Unterschied ist aber, dass man vor den Term, wo die Ableitung des Nenners steht, ein Minuszeichen schreiben muss.

Die Quotientenregel hat einen wichtigen Spezialfall, nämlich wenn $f(x) = 1$ für alle x . Sie lautet dann

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Eigentlich bräuchte man die Quotientenregel nicht als grundlegende Rechenregel: man kann sie mittels Ketten- und Produktregel selbst herausfinden. Trotzdem tritt sie so häufig auf, dass es sich lohnt, sie sich separat zu merken.

(3.13) Das Integral als Umkehrung der Ableitung

a) Ein mathematisches Rätselspiel

Stellen Sie sich folgendes Rätselspiel vor:

- Der Spielleiter denkt sich irgendeine (differenzierbare) Funktion f aus, verrät sie Ihnen aber nicht.
- Statt dessen stellte er Ihnen lediglich die Ableitungsfunktion f' zur Verfügung, Sie sind also berechtigt, für jede gewünschte Zahl x den Wert von $f'(x)$ zu erfahren.
- Zusätzlich erfahren Sie noch den Wert $f(x_0)$ an einer einzigen, vom Spielleiter bestimmten Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Ihre Aufgabe ist es, die Funktion f aus diesen Informationen zu erraten.

b) Erste Lösungsmöglichkeit: Raten

Da Sie laut Spielregel die Zahl $f'(x)$ für alle Werte von x kennen, kennen Sie die *Ableitungsfunktion* f' der gesuchten Funktion. Sehen wir uns die folgenden drei Spielsituationen an:

$$(1) \quad x_0 = 0, f(x_0) = f(0) = 0, f'(x) = 3x^2.$$

$$(2) \quad x_0 = 0, f(x_0) = f(1) = 2, f'(x) = \exp(x).$$

$$(3) \quad x_0 = 2, f(x_0) = f(2) = 7, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(4) \quad x_0 = 0, f(x_0) = f(0) = 0, f'(x) = \exp(-x^2).$$

In Situation (1) können wir mit etwas Eingebung erfolgreich raten: wir probieren es mit $f(x) = x^3$, dann ist (nach unseren Ableitungsregeln) $f'(x) = 3x^2$, das passt, und $f(x_0) = f(0) = 0^3 = 0$, das passt auch. Hier können wir das Spiel also (scheinbar) recht leicht gewinnen.

In Situation (2) erinnern wir uns daran, dass $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle x gilt, daher ist $\tilde{f}(x) = \exp(x)$ ein gute Kandidat. Leider ist aber $\exp(x_0) = e^0 = 1 \neq 2$, also ist \tilde{f} nicht die richtige Funktion! Trotzdem ist die Lösung nicht schwer: wir gleichen einfach den Fehler durch Addieren einer Konstanten aus, also $f(x) = \exp(x) + 1$, dann ist (wie gewünscht) $f'(0) = e^0 + 1 = 2$, und nach wie vor $f'(x) = \exp(x) + 0 = \exp(x)$.

Situation (3) ist ähnlich, wenn (eher: falls!) wir uns noch erinnern, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist. Denn dann setzen wir zunächst $\tilde{f}(x) = \arctan(x)$ und erhalten schon mal $\tilde{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Leider können wir $\tilde{f}(2)$ (ohne Taschenrechner) nicht so leicht ausrechnen; was müssen wir also dazuaddieren, damit $f(2) = 7$ ist? Hier haben wir es wieder sehr leicht: wir nehmen einfach die Zahl $7 - \arctan(x_0) = 7 - \arctan(2)$. Das wir sie nicht explizit kennen, stört uns überhaupt nicht, denn wir rechnen nach: mit $f(x) := \tilde{f}(x) + 7 - \tilde{f}(2) = \arctan(x) + 7 - \arctan(2)$ ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, und $f(2) = \tilde{f}(2) + 7 - \tilde{f}(2) = 7$, also Problem gelöst!

Situation (4) allerdings ist schwierig: welche Funktion muss man ableiten, damit $\exp(-x^2)$ herauskommt? Einige Versuche scheitern: Mit $f(x) = \exp(-x^2)$ (hat ja bei Punkt (2) auch gut funktioniert!) bringt uns die Kettenregel $f'(x) = -2x \exp(-x^2)$. Will man das $2x$ mit Gewalt niedermachen, also $g(x) = \frac{-1}{2x} \exp(-x^2)$, dann bekommt man mit Produktregel (und wieder Kettenregel) $g'(x) = \frac{-1}{2x}(-2x) \exp(-x^2) + \frac{1}{2x^2} \exp(-x^2)$, was auch nicht stimmt. Kann man Aufgabe (4) also überhaupt lösen?

c) Zweite Lösungsmöglichkeit: das Integral Die Antwort darauf, ob man die Aufgabe (4) aus dem vorigen Punkt überhaupt lösen kann, hängt ein wenig davon ab, was man unter einer

Lösung versteht. Wenn man nach einer *Formel* sucht, also so etwas wie $f(x) = \exp(-\cos(x^2) + x^3)$, dann stellt sich heraus, dass es in sehr vielen Fällen (und insbesondere im Punkt (4) oben!) nicht möglich ist, f als Formel anzugeben, obwohl man f' als Formel gegeben hat! Das darf einen aber nicht entmutigen, denn die Aufgabe war es nicht, eine Formel zu finden, sondern die *Funktion* f . Der Unterschied ist hier, dass wir zwar angeben müssen, was das Ergebnis $f(x)$ ist, wenn man f auf ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ wirken lässt, aber niemand hat gesagt, dass dies mit Hilfe einer expliziten Formel geschehen muss. Mit diesem (in der Mathematik üblichen) Verständnis einer Lösung lässt sich die Aufgabe sehr wohl lösen, und wir werden jetzt sehen, wie das geht. Wir starten am einzigen Punkt, wo wir wissen, was die Funktion f tut, nämlich bei x_0 . Da wir aber auch $f'(x_0)$ kennen, haben wir zumindest einen Hinweis darauf, was f in der Nähe von x_0 tut: schließlich ist ja für kleine δ die Gleichung

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0) + \text{„kleiner Fehler“}$$

wahr. Wenn wir einmal so tun, als dürften wir den kleinen Fehler ignorieren, dann können wir uns von hier aus weiterhangeln: die gleiche Formel wie oben, nur mit $x_0 + \delta$ statt x_0 , ergibt

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2\delta) &= f((x_0 + \delta) + \delta) = f(x_0 + \delta) + \delta f'(x_0 + \delta) + \text{„anderer Fehler“} = \\ &= f(x_0) + \delta f'(x_0) + \delta f'(x_0 + \delta) + \text{„Gesamtfehler“}, \end{aligned}$$

und genauso weiter (wobei \approx bedeutet, dass wir die Fehler nicht mehr aufschreiben):

$$f(x_0 + 3\delta) \approx f(x_0 + 2\delta) + \delta f'(x_0 + 2\delta) \approx f(x_0) + \delta \left(f'(x_0) + f'(x_0 + \delta) + f'(x_0 + 2\delta) \right).$$

Dieses Vorgehen hat natürlich den Nachteil, dass wir die gesuchte Funktion f gar nicht wirklich herausfinden, sondern nur ungefähr; das war aber nicht so ausgemacht! Wenn wir δ kleiner machen, können wir zwar die Genauigkeit vermutlich steigern, aber dafür kommen wir beispielsweise in 3 Schritten dann auch weniger weit - um also $f(y)$ für ein festes y auszurechnen (oder anzunähern) brauchen wir für kleineres δ auch mehr Schritte, die eventuell mehr Fehler einführen. Kann dieses Verfahren also überhaupt zum Erfolg führen?

Die vielleicht überraschende Antwort ist, dass es das kann, wenn man δ gegen 0 gehen lässt. Um zu verstehen, was damit gemeint ist, stellen wir uns vor, dass wir zunächst nur den Wert $f(x_0 + 1)$ von f an der Stelle $f(x_0 + 1)$ ausrechnen wollen.

- Wir können hierzu in einem Schritt dorthin gehen: $f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + 1 \cdot f'(x_0)$.
- Wir können auch in zwei Schritten der Länge $1/2$ gehen: $f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2}f'(x_0 + 1/2)$.
- Oder in drei Schritten der Länge $1/3$: $f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + \frac{1}{3}f'(x_0) + \frac{1}{3}f'(x_0 + 1/3) + \frac{1}{3}f'(x_0 + 2/3)$.
- In vier Schritten der Länge $1/4$:

$$f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + \frac{1}{4}(f'(x_0) + f'(x_0 + \frac{1}{4}) + f'(x_0 + \frac{2}{4}) + f'(x_0 + \frac{3}{4}))$$

- Oder allgemein in n Schritten der Länge $1/n$:

$$f(x_0 + 1) \approx f(x_0) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_0 + \frac{i}{n}).$$

Die Zahl $y_n := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_0 + \frac{i}{n})$ ist also die Approximation an $f(x_0 + 1) - f(x_0)$, die wir erhalten, wenn wir im obigen Verfahren n Schritte machen. Die Zahlen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine Folge; hat sie einen Grenzwert? Die Antwort (die man eigentlich natürlich beweisen müsste) ist „ja“, und da dieser Grenzwert so wichtig ist, bekommt er eine eigene Notation: im obigen Beispiel schreiben wir

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f'(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_0 + \frac{i}{n}),$$

und nennen das Objekt auf der linken Seite das **Integral der Funktion f' von x_0 bis $x_0 + 1$** . Bei der Notation sollten Sie beachten, dass gewisse Ähnlichkeiten mit dem Summenzeichen hat:

- Das Integralzeichen \int ersetzt das Summenzeichen Σ . \int soll ein stilisiertes S darstellen.
- Der (stumme) Summationsindex i auf der rechten Seite verwandelt sich in den (stummen) Integrationsindex t . Genau wie i kann auch t beliebig umbenannt werden, es ist also

$$\int_{x_0}^{x_0+1} f'(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+1} f'(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+1} f'(u) du.$$

Ein häufiger (oft Flüchtigkeits-) Fehler ist es jedoch, Integrationsgrenzen und stummen Index mit dem gleichen Buchstaben zu bezeichnen, also etwa „ $\int_0^x f(x) dx$ “. Das sollte man unbedingt vermeiden!

- Hinter dem Integralzeichen steht (wie bei der Summe auch) das, was „summiert“ (man sagt: integriert) werden soll, hier also $f'(t)$. Der Zusatz dt soll uns nur daran erinnern, dass wir es mit einem Grenzwert zu tun haben. Er hat (für uns) keine Bedeutung und wir nehmen ihn einfach hin.
- Die Grenzen werden im Integral etwas anders gehandhabt als in der Summe: die untere Grenze x_0 entspricht dem „ersten“ Wert, den man in der Summe in die Funktion f' einsetzen muss: für $i = 0$ erhält man dort als ersten Term die Zahl $f'(x_0 + \frac{0}{n}) = f'(x_0)$. Die obere Grenze $x_0 + 1$ entspricht beinahe dem „letzten“ Wert, den man summieren muss: für $i = n - 1$ hat man ja den Summanden $f'(x_0 + \frac{n-1}{n})$, und für große n ist $\frac{n-1}{n} \approx 1$, also ungefähr $f'(x_0 + 1)$.

Wir haben jetzt die Gleichheit

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+1} f'(t) dt$$

gefunden. Wir haben daher die gestellte Aufgabe für $x = x_0 + 1$ in gewisser Weise gelöst: wir können (in Form eines Grenzwertes) angeben, was die gesuchte Funktion f ausgibt, wenn man den Wert $x = x_0 + 1$ in sie eingibt. Sie können das nun für Betrug halten: denn etwa im Beispiel (4) oben, also mit $f'(x) = \exp(-x^2)$, $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$ bekommen Sie die Lösung

$$f(1) = 0 + \int_0^1 \exp(-t^2) dt,$$

und welche Zahl ist das nun? Das kann niemand so genau sagen, aber immerhin haben wir einen Rechenweg angegeben, wie man sie bekommt (als Grenzwert), und wenn wir ehrlich sind, sind wir selbst dann, wenn f durch eine explizite Formel gegeben ist, oft nicht viel besser dran - oder wissen Sie genau, was $\cos(3)$ ist? Für die Mathematiker ist daher die Angabe von f über einen Grenzwert eine völlig zufriedenstellende Lösung der Aufgabe.

Natürlich können wir auf ähnliche Weise (also mit Hilfe eine geeigneten Folge) nicht nur $f(x_0+1)$ sondern auch $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausrechnen. Die dazu nötige ungefähre Gleichheit ist gegeben durch

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_0 + (x - x_0)\frac{i}{n}),$$

(können Sie das nachvollziehen?), die Folge also durch $y_n = \frac{x-x_0}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f'(x_0 + (x - x_0)\frac{i}{n})$, und der Grenzwert durch

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_0 + (x - x_0)\frac{i}{n}).$$

Wir halten also fest, dass wir einen Mechanismus (eine Funktion!) gefunden haben, der für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl $\int_{x_0}^x f'(t) dt$ erzeugt, welche das Problem „Berechne zu $x \in \mathbb{R}$ den unbekanntem Wert von $f(x)$ aus der Kenntnis von f' und von $f(x_0)$!“ in folgender Weise löst:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \quad (*)$$

Die Zahl $\int_{x_0}^x f'(t) dt$ heißt das **Integral der Funktion f' von x_0 nach x** .

(3.14) Integrale allgemeiner Funktionen

Im Beispiel oben haben wir die Ableitung f' einer Funktion integriert und (bis auf die Konstante $f(x_0)$) die Funktion selbst wieder erhalten. Die Methode, mit der wir diese Integral gebaut haben, verlangt allerdings gar nicht, dass die Funktion im Integral (der sogenannte Integrand) die Ableitung einer anderen Funktion ist: statt dessen können wir für eine beliebige Funktion g und für beliebige Zahlen x_0 und x die Folge

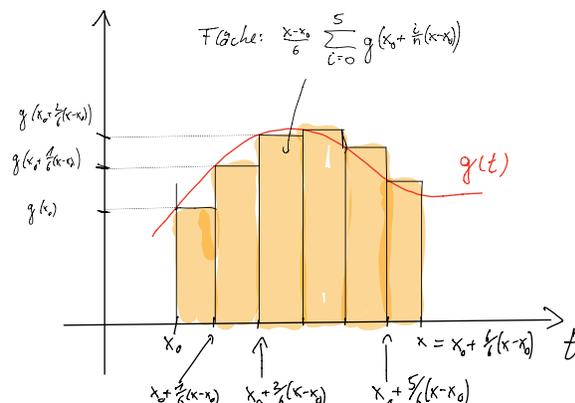
$$y_n := \frac{x - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_0 + \frac{i}{n}(x - x_0))$$

definieren. Wenn beispielsweise g stetig ist (tatsächlich dürfen wir z.B. auch endlich viele Sprünge erlauben), dann lässt sich bewiesen, dass diese Folge konvergiert. Wir definieren dann

$$\int_{x_0}^x g(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_0 + \frac{i}{n}(x - x_0))$$

und nennen $\int_{x_0}^x g(t) dt$ das **Integral von g mit Integralgrenzen x_0 und x** .

Diese Formel stellt übrigens eine Verbindung zu der Ihnen vielleicht bekannten Interpretation des Integrals als Fläche unter einer Kurve dar: im Bild rechts hat die ausgefüllte Fläche genau den Flächeninhalt $\frac{x-x_0}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_0 + \frac{i}{n}(x-x_0))$ für den Spezialfall $n = 6$, denn jedes Rechteck hat die Breite $\frac{1}{6}(x-x_0)$, und die Höhe des Rechtecks mit linker unterer Ecke $x_0 + \frac{i}{6}(x-x_0)$ ist genau $g(x_0 + \frac{i}{6}(x-x_0))$. Die Fläche dieser Rechtecke ist eine (recht grobe) Näherung der Fläche unter dem Graphen von g , die aber mit wachsendem n (mehr und dünnere Rechtecke) immer besser wird.



Die mathematische Theorie der Integration kennt noch viele Feinheiten (beispielsweise bei der Frage, welche Funktionen man nun genau integrieren darf und welche nicht), die aber für uns nicht wichtig sind - wir gehen einfach immer davon aus, dass wir eine Funktion integrieren dürfen, solange wir nicht guten Grund haben, etwas anderes zu vermuten.

(3.15) Rechenregeln für Integrale

Die Funktion, die integriert werden soll, wird üblicherweise (und auch hier) als Integrand bezeichnet.

- (1) **Addieren von zwei Integranden:** Für zwei Funktionen f, g und zwei Zahlen x_0, x gilt:

$$\int_{x_0}^x (f(t) + g(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Beispielsweise ist also

$$\int_2^5 (t^2 + 4t^3) dt = \int_2^5 t^2 dt + \int_2^5 4t^3 dt.$$

Später werden wir sehen (vielleicht wissen Sie das auch schon), dass wir die rechte Seite sogar konkret ausrechnen können.

- (2) **Herausziehen von Zahlen:** Für eine Funktion f , eine Zahl a und weitere Zahlen x_0, x gilt:

$$\int_{x_0}^x a f(t) dt = a \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Im obigen Beispiel können wir also den zweiten Term noch weiter vereinfachen:

$$\int_2^5 4t^3 dt = 4 \int_2^5 t^3 dt.$$

- (3) **Vertauschen der Integralgrenzen:** Für eine Funktion f und Zahlen x, x_0 gilt:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = - \int_x^{x_0} f(t) dt.$$

Vertauschen wir also die Integralgrenzen, so müssen wir zum Ausgleich mit -1 multiplizieren, d.h. das Vorzeichen umdrehen. Insbesondere zwingt uns keiner, die untere Integralgrenze immer kleiner zu wählen als die obere.

- (4) **Zusammenziehen und Auseinandernehmen des Integrationsbereichs:** Für eine Funktion f und Zahlen x_0 , x_1 und x gilt:

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^x f(t) dt.$$

Man kann also einen Bereich (von x_0 bis x) irgendwo (bei x_1) trennen, über die Bereiche $[x_0, x_1]$ und $[x_1, x]$ separat integrieren, und die Ergebnisse addieren. Andererseits kann man zwei benachbarte Bereiche „zusammenwachsen lassen“ und aus zwei Integralen eines machen, wenn man die Gleichung von rechts nach links liest. Beachten Sie auch, dass es gar nicht nötig ist, dass $x_0 < x_1 < x$ ist - die Gleichung stimmt immer! Nur die geometrische Anschauung ist im allgemeinen Fall natürlich nicht so schön.

Eine sehr wichtige „Nicht-Regel“ sollten wir auch noch erwähnen: für zwei Funktionen f und g kann man mit dem Ausdruck $\int_{x_0}^x f(x)g(x) dx$ nicht direkt etwas anfangen - insbesondere sollte man auf keinen Fall versuchen, ihn etwa durch den Ausdruck $\int_{x_0}^x f(x) dx \cdot \int_{x_0}^x g(x) dx$ auszurechnen - das ist fast garantiert falsch! Integrale von Produkten von Funktionen sind daher leider oft etwas schwierig zu behandeln, wir werden aber bald noch einen Trick kennen lernen, wie man in einer solchen Situation trotzdem manchmal weiterkommt.

(3.16) Stammfunktion und Integral

Wir hatten in (3.13) die Ableitung f' einer Funktion f gegeben und haben mit Hilfe des Integrals die Funktion wiedergefunden. Eine eng verwandte, aber doch auf den ersten Blick unterschiedliche, Aufgabenstellung ist folgende: Nehmen Sie nun an, dass Sie eine Funktion g gegeben haben, und Sie sollen eine andere Funktion G finden, deren Ableitung genau g ist, also $G'(x) = g(x)$ für alle x . Der Unterschied zu (3.13) ist, dass Sie nicht vorher wissen, dass g die Ableitung irgendeiner Funktion ist.

Trotzdem haben wir diese Aufgabe eigentlich schon so gut wie gelöst: wir sehen uns nämlich die letzte Gleichung (*) aus (3.13) an, und bilden auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Ableitung. Sie kennen aus der Schule die Regel, dass man zu einer Gleichung auf beiden Seiten etwas dazumultipliziert, addiert, subtrahiert oder teilt, und die Gleichung bleibt immer noch gültig (außer man hat durch 0 geteilt oder ähnliche Schweinereien). Der gleiche Trick funktioniert auch mit der Ableitung: Wenn für zwei Funktionen g und h die Gleichheit $g(x) = h(x)$ für alle x gilt, dann gilt auch $g'(x) = h'(x)$ für alle x (können Sie verstehen, warum das so sein muss?). Wenn wir nun also die Gleichung (*) aus (3.13) differenzieren, erhalten wir auf der linken Seite dadurch einfach $f'(x)$. Auf der rechten Seite verschwindet der erste Term (er hängt nicht von x ab), und mit dem zweiten wissen wir nicht viel anzufangen, dort schreiben wir die Ableitung einfach auf und rechnen sie nicht aus. Das Ergebnis ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Nun benutzen wir die Tatsache, dass wir Objekte in der Mathematik so nennen dürfen, wie wir wollen: wir schreiben statt f' einfach g , und bekommen die Gleichung⁶⁾

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(t) dt. \quad (**)$$

Mit anderen Worten: Die Funktion G , die zu jedem gegebenen $x \in \mathbb{R}$ das Integral $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ auswirft, hat die Eigenschaft, die wir oben gesucht haben: wenn wir sie ableiten, bekommen wir g . Solche Funktionen (also Funktionen, deren Ableitungsfunktion g ist), heißen **Stammfunktionen** von g .⁷⁾ Der Plural ist hier Absicht: schließlich ist G nicht die einzige Funktion, die das leistet, beispielsweise erhält man auch dann g , wenn man die Funktion $G + 2$ ableitet, also die Funktion, die zu gegebenem x den Wert $(G+2)(x) := G(x) + 2 = \int_{x_0}^x g(t) dt + 2$ auswirft. Das gleiche gilt natürlich für jede andere Zahl anstatt 2. Man kann allerdings beweisen, dass alle Funktionen \tilde{G} , deren Ableitungsfunktion gleich g , die Gestalt $\tilde{G}(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt + c$ für eine reelle Zahl c haben müssen. Genauso können Sie übrigens die untere Integralgrenze x_0 durch eine andere Zahl (z.B. x_1) ersetzen und erhalten eine andere Stammfunktion. Nach unseren Rechenregeln gilt

$$\int_{x_1}^x g(t) dt = \int_{x_1}^{x_0} g(t) dt + \int_{x_0}^x g(t) dt = \int_{x_1}^{x_0} g(t) dt + G(x),$$

und da $\int_{x_1}^{x_0} g(t) dt$ nicht von x abhängt (also bei gegebenem x_0 und x_1 einfach eine Zahl ist), hat auch die Stammfunktion mit veränderter unterer Grenze die Gestalt $G(x) + \text{Konstante}$. Wir merken uns, dass es zu einer Funktion g sehr viele Stammfunktionen gibt, sie unterscheiden sich untereinander aber nur durch eine Konstante.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Die Gleichungen (*) und (**) bedeuten nichts anderes, als dass Ableiten und Integrieren gegensätzliche Tätigkeiten sind: wenn ich das Ableiten einer Funktion rückgängig machen will, muss ich deren Ableitung f' integrieren, das sagt Gleichung (*). Anzumerken ist hierbei nur, dass man das Ableiten einer Funktion leider nicht *vollständig* rückgängig machen kann, denn beispielsweise die Funktionen $f(x) = x^2$ und $\tilde{f}(x) = x^2 + 2$ haben die selbe Ableitung. Um nach dem Ableiten noch zu wissen, welche von beiden man ursprünglich vorliegen hatte, braucht man in (*) die Kenntnis des Funktionswertes von f an einer Stelle x_0 .

Wenn ich dagegen die Bildung des Integrals $\int_{x_0}^x g(t) dt$ rückgängig machen will, dann muss ich (wie (**) sagt) die Funktion G , die bei gegebener Zahl x das Integral $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ ausspuckt, ableiten. Man sagt auch, ich muss das Integral $\int_{x_0}^x g(t) dt$ *nach der oberen Integralgrenze ableiten*. Wie in (*) gibt es auch hier einen kleinen Haken: die Funktion $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$ ist

⁶⁾Hier schummeln wir streng genommen ein wenig, denn im (weggelassenen) Beweis von a) hätte es sein können, dass wir schon wissen müssen dass f' die Ableitung von etwas anderem ist, damit dieser Beweis funktioniert. Die ist allerdings nicht der Fall, so dass alle gemachten Aussagen richtig sind.

⁷⁾Manchmal schreibt man für die Stammfunktion auch $G(x) = \int g(x) dx$ (also ohne Integralgrenzen); diese Schreibweise ist aber sehr verwirrend, da hier die (stumme) Integrationsvariable x plötzlich zur Variablen x der Funktion G wird (in unserer Schreibweise war ja x an der oberen Integralgrenze angesiedelt, und die Integrationsvariable hatten wir t genannt). Wir werden diese Notation daher nicht verwenden, wenn Sie sie aber antreffen, dann wissen Sie Bescheid.

nicht die einzige Funktion, deren Ableitung g ist. Wie in c) diskutiert, könnte man auch $G(x)+c$ für eine Konstante c nehmen, oder das Integral bei einer anderen Untergrenze x_1 beginnen lassen.

Wenn Sie die Bedeutung der Formeln (*) und (**) verstanden haben, dann haben Sie eines der wichtigsten Ergebnisse der Analysis verstanden, nämlich den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**.

(3.17) Berechnung von Integralen mit Stammfunktionen

Wir schreiben hier noch einmal übersichtlich auf, wie man die Stammfunktion benutzen kann, um Integrale zu berechnen. Zunächst noch einmal die Definition:

Eine **Stammfunktion** zu einer gegebenen Funktion g ist eine Funktion G , für die $G'(x) = g(x)$ für alle x gilt, deren Ableitung also die Funktion g ist. Zu jedem g gibt es mehrere (sogar: unendlich viele) Stammfunktionen, man kann nämlich eine beliebige konstante Zahl zu jeder Stammfunktion addieren, und sie bleibt dadurch eine Stammfunktion.

Zum **Berechnen von Integralen** verwendet man die Stammfunktion in folgender Weise: Ist G eine (beliebige!) Stammfunktion von g , dann ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a).$$

Warum ist das so? Wir haben in ((3.16)) festgestellt, dass jede Stammfunktion (also auch unsere beliebige) von g die Form $G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt + c$ haben muss, wobei x_0 und c davon abhängen, welche Stammfunktion man genau vorliegen hat. Zwar kennen wir für unsere konkrete Stammfunktion G weder x_0 noch c , aber interessanterweise macht das nichts aus: auch wenn wir x_0 und c nicht kennen, so können wir doch mit ihnen rechnen! Wir formen die Gleichung für G also zunächst zu $\int_{x_0}^x g(t) dt = G(x) - c$ um, und benutzen dann unsere Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) dt &= \int_a^{x_0} g(t) dt + \int_{x_0}^b g(t) dt = - \int_{x_0}^a g(t) dt + \int_{x_0}^b g(t) dt = \\ &= - \left(\int_{x_0}^a g(t) dt + c \right) + \left(\int_{x_0}^b g(t) dt + c \right) = -G(a) + G(b) = G(b) - G(a). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite sind nun sowohl x_0 als auch c nicht mehr anwesend, daher ist es auch egal, was sie ursprünglich für einen Wert hatten. Wir haben unsere Formel daher bewiesen!

Häufig kommt es auch vor, dass wir $a = -\infty$ oder $b = \infty$ brauchen, also das Integral über ein unendlich langes Stück der reellen Achse. Glücklicherweise kann man das in allen für uns wichtigen Fällen ganz einfach machen: Wenn nämlich die Stammfunktion G einen Grenzwert im Unendlichen hat, kann man den einfach einsetzen. Als Beispiel hierfür berechnen wir

$$\int_1^\infty \exp(-t) dt$$

Eine Stammfunktion von $g(t) = \exp(-t)$ ist $G(t) = -\exp(-t)$ (ableiten und nachprüfen!), und wir erhalten für allgemeine a und b daher

$$\int_a^b \exp(-t) dt = (-\exp(-b)) - (-\exp(-a)) = \exp(-a) - \exp(-b).$$

Nun hätten wir gerne $b = \infty$. Zum Glück wissen wir, dass die $\exp(-x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen null geht⁸⁾. Wir können also $\exp(-\infty)$ durch 0 ersetzen, $a = 1$ einsetzen und erhalten die Aussage

$$\int_1^{\infty} \exp(-t) dt = \exp(-1) - 0 = \frac{1}{e}.$$

(3.18) Wichtige Stammfunktionen

Es ist eine durchaus bedauerliche Tatsache, dass es für viele (man könnte sogar sagen: „die meisten“) Funktionen g , die man durch eine explizite Formel ausdrücken kann, nicht möglich ist, auch die Stammfunktion durch eine explizite Formel auszudrücken. Diejenigen Fälle, wo das doch geht, sind deswegen um so wichtiger, und wir tragen hier die wichtigsten zusammen.

- **Funktionen vom Typ $h(x) = x^b$ mit festem $b \in \mathbb{R}$, $b \neq -1$:**

$$h(t) = t^b \text{ für } b \neq -1 \quad \Longrightarrow \quad H(x) = \frac{1}{b+1} x^{b+1}$$

Regel: Der (feste) Exponent wird um eines erhöht. In H taucht der Kehrwert dieses erhöhten Exponenten dann als Vorfaktor auf (deswegen darf auch $b+1$ nicht gleich null sein!), der erhöhte Exponent selbst als Exponent der Stammfunktion.⁹⁾

Begründung: Wenn man H ableitet und die Regel der Ableitung für Funktionen vom Typ x^a mit $a = b+1$ anwendet, dann sieht man $H'(x) = h(x)$.

- **Die Funktion $h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$:**

$$h(t) = \frac{1}{t} \quad \Longrightarrow \quad H(x) = \ln(x).$$

Regel: Die Stammfunktion von $1/t$ ist der natürliche Logarithmus.

Begründung: Umkehrung der Ableitungsregel für den natürlichen Logarithmus.

- **Die Exponentialfunktion**

$$h(t) = \exp(t) \quad \Longrightarrow \quad H(x) = \exp(x)$$

Regel: die Exponentialfunktion hat sich selbst als Stammfunktion

Begründung: sie ist ja auch ihre eigene Ableitung!

- **Funktionen vom Typ a^x mit festem $a \neq 1$**

$$h(t) = a^t \quad \Longrightarrow \quad H(x) = \frac{1}{\ln a} a^x$$

Regel: Fast wie bei der Exponentialfunktion ändert sich nicht viel - lediglich den Vorfaktor $\frac{1}{\ln a}$ braucht man hier zusätzlich. Deswegen geht auch der Fall $a = 1$ nicht (verstehen Sie warum?), den hatten wir aber schon oben (wo?).

⁸⁾Streng genommen haben wir nicht genau definiert, was es für eine Funktion bedeutet, im Unendlichen gegen eine Zahl b zu konvergieren. Falls Sie es genau wissen wollen: für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ muss gelten: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, also die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, die durch Einsetzen der Glieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in f entsteht, muss selbst konvergieren, und zwar gegen b .

⁹⁾Ein wichtiger, einfacher, aber etwas ungewohnter Spezialfall entsteht bei $b = 0$. Sie sollten darüber nachdenken, was dieser Fall bedeutet und warum er einfach ist.

Wichtiger Sonderfall: Der Fall $a = \frac{1}{e}$ führt zu der oft beutzten Stammfunktion

$$h(t) = \left(\frac{1}{e}\right)^t = e^{-t} \implies H(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} \left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{\ln(e^{-1})} e^{-x} = \frac{1}{-\ln(e)} e^{-x} = -e^{-x}.$$

Begründung: Ableiten von $\frac{1}{\ln a} a^x$ mit Hilfe der Ableitungsregel für a^x und der Regel, dass man Vorfaktoren beim Ableiten einfach abschreiben darf.

• **Winkelfunktionen:**

$$\begin{aligned} h(t) = \sin(t) &\implies H(x) = -\cos(x), \\ h(t) = \cos(t) &\implies H(x) = \sin(x). \end{aligned}$$

Regel: Wie bei der Ableitung erzeugen die Winkelfunktionen \sin und \cos sich gegenseitig als Stammfunktionen. Allerdings bekommt nun die Stammfunktion des Sinus das Minuszeichen (bei der Ableitung war es die Ableitung des Cosinus). Sie sollten verstehen, warum das auch so sein muss.

Kommentar: Wir haben keine Stammfunktion für den Tangens angegeben. Das liegt daran, dass wir bei unseren Ableitungsregeln keine Funktion dabei hatten, wo der Tangens beim Ableiten *als Ergebnis herauskommt*. Dies zeigt eine wichtige Tatsache: es nützt uns zum Integrieren gar nichts, wenn wir die Ableitung des Integranden kennen. Wir müssen stattdessen eine Funktion finden, die beim Ableiten genau den Integranden erzeugt. Man kann es hier (wie ja auch in (3.13 a) geschehen) durch Raten versuchen, man wählt also einen vielversprechenden Kandidaten und leitet ihn ab. Meist erlebt man dabei aber vor allem Frustration, denn es entstehen durch die Ketten- und Produktregel oft komplizierte Ausdrücke, und man braucht schon recht viel Erfahrung, um genau richtig zu raten und H zu finden, dass $H'(x) = h(x)$ gilt. Beim Tangens ist beispielsweise die Stammfunktion $H(x) = -\ln(|\cos(x)|)$. Wenn Sie das ableiten, können Sie (relativ) leicht überprüfen, dass es stimmt - aber wäre Sie darauf gekommen? Die meisten von uns sicher nicht so leicht. Daher kommt auch der Spruch: „Ableiten ist Handwerk, Integrieren ist eine Kunst“. Ein wenig dieser Kunst werden wir weiter unten kennen lernen, vorher sehen wir uns aber noch ein paar Stammfunktionen an, die wir bei den Grundbausteinen der Ableitung quasi kostenlos dazubekommen haben.

• **Bonus-Stammfunktionen:**

$$\begin{aligned} h(t) = \frac{1}{\cos(t)^2} &\implies H(x) = \tan(x), \\ h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &\implies H(x) = \arcsin(x) \\ h(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} &\implies H(x) = \arccos(x) \\ h(t) = \frac{1}{1+t^2} &\implies H(x) = \arctan(x). \end{aligned}$$

Sie sehen also, dass wir von recht obskuren Funktionen die Stammfunktionen kennen, weil diese Funktionen in Punkt (3.12 a), Unterpunkt (7) und (8), als Ableitung von etwas Anderem herauskamen. Wenn man aber eine ganz konkrete Funktion hat, deren Stammfunktion man wissen will, ist es wie schon oben erwähnt leider nicht so einfach. Ein paar Tricks folgen jetzt.

(3.19) Integrationsmethoden

Wenn wir Funktionen integrieren wollen, die nicht zu den im letzten Punkt genannten gehören, stoßen wir schnell an unsere Grenzen. Ein paar Tricks gibt es aber doch, aber selbst deren Anwendung ist nicht immer einfach...

Summenregel und Faktoren herausziehen:

Diese Regel ist zum Glück noch sehr einfach, wir hatten sie schon in (3.15): für Funktionen f, g und Zahlen x_0, x und a gelten die Gleichungen

$$\int_{x_0}^x (f(t) + g(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

$$\int_{x_0}^x a f(t) dt = a \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Partielle Integration:

Wir kommen nun zu den etwas schwierigeren Techniken der Integration, und beginnen mit einem Beispiel: nehmen wir an, wir wollen den Wert des Integrals

$$\int_1^7 t \sin(t) dt$$

berechnen. Der Integrand ist also hier das Produkt von zwei Funktionen, nämlich der Funktion $f(t) = t$ und der Funktion $g(t) = \sin(t)$. Wir kennen sogar von beiden Funktionen die Stammfunktionen $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $G(x) = -\cos(x)$, aber das nützt uns zunächst nichts, denn leider ist die Stammfunktion von fg nicht FG , wie Sie leicht nachrechnen können, wenn Sie die Funktion $(FG)(x) = -\frac{1}{2}x^2 \cos(x)$ ableiten und dabei die Produktregel anwenden.

Wie können wir also trotzdem weiter kommen? Verlassen wir dazu zunächst einmal das konkrete Beispiel und betrachten zwei Funktionen u, v und deren Ableitungen u' und v' . Wollen wir das Produkt $u'v'$ integrieren (im obigen Beispiel wäre also $u'(t) = t, v'(t) = \sin(t)$), dann taugt leider die Funktion uv (mit $uv(x) = u(x)v(x)$) nicht als Stammfunktion, denn wegen der Produktregel ist

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \neq u'(x)v'(x).$$

Hier haben wir also keinen Erfolg - trotzdem lohnt es sich, das erste Gleichheitszeichen oben etwas genauer anzusehen. Lassen Sie uns nämlich die Gleichung einmal etwas umstellen:

$$u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x). \quad (*)$$

Der Term $(uv)'(x)$ ist angenehm zu integrieren, da er die Ableitung von etwas Bekanntem ist:

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = (uv)(b) - (uv)(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Die anderen Terme sind leider nicht so schön zu integrieren, aber wir können trotzdem das Integral von a bis b über beide Seiten der Gleichung $(*)$ bilden - wie auch schon bei der Ableitung erklärt erhält so eine Operation das Gleichheitszeichen. Allerdings bleibt uns bei zwei der Terme

nichts anderes übrig, als das Integral als solches aufzuschreiben, denn ausrechnen können wir es nicht. Wir erhalten:

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \int_a^b (uv)'(t) dt - \int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt. \quad (**),$$

wobei die „Auswertungsklammer“ $[u(t)v(t)]_a^b := u(b)v(b) - u(a)v(a)$ eine praktische abkürzende Schreibweise ist. Die Formel (**) nennt man die Formel der partiellen (also teilweisen) Integration, denn das linke Integral wurde teilweise ausgerechnet, aber es bleibt auf der rechten Seite noch ein Integral übrig. Zunächst scheint es, als hätten wir aus diesem Grund auch nichts gewonnen - wir müssen ja nur wieder ein Integral ausrechnen!

In gewissen Fällen geht das aber leichter als im ursprünglichen Integral. Zur Illustration gehen wir nochmal in das Anfangsbeispiel zurück. Wir müssen aber hier u und v so wählen, dass sie zur neuen Formel passen: anders im Text vor (*) wählen wir nun $u(t) = t$ (anstatt $u'(t) = t$); die Wahl $v'(t) = \sin(t)$ können wir beibehalten. Gehen wir mit diesen Festlegungen in die Formel (**), dann bekommen wir auf der linken Seite das Integral $\int_a^b t \sin(t) dt$, und auf der rechten Seite benutzen wir, dass $u'(t) = 1$ und eine Stammfunktion von v' durch $v(t) = -\cos(t)$ gegeben ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b t \sin(t) dt &= b \cdot (-\cos(b)) - a \cdot (-\cos(a)) - \int_a^b 1 \cdot (-\cos(t)) dt = \\ &= a \cos(a) - b \cos(b) + \int_a^b \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht nun zwar tatsächlich noch ein Integral (wie ja auch in (**)), aber eines, das wir ausrechnen können, denn von \cos kennen wir ja die Stammfunktion, nämlich \sin , es ist daher $\int_a^b \cos(t) dt = \sin(b) - \sin(a)$. Wir erhalten also das Ergebnis

$$\int_a^b t \sin(t) dt = a \cos(a) - b \cos(b) + \sin(b) - \sin(a),$$

in das wir nun noch die Grenzen $a = 1$ und $b = 7$ aus dem Anfangsbeispiel einsetzen können, wenn wir wollen.

Das hat also geklappt - aber wie und warum? Dass diese Methode kein Selbstläufer ist, sieht man daran, dass wir ja auch die Wahl $u(t) = \sin(t)$ und $v'(t) = t$ hätten treffen können. Dann ist die linke Seite von (**) immer noch gleich $\int_a^b \sin(t) \cdot t dt = \int_a^b t \sin(t) dt$, aber die rechte Seite ist nun anders: wegen $u'(t) = \cos(t)$ und $v(t) = \frac{1}{2}t^2$ bekommen wir die Gleichung

$$\int_a^b t \sin(t) dt = \sin(b) \cdot \frac{1}{2}b^2 - \sin(a) \cdot \frac{1}{2}a^2 - \int_a^b \cos(t) \cdot \frac{1}{2}t^2 dt.$$

Das ist alles richtig und vielleicht auch interessant, aber das übrig gebliebene Integral auf der rechten Seite ist nun nicht einfacher, sondern sogar schwieriger als das ursprüngliche, und wir kommen nicht weiter! Man sieht also, was mit dem Ausdruck „Integrieren ist eine Kunst“ gemeint ist - hier ist Erfahrung und Fingerspitzengefühl gefragt. Einige Richtlinien gibt es aber doch, wir fassen Sie zusammen im

Rezept zur erfolgreichen Anwendung der partiellen Integration:

Ausgangspunkt ist ein Integrand h , der sich in der Form $h(t) = f(t)g'(t)$ schreiben lässt, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein sollten:

- Die Ableitung f' der Funktion f ist „einfacher“ als die Funktion f selbst; zum Beispiel ist f ein Polynom.
- Wir kennen die Funktion g explizit, wir können also, wie die Notation schon suggeriert, den zweiten Faktor g' in der Definition von h als die Ableitung von etwas bekanntem schreiben. Diese bekannte Funktion g sollte idealerweise nicht allzu kompliziert sein.
- Worauf es aber wirklich ankommt: Von der Funktion $f'g$, die also t in $f'(t)g(t)$ verwandelt, kennen wir entweder die Stammfunktion, oder falls nicht, dann ist die Funktion $f'g$ wenigstens „einfacher zu integrieren“ als die ursprüngliche Funktion $f'g'$. Im zweiten Fall muss man eventuell nochmals partiell integrieren (siehe unten!).

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann bildet man die Ableitung f' von f , die Stammfunktion g von g' , und benutzt die Formel

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Das hintere Integral sollte wie gesagt hoffentlich einfacher sein als das ursprüngliche.

Merkregel: Beim Integrieren eines Produktes $uv(t) = u(t)v(t)$ entscheidet man sich für eine der Funktionen, die man als Ableitung von etwas anderem auffasst: man wählt also entweder $u(t) = f(t)$ und $v(t) = g'(t)$ oder $u(t) = g'(t)$ und $v(t) = f(t)$ für explizit bekannte Funktionen f und g . Man integriert also auf der linken Seite nun ein Produkt $f'g'$. Auf der rechten Seite verschwindet in der Auswertungsklammer jegliche Ableitung, hier steht also fg . Im verbleibenden Integral auf der rechten Seite „rutscht“ der Ableitungs-Strich nun von der einen Funktion g auf die andere Funktion f , man integriert also dort die Funktion $f'g$. Zusätzlich darf man nicht vergessen, vor das Integral auf der rechten Seite ein Minuszeichen zu schreiben.

Beispiel: Zu berechnen sei das Integral

$$\int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt.$$

Die Funktion, deren Ableitung einfacher ist als sie selbst, ist klarerweise $f(t) = t^3$, und eine Stammfunktion von $g'(t) = \exp(-t)$ ist $g(x) = -\exp(-x)$, also immerhin nicht komplizierter als g' selbst. Wir beginnen:

$$\int_0^{\infty} t^3 \exp(-t) dt = \left[t^3 \cdot (-\exp(-t)) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 3t^2 \cdot (-\exp(-t)) dt = 0 + 3 \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t) dt.$$

Um die 0 oben zu erzeugen, haben wir benutzt, dass die negative Exponentialfunktion $\exp(-t)$ sehr, sehr schnell nach Null abfällt, wenn t groß wird. Sie fällt sogar so schnell ab, dass sie jedes beliebige Polynom besiegt, dass also $t^n \exp(-t)$ für alle n immer noch gegen Null konvergiert, wenn $t \rightarrow \infty$. Also ist $\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 \exp(-t) = 0$, so dass wir in der Auswertungsklammer bei der oberen Integralgrenze $b = \infty$ eine Null erhalten; bei der unteren haben wir auch eine, wegen $0^3 = 0$. Das rechte Integral sieht nun schon „eine Stufe besser“ aus als das ursprüngliche, aber fertig sind wir noch nicht. Wir machen also weiter:

$$3 \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t) dt = 3 \left(\left[t^2 \cdot (-\exp(-t)) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2t \cdot (-\exp(-t)) dt \right) = 6 \int_0^{\infty} t \exp(-t) dt;$$

Können Sie nachvollziehen, welche Funktion wir hier aufgeleitet und welche abgeleitet haben, was also f , f' , g' und g waren? Können Sie verstehen, was mit der Auswertungsklammer passiert ist?

Wir sind immer noch nicht fertig, aber die rechte Seite sieht nun noch etwas vielversprechender aus. Wir machen noch einen weiteren Schritt: mit $f(t) = t$ und $g'(t) = \exp(-t)$ ist $f'(t) = 1$ und $g(t) = -\exp(-t)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 6 \int_0^\infty t \exp(-t) dt &= 6 \left([t \cdot (-\exp(-t))]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-\exp(-t)) dt \right) = \\ &= 0 + 6 \int_0^\infty \exp(-t) dt = 6[-\exp(-t)]_0^\infty = 6(0 - (-1)) = 6. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\int_0^\infty t^3 \exp(-t) dt = 6$$

herausbekommen.

Weiteres Beispiel: Ein weiteres Beispiel soll zeigen, dass partielle Integration mitunter ziemlich trickreich sein kann. Betrachten wir für $0 < a < b$ das Integral

$$\int_a^b \ln(t) dt.$$

Wo ist hier das Produkt zweier Funktionen? Die Antwort ist, dass die zweite Funktion sich gut tarnt, es ist nämlich $f(t) = \ln(t)$ und $g'(t) = 1$. Damit ist $f'(t) = \frac{1}{t}$ und $g(t) = t$, und wir erhalten

$$\int_a^b \ln(t) dt = [\ln(t) \cdot t]_a^b - \int_a^b \frac{1}{t} \cdot t dt = b \ln(b) - a \ln(a) - \int_a^b 1 dt.$$

Hier kombinieren sich also die Ableitung $1/t$ des Logarithmus und die Aufleitung t der konstanten Funktion g zu dem (schon fast verwirrend) einfachen Integral $\int_a^b 1 dt = b - a$. Wir stellen fest:

$$\int_a^b \ln(t) dt = b \ln(b) - a \ln(a) - (b - a) = b \ln(b) - b - (a \ln(a) - a).$$

Die letzte Umgruppierung der Gleichung zeigt uns, dass wir eine Stammfunktion des Logarithmus gefunden haben: Mit $H(x) = x \ln(x) - x$ gilt $H'(t) = \ln(t)$, wie man nun auch direkt nachrechnen kann (und sollte!).

Die Substitutionsregel:

Die Substitutionsregel ist etwas spezieller und weniger flexibel als die partielle Integration, und man braucht schon einiges an Glück, um sie anwenden zu können. Um sie zu verstehen, erinnern wir uns zunächst an die Kettenregel der Ableitung: dort haben wir für eine Verkettung $f \circ g$ (also $f \circ g(x) = f(g(x))$) für alle erlaubten x) festgestellt, dass

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Wenn nun ein Integrand zufällig genau die Form der rechten Seite der obigen Gleichung hat, dann können wir diese Gleichung auch rückwärts lesen und haben ein Stammfunktion. Also:

für zwei Funktionen f und g gilt

$$\int_a^b f'(g(t))g'(t) dt = [f \circ g]_a^b = f(g(b)) - f(g(a)).$$

Wie erkennen wir nun eine solche Situation? Zunächst einmal muss eine Verkettung von Funktionen im Integranden vorkommen, also beispielsweise $\cos(x^3)$ (Verkettung $f \circ g$ mit äußerer Funktion $f(y) = \cos(y)$ und innerer Funktion $g(x) = x^3$, oder $\exp(-x^2)$ mit äußerer Funktion $f(y) = \exp(-y)$ und innerer Funktion $g(x) = x^2$). Zweitens müssen wir von der äußeren Funktion eine Stammfunktion kennen. Und schließlich (und hier liegt normalerweise der Knackpunkt) muss genau die Ableitung der inneren Funktion als zusätzlicher Faktor im Integranden stehen - hier ist gerade noch erlaubt, dass statt der Ableitung selbst ein Vielfaches der Ableitung dasteht (siehe gleich unten), aber das war es auch schon. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann haben wir die **Formel der Substitutionsregel**

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)),$$

wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Beispielsweise können wir $\int_a^b t^2 \cos(t^3) dt$ ausrechnen: von der äußeren Funktion $f(y) = \cos(y)$ kennen wir die Stammfunktion $F(y) = \sin(y)$, und die innere Funktion $g(t) = t^3$ hat die Ableitung $g'(t) = 3t^2$. Das ist nicht genau das, was dasteht, aber das können wir noch reparieren, indem wir mit 3 multiplizieren und gleich wieder durch 3 teilen:

$$\int_a^b t^2 \cos(t^3) dt = \frac{1}{3} \int_a^b 3t^2 \cos(t^3) dt = \frac{1}{3}(\sin(b^3) - \sin(a^3)).$$

Allerdings können wir das scheinbar einfachere Integral $\int_a^b t \cos(t^3) dt$ schon nicht mehr auf diese Weise ausrechnen, weil das genaue Zusammenpassen der Inneren Funktion $g(t) = t^3$ und ihrer Ableitung $g'(t) = 3t^2$ hier nicht mehr stimmt; man sieht schon, die Substitutionsregel ist ziemlich zerbrechlich!

Ein weiteres Beispiel, wo die Substitutionsregel funktioniert, wird im Laufe des Vorlesung noch recht wichtig werden: versuchen Sie bitte zur Übung, das Integral $\int_0^\infty t \exp(-at^2) dt$ für festes $\alpha > 0$ auszurechnen!

(3.20) Kurvendiskussion

Dieses Thema wurde in der Schule oft sehr gründlich behandelt, deswegen machen wir es weniger ausführlich. Die einzig wirklich wichtigen Regeln beziehen sich darauf, wie die Ableitung f' und das Steigungsverhalten einer Funktion f bestimmt. Dass folgenden Aussagen wahr sein müssen, können sie ohne große Mühe sogar unserer etwas vagen „Definition“ der Ableitung (erste Gleichung in (3.11)) entnehmen; Sie sollten ausprobieren, ob Ihnen das gelingt.

- (1) Wenn die Ableitung f' einer Funktion f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist (also $f'(x) > 0$), dann steigt die Funktion an dieser Stelle an.

Genauer: wenn man statt x einen Wert $x + \delta$ einsetzt, der winziges bisschen größer ist, dann ist $f(x + \delta) > f(x)$. Setzt man dagegen einen ein winziges bisschen kleineren Wert $x - \delta$ ein, dann ist $f(x - \delta) < f(x)$.

Noch genauer: es gibt eine Zahl $\delta_0 > 0$ (die von der Funktion f und der gewählten

Stelle x abhängen wird), so dass für alle Zahlen $\delta \in]0, \delta_0]$ gilt: $f(x + \delta) > f(x)$ und $f(x - \delta) < f(x)$.

Beachten Sie, dass die letzte Aussage eine sehr genaue (und damit mathematisch zufriedenstellende) Beschreibung davon gibt, was es bedeutet, einen „ein winziges bisschen größeren“ Wert als x in die Funktion f einzusetzen.

- (2) Wenn die Ableitung f' einer Funktion f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist (also $f'(x) < 0$), dann fällt die Funktion an dieser Stelle ab.

Genauer: wenn man statt x einen Wert $x + \delta$ einsetzt, der winziges bisschen größer ist, dann ist $f(x + \delta) < f(x)$. Setzt man dagegen einen ein winziges bisschen kleineren Wert $x - \delta$ ein, dann ist $f(x - \delta) > f(x)$.

Noch genauer: es gibt eine Zahl $\delta_0 > 0$ (die von der Funktion f und der gewählten Stelle x abhängen wird), so dass für alle Zahlen $\delta \in]0, \delta_0]$ gilt: $f(x + \delta) < f(x)$ und $f(x - \delta) > f(x)$.

Die größte Bedeutung der zwei obigen Aussagen liegt darin, dass sie es uns erlauben, lokale Maxima und/oder Minima (sogenannte lokale Extrema) der Funktion f zu finden. Lokale Maxima der Funktion f werden definitionsgemäß bei solchen Eingabewerten x erreicht, wo eine winzige Veränderung von x die Werte der Funktion nicht größer machen kann. In dem exakten Sinn, den wir oben besprochen hatten, bedeutet das, dass es an einem Wert $x_0 \in \mathbb{R}$, für den die Funktion f ein lokales Extremum hat, ein $\delta_0 > 0$ geben muss, so dass $f(x_0 + \delta) \leq f(x_0)$ und $f(x_0 - \delta) \leq f(x_0)$ für alle $\delta < \delta_0$, $\delta > 0$. Analog (nur mit \geq statt \leq) auch für lokale Minima.

Die Überlegung zum Auffinden solcher lokalen Extrema ist ganz einfach: wenn an einer Stelle x die Ableitung $f'(x)$ entweder positiv oder negativ ist, dann kann die Funktion f an dieser Stelle sicher kein lokales Maximum oder Minimum haben - denn es geht ja nach einer Seite „nach oben“ und nach der anderen „nach unten“ weiter, wir finden also in nächster Nähe gleich andere Punkte $x + \delta$ und $x - \delta$, die größere bzw. kleiner Funktionswerte $f(x + \delta)$ und $f(x - \delta)$ liefern. Daher bleiben als Kandidaten für Maxima und Minima nur die Stellen x übrig, an denen $f'(x) = 0$ ist. Wir müssen also die Gleichung $f'(x) = 0$ für die Variable x lösen, um alle Kandidaten für Extrema zu suchen. Das ist konzeptionell einfach, aber vielleicht im Einzelfall sehr schwierig - versuchen Sie einmal die Lösungen der Gleichung $x^7 + 6x^5 + 23x^2 - x + 10 = 0$ zu finden, das schaffen Sie nicht (sonst übrigens auch niemand, zumindest nicht exakt)! Wie schon oft erwähnt, macht aber die Tatsache, dass wir vielleicht im konkreten Fall nicht weiter kommen, die eigentliche Mathematik nicht schwieriger.

Wir stellen uns also vor, dass wir die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ gefunden haben, meist sind es nur endlich viele. Jede dieser Lösungen könnte (muss aber nicht) eine Extremalstelle von f sein. Ob sie das wirklich ist, müssen wir nun von Hand prüfen, was zum Glück bei endlich vielen Kandidaten oft machbar ist. Hierzu nehmen wir uns einen der Kandidaten (nennen wir ihn x_0) und schauen zunächst ein wenig nach links und rechts: wenn $f'(x_0 + \delta) > 0$ für winzig kleine δ (im gleichen Sinne wie oben, also mit $\delta_0 > 0$ etc.), dann steigt die Funktion in einer Umgebung von diesen Punkten $x_0 + \delta$ an. Da der Punkt x_0 links von $x_0 + \delta$ liegt, ist dann $f(x_0) < f(x_0 + \delta)$ für winzig kleine δ - ein Maximum ist x_0 somit schon einmal nicht. Wenn nun $f'(x_0 - \delta) < 0$ ist, dann fällt f in der Umgebung von $x_0 - \delta$ ab, also ist $f(x_0) = f((x_0 - \delta) + \delta) < f(x_0 - \delta)$. Somit hat f bei x_0 dann ein Minimum. Ist dagegen $f'(x_0 - \delta) > 0$, dann steigt die Funktion auch links von x_0 an, und x_0 ist leider weder ein Maximum noch ein Minimum, dieser Kandidat scheidet dann leider wieder aus!

Ebenso (nur umgekehrt) geht auch die Überlegung für lokale Maxima. Die daraus resultierenden Regeln kennen Sie vermutlich aus der Schule - es wäre gut (ist aber nicht zwingend notwendig), wenn Sie anhand der obigen Erklärung auch verstehen könnten, warum diese Regeln gelten. Mit ein wenig mehr Nachdenken (das lassen wir hier weg) kann man sich auch noch die bekannten Kriterien für die zweite Ableitung überlegen. Die Regeln sind insgesamt hier nochmal zusammengestellt:

Rezept zur Suche von Extrema bei einer Funktion f :

- (1) Bilde die Ableitung f' von f .
- (2) Suche alle Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Das kann in der Praxis ziemlich knifflig sein!
- (3) Für jede gefundene Lösung x_0 berechne $f''(x_0)$.
 - Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat man ein lokales Minimum (Funktion ist nach oben gekrümmt!).
 - Falls $f''(x_0) < 0$, dann hat man ein lokales Maximum (Funktion ist nach unten gekrümmt!).
 - Falls $f''(x_0) = 0$, dann muss man mit Punkt (4) weitermachen.
- (4) Falls noch kein Maximum oder Minimum gefunden: schaue die Ableitung $f'(x_0 \pm \delta)$ für kleine $\delta > 0$ an.
 - Ist diese an beiden Seiten von x_0 positiv oder an beiden Seiten negativ, dann hat man kein lokales Extremum.
 - Ist die Ableitung links von x_0 positiv (Funktion wächst) und rechts negativ (Funktion fällt), dann hat man ein lokales Maximum.
 - Ist die Ableitung links von x_0 negativ (Funktion fällt) und rechts positiv (Funktion wächst), dann hat man ein lokales Minimum.

Man kann auch Schritt 3 überspringen und direkt zu Schritt 4 gehen, der funktioniert immer, aber Schritt 3 ist manchmal (nicht immer!) einfacher zu rechnen.

4. Differentialgleichungen

(4.1) Gleichungen und Differentialgleichungen

a) Gleichungen: Sie kennen Gleichungen aus der Schule: wenn die Aufgabe „Lösen sie die Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ “ gestellt wird, dann bedeutet dies: Sie sollen eine (oder besser: alle) Zahl(en) x bestimmen, die die Eigenschaft haben, dass man, wenn man x quadriert, vom Ergebnis zweimal x abzieht, und dann 1 dazuzählt, genau 0 erhält. Im konkreten Beispiel ist dies die Zahl 1 (probiert man einfach aus!), ob es noch weitere gibt ist nicht von vorne herein klar, es stellt sich aber heraus, dass dies nicht so ist.

Um nun eine solche Gleichung zu lösen (also die gesuchte(n) Zahl(en) zu finden), kann man natürlich erst einmal einfach raten, so wie wir das oben gemacht haben. Bei manchen Gleichungen (beispielsweise bei der Gleichung $17x^2 = 34$) kommt man durch relativ geradlinige Umformungen auf beiden Seiten der Gleichung ans Ziel: man teilt erst beide Seiten durch 17, erhält damit die Gleichung $x^2 = 34/17 = 2$, und zieht dann noch auf beiden Seiten die Wurzel. Beim letzten Schritt muss man aber gelernt haben, dass hierbei eine Lösung „verloren geht“: es ist eben nicht nur $(\sqrt{2})^2 = 2$ sondern auch $(-\sqrt{2})^2 = 2$. Man muss außerdem wissen, dass man

mit $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ alle Lösungen gefunden hat - warum das so ist, wird in der Schule oft nicht thematisiert, wir können es aber verstehen: die Funktion $f(x) = x^2$ ist für $x > 0$ streng monoton wachsend, daher gibt es „links und rechts“ von $\sqrt{2}$ keine weiteren Werte x mit $f(x) = 2$. Ebenso für negative x , nur ist f dort monoton fallend.

Bei unserer ursprünglichen Gleichung $x^2 - 2x + 1 = 0$ muss man schon etwas mehr Genialität mitbringen, um sie zu lösen: zunächst muss man die binomische Formel $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ kennen, um die Gleichung zu der Form $(x - 1)^2 = 0$ umzuformen. Dann muss man wissen, dass das Quadrat einer Zahl nur dann null sein kann (und auch ist), wenn die Zahl selbst null ist. Also muss $x - 1 = 0$ sein, und die Gleichung hat daher die (einzige) Lösung $x = 1$. Alternativ kann man natürlich auch die Lösungsformel für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, nämlich $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, auswendig gelernt haben.

Wieder andere Gleichungen sind gar nicht mehr so leicht zu lösen: Wenn Sie etwa die Gleichung $\exp(x) = 7x$ lösen wollen, dann ist zwar klar, was gemeint ist (wir suchen eine Zahl x , die wenn man sie in die Exponentialfunktion einsetzt, ein Ergebnis liefert, das 7 mal so groß ist wie die Zahl selbst), Sie können die Gleichung aber sehr lange umformen (Logarithmen nehmen, durch 7 teilen, ...) und bekommen keine sinnvolle Lösung. Dieses Beispiel soll zeigen, dass das *Konzept* einer Gleichung (wir suchen Zahlen mit bestimmten Eigenschaften) immer gleich bleibt, auch wenn es in manchen Fällen wirklich schwierig ist, diese Zahlen dann auch konkret zu finden. Dieses Prinzip, dass man zwar verstehen kann, was eine Gleichung von uns will, aber eine konkrete Lösung nicht angeben kann, wird bei den Differentialgleichungen noch viel wichtiger.

b) Differentialgleichungen: Differentialgleichungen sind sehr ähnlich wie Gleichungen, aber statt einer *Zahl* suchen wir nun eine *Funktion*. Wenn wir im Bild der Funktion als eine Maschine bleiben, so suchen wir also eine Maschine, die eine bestimmte (von uns durch die Differentialgleichung vorgegebene) Wirkungsweise hat. Ein Beispiel: Die Differentialgleichung

$$f' = 7f, \quad \text{oder auch: } f'(x) = 7f(x) \text{ für alle } x$$

bedeutet: finden Sie eine Funktion, deren Ableitungsfunktion f' für jedes x , das ich in f' einsetze, genau 7 mal den Wert liefert, denn ich bekommen hätte, wenn ich x in f selbst eingesetzt hätte. Mit anderen Worten: die Ableitungsfunktion soll „7 mal so groß“ sein wie die Funktion selbst.

Auch hier können wir zunächst versuchen, durch Raten ans Ziel zu kommen: wir wissen ja, dass (wegen der Kettenregel der Ableitung) gilt: für $a \in \mathbb{R}$ und $g(x) = \exp(ax)$ ist $g'(x) = a \exp(ax) = ag(x)$. Wenn wir also $f(x) = \exp(7x)$ wählen, dann können wir nachprüfen, dass f die Differentialgleichung erfüllt!

Wieder sollten wir uns fragen, ob dieses f die einzige mögliche Lösung ist - und das ist hier sicher nicht der Fall! Der Grund ist dass auch für $\tilde{f}(x) = 2 \exp(7x)$ oder allgemeiner für $\bar{f}(x) = c f(x)$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt: $\bar{f}'(x) = 7\bar{f}(x)$. Wir haben also hier nicht nur eine, sondern gleich unendlich viele Lösungen gefunden! Auch hier stellt sich natürlich sofort die Frage ob dies nun schon alle sind; dies ist tatsächlich der Fall, aber den Grund dafür werden wir in dieser Vorlesung nicht besprechen.

Die Lage mit den unendlich vielen Lösungen ändert sich übrigens, wenn wir zusätzlich noch verlangen, dass f an einer bestimmten Stelle x_0 einen bestimmten Wert annimmt: wenn wir

beispielsweise zusätzlich zu $f'(x) = 7f(x)$ auch noch $f(0) = 3$ verlangen, dann kommt von den unendlich vielen Lösungen $c \exp(x)$ (mit $c \in \mathbb{R}$) nur noch eine in Frage: wegen $\exp(0) = 1$ muss zwingend $c = 3$ sein, also ist $f(x) = 3 \exp(x)$ die einzige Lösung!

Lassen Sie uns weitere Beispiele für Differentialgleichungen geben:

- (1) $f''(x) = -f(x)$ für alle x . Wir suchen also eine Funktion, deren zweite Ableitung genau ihr eigenes Negatives ist. Wenn Sie sich an die Sinus- und Cosinusfunktionen erinnern, können Sie vielleicht Lösungen raten - wie viele Lösungen finden Sie?
- (2) $f'(x) = f(x)^2$ für alle x . Wir suchen also eine Funktion, deren Ableitungsfunktion genau das Quadrat der ursprünglichen Funktion ist. Schauen Sie in den Grundbausteinen der Ableitungen nach, ob Sie eine geeignete Funktion finden können!
- (3) $f'(x) = \sin(f(x))$ für alle x . Gesucht ist also eine Funktion, für die die Ableitung immer so groß ist wie der in den Sinus eingesetzte Funktionswert. Eine uninteressante Lösung kennen wir: f mit $f(x) = 0$ für alle x löst die Gleichung. Eine andere Lösung zu raten dürfte sehr schwierig sein (versuchen Sie es!), trotzdem können wir uns natürlich vorstellen, dass es so etwas geben kann, nur finden können wir es eben nicht so leicht!

Wir halten fest:

Merksatz: Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine Funktion f . Die Differentialgleichung verlangt, dass diese Funktion f und ihre Ableitung(en) zueinander eine Beziehung haben (z.B. $f'(x) = f(x)^2$). Wie eine Zahlengleichung kann eine Differentialgleichung entweder keine, eine oder mehrere Lösungen haben.

Wir stellen außerdem fest, dass es (wie bei den Stammfunktionen) ganz leicht ist, zu überprüfen, ob eine geratene oder von jemand anderem vorgeschlagene Funktion eine Differentialgleichung erfüllt: wir müssen nur die Ableitungen dieser Funktion bilden und sehen, ob damit auf der linken und rechten Seite das gleich steht. Würde also jemand behaupten, dass $g(x) = \cos(x)$ die Differentialgleichung (3) von oben löst, dann rechnen wir die linke Seite $g'(x) = -\sin(x)$ und die rechte Seite $\sin(g(x)) = \sin(\cos(x))$ aus und stellen fest, dass die nicht gleich sind: Für $x = \pi/2$ ist beispielsweise $g'(x) = -1$, während $\sin(g(x)) = \sin(0) = 0$. Also ist das vorgeschlagene g keine Lösung!

(4.2) Warum Differentialgleichungen?

Das Lösen von Differentialgleichungen mag ja hin und wieder ganz spaßig sein, aber oft ist es auch ziemlich schwierig, und es gibt im Leben ja auch noch andere schöne Beschäftigungen. Warum also interessieren wir uns für diese Art von Problemen? Die Antwort ist: weil Differentialgleichungen (und deren Lösungen) das wichtigste Werkzeug überhaupt sind, um Naturgesetze aufzustellen und zu analysieren. Daher gibt es aus Sicht der Praxis kaum einen wichtigeren Teilbereich der Mathematik. Es ist gar nicht so schwer, zu verstehen, warum Differentialgleichungen so wichtig für Naturgesetze sind. Wir geben hierfür drei Beispiele.

Beispiel 1 ist sehr wichtig in vielen Bereichen der Naturwissenschaft: oft ist es nämlich so, dass die Wachstumsgeschwindigkeit einer Größe proportional zu dem bereits Vorhandenen ist. Nehmen Sie das Beispiel einer Hefekultur: alle Zellen teilen sich mit einer gewissen Geschwindigkeit, die von der Temperatur, den Nährstoffen etc. abhängt; nehmen wir aber einmal an dass diese äußeren Gegebenheiten sich nicht ändern, dann hängt der Zuwachs an Hefe (gemessen in Form ihres Gewichtes g) nur von der vorhandenen Hefe (also von g) ab, und ist proportional zu

g . Mit anderen Worten: haben wir zum Zeitpunkt $t \geq 0$ insgesamt g Gramm Hefe, dann haben wir (durch Zellteilung) zum Zeitpunkt $t + 1$ in etwa $g(t) + \alpha g(t)$ Gramm - hierbei ist α der Anteil an Hefezellen (beispielsweise $\alpha = 0.1$ bedeutet 10%), die sich während der Zeitspanne zwischen t und $t + 1$ geteilt haben. Gibt man den Zellen nun nur halb so viel Zeit, sich zu teilen, dann sollte man erwarten, dass man auch nur halb so viele neue Zellen sieht:

$$g(t + 1/2) \approx g(t) + \frac{\alpha}{2}g(t).$$

Oder

$$g(t + 1/10) \approx g(t) + \frac{\alpha}{10}g(t)$$

Allgemein:

$$g(t + \delta) \approx g(t) + \delta\alpha g(t), \quad \text{oder} \quad \frac{g(t + \delta) - g(t)}{\delta} \approx \alpha g(t).$$

Die nur approximativen Gleichheitszeichen kommen daher, dass es ja sein kann, dass sich beispielsweise in der Zeitspanne zwischen t und $t + 1/2$ manche der neu entstandenen Zellen gleich noch einmal teilen. Dies ist aber bei kürzeren Zeitspannen (etwa zwischen t und $t + 1/10$) schon nicht mehr so wahrscheinlich; im Grenzwert $\delta \rightarrow 0$ verschwindet die Ungenauigkeit dann ganz, und wir erhalten (mit der Definition der Ableitung!) die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}g(t) = \alpha g(t).$$

Sie sehen also, dass wir allein aus der plausiblen Annahme, dass die Hefe um so stärker wächst, je mehr davon da ist (und zwar proportional dazu!), darauf gekommen sind, dass ihr Gewicht als Funktion der Zeit die obige Differentialgleichung erfüllen muss. Wenn wir diese Differentialgleichung lösen können, dann können wir für jeden beliebigen Zeitpunkt T der Zukunft vorhersagen, wie viel Hefe da sein wird - wir setzen einfach den Wert T in die gefundene Lösung ein! Unsere Differentialgleichung können wir noch durch Raten lösen: $g(t) = \exp(\alpha t)$ ist eine Lösung, aber nicht die einzige, denn etwa $\tilde{g}(t) = 2 \exp(\alpha t)$ ist auch eine (probieren Sie es aus!). Die Tatsache, dass es mehr als eine Lösung gibt, scheint erst einmal etwas verwirrend zu sein, bis wir uns erinnern, dass es ziemlich sinnlos ist, die Menge der Hefe in der Zukunft vorherzusagen, wenn wir nicht wissen, wie viel wir im Moment haben (wenn wir z.B. 0 Gramm haben macht das einen Unterschied zu anderen Szenarien!). Wir brauchen also noch den Wert g_0 zum Zeitpunkt 0 (jetzt). Dann ist $g(t) = g_0 \exp(\alpha t)$ die Formel, die uns vorhersagt, wie viel Hefe wir zum Zeitpunkt t haben werden.

Beispiel 2: Nehmen Sie nun an, Sie wollen eine Superhefe züchten, die sich viel schneller vermehrt: es soll der Zuwachs an Hefe nicht proportional zum Vorhandenen sein, sondern proportional zum Quadrat des Vorhandenen - 10 Gramm Hefe würden sich also 100 mal so schnell vermehren wie 1 Gramm. Wie schnell würde so eine Hefe wachsen, wenn wir mit einem Gramm starten?

Die Differentialgleichung hierfür ist

$$\frac{d}{dt}g(t) = \alpha g(t)^2, \quad g_0 = g(0) = 1$$

für ein $\alpha > 0$. Hierbei ist α die Geschwindigkeit, mit der 1 Gramm Hefe wächst. Mit ein wenig Erfahrung können wir auch hier die Lösung raten (und auch ohne Erfahrung leicht nachprüfen): leitet man die Funktion $g(t) = \frac{1}{c - \alpha t}$ (hierbei ist $c > 0$ erst einmal beliebig) ab, dann erhält man

mit der Kettenregel $g'(t) = (-\alpha) \frac{-1}{(c-\alpha)^2} = \alpha g(t)^2$. Damit $g(0) = 1$ gilt, sollten wir $c = 1$ wählen, und somit haben wir die folgende Vorhersage getroffen: zum Zeitpunkt $t > 0$ werden von unserer Superhefe genau $g(t) = \frac{1}{1-\alpha t}$ Gramm vorhanden sein!

Kurzes Nachdenken über die Gestalt der Funktion g offenbart nun eine große Gefahr: die Funktion „explodiert“ nämlich für $t = 1/\alpha$, es gilt $\lim_{t \rightarrow 1/\alpha} g(t) = \infty$. Dies bedeutet, dass unsere Superhefe spätestens zur Zeit $t = 1/\alpha$ das gesamte Universum ausfüllt, weshalb wir davon absehen sollten, so etwas zu züchten.

Beispiel 3 ist wieder etwas ernster gemeint als das vorherige. Im Beispiel 1 haben wir angenommen, dass die Nährstoffe konstant sind, das ist aber sicher nicht der Fall, schließlich werden diese von der wachsenden Hefe verbraucht. Hier ist plausibel, dass um so mehr Nährstoffe verbraucht werden, je schneller die Hefe wächst. Andererseits kann man vermuten, dass die Wachstumsgeschwindigkeit der Hefe proportional zur Menge der vorhandenen Nährstoffe ist. Beides sollte man allerdings im Ernstfall experimentell überprüfen! Insgesamt ergibt sich folgendes Modell:

- Die Funktion $g(t)$ beschreibt das Gewicht der vorhandenen Hefe. Anfangs haben wir beispielsweise 1 Gramm Hefe, also $g(0) = 1$.
- Die Funktion $n(t)$ beschreibt die Menge (in Gramm) der vorhandenen Nährstoffe. Anfangs haben wir beispielsweise 100 Gramm davon, also $n(0) = 100$.
- Die Nährstoffe werden um so schneller verbraucht, je schneller die Hefe wächst, und zwar proportional. Es sollte also eine Proportionalitätskonstante c geben, so dass

$$\frac{d}{dt}n(t) = -c \frac{d}{dt}g(t) \quad (*)$$

gilt. Das Minuszeichen kommt daher, dass wir es jetzt mit einer Abnahme der Nährstoffe zu tun haben.

- Die Hefe wächst immer noch proportional zur vorhandenen Menge, aber die Proportionalitätskonstante ist nun abhängig (und selbst proportional) zur Menge der vorhandenen Nährstoffe: es gibt also ein $\alpha > 0$ mit

$$\frac{d}{dt}g(t) = \alpha n(t)g(t). \quad (**)$$

Wir haben also die folgenden zwei Differentialgleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t) &= \alpha n(t)g(t), \\ \frac{d}{dt}n(t) &= -c \frac{d}{dt}g(t), \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $g(0) = 1$ und $n(0) = 100$.

Die zweite davon kann man direkt auf beiden Seiten integrieren (Stammfunktion bilden), dann bekommt man

$$n(t) = -cg(t) + C \quad \text{für alle } t \geq 0$$

mit einer Konstante C (die Stammfunktion ist nicht eindeutig!). Wegen $n(0) = 100$ und $g(0) = 1$ bekommen wir $100 = -c + C$, also $C = 100 + c$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, dann ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}g(t) = (100 + c)\alpha g(t) - c\alpha g(t)^2.$$

Wie und ob wir diese Gleichungen wirklich lösen können, ist im Moment nicht klar - oft ist es sehr schwer, dies zu tun! Das ist aber gar nicht so wichtig, denn allein die Tatsache, dass wir einen interessanten biologischen Vorgang (Wachstum von Hefe bei Nahrungsverbrauch) auf eine mathematische Gleichungen reduzieren konnten, die man nun „nur noch“ lösen muss, ist ein gewaltiger Fortschritt. Eine interessante Tatsache können wir aus der obigen Differentialgleichung aber doch ablesen, sogar ohne sie zu lösen: Wenn die Hefemenge so groß wird, dass

$$(100 + c)ag(t) - cag(t)^2 = 0$$

ist, dann ist die Ableitung von g auch gleich 0 (das sagt ja gerade die Gleichung!), d.h. die Hefe wächst nicht mehr. Die größtmögliche Menge an Hefe, die man in der obigen Situation bekommen kann, ist also durch die Lösung $g_{\max} = \frac{100+c}{c}$ der obigen quadratischen Gleichung gegeben (die andere Lösung $g = 0$ führt zwar auch dazu, dass kein Wachstum mehr stattfindet, aber aus uninteressanten Gründen).

Wir fassen zusammen: oft weiß man bei einem physikalischen oder biologischen System, dass die Veränderung dieses Systems im nächsten winzigen Zeitschritt nur davon abhängt, in welchem Zustand sich das System im Moment befindet, und kennt auch die Gesetzmäßigkeit, nach der diese Änderung abläuft. In diesen Fällen kann man das Verhalten des Systems oft mit Hilfe einer oder mehrerer Differentialgleichungen beschreiben. Das Lösen dieser Gleichungen kann sehr schwierig sein, hier hilft oft der Computer (approximativ). Manchmal (wie im Beispiel 3) kann man sogar etwas interessantes über das System lernen, ohne die Differentialgleichung zu lösen.

Die Differentialgleichung erlaubt es uns, mittels Ihrer Lösung aus lokaler Information (Verhalten des Systems im nächsten winzigen Zeitschritt) eine globale, für alle Zeiten gültige Vorhersage des Verhalten unseres Systems zu gewinnen. In gewissen Sinne helfen Differentialgleichungen uns daher, mit den Mitteln der Mathematik „in die Zukunft zu sehen“.

(4.3) Differentialgleichungen und Anfangswerte

Wir fassen noch einmal übersichtlich zusammen:

Eine **Differentialgleichung erster Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$\frac{d}{dx}f(x) = \text{ein Ausdruck, der } f(x) \text{ und } x \text{ enthalten kann,}$$

mathematischer formuliert

$$f'(x) = F(x, f(x)) \quad \text{mit einer Funktion } F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung** ist eine Gleichung der Form

$$f''(x) = \text{ein Ausdruck, der } f(x), f'(x) \text{ und } x \text{ enthalten kann,}$$

mathematischer formuliert

$$f''(x) = F(x, f(x), f'(x)) \quad \text{mit einer Funktion } F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sie können sich sicher denken, wie eine Differentialgleichung dritter, vierter etc. Ordnung aussieht - diese sind aber bei weitem nicht so wichtig.

Die **Lösung** eine Differentialgleichung ist immer eine Funktion, nie eine Zahl! Ob eine Funktion

eine gegebene Differentialgleichung erfüllt, lässt sich eigentlich immer leicht nachprüfen - man bildet ihre Ableitungsfunktion(en), setzt alles in die Differentialgleichung ein und schaut nach, ob (nach eventuellen Umformungen und Vereinfachungen) links und rechts das gleiche steht. Eine Lösung zu finden ist dagegen oft schwierig - wenn integrieren schon „eine Kunst“ ist, dann ist das Lösen von Differentialgleichungen eine hohe Kunst! In der Mathematik ist es deswegen eine beliebte Beschäftigung, zu beweisen, dass eine gegebene Klasse von Differentialgleichungen eine Lösung besitzt, auch wenn man keine Chance hat, diese Lösung jemals explizit zu finden. Für unsere Zwecke ist das weniger wichtig.

Differentialgleichungen brauchen **Anfangswerte**, damit die Lösungen eindeutig sind. Hat man nur eine Differentialgleichung ohne Anfangswerte gegeben, dann gibt es meist unendlich viele Lösungen.

- Für Differentialgleichungen erster Ordnung muss man normalerweise für einen Punkt x_0 den Wert $f(x_0)$ festlegen.
- Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung muss man normalerweise für einen Punkt x_0 sowohl den Wert $f(x_0)$ der Funktion als auch den Wert $f'(x_0)$ der Ableitungsfunktion festlegen.

Es ist ein Teil der mathematischen Theorie der Differentialgleichungen, dass unter diesen Umständen (d.h. bei genügend Anfangswerten) Differentialgleichungen oft eine *eindeutige* Lösung (also nicht mehr als eine) haben. Das ist wichtig, wenn man die Lösung durch Raten erhält - man möchte dann ja ausschließen, dass man versehentlich die falsche Lösung geraten hat, und dass diejenige Lösung, die das einen interessierende naturwissenschaftliche Problem löst, eine ganz andere ist!

Wenn man eine (allgemeine) Lösungsformel hat, die noch freie Konstanten besitzt, dann kann man diese dadurch bestimmen, dass man den Wert x_0 in die Lösungsformel einsetzt und die Konstanten so einrichtet, dass dabei $f(x_0)$ herauskommt. Wir werden das unten an mehreren Beispielen durchführen.

Es gibt so viele verschiedene Differentialgleichungen, dass es fast unmöglich ist, vernünftige Aussagen für „alle“ von ihnen zu machen. Daher kommen im obigen Text auch immer die Wörtchen „normalerweise“, „oft“ etc. vor. Die Untersuchung von Differentialgleichungen (vor allem sogenannten partiellen Differentialgleichungen) gehört zu den schwierigen Gebieten der Mathematik, in denen auch heute noch viel geforscht wird. Für Sie ist es nur wichtig, das Konzept der Differentialgleichung an sich zu verstehen (siehe die Punkte weiter oben), einige besonders wichtige Typen von Differentialgleichungen zu erkennen (siehe Punkt 4.4 unten), und eine spezielle allgemeine Lösungsmethode anwenden zu können, die wir in Punkt 4.5 besprechen werden.

(4.4) Wichtige Differentialgleichungen und ihre Lösungen

a) Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung: exponentielles Wachstum und Abklingen

Dies sind die einfachsten Differentialgleichungen, aber sie sind sehr wichtig. Sie haben die Form

$$f'(t) = \alpha f(t) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

und die Lösung $f(t) = c \exp(\alpha t)$. Für $\alpha > 0$ beschreiben solche Gleichungen das exponentielle Wachstum von beispielsweise Bakterien, Infektionszahlen oder verzinsten Darlehen. Für $\alpha < 0$ beschreiben sie das exponentielle Abklingen von beispielsweise radioaktiven Atomen beim radioaktiven Zerfall. Mit dem Anfangswert $f(t_0) = y_0$ bekommt man dann die eindeutige Lösung $f(t) = y_0 \exp(\alpha(t - t_0))$; für $t_0 = 0$ entsteht ein besonders einfacher Fall.

b) Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung: einfache Schwingungen

Die Schwingungsgleichungen beschreiben, wie der Name schon sagt, Vorgänge, in denen etwas hin und her schwingt. Sie haben die Form

$$f''(t) = -\omega^2 f(t), \quad \text{mit } \omega > 0.$$

Der Grund, warum man hier den Vorfaktor auf der rechten Seite scheinbar mutwillig als Quadrat von etwas anderem schreibt, wird klar, wenn man die Lösungen ansieht: man kann direkt nachrechnen, dass sowohl $f_1(t) = \sin(\omega t)$ als auch $f_2(t) = \cos(\omega t)$ diese Differentialgleichung lösen. Dadurch, dass man in der Differentialgleichung ein ω^2 schreibt, darf man also in der Lösung ω (statt $\sqrt{\omega}$) schreiben. Tatsächlich löst sogar jede Kombination aus Sinus und Cosinus die Differentialgleichung, also lautet die allgemeine Lösung

$$f(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Hat man nun Anfangswerte $t_0, f(t_0) = a, f'(t_0) = b, x_0, a, b \in \mathbb{R}$, gegeben, so kann diese in die allgemeine Form einsetzen und dann (auf etwas mühsame Weise) c_1 und c_2 bestimmen. Für $t_0 = 0$ ist dies allerdings einfach: wegen $f(0) = c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1$ führt die Bedingung $f(0) = a$ zu $c_2 = a$; und wegen $f'(t) = c_1 \omega \cos(t) - c_2 \omega \sin(t)$ ist $f'(0) = c_1 \omega$, und daher führt die Bedingung $f'(0) = b$ zu $c_1 = b/\omega$. Probieren Sie für $t_0 = \pi/4, a = 3, b = 5$ aus, was herauskommt!

c) Die Newton'schen Bewegungsgleichungen:

Wenige wissenschaftliche Entdeckungen haben unser Weltbild und auch unsere Lebenswirklichkeit so nachhaltig beeinflusst wie die folgenden Erkenntnisse von Isaac Newton:

- die Bewegung aller (makroskopischen) Körper im Raum geschieht durch den Einfluss etwas, das wir Kräfte nennen wollen. Sie kennen Kräfte (wie zum Beispiel die Gravitationskraft) aus der Schule, man sollte jedoch nicht vergessen, dass allein schon das Konzept dieses unsichtbaren Einflusses, der auf Gegenstände ausgeübt wird, eine extrem wichtige intellektuelle Leistung ist.
- die Kräfte beeinflussen nicht direkt den Aufenthaltsort eines Körpers, sondern nur seine Geschwindigkeit: die Änderung der Geschwindigkeit v (Beschleunigen und Abbremsen) ist nämlich proportional (mit Proportionalitätskonstante $\frac{1}{m}$, m die Masse des Teilchens) zur angreifenden Kraft: ist also $F(t)$ die Kraft, die zur Zeit t auf einen Gegenstand wirkt, und $v(t)$ seine Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt, dann gilt

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

Die Ableitungsfunktion der Geschwindigkeitsfunktion v nennt man auch Beschleunigung, und benutzt meist den Buchstaben a („acceleration“), v steht für „velocity“. Dies führt zu der berühmten Formel $F = m \cdot a$.

- Da aber nun zu jeder Zeit t die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Teilchens definitionsgemäß die Änderungsgeschwindigkeit (also: Ableitung) seines Aufenthaltsortes $x(t)$ ist (in Formeln: $v(t) = x'(t)$), bekommt man die Newton'sche Gleichung für den Aufenthaltsort:

$$x''(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

Diese Gleichung ist noch keine Differentialgleichung: wenn $F(t)$ für alle t explizit bekannt ist, und wenn man zum Zeitpunkt $t = 0$ sowohl den Ort x_0 als auch die Geschwindigkeit v_0 des Körpers kennt, dann ist

$$v(t) = \int_0^t \frac{1}{m}F(s) ds + v_0, \quad \text{und} \quad x(t) = \int_0^t v(s) ds + x_0 = \int_0^t \left(\int_0^s \frac{1}{m}F(r) dr + v_0 \right) ds + x_0.$$

Diese Formel sieht zunächst vielleicht furchterregend aus, was man aber einfach tun muss ist die Stammfunktion von der Stammfunktion von F zu nehmen und die „richtigen“ Konstanten zu finden. Für den Fall, dass F gar nicht von der Zeit abhängt, dass also $\frac{1}{m}F(s) = \frac{F}{m} =: a \in \mathbb{R}$ für alle s ist, bekommen Sie die aus der Schule bekannte Gleichung

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung a .

Eine Differentialgleichung wiederum erhalten Sie, wenn die Kraft davon abhängt, wo das Teilchen gerade ist, oder wie schnell es sich bewegt. Ist also $F(x, v)$ die Kraft, die am Ort x und bei Geschwindigkeit v wirkt, dann lautet die Newton'sche Differentialgleichung

$$x''(t) = F(x(t), x'(t)).$$

d) Gedämpfte Schwingungen:

Ein wichtiger Spezialfall der Newton'schen Bewegungsgleichungen entsteht, wenn man folgende Annahmen macht (die zum Beispiel bei einem Federpendel recht gut erfüllt sind):

- Am Ort $x = 0$ wirkt keine Kraft. Ein Körper, der sich dort befindet, bleibt liegen.
- Für einen Ort $x > 0$ wirkt eine Kraft, die den Körper wieder zurück in Richtung $x = 0$ drückt. Diese ist um so größer, je weiter x vom Ort $x = 0$ entfernt ist, und zwar (Sie ahnen es schon) proportional zum Abstand $|x - 0|$. Die Proportionalitätskonstante nennen wir $\omega^2 > 0$, damit ist $F_1(x) = -\omega^2 x$; das Minuszeichen sorgt dafür, dass die Kraft wirklich immer in Richtung der Null wirkt.
- Zusätzlich gibt es eine Bremswirkung, die proportional zur Geschwindigkeit ist: je schneller der Körper ist, desto schneller stärker wird er abgebremst. Es wirkt also eine zweite Kraft $F_2(v) = -\lambda v$, mit $\lambda \geq 0$.
- Insgesamt wirkt also am Ort x und bei Geschwindigkeit v die Gesamtkraft $F(x, v) = F_1(x) + F_2(v) = -\omega^2 x - \lambda v$. Dies führt dann zur **allgemeinen Schwingungsgleichung**

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) - \lambda x'(t).$$

Den Fall $\lambda = 0$ haben wir (mit leicht anderer Notation) schon in b) gehabt. Im Fall $\lambda > 0$ ist die Lösung ein wenig komplizierter, kann aber noch explizit durchgeführt werden. Es entsteht eine monoton exponentiell abklingende Funktion, die je nach Größe von λ , entweder dabei noch hin und her schwingt (für kleine $|\lambda|$, schwache Dämpfung) oder monoton abklingt (große $|\lambda|$,

starke Dämpfung). Da die nötigen Rechnungen und expliziten Formeln eher lang sind, nicht sehr viel Spaß machen, und für uns auch nicht wichtig sind, verzichten wir auf diese.

(4.5) Trennung der Variablen: eine Lösungsmethode

Wir wollen jetzt eine der relativ wenigen allgemeinen Lösungsmethoden für Differentialgleichungen kennen lernen. Sie ist bei weitem nicht immer anwendbar, und selbst wenn sie anwendbar ist, kann es einem nicht selten passieren, dass man auf halbem Wege stecken bleibt, weil man eine gewisse Zahlen-Gleichung nicht lösen kann (bei als Übungs- und Klausuraufgaben gestellten Problemen achtet der Aufgabensteller natürlich darauf, dass dies nicht passiert). Da die Lösung von Differentialgleichungen aber ein so schwieriges Problem ist, ist man dankbar für das, was man hat.

a) Anwendbarkeit:

Die Methode funktioniert nur bei Differentialgleichungen erster Ordnung, und auch nur dann, wenn man die rechte Seite der Gleichung als ein Produkt schreiben kann, bei dem in einem Faktor nur die Funktion $f(t)$ und im anderen Faktor nur die Variable t vorkommt. Für die Differentialgleichung

$$f'(t) = -f(t)^2 \cos(t)$$

ist dies beispielsweise der Fall: der Faktor, $-f(t)^2$ enthält nur $f(t)$, der Faktor $\cos(t)$ nur t . Im Gegensatz dazu ist die Gleichung

$$f'(t) = f(t)^2 \cos(t) + 2t$$

schon nicht mehr trennbar, da man die rechte Seite nicht als entsprechendes Produkt schreiben kann. Allgemein formuliert: damit eine Differentialgleichung trennbar ist, muss er Funktionen u und v geben, so dass man die Differentialgleichung (inklusive Anfangswert) in der Form

$$(*) \quad f'(t) = u(f(t))v(t), \quad f(t_0) = f_0$$

schreiben kann.

b) Der Algorithmus:

Der Algorithmus, den wir nun angeben, wird manchmal als „Physiker-Methode“ zur Lösung trennbarer Differentialgleichungen bezeichnet. Die Mathematiker wollen damit zum Ausdruck bringen, dass er einige Schritte enthält, die sie für unappetitlich halten. Da die Physiker aber im allgemeinen viel besser rechnen können als die Mathematiker, funktioniert der Algorithmus hervorragend und ist auch relativ leicht erlernbar - die „mathematisch saubere“ Methode zur Lösung dagegen ist allein schon notationstechnisch nicht so einfach und in der Anwendung etwas verwirrend - sie soll hier nicht vorgestellt werden. Das schöne an Differentialgleichungen ist ja auch, dass es ganz egal ist, mit welchen schmutzigen Tricks man sich einen Kandidaten für eine Lösung verschafft: hat man erst mal einen, dann kann man direkt nachprüfen, ob er die Gleichung löst, und wenn er es tut, dann kann niemand sich über die Art und Weise beschweren, wie man ihn gefunden hat!

Gehen wir also von der Gleichung (*) aus. Wir schreiben die Ableitung in der Form $\frac{df}{dt}$ und lassen die Argumente t überall dort weg, wo sie in f oder f' eingesetzt werden. Die Ausgangsgleichung (ohne Anfangswert) lautet dann

$$\frac{df}{dt} = u(f)v(t)$$

Schritt 1: Trennung der Variablen

Wir bringen alles, was mit f zu tun hat auf eine Seite und alles was mit t zu tun hat auf die andere. Dies schließt insbesondere die Symbole dt und df ein, die eigentlich ja nur benutzt wurden, um die Ableitung zu schreiben (das ist es, was die Mathematiker nicht so mögen). Die Gleichung lautet nun:

$$\frac{1}{u(f)}df = v(t)dt.$$

Schritt 2: Beide Seiten Integrieren

Wir vergessen nun, dass f eigentlich eine Funktion ist (noch etwas, das Mathematikern nicht so geheuer ist..) und behandeln f einfach als Variable. Dann bilden wir auf beiden Seiten die Stammfunktion - um dies kontrolliert tun zu können, benennen wir zunächst unsere „Variablen“ f und t um, also

$$\frac{1}{u(r)}dr = v(s)ds,$$

und zeichnen dann vor beide Seiten ein Integral; hierbei erinnern wir uns an die Anfangswerte und nehmen sie als Untergrenzen des Integrals. Als Obergrenzen dienen unsere „alten“ Variablen f und t . Das Ergebnis ist

$$\int_{f_0}^f \frac{1}{u(r)} dr = \int_{t_0}^t v(s) ds.$$

Es wäre nun gut, wenn wir beide Integrale in der obigen Gleichung explizit ausrechnen können, denn sonst bricht unser Algorithmus an dieser Stelle ab und wir können die Differentialgleichung leider doch nicht lösen. Wir nehmen also an, dass wir eine Stammfunktion Q der Funktion, die r nach $\frac{1}{u(r)}$ abbildet, sowie eine Stammfunktion V der Funktion v finden können. Die Gleichung lautet dann

$$Q(f) - Q(f_0) = V(t) - V(t_0).$$

Schritt 3: Lösen einer Zahlengleichung:

Die letzte Gleichung stellen wir noch einmal leicht um.

$$Q(f) = V(t) - V(t_0) + Q(f_0).$$

Wir hätten gerne auf der linken Seite nur f statt $Q(f)$ stehen - in „guten“ Fällen geht das, beispielsweise wenn Q die Quadratfunktion ist (dann ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel), oder wenn $Q(f) = \exp(f)$ ist (dann nehmen wir links und rechts den Logarithmus). In anderen Fällen ist hier wieder ein Punkt, wo unser Algorithmus scheitern kann. Was wir (abstrakt gesehen) machen müssen, ist als, die Umkehrfunktion von Q (wir nennen Sie Q^{-1}) auf beide Seiten der Gleichung anzuwenden. Da $Q^{-1}(Q(f)) = f$ gilt, ergibt sich

$$f = Q^{-1}(V(t) - V(t_0) + Q(f_0)).$$

Als letztes erinnern wir uns, dass unser f ja eigentlich ein $f(t)$ war, und bekommen die Lösung

$$f(t) = Q^{-1}((V(t) - V(t_0) + Q(f_0)))$$

unserer Differentialgleichung.

c) Beispiele:

Der Algorithmus sieht (vor allem was die Umkehrfunktion Q^{-1} betrifft) erst einmal ziemlich

abstrakt aus, lässt sich aber in konkreten Fällen sehr gut anwenden. Dies wollen wir nun an zwei Beispielen zeigen. Als erstes betrachten wir die Differentialgleichung

$$f'(t) = -3tf(t)^2, \quad f(0) = 7.$$

Wir stellen fest, dass wir sie trennen können - im Kontext des allgemeinen Algorithmus ist $u(f) = f^2$ und $v(t) = -3t$. Im ersten Schritt schreiben wir

$$\frac{1}{f^2} df = -3t dt,$$

und integrieren dies; wir erinnern uns hierbei, als untere Integrationsgrenze die Anfangswerte und als obere die Variablen f und t zu nehmen, und die Integrationsvariable umzubenennen, um keine Probleme mit der Notation bekommen. Wir erhalten

$$\int_7^f \frac{1}{r^2} dr = \int_0^t (-3s) ds.$$

Die Integrale können wir ausrechnen (eine Stammfunktion von $\frac{1}{r^2} = r^{-2}$ ist $-r^{-1}$), und erhalten

$$\left[-\frac{1}{r}\right]_7^f = \left[-\frac{3}{2}s^2\right]_0^t.$$

Wir werden die Auswertungsklammer aus...

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{f} = -\frac{3}{2}t^2,$$

... und bringen alle Terme mit f auf die eine und alle anderen auf die andere Seite:

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{7}.$$

Diese Gleichung kann man nach f auflösen - die Umkehrfunktion Q^{-1} tut hier nichts anderes, als auf beiden Seiten die Funktion $Q^{-1}(x) = 1/x$ anzuwenden, als „die Brüche umzudrehen“. Ersetzen wir dann f wieder durch $f(t)$, so bekommen wir den Lösungskandidaten

$$f(t) = \frac{1}{3t^2/2 + 1/7}.$$

Zur Sicherheit prüfen wir noch nach, ob dies tatsächlich eine Lösung ist: $f(0) = \frac{1}{0+1/7} = 7$, und (mit der Kettenregel)

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\left(\frac{1}{3t^2/2 + 1/7}\right)^2 (3t^2/2)' = \\ &= -3t\left(\frac{1}{3t^2/2 + 1/7}\right)^2 = -3tf(t)^2. \end{aligned}$$

Also stimmt alles!

Als zweites Beispiel nehmen wir die Differentialgleichung

$$f'(t) = -\alpha f(t), \quad f(2) = 3,$$

die wir ja eigentlich schon kennen. Man kann sie aber auch mit Trennung der Variablen lösen, hierbei ist aber zu beachten dass in der allgemeinen Form $f'(t) = u(f(t))v(t)$ die Funktion v nur versteckt vorkommt: es ist nämlich $v(t) = -\alpha$ für alle t . Wir erhalten wieder

$$\frac{1}{f}df = -\alpha dt,$$

und da $\ln(f)$ die eine Stammfunktion von $\frac{1}{f}$ ist, erhalten wir durch Integrieren (mit den richtigen Grenzen)

$$\ln f - \ln 3 = -\alpha t + 2\alpha.$$

(Können Sie die fehlenden Schritte einfügen?) Wir stellen so um, dass f allein steht, und wenden auf beiden Seiten die Umkehrfunktion \exp der Funktion $Q(f) = \ln f$ an (d.h. wir lösen die Gleichung in der Variablen f), mit dem Ergebnis:

$$f = \exp(\ln f) = \exp(-\alpha t + 2\alpha + \ln 3) = 3 \exp(-\alpha(t - 2)).$$

Unser Lösungskandidat ist daher (wie erwartet!)

$$f(t) = 3 \exp(-\alpha(t - 2)),$$

und man kann ganz leicht nachrechnen, dass das stimmt.

(4.6) Räuber-Beute-Modelle: Die Lotka-Volterra-Differentialgleichung

Wir kommen zurück auf das Beispiel 3 aus Punkt 1.1 ganz am Anfang der Vorlesung. Dieses Beispiel geht insgesamt deutlich über das hinaus, was wir von Ihnen in der Klausur erwarten, ist aber in der theoretischen Biologie als eines der einfachsten Räuber-Beute-Modelle von sehr großer Bedeutung. Die Lotka-Volterra-Gleichungen sind folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (b - py(t))x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= (rx(t) - d)y(t).\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu damals können wir diese Gleichungen jetzt verstehen und auch ein wenig analysieren. Die Funktion x beschreibt die „Anzahl“ der Beutetiere - $x(t)$ steht also für deren Anzahl zur Zeit t . Wie so oft ist es mathematisch viel einfacher, wenn man nicht darauf besteht, dass diese Anzahl ganzzahlig ist; für sehr große Systeme (viele Beutetiere) kann man das rechtfertigen, indem man die Einheiten geschickt wählt - Wenn $x(t) = 0.0001$ bedeutet, dass es genau ein Beutetier gibt, dann kann x bei „strenger“ Betrachtung nur die Werte $0.0001 \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ annehmen, man macht aber eben auch nicht sehr viel falsch, wenn man auch alle Werte dazwischen erlaubt. Die Funktion y beschreibt (in gleicher Weise idealisiert) die „Anzahl“ der Räuber.

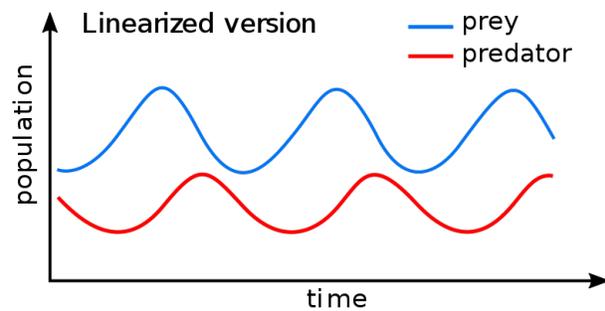
In den Gleichungen selbst stecken nun die Annahmen, die wir über das Zusammenwirken von Räubern und Beutetieren machen. Die erste Gleichung handelt von den Beutetieren: auf ihrer linken Seite steht die Wachstumsgeschwindigkeit $x'(t)$ zur Zeit t der Beutetiere. Der Term auf der rechten Seite hat folgende Interpretation: zunächst einmal ist er proportional zur Anzahl $x(t)$ der vorhandenen Beutetiere - das bedeutet, dass jedes einzelne Beutetier sein eigenes

Schicksal erleidet, sich vermehrt oder gefressen wird, ohne Einfluss durch die anderen Beutetiere. Beispielsweise ist dadurch die Anzahl der im nächsten kleinen Zeitintervall geborenen oder gestorbenen Beutetiere bei einer Population der Größe $2x(t)$ doppelt so groß ist wie bei einer Population der halben Größe $x(t)$.

Der Proportionalitätsfaktor $b - py(t)$ (auch *Wachstumsrate* genannt) vor der momentanen Populationsgröße $x(t)$ hat einen Summanden $b > 0$, der die ungestörte Vermehrung der Beutetiere (abzüglich natürlicher Todesfälle) modelliert. Der Term $-py(t)$ ist negativ und führt daher dazu, dass die rechte Seite (und damit die Wachstumsgeschwindigkeit $x'(t)$) kleiner wird. Er modelliert das Gefressenwerden, daher ist er proportional zur Anzahl $y(t)$ der momentan anwesenden Räuber. Die Zahl p gibt an, wie gut der einzelne Räuber darin ist, Beute zu machen, je höher sie ist, desto mehr Beutetiere kann ein einzelner Räuber töten.

Die zweite Gleichung beschreibt die Räuber. Auf der linken Seite steht wieder die Wachstumsgeschwindigkeit $y'(t)$ der Räuberpopulation, und die rechte Seite ist (aus den gleichen Gründen wie oben) wieder proportional zur Anzahl $y(t)$ der Räuber. Die Wachstumsrate $rx(t) - d$ der Räuber setzt sich ebenfalls aus zwei Teilen zusammen: der Term $-d$ ist negativ und beschreibt das Sterben der Räuber. Der andere Term $rx(t)$ zeigt an, dass sich die Räuber um so schneller vermehren, je mehr Beutetiere zur Verfügung steht. Die Zahl r gibt dabei an, wie stark ein vorhandenes Beutetier (also eine potentielle Beute) dazu beiträgt, dass sich die Räuber schneller vermehren.

Natürlich kann man darüber diskutieren, wie realistisch die oben beschriebenen Annahmen sind - das ist auch legitim, schließlich hat man ja nur ein vereinfachtes Modell der komplizierten Wirklichkeit gemacht. Dass es aber in einem gewissen Sinne doch ein gutes Modell ist, sieht man daran, dass sich die Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ der Gleichungen zumindest qualitativ vernünftig verhalten. Die rechts stehende Grafik, die schon am Anfang der Vorlesung zu sehen war, zeigt eine vom Computer berechnete Lösung der Differentialgleichungen, grün gestrichelt für $y(t)$ und blau für $x(t)$. Man sieht, dass es ein sich gegenseitig bedingendes Wachsen und Schrumpfen der Populationen gibt!



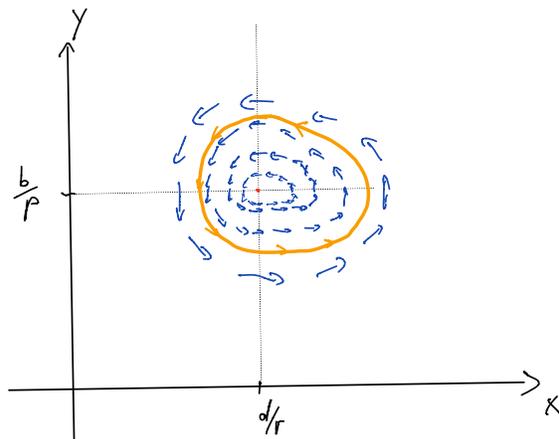
Zum Schluss wollen wir uns noch ein paar Gedanken dazu machen, was wir über die Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen sagen können. Zunächst wollen wir festhalten, dass diese Gleichungen allein dadurch komplizierter sind als alles, was wir bisher gesehen haben, dass es zwei davon gibt! Wie auch bei gewöhnlichen (Zahlen-) Gleichungen kann man durchaus auch zwei (oder mehr) Gleichungen mit zwei (oder mehr) Unbekannten haben - die Lösung solcher Gleichungssysteme ist natürlich dann meist schwieriger als für eine einzelne Gleichung! Tatsächlich gibt es für die Lotka-Volterra-Gleichungen keine allgemeine Lösungsformel - man kann zwar beweisen, dass es eine Lösung geben muss, kann sie aber nicht mit Hilfe von bekannten Funktionen (wie Sinus, Cosinus, Logarithmus o.ä.) ausdrücken. Trotzdem kann man überraschend viel über dies Lösung lernen.

Wir beginnen damit, uns zu überlegen, wann sich die Populationen der Räuber und Beutetiere gegenseitig genau im Gleichgewicht halten, wann also genau so viele Beutetiere gefressen werden, dass ihre Population sich nicht verändert, und gleichzeitig die Räuber genau so viel Nahrung vorfinden, dass wiederum ihre Population weder wächst noch schrumpft. Wann das so ist, können wir ganz leicht herausfinden: „keine Veränderung“ bedeutet „Ableitung gleich Null“, also muss die linke (und damit auch die rechte) Seite der Lotka-Volterra-Gleichungen verschwinden. Dies führt zu den zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} b - py(t) &= 0, \\ rx(t) - d &= 0, \end{aligned}$$

also $y(t) = \frac{b}{p}$ und $x(t) = \frac{d}{r}$ für alle t . Wenn die Populationen also genau diese Größe haben, dann ändern sie sich für alle Zeiten nicht mehr.

Was passiert, wenn die Populationen nicht genau auf diesem sogenannten Gleichgewichtspunkt sind, verdeutlicht die nebenstehende Zeichnung. Im Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Anzahl x der Beutetiere, die y -Achse die Anzahl y der Räuber. Der rote Punkt ist der Gleichgewichtspunkt, und die blauen Pfeile deuten an, wie sich die Populationen verändern: der an einem Punkt (x_0, y_0) angezeichnete Pfeil zeigt in die Richtung, in die sich die beiden Populationen (gemeinsam) im nächsten kleinen Zeitabschnitt verändern.



Wenn beispielsweise $x > d/r$ ist, dann sind überschüssige Beutetiere da, und die Räuberpopulation kann wachsen. Die Pfeile zeigen in diesem Fall (eventuell schräg) nach oben. Wenn $y > b/p$ ist, dann gibt es „zu viele“ Räuber, die Beutepopulation schrumpft, und die Pfeile zeigen nach links, und so weiter. Die Länge der Pfeile und ihre genaue Richtung deuten an, wie schnell die Populationen jeweils wachsen und schrumpfen. Natürlich müsste man an jedem Punkt der Ebene so einen Pfeil anbringen, aber das würde dann doch zu unübersichtlich.

Die orangefarbene Linie hat die Eigenschaft, dass alle Pfeile, die auf ihren Punkten starten, genau tangential zu ihr sind. Sie ist also, was man bekommt, wenn man „an jeder Stelle genau in Pfeilrichtung weiterläuft“. Man kann ausrechnen, dass diese Linien die Mengen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : rx - d \ln x + py - b \ln y = c\}$$

sind, wobei $c > 0$ den „Durchmesser“ des durch die Linie eingeschlossenen Gebildes bestimmt. Wir wollen aber hier nicht weiter darauf eingehen, wie das geht.

Man kann beweisen, dass für ein Räuber-Beute-System, dessen anfängliche x - und y -Werte sich auf so einer geschlossenen Linie befinden, auch alle zukünftigen Werte auf der Linie sind - die Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichungen kann man also als Punkte visualisieren, die im Laufe der Zeit auf solchen orangefarbenen Linien im Kreis herumfahren. Wie schnell sie das tun, kann man aus der Abbildung zwar nicht erkennen, aber man weiß immerhin, welche Kombinationen

von Beute- und Räuberpopulationen überhaupt möglich sind, wenn man die Anfangspopulationen kennt. Wir sehen also, dass wir sogar dann, wenn wir eine Differentialgleichung nicht direkt lösen können, viel über das System erfahren können, das durch sie beschrieben wird.

5. Beschreibende Statistik

(5.1) Daten: Erhebung, Verwertung, Zweck

Unter **Daten** versteht man eine (manchmal ziemlich große) Menge von Zahlen, die typischerweise aus einem Experiment, einer Messung oder einer Umfrage stammen. Letztere wurden normalerweise mit dem Ziel durchgeführt, irgend einen konkreten naturwissenschaftlichen Vorgang besser zu verstehen. Mit anderen Worten: man vermutet ein Naturgesetz oder eine sonstige Tatsachen, und möchte durch Nachmessen Aufschluss darüber erhalten, ob dieses Gesetz tatsächlich gilt, oder wie seine genaue Gestalt (beispielsweise Konstanten, die darin eingehen) aussieht.

In dem Moment, wo man die Daten vorliegen hat, hat man es aber zunächst einfach mit einem großen Haufen von Zahlen zu tun, der im Extremfall sehr unübersichtlich sein kann. Ziel dieses Kapitels ist es, Ihnen einige Möglichkeiten vorzustellen, wie man aus diesem Haufen Zahlen (und der Kenntnis darüber, aus welchem Experiment sie kommen), Erkenntnisse gewinnen kann.

Bevor wir das tun, soll es kurz um die *Erhebung* von Daten gehen. Statistik hat mitunter den Ruf, dass man mit ihrer Hilfe jedes vorher gewünschte Ergebnis erzielen kann („traue keiner Statistik, die du nicht selbst gefälscht hast“). Leider ist das nicht ganz falsch und wird in der Realität (vor allem, aber nicht nur, wenn es politisch wird) auch sehr oft praktiziert. Dabei ist Statistik, wenn man sie richtig anwendet, ein zuverlässiges und unparteiisches Werkzeug. Darum ist es besonders wichtig, zu verstehen, woran es liegt, wenn sie (absichtsvoll herbeigeführt) falsche Ergebnisse produziert.

In diesem Abschnitt wollen wir uns (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) ansehen, was man bei der Erhebung der Daten beachten muss, wenn (falls?) man seriöse Ergebnisse will. Später werden wir noch weitere potentielle Probleme kennen lernen, für die brauchen wir aber noch mehr Theorie. Folgende Regeln muss man immer beachten:

- (1) Fragestellung und Modell müssen klar sein, *bevor* man Daten erhebt, um diese zu bestätigen.
- (2) Alle erhobenen Daten müssen auch verwendet werden.
- (3) Man muss so gut wie möglich darauf achten, dass man nicht bereits durch die Methode der Datenerhebung verfälschte Daten erhält.

Um zu verstehen, was schiefgehen kann, geben wir drei Beispiele:

(1): Nehmen Sie an, Sie haben 100 Fische aus einem See im Gebirge gefangen. Es fällt ihnen auf, dass diese Fische im Durchschnitt kleiner sind, als man das für diese Spezies erwarten würde. Sie benutzen nun diese Daten für eine statistische Untersuchung gemäß einer Theorie, die wir bald lernen werden, und weisen nach, dass die Fische in diesem See signifikant kleiner sind als üblich. Der Fehler hierbei ist, dass Sie etwas untersuchen, das Sie aus den Daten bereits „herausgelesen“ haben, so dass das Ergebnis im Grunde vorweggenommen wurde. Es könnte aber sein, dass Sie einfach viele Fische aus einem Schwarm erwischt haben, der noch recht jung

war. Das richtige Vorgehen in diesem Fall wäre: Behauptung aufstellen (Fische in diesem See sind kleiner), dann Daten erheben (neue Fische fangen), dann überprüfen.

(2): Nehmen Sie an, Sie arbeiten für eine Firma, die nachweisen soll, dass die Abfallstoffe, die sie in den Fluss ableitet, nicht sehr schädlich für Organismen sind. Sie fangen also 1000 Wasserschnecken und messen nach. Es stellt sich heraus, dass bei 200 davon fast keine schädlichen Stoffe sind, bei 700 immerhin so wenige, dass man es tolerieren kann, während 100 sehr stark geschädigt sind. Da Sie wissen, wer Sie bezahlt, kommen Sie zu dem Schluss, dass diese 100 Tiere einfach sehr viel Pech gehabt haben und sich dummerweise genau dort aufgehalten haben, wo die Schadstoffe eingeleitet werden; Sie sind der Meinung, man sollte dies nicht mitzählen, da sich die Schadstoffe ja bald verdünnen. Also lassen Sie die Daten der 100 geschädigten einfach verschwinden (die Daten der 200 unbelasteten aber natürlich nicht). Das ist natürlich glatter Betrug - leider ist dieses Vorgehen weder in der Wirtschaft noch in der Wissenschaft völlig unüblich und oft auch sehr schwer nachzuweisen. Mit echtem Erkenntnisgewinn hat es aber nichts zu tun.

(3): Das ist das schwierigste Thema, wo auch oft unabsichtliche Fehler passieren. Berühmte Beispiele: Menschen antworten oft nicht ehrlich, wenn man sie fragt, wen Sie wählen wollen, vor allem dann, wenn in der Gesellschaft die Meinung vorherrscht, dass dies eine unappetitliche Wahl sei. Wenn Sie Tiere fangen, um sie auf ihre Gesundheit zu untersuchen, kann es vorkommen, dass Sie vor allem kranke (geschwächte) Tiere erwischen. Es gibt noch viele weitere Möglichkeiten, hier Fehler zu machen, alles was man tun kann ist mit großer Aufmerksamkeit und Ehrlichkeit nach solchen Schwierigkeiten zu suchen.

(5.2) Beispiele

Die folgenden drei Beispiele werden uns immer wieder begegnen, um Konzepte der Statistik zu illustrieren.

a) Fairness eines Würfels: Sie haben einen 6-seitigen Würfel vorliegen und wollen feststellen, ob dieser „fair“ ist, d.h. ob alle Seiten nach dem Würfeln im Durchschnitt gleich häufig oben liegen. Dazu werfen sie den Würfel 200 mal und erhalten der Reihe nach die Zahlen

1, 6, 5, 5, 2, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 1, 2, 3, 5, 4, 5, 5, 5, 3, 5, 2, 1, 6, 2, 5, 6, 4, 3, 5, 5, 3, 5, 1, 2, 3, 3, 6, 4, 3, 5, 2, 1, 1, 1, 2, 5, 4, 4, 6, 2, 6, 6, 6, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 6, 1, 6, 3, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 2, 6, 1, 2, 4, 6, 6, 3, 1, 1, 3, 4, 6, 5, 4, 5, 2, 1, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 2, 6, 3, 1, 6, 2, 6, 5, 6, 3, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 6, 1, 4, 6, 1, 5, 2, 5, 3, 4, 6, 1, 2, 5, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 3, 6, 4, 6, 3, 6, 2, 1, 6, 6, 6, 5, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 1, 6, 5, 3, 4, 5, 4, 4, 1, 2, 6, 3, 1, 6, 2, 5, 4, 5, 1, 4, 6, 4, 5, 6, 4, 3, 1, 4, 3, 3, 6.

Mit Hilfe dieser Zahlen wollen Sie nun klären, ob der Würfel fair ist.

b) Keimhemmung bei Pflanzensamen: Für Tomatensamen ist es sinnvoll, erst dann zu keimen, wenn sie die Tomate verlassen haben. Wie aber merken die Samen, dass sie nicht mehr in der Frucht stecken? Sie vermuten, dass entweder die Anwesenheit von Fruchtzucker (Saccharose), oder die Anwesenheit von Abscisinsäure (ABS), oder ein Zusammenwirken der beiden dafür sorgt, dass die Samen nicht keimen. Um dies zu testen, bereiten Sie vier Petrischalen vor und legen dort jeweils 100 Samen hinein. Die erste (Schale W) gießen Sie nur mit Wasser, bei der zweiten (Schale S) fügen Sie Saccharose hinzu, bei der dritten (Schale A) nur ABS, bei der vierten (Schale AS) Saccharose und ABS. Nach einer angemessenen langen Zeit zählen Sie, wie

viele Samen gekeimt sind. Sie erhalten das Ergebnis

$$W : 90, \quad S : 85, \quad A : 45, \quad AS : 25.$$

Es scheint so, also wäre Saccharose alleine nicht sehr wirkungsvoll, ABS schon mehr, eine Kombination der beiden allerdings am besten. Wie sehr aber trauen Sie diesen Daten? Wieviel davon ist Zufall - wurde beispielsweise die Schale AS von Bakterien befallen, die die Samen abtöten? Wie können Sie auf belastbare Daten kommen?

c) Bakterien und Umweltstress: Sie setzen eine Bakterienkultur durch Hinzufügen von nichttödlichen Giftstoffen in die Petrischale unter Stress. Sie wollen wissen, ob dies die Mutationsrate der Bakterien beeinflusst. Dazu legen Sie 100 Petrischalen an, in die Sie genetisch identischen Bakterienkulturen setzen. Diese teilen Sie in 20 Gruppen von je 5 ein. In jeder Gruppe fügen Sie eine andere Giftstoffkonzentration hinzu, und zwar jeweils 0, 1, 2, . . . 20 Milligramm. Nach mehreren hundert Bakteriengenerationen messen Sie, bei wie vielen Bakterien ein gewisser Abschnitt des Erbgutes, den Sie für wichtig halten, exprimiert ist. Wir drücken dies in einer reellen Zahl aus, wobei 0 keine Änderung bedeutet, negative Zahlen weniger Expression und positive Zahlen mehr Expression bedeuten ¹⁰. Sie bilden nun Zahlepaare (x, y) , wobei an der ersten Stelle die Giftkonzentration x steht, an der zweiten die Kennzahl y zur Genexpression. Als Ergebnis erhalten Sie

(1, -0.441), (1, 0.318), (1, 0.786), (1, -0.836), (1, 0.106), (2, 0.661), (2, 0.064), (2, -1.312), (2, -0.8), (2, -0.713),
 (3, 1.635), (3, 1.22), (3, 3.165), (3, 0.93), (3, -0.099), (4, 0.059), (4, 0.638), (4, -0.965), (4, -0.384), (4, 1.648),
 (5, 0.619), (5, 1.088), (5, -0.146), (5, 1.203), (5, 1.347), (6, 1.283), (6, -0.015), (6, 3.289), (6, 0.668), (6, 1.496),
 (7, 0.363), (7, 1.256), (7, 0.135), (7, 1.415), (7, 2.208), (8, 1.059), (8, 1.076), (8, 1.157), (8, 0.043), (8, -0.242),
 (9, 2.184), (9, 0.766), (9, 2.073), (9, 1.752), (9, 1.375), (10, 1.724), (10, -0.246), (10, 0.697), (10, 1.484), (10, 1.09),
 (11, 2.406), (11, 1.688), (11, 2.524), (11, 0.973), (11, 1.187), (12, 2.663), (12, 2.632), (12, 2.684), (12, 2.944), (12, 0.734),
 (13, 0.006), (13, 2.603), (13, 2.856), (13, 2.607), (13, 3.222), (14, 3.496), (14, 3.481), (14, 1.694), (14, 2.061), (14, 1.431),
 (15, 1.024), (15, 1.824), (15, 3.434), (15, 1.52), (15, 4.207), (16, 3.41), (16, 3.365), (16, 3.138), (16, 4.3), (16, 2.948),
 (17, 2.927), (17, 4.005), (17, 4.613), (17, 2.527), (17, 3.75), (18, 6.07), (18, 2.3), (18, 3.846), (18, 3.186), (18, 3.722),
 (19, 1.317), (19, 2.841), (19, 6.293), (19, 4.606), (19, 4.213), (20, 2.678), (20, 4.181), (20, 4.277), (20, 3.542), (20, 4.16).

(5.3) Säulendiagramme und Histogramme

a) Säulendiagramme: Ein Säulendiagramm dient zur Visualisierung einer ungeordneten Menge von Zahlen, wie beispielsweise in Beispiel (5.2 a). Um eine allgemeine Form angeben zu können, nehmen wir an, dass wir N Zahlen haben, die wir mit x_1, \dots, x_N bezeichnen. Natürlich könnten wir nun einen Zahlenstrahl malen und über dem Wert $i \in \mathbb{N}$ die Zahl x_i aufzeichnen - das wäre aber nicht sehr sinnvoll, denn erstens wird es bei sehr vielen Zahlen (z.B. bei 200) trotzdem unübersichtlich, und zweitens scheint es dann so, als hätten die Reihenfolge, und der wir die Zahlen x_1, \dots, x_N aufgeschrieben haben, irgend eine Bedeutung, das ist aber oft nicht der Fall.

Eine bessere Möglichkeit, Daten zu visualisieren, bietet das **Säulendiagramm**: hierbei wird die reelle Achse in mehrere Bereiche (auf Englisch: bins, also sogenannte „Eimer“) eingeteilt; dann wird gezählt, wie viele Datenpunkte in jedem Eimer liegen, und über dem Eimer ein

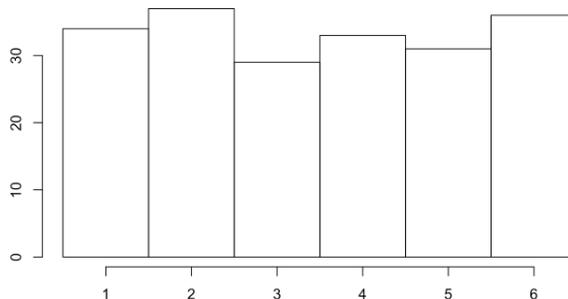
¹⁰Dieses Beispiel dient nur der Illustration - ich habe schlicht keine Ahnung, ob es realistisch ist, diesen Versuch wirklich so durchzuführen!

Rechteck gezeichnet, das die Höhe der darin vorhandenen Datenpunkte hat.

Im Beispiel (5.2 a) zählen wir zunächst, dass wir folgende Häufigkeiten der jeweiligen Zahlen haben:

Zahlenwert	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	34	37	29	33	31	36

Legen wir nun die Bereiche als $[0.5, 1.5[$, $[1.5, 2.5[$, \dots , $[5.5, 6.5[$ fest, dann führt dies auf das Säulendiagramm rechts.



Wenn wir wollen, dass die Bereich wirklich die ganze reelle Achse überdecken, dann müssen wir noch die Bereiche $[-\infty, 0.5[$ und $[6.5, \infty[$ einführen, die aber natürlich keine Datenpunkte enthalten. Meist lässt man das in der Praxis weg.

Wir können dieses Vorgehen auch mathematisch beschreiben, was zwar hier zum Verständnis sicher nicht nötig ist, aber eine ganz gute Übung in mathematischer Notation darstellt. Man teilt \mathbb{R} in endlich viele Intervalle A_1, \dots, A_K ($K \in \mathbb{N}$) ein, die zusammen \mathbb{R} ergeben (das heißt insbesondere heißt das, dass für $K > 1$ zwei der Intervalle unendlich groß sind). Man definiert für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ die Funktion

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

dann kann man die Anzahl derjenigen Datenpunkte, die in dem Intervall A_j liegen, in mathematischer Schreibweise durch die Formel

$$n_j := \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_j}(x_i)$$

ausdrücken. Die Oberkante des Säulendiagramms ist dann durch

$$S(x) := \sum_{j=1}^K n_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$$

gegeben.

b) Histogramme: Ein wichtiger Nachteil von Säulendiagrammen ist, dass sie nicht mehr gut funktionieren, wenn ihre „Eimer“ nicht alle gleich groß sind. Stellen Sie sich beispielsweise vor, im Säulendiagramm des letzten Abschnittes fassen wir die Zahlen 1 und 2 in einen Eimer zusammen, die anderen Zahlen bekommen nach wie vor ihren eigenen Eimer. Weil es insgesamt 71 Einser oder Zweier gibt, hätte die Säule für deren Eimer die Höhe von 71, würde also etwa doppelt so hoch (und natürlich doppelt so breit) sein wie die anderen Säulen. Als Betrachter eines Säulendiagrammes vergleicht man intuitiv die Säulenflächen (nicht die Höhen) miteinander; da die Fläche für die Einser und Zweier aber nun doppelt so groß ist wie beispielsweise die Flächen der Dreier und Vierer zusammengenommen, könnte man zu dem (falschen) Schluss kommen, es wären etwa doppelt so viele Einser und Zweier wie Dreier und Vierer vorhanden. Anders herum ergibt sich ebenfalls eine (die gleiche) Schwierigkeit: wenn wir beispielsweise mit drei Eimern starten, nämlich einen für 1,2, einen für 3,4 und einen für 5,6, und wir wollen dann

den Eimer mit den Einsern und Zweiern noch genauer aufschlüsseln, dann sind die Säulen in dem feiner aufgelösten Säulendiagramm plötzlich nur noch etwa halb so hoch wie die doppelt so breite Säule vorher. Die Gestalt eines Säulendiagramms hängt also stark davon ab, wie breit wir unsere Eimer wählen, und das ist nicht wünschenswert.

Das **Histogramm** löst dieses Problem. Wir geben zunächst die Formel für seine Oberkante an, versuchen Sie einmal, diese zu „übersetzen“. In jedem Fall gibt es weiter unten noch eine Erklärung mit Worten. Wie beim Säulendiagramm teilen wir die reelle Achse in endlich viele Intervalle A_1, \dots, A_K ein und bilden wie oben

$$n_j := \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{A_j}(x_i).$$

Wir fordern außerdem, dass die beiden unendlich langen Intervalle am Rand keine Datenwerte enthalten. Diese werden oft gar nicht mit angegeben, so machen wir das in Zukunft auch: es sollen also alle A_1, \dots, A_k eine endliche Länge haben, es soll zwischen benachbarten Intervallen keine Lücke sein, und alle Datenpunkte sollen in den Intervallen liegen. Für jedes Intervall A_j soll $|A_j|$ seine Länge sein. Die Oberkante des Histogramms hat dann die Formel

$$H(x) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^K \frac{n_j}{|A_j|} \mathbb{1}_{A_j}(x).$$

Sehen wir uns an, was sich geändert hat: im Vergleich zur Formel für das Säulendiagramm haben wir

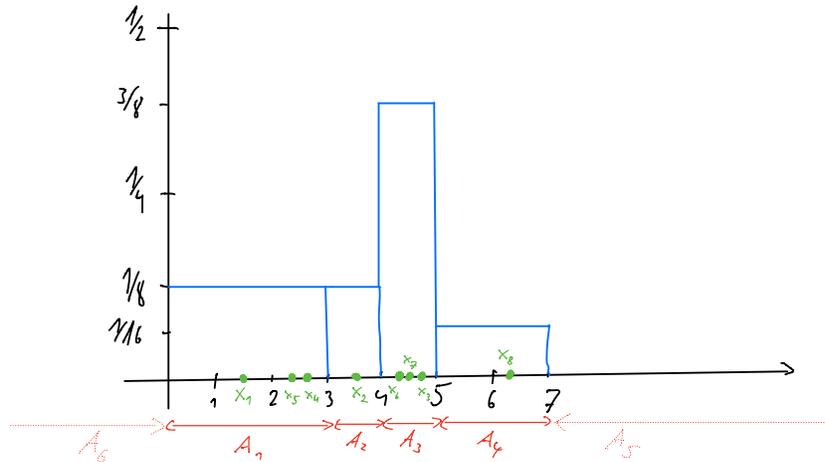
- die Höhe alle Säulen durch die Anzahl N unserer Datenwerte geteilt.
- die Höhe jeder einzelnen Säule zusätzlich durch ihre eigene Breite geteilt.

Dies hat folgende Effekte:

- Die *Fläche* der Säule über A_j ist genau Höhe \cdot Breite $= \frac{1}{N} \frac{n_j}{|A_j|} \cdot |A_j| = \frac{n_j}{N}$, hängt also nur von der (relativen) Anzahl der in ihr enthaltenen Datenpunkte ab.
- Wenn man eine Säule daher irgendwo in zwei Säulen teilt, dann ist die Flächensumme der beiden neuen Säulen genau gleich groß wie die Fläche der alten Säule.
- Zusätzlich ist die Gesamtfläche aller Säulen genau $\sum_{i=1}^N \frac{n_j}{N} = 1$, denn jeder Datenpunkt ist ja in genau einem Intervall, und n_j ist die Anzahl der Datenpunkte im j -ten Intervall, also $\sum_{j=1}^K n_j = N$. Ein Histogramm hat also immer eine Gesamtfläche von 1, egal wie viele Datenpunkte drinstecken.

Zur Illustration schließlich hier noch ein Histogramm inklusive Bauanleitung:

- Zunächst tragen wir die Datenpunkte auf der reellen Achse ein (grüne Punkte). Im Beispiel ist etwa $x_1 = 1.5$ und $x_2 = 3.5$, etc.



- Dann zeichnen wir auf (oder unter) die gleiche Achse die Intervalle (hier A_1 bis A_4). Hier ist beispielsweise $A_1 = [0, 3)$, wobei aus der Zeichnung nicht klar ist, ob 3 nun in A_1 oder in A_2 liegt - meist wählt man die Intervalle so, dass möglichst keine Datenpunkte auf den Grenzen liegen, wenn es sich aber nicht vermeiden lässt, muss man vorher sagen, welche Grenze wozu gehört. Die unendlich langen Intervalle A_5 und A_6 können wir auch weglassen, es dürfen aber keine Datenpunkte darin liegen.
- Dann zählen wie die Punkte in jedem Intervall und teilen dies erst durch die Länge des Intervalls und dann durch die Gesamtzahl aller Punkte. Im ersten Intervall erhalten wir so beispielsweise das Ergebnis $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{8}$. Dies ist die Höhe des jeweiligen Balkens.

(5.4) Mittelwert und Median

Neben der Visualisierung von Daten kann man auch versuchen, eine komplizierte Menge von Daten auf wenige aussagekräftige Zahlen zu reduzieren. Hier wollen wir die zwei „drastischsten“ solchen Vorgehensweisen vorstellen: sie reduzieren die Daten jeweils auf eine einzige Zahl.

Der Mittelwert:

Gegeben seien die Daten x_1, \dots, x_N mit $N \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für alle i . Der **Mittelwert** dieser Daten ist die Zahl

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

die einfach dadurch entsteht, dass man alle Zahlen aufaddiert und das Ergebnis durch ihre Anzahl teilt. Die dadurch entstehende Zahl \bar{x} kann man als „typischen mittelgroßen“ Vertreter der Datenmenge interpretieren; allerdings muss natürlich m selbst nicht in den Daten x_1, \dots, x_n auftauchen. Die vielleicht beste Vorstellung der Bedeutung von m ist folgende: stellen Sie sich die reelle Achse als langes dünnes Brett vor (das selbst nichts wiegt), und legen Sie für jeden Datenpunkt an die Stelle x_j ein Gewicht, das für alle Datenpunkte gleich groß ist (z.B. 1 Gramm). Die Zahl m ist dann der *Schwerpunkt* des beladenen Brettes, d.h. m ist die einzige Stelle, für die das Brett genau im Gleichgewicht bleibt, wenn Sie es dort von unten mit einer dünnen Stange stützen.

Als Beispiel rechnen wir den Mittelwert der Daten aus Beispiel (5.2 a) aus: sind x_1, \dots, x_{200} die dort aufgeführten Zahlen zwischen 1 und 6, dann ist

$$\bar{x} = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} x_i = \frac{1}{200}(34 \cdot 1 + 37 \cdot 2 + 29 \cdot 3 + 33 \cdot 4 + 31 \cdot 5 + 36 \cdot 6) = \frac{698}{200} = 3.49.$$

(Hierbei wurde für das zweite Gleichheitszeichen die Tabelle in (5.3 a) benutzt - sehen Sie, wie das geht?). Die Zahl 3.49 kommt selbst natürlich in den Daten nicht vor, ist aber trotzdem die mittlere Größe dieser Daten.

Der Mittelwert wird uns noch sehr nützlich sein, hat aber eine Eigenschaft, die in der Praxis manchmal unerwünscht ist: wenn einige wenige Datenpunkte (oder sogar nur einer!) sehr, sehr viel größer sind als alle anderen, dann haben sie einen sehr großen Einfluss auf m und das, was herauskommt, hat oft mit unserer Alltagsvorstellung von „mittlerem“ Datenwert nicht viel zu tun. Ein Beispiel: die Stadt Heilbronn lag beim durchschnittlichen jährlichen Pro-Kopf-Einkommen im Jahr 2017 bundesweit mit einem Wert von 42.000 Euro an erster Stelle - noch vor Starnberg (35.000 Euro) oder München (30.000 Euro)¹¹. Der Grund hierfür ist jedoch banal: in der relativ kleinen Stadt Heilbronn wohnt der Besitzer von Lidl, und zusammen mit weiteren 38 sehr einkommensstarken Personen ist er für über 40 Prozent der Summe aller Einkommen in Heilbronn verantwortlich. Mit anderen Worten, in einem Datensatz in dem die meisten Daten etwa den Wert 20.000 haben, aber einige wenige bei vielen hundert Millionen liegen, wird der Mittelwert durch diese wenigen Datenpunkte sehr stark verzerrt und hat nichts mehr mit dem „typischen“ Wert zu tun, den die Daten haben. Dieses Problem behebt die zweite Kenngröße, die wir jetzt einführen wollen.

Der Median:

Gegeben seien Daten x_1, \dots, x_N , $N \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für alle i . „Den“ Median erhält man auf folgende Weise:

- (1) Man sortiert alle Daten der Größe nach. Alle weiteren Überlegungen basieren nur noch auf den so geordneten Daten.
- (2) Wenn die Anzahl N der Daten ungerade ist, dann ist $n := N/2 + 1/2$ eine ganze Zahl. Man zählt nun die der Größe nach sortierten Daten von der kleinsten anfangend ab, bis man bei der n -ten angekommen ist. Diese Zahl $m = x_n$ ist dann der Median der Daten x_1, \dots, x_N . Er hat die Eigenschaft, dass
 - mindestens $N/2$ Daten kleiner oder gleich m sind - denn alle vor x_n auftauchenden Daten und x_n selbst erfüllen ja diese Bedingung, aber (wenn mehrere x_i gleich groß sind) vielleicht auch noch einige Daten nach x_n .
 - mindestens $N/2$ Daten größer oder gleich m sind - alle nach x_n auftauchenden Daten und x_n selbst erfüllen das, vielleicht auch noch einige Daten vor x_n .
- (3) Wenn die Anzahl N der Daten gerade ist, dann ist $N/2$ eine ganze Zahl. Man sucht sich den $N/2$ -ten und den $N/2 + 1$ -ten Datenpunkt. Sind die Werte dieser beiden Datenpunkte gleich, dann ist der Median m der Wert dieser beiden Datenpunkte. Ist dagegen $x_{N/2} < x_{N/2+1}$, dann ist *jede Zahl* im Intervall $[x_{N/2}, x_{N/2+1}]$ eine erlaubte Wahl

¹¹Dies führte dann zu Meldungen wie jener, dass man in Heilbronn im Durchschnitt lediglich 16 Prozent des verfügbaren Einkommens für Miete ausgeben müsse, in München (wo auch die Mieten höher sind) dagegen mehr als 50 Prozent.

für den Median der Daten. Oft (aber nicht immer) nimmt man hier den Mittelwert $m = \frac{1}{2}(x_{N/2} + x_{N/2+1})$. Jedes solche m hat dann die Eigenschaft, dass

- mindestens $N/2$ Daten kleiner oder gleich M sind - denn alle Daten bis einschließlich $x_{N/2}$ erfüllen ja diese Bedingung, aber (wenn mehrere x_i gleich groß sind) vielleicht auch noch einige Daten nach $x_{N/2}$.
- mindestens $N/2$ Daten größer oder gleich M sind - alle nach $x_{N/2+1}$ auftauchenden Daten einschließlich $x_{N/2+1}$ selbst erfüllen dies, vielleicht auch noch einige Daten vor $x_{N/2+1}$.

Die mathematische Definition des Median orientiert sich an der gerade erwähnten Eigenschaft, und lautet:

Definition: Gegeben seien die Daten x_1, \dots, x_N mit $N \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für alle i . Ein **Median** dieser Daten ist jede Zahl m , die die Eigenschaft hat, dass mindestens die Hälfte (aufgerundet) aller Daten kleiner oder gleich m sind, und gleichzeitig mindestens die Hälfte (aufgerundet) aller Daten größer oder gleich m .

Dass der Median manchmal nicht eindeutig definiert ist, ist eine sehr unerfreuliche Konsequenz aus der Tatsache, dass diese Größe hauptsächlich von Nichtmathematikern benutzt wird, und noch dazu von vielen verschiedenen Fachrichtungen. Beim Median ist man sich noch weitgehend einig, dass es vernünftig ist, einfach $m = \frac{1}{2}(x_{N/2} + x_{N/2+1})$ zu nehmen. Bei den Quantilen (siehe unten) ist das leider ganz anders, wie wir noch besprechen werden. Wenn man große Datenmengen hat und die Daten sich nicht nur auf ganz wenige Werte konzentrieren, dann ist es in der Praxis meist ziemlich egal, welchen Median man nimmt. Mathematisch richtig ist jede Wahl.

Beispiel: Für $N = 2$ und $x_1 = 1, x_2 = 2$ ist jede Zahl im Intervall $[1, 2]$ ein Median. Meist wird dann $m = 1.5$ gewählt, aber auch jede andere Wahl aus dem Intervall ist zulässig.

Der Median des Pro-Kopf-Einkommens in Heilbronn liegt übrigens bei ca. 20.000 Euro, und damit nicht weit vom Bundesdurchschnitt entfernt.

(5.5) Empirische Standardabweichung und empirische Varianz

Die empirische Standardabweichung ist eine Größe, die die sogenannte *Streuung* der Daten misst, das heißt sie misst, wie weit die Daten im Durchschnitt von ihrem Mittelwert entfernt liegen. Berechnet wird sie wie folgt: hat man Daten x_1, \dots, x_N gegeben, dann

- (1) berechnet man zunächst den Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$.
- (2) Zieht dann diesen Mittelwert einzeln von jedem Datenwert ab, verschafft sich also die Zahlen $x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_N - \bar{x}$.
- (3) Jede diese Zahlen nimmt man zum Quadrat und summiert alles auf. Danach teilt man durch $N - 1$ (warum nicht durch N wie beim Mittelwert? Dazu unten mehr!). Man erhält dadurch die **empirische Varianz**, die Formel für sie lautet also

$$v = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

- (4) Die Wurzel aus v bezeichnet man als die **empirische Standardabweichung** s der Daten x_1, \dots, x_N . In Formeln:

$$s = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Zu den einzelnen Schritten gibt es noch jeweils ein paar Dinge zu sagen. (1) und (2) sind recht klar - die Größe $x_i - \bar{x}$ zeigt einfach an, wie gut Mittelwert und Datenpunkt x_i übereinstimmen. Allerdings interessiert uns im Moment nicht, ob der spezielle Datenpunkt x_i nun größer oder kleiner als der Mittelwert ist, sondern nur, wie weit er von diesem entfernt ist. Daher nehmen wir in Schritt (3) diesen Abstand ins Quadrat, dadurch erhalten wir eine positive Zahl für jeden Datenpunkt. Aus diesen Zahlen bilden wir wieder eine Art Mittelwert, eigentlich wäre das $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2$. Den wirklichen Grund, warum man statt dessen durch $N - 1$ teilt, werden wir erst später in der Vorlesung verstehen, im Moment muss der Hinweis genügen, dass bei einem einzigen Datenpunkt (also bei $N = 1$) das ganze Konzept „Abweichung vom Mittelwert“ nicht besonders viel Sinn ergibt, so dass dieser Fall (wo man dann ja durch Null teilen würde) nicht ins Gewicht fällt.

Wir sollten noch diskutieren, warum man die „Passgenauigkeit“ des Datenwertes x_i zum Mittelwert \bar{x} dadurch bestimmt, dass man $(x_i - \bar{x})^2$ bildet und nicht etwa mittelst $|x_i - \bar{x}|$. Das hat zum einen ganz praktische Gründe - mit einer Betragsfunktion lässt es sich wegen der nötigen Fallunterscheidungen viel schlechter rechnen als mit der Quadratfunktion. Der zweite Grund ist, dass diese quadratischen Ausdrücke geometrisch gesehen die „richtigen“ sind - das hat etwas mit dem Satz von Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ zu tun, die Größe v ist hier so etwas wie das $\frac{1}{N-1}$ -fache der Hypothenusenlänge eines N -dimensionalen „Dreiecks“. Der letzte Gedanke zu diesem Thema ist der, dass man (wenn man will) durchaus auch andere Gewichtungen vornehmen kann, zum Beispiel $\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N |\bar{x} - x_i|$ oder $\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^4$. Dies beeinflusst zum Beispiel, wie stark sehr schlechte Übereinstimmungen zwischen einem speziellen Datenpunkt x_i und dem Mittelwert \bar{x} ins Gewicht fallen - bei welcher der drei vorgestellten Messgrößen für die Streuung käme wohl im Beispiel von Heilbronn (siehe (5.3)) der Größte Wert heraus?

Als letztes noch zu Punkt (4): die empirische Varianz benimmt sich, wie man sagt¹²⁾, „quadratisch“: Wenn ich alle Datenwerte x_i mit einer Zahl multipliziere (z.B. verdopple), dann ändert sich v um das Quadrat dieser Zahl (z.B. es vervierfacht sich). Es ist eine sehr nützliche Übung, das einmal nachzurechnen. Allerdings hätten wir lieber eine Größe, die sich, wenn ich alle Datenwerte verdopple, auch nur verdoppelt und nicht vervierfacht, oder allgemeiner die bei der Multiplikation aller Daten mit der gleichen Zahl c auch mit c multipliziert wird. Der unschätzbare Vorteil dieser Eigenschaft ist es, dass die empirische Standardabweichung die gleiche Einheit hat wie die Daten - wenn ich alle Daten in Metern angegeben hat, dann hat auch s die Einheit Meter (v dagegen die Einheit Quadratmeter), und wenn ich die Einheiten der Daten auf Zentimeter ändern will (d.h. alle Datenwerte mit 100 multipliziere), dann kann ich das mit s genau so machen (mit 100 multiplizieren und Einheit auf cm ändern). Die Varianz dagegen müsste ich mit 10000 multiplizieren

¹²⁾eigentlich sagt man sie hat Homogenität 2, aber das ist dann doch zu viel Fachsprache für unseren bescheidenen Zweck

Zum Schluss wollen wir noch die empirische Varianz der Daten aus Beispiel (5.2 a) ausrechnen. Wir haben $m = 3.49$ schon berechnet, und erhalten daher

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{199} \sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{199} (34 \cdot 2.49^2 + 37 \cdot 1.49^2 + 29 \cdot 0.49^2 + 33 \cdot 0.51^2 + 31 \cdot 1.51^2 + 36 \cdot 2.51^2) \\ &= \frac{605.98}{199} \approx 3.05. \end{aligned}$$

Versuchen Sie, anhand der Tabelle aus (5.3 a) das zweite Gleichheitszeichen zu verstehen!

(5.6) Quantile

Quantile funktionieren genau wie der Median, mit dem einzigen Unterschied, dass man an einer anderen Stelle aufhört, die der Größe nach geordneten Daten zu zählen. Im Detail:

Gegeben seien Daten x_1, \dots, x_N mit $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$. Zu einer reellen Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ ist das α -**Quantil** die auf folgende Weise erzeugte Zahl:

- (1) Man ordnet zunächst alle Daten der Größe nach.
- (2) Dann berechnet man αN . Oft ist dies keine ganze Zahl. Wir bezeichnen dann mit $\lfloor \alpha N \rfloor$ die nächst kleinere ganze Zahl, wenn αN schon selbst ganz ist, dann ist $\lfloor \alpha N \rfloor = \alpha N$.
- (3) Nun geht man bis zum $\lfloor \alpha N \rfloor$ -ten Datenwert, vom kleinsten anfangend zu zählen.
 - Falls αN keine ganze Zahl ist, dann ist der nächste Wert, also $x_{\lfloor \alpha N \rfloor + 1}$, das eindeutige α -Quantil. Man bezeichnet diesen Wert mit q_α .
 - Falls αN eine ganze Zahl ist, dann ist jede Zahl aus dem Intervall $[x_{\lfloor \alpha N \rfloor}, x_{\lfloor \alpha N \rfloor + 1}]$ ein α -Quantil. Man bezeichnet die so gewählte Zahl mit q_α . Meist nimmt man $(x_{\lfloor \alpha N \rfloor} + x_{\lfloor \alpha N \rfloor + 1})/2$.

Beispiel: Zur Berechnung des 0.3-Quantil der Daten $\{4, 17, 9, 1, 0, 12, 9\}$ ordnen wir zunächst die Daten: $(0, 1, 4, 9, 9, 12, 17)$. Wir haben 7 Daten, also rechnen wir $0.3 \cdot 7 = \frac{21}{10}$. Die nächst kleinere ganze Zahl ist 2, und das 0.3-Quantil dieser Daten hat daher den eindeutigen Wert des dritten Datenpunktes, also $q_{0.3} = 4$.

Die mathematische Definition eines α -Quantils ist wie folgt: Für die Daten $\{x_1, \dots, x_N\}$ und $0 < \alpha < 1$ bezeichnen wir jede Zahl $q_\alpha \in \mathbb{R}$ als α -Quantil zu diesen Daten, die die folgenden zwei Eigenschaften hat:

- Mindestens αN Datenwerte sind kleiner als oder gleich groß wie q_α .
- Mindestens $(1 - \alpha)N$ Datenwerte sind größer als oder gleich groß wie q_α .

Median und Quartile: Das 0.5-Quantil kennen wir schon - es ist der Median. Das 0.25-Quantil und das 0.75-Quantil bekommen besondere Namen: das 0.25-Quantil heißt auch **erstes Quartil**, das 0.75-Quantil heißt auch **drittes Quartil**. Preisfrage: was ist das zweite Quartil?

Kommentar zur Nicht-Eindeutigkeit der Quantile: Bei den Quantilen führt die nicht-eindeutige Definition für den Fall, dass αN ganzzahlig ist, leider zu totalem Chaos in der Praxis. Es gibt (laut Wikipedia) nicht weniger als 9 verschiedene Konventionen, wie man in diesem Fall eine Zahl aus dem Intervall $[x_{\lfloor \alpha N \rfloor}, x_{\lfloor \alpha N \rfloor + 1}]$ wählen soll. Was noch schlimmer ist: alle außer den ersten drei davon stimmen mit unserem Algorithmus nicht einmal dann überein, wenn αN

keine ganze Zahl ist (die mathematische Definition erfüllen sie aber noch). Dies führt unter anderem dazu, dass ein Boxplot (siehe unten), den Sie mit dem Statistikpaket R erstellen, anders aussieht, als Sie das nach unserem Algorithmus erwarten würden. Meines Erachtens sind alle diese verschiedenen Definitionen eigentlich völlig überflüssig: wenn Sie in der Praxis so wenige Daten haben, oder wenn sich die Daten so stark auf wenige Werte konzentrieren, dass es einen Unterschied macht, welche Methode Sie zur Berechnung der Quantile verwenden, dann haben Sie ein ernstes Problem mit der Qualität Ihrer Daten, oder mit Ihrer Methodik. Die Nicht-eindeutigkeit der Quantile ist dann Ihre geringste Sorge. In Vorlesungs- und Übungsbeispielen ist das natürlich anders, da es hier nicht praktikabel ist, von Hand mit hunderten von Daten umzugehen. Für die Vorlesung einigen wir uns daher auf den oben vorgestellten Algorithmus zur Berechnung der Quantile, mit der Empfehlung (aber nicht mit dem Zwang), dass die Intervallmitte genommen wird, wenn $N\alpha$ eine ganze Zahl ist.

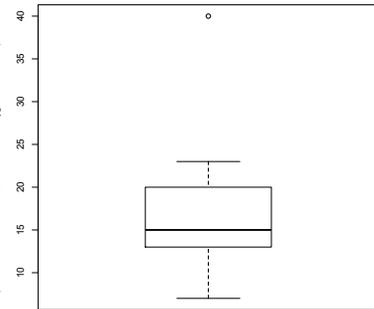
(5.7) Boxplots

Boxplots sind ein weiteres Mittel zur Visualisierung von Daten. Wir geben wieder den Algorithmus zur Erstellung an:

- 1) Berechne aus den Daten den Median $q_{1/2}$, das erste und das dritte Quartil $q_{1/4}$ und $q_{3/4}$.
- 2) Berechne dann den sogenannten **Interquartilsabstand** $IQR := q_{3/4} - q_{1/4}$.
- 2) Zeichne eine Box (beliebiger Breite), deren obere Kante bei $q_{3/4}$ und deren untere Kante bei $q_{1/4}$ liegt. Zeichne den Median $q_{1/2}$ als waagrechte Linie in die Box.
- 3) Zeichne oben und unten Antennen („whiskers“) an die Box: sie beginnen an den Enden $q_{1/4}$ und $q_{3/4}$ der Box, und sie sind nie länger als bis zum letzten Datenpunkt in die jeweilige Richtung, aber auch nie länger als $1.5 \cdot IQR$.
- 4) Für die tatsächliche Länge der Antennen gibt es mehrere Konventionen - wir benutzen die, die im Statistikprogramm R eingebaut ist. Mit dieser Konvention geht die Antenne immer genau bis zum letzten Datenpunkt in die jeweilige Richtung, der noch einen Abstand $\leq 1.5 \cdot IQR$ vom Rand der Box hat.
- 5) Alle Datenpunkte, die nun noch außerhalb der Spannweite der Antennen liegen, werden als Ausreißer separat durch kleine Kreise oder Punkte eingezeichnet.

Beispiel: Die Daten (bereits geordnet) sind (7, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 20, 23, 40). Wir haben $N = 11$ Datenpunkte, also $\frac{1}{4} \cdot N = 2.75$, $\frac{1}{2} \cdot N = 5.5$, $\frac{3}{4} \cdot N = 8.25$. Für das erste Quartil ist also der Wert des dritten, für den Median der des sechsten, und für das dritte Quartil der des neunten Datenpunktes zuständig. Wir erhalten $q_{1/4} = 13$, $q_{1/2} = 15$, $q_{3/4} = 20$, daher $IQR = 7$ und $1.5 \cdot IQR = 10.5$. Die obere Antenne könnte höchstens bis $20 + 10.5 = 30.5$ reichen, endet aber bereits bei 23, da dort der letzte Datenwert liegt, der noch kleiner oder gleich 30.5 ist. Die untere Antenne könnte sich bis höchstens $13 - 10.5 = 2.5$ nach unten erstrecken, endet aber bei 7, da dort der kleinste Datenpunkt liegt, der noch größer oder gleich 2.5 ist (in diesem Fall gibt es auch keinen, der noch kleiner ist). Der Ausreißer 40 ist separat eingezeichnet.

Der Plot wurde mit dem Statistik-Programm R erstellt. Wegen der im vorigen Abschnitt besprochenen Uneindeutigkeit der Definition von Quantilen ist dieser Plot leider gar nicht so leicht zu erstellen: Die Funktion `boxplot()` wählt bei R eine sehr obskure Art der Quantile, die auch in eigentlich guten Fällen (wo die $N/4$, $N/2$, $3N/4$ nicht ganzzahlig sind) andere Ergebnisse liefert. Anders als bei der Funktion `quantile()` kann man hier auch nichts durch Angabe von Parametern ändern. Es ist also ohne Installation von Zusatzpackages nicht möglich, den nebenstehenden Plot aus den Daten zu erzeugen. Dies zeigt auch, dass Boxplots von sehr kleinen Datenmengen in der Praxis wenig Relevanz haben.



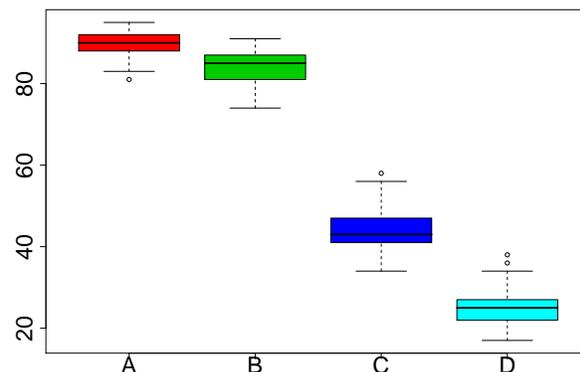
Beispiel: Keimhemmung

Wir kommen zurück zum Beispiel (5.2 b). Wenn man jeden Versuch (W,S,A,AS) nur einmal durchführt, kann man durch unglückliche Zufälle stark verfälschte Ergebnisse bekommen. Daher führt man jeden Versuch nun lieber 60 mal durch. Beim Versuch S (Saccharose) sind die Anzahlen der gekeimten Samen dann beispielsweise

53, 52, 41, 41, 42, 58, 40, 43, 42, 38, 43, 49, 34, 51, 45, 39, 41, 45, 45, 39,
37, 36, 42, 44, 47, 43, 46, 43, 43, 45, 42, 52, 49, 44, 50, 40, 47, 46, 50, 50,
41, 51, 41, 47, 42, 52, 36, 46, 42, 56, 39, 40, 36, 42, 36, 36, 47, 45, 47, 49.

Die anderen Versuche sehen ähnlich aus, welche Zahlen genau dabei herauskommen ist nicht so wichtig. Wichtig ist stattdessen, dass wir aus den obigen Zahlen (und auch aus den anderen, hier nicht explizit aufgeführten) je einen Boxplot machen können, und wenn wir diese nebeneinander abbilden, dann sehen wir schon etwas mehr als allein aus den Zahlen:

Man sieht nicht nur deutlich, dass von W zu S zu A zu AS jeweils eine Verbesserung der Keimhemmung auftritt, sondern auch, dass diese Verbesserung von Wasser auf Saccharose zwar sichtbar ist, sich die Antennen aber stark überlappen. Der Effekt ist hier also nicht sehr stark. Den größten Effekt hat ABS, aber auch die Kombination von ABS und Saccharose ist so viel effektiver, dass bis auf zwei Ausreißer, wo in Schale AS ungewöhnlich viele Samen gekeimt sind, eine klare Trennung der Daten vorliegt. Natürlich sieht man das bei 60 Datensätzen vielleicht noch mit bloßem Auge, bei 10.000 oder mehr, was nicht ungewöhnlich ist, hilft aber ein Boxplot schon sehr bei der Beurteilung der Daten.



(5.8) Korrelation und Korrelationskoeffizient

Kommen wir zurück zu Beispiel (5.2 c). Hier wollen wir herausfinden, ob bei Bakterien wo die Schadstoffkonzentration hoch war, eine erhöhte Mutationsrate festgestellt werden kann. Mathematisch bedeutet dies, dass Sie bei den Zahlenpaaren (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 100$ eine eher große erste Komponente (Giftstoff) meist gemeinsam mit einer eher großen zweiten Komponente (Maßzahl für die Anzahl und Richtung der Mutationen) einhergeht. Wir wollen nun eine allgemeine Methode entwickeln, mit der wir messen können, wie weit so ein Verhalten bei gegebenen Datenpaaren (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, vorhanden ist.

Die erste Frage, die wir uns stellen müssen: was soll „eher groß“ eigentlich bedeuten? Da wir ja (bei allgemeinen Daten) nicht wissen, wie groß die relevanten Zahlen insgesamt sind (ob es sich beispielsweise um Bakterienanzahlen oder Gewichte von Molchen handelt), bleibt eigentlich nur, dass sie eher groß im Vergleich zum Mittelwert aller Zahlen sind - wir sollten also zunächst einzeln von den x_i den Mittelwert \bar{x} und von den y_i den Mittelwert \bar{y} bilden. Die Zahlen $x_i - \bar{x}$ und $y_i - \bar{y}$ zeigen nun an, ob x_i bzw. y_i eher groß (dann ist $x_i - \bar{x} > 0$) oder eher klein (dann ist $x_i - \bar{x} < 0$) sind, und an ihrem Wert kann man auch ablesen, wie stark dieses „eher groß“ und „eher klein“ ist.

Die ganz entscheidende Beobachtung kommt jetzt: wenn in einem Datenpaar (x_i, y_i) die Werte x_i und y_i *beide* eher groß sind, dann ist $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) > 0$, da man hier ja zwei positive Zahlen multipliziert. Dies gilt allerdings auch dann, wenn beide Werte x_i und y_i eher klein sind, da man dann im gleichen Ausdruck zwei negative Zahlen multipliziert. Dagegen gilt $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) < 0$, wenn entweder x_i eher klein und gleichzeitig y_i eher groß ist, oder umgekehrt. Zusätzlich ist der Betrag aller dieser Ausdrücke um so größer, je extremer die jeweiligen Abweichungen vom Durchschnittswert sind.

Wir bilden nun (beinahe) den Durchschnitt über alle diese Produkte, also

$$K = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Der Faktor $\frac{1}{N-1}$ bewirkt, dass K nicht allein dadurch sehr groß (oder sehr negativ) werden kann, dass wir viele Daten haben. Der Grund, warum wir durch $N - 1$ statt durch N teilen ist ähnlich wie bei der empirischen Varianz, wir können ihn im Moment nicht erläutern. Der Unterschied ist für große N ohnehin sehr klein. Die Zahl K hat folgende Eigenschaften: sie ist

- stark positiv, wenn in sehr vielen Fällen (oder in sehr starker Weise) die x_i und y_i gleichzeitig überdurchschnittlich groß sind.
- leicht positiv ist, wenn in vielen Fällen die x_i und y_i gleichzeitig überdurchschnittlich groß sind, in einigen (wenigeren) anderen Fällen aber eher große x_i auf eher kleine y_i treffen oder umgekehrt.
- nahe bei 0, wenn sich Paare mit gleichzeitig eher großen oder eher kleinen Daten mit Paaren die Waage halten, wo ein Partner eher groß und der andere eher klein ist.
- leicht negativ, wenn in vielen Fällen eher große x_i auf eher kleine y_i treffen oder umgekehrt, in einigen (wenigeren) anderen Fällen aber die x_i und y_i gleichzeitig überdurchschnittlich groß sind.
- stark negativ, wenn in sehr vielen Fällen (oder sehr stark) der eine Partner eher klein und der andere eher groß ist.

Sie hat aber auch einen Nachteil: Multipliziert man alle x_i mit einem Faktor a (zum Beispiel indem man die Maßeinheit ändert) und alle y_i mit einem Faktor b , dann multipliziert sich K mit dem Faktor ab (bitte kurz nachrechnen!). Das bedeutet aber, dass die Zahl K alleine für allgemeine Daten gar nicht sehr viel aussagt. Die Art, wie man dieses Problem löst, scheint erst einmal nicht offensichtlich: man teilt durch das Produkt der empirischen Standardabweichungen s_x der x_i und s_y der y_i . In Formeln:

$$\rho := \frac{K}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}},$$

und nach Kürzen von $\frac{1}{N-1}$ erhält man die Formel für den sogenannten **Korrelationskoeffizienten**

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right) \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2\right)}}.$$

Warum teilt man aber gerade durch das Produkt der empirischen Standardabweichungen? Der wichtigste Grund ist sicher folgende Eigenschaft von ρ : egal, was die Daten sind, gilt immer

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Dass diese Ungleichungen gelten ist gar nicht so leicht zu sehen, es liegt an der sogenannten Cauchy-Schwarz-Ungleichung; wir verzichten auf den Beweis. Wenn man sie aber glaubt, sieht man eine große Stärke von ρ : es ist eine von der Anzahl und der Skalierung (d.h. den Einheiten) der Daten unabhängige Größe, die anzeigt, ob überdurchschnittlich große x_i und überdurchschnittlich große y_i tendenziell gerne gleichzeitig auftreten, oder ob sie sich eher vermeiden. Man nennt die Datenpaare

- **stark positiv korreliert**, wenn ρ ziemlich nahe bei 1 ist,
- **positiv korreliert**, wenn $\rho > 0$, aber nicht zu nahe an 0 ist,
- **(näherungsweise) unkorreliert**, wenn ρ ziemlich nahe bei 0 ist,
- **negativ korreliert**, wenn $\rho < 0$, aber nicht zu nahe an -1 ist,
- **stark negativ korreliert**, wenn ρ ziemlich nahe an -1 ist.

Was genau die jeweiligen „ziemlich“ oder „nicht zu“ bedeuten, ist nicht eindeutig festgelegt - es handelt sich hier nicht um echte mathematische Begriffe, sondern eher um wissenschaftliche Umgangssprache.

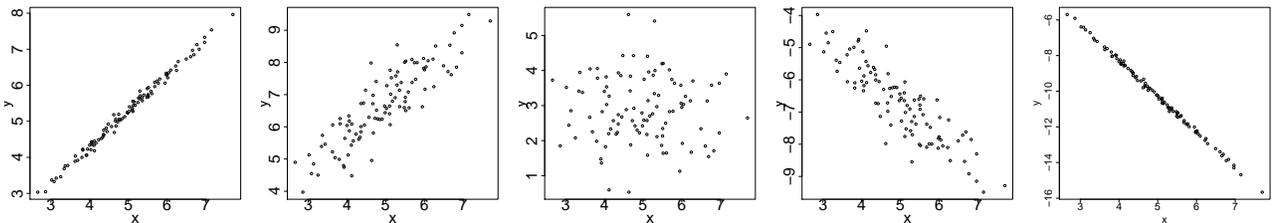
Nimmt man nun die Daten

(1, -0.441), (1, 0.318), (1, 0.786), (1, -0.836), (1, 0.106), (2, 0.661), (2, 0.064), (2, -1.312), (2, -0.8), (2, -0.713),
 (3, 1.635), (3, 1.22), (3, 3.165), (3, 0.93), (3, -0.099), (4, 0.059), (4, 0.638), (4, -0.965), (4, -0.384), (4, 1.648),
 (5, 0.619), (5, 1.088), (5, -0.146), (5, 1.203), (5, 1.347), (6, 1.283), (6, -0.015), (6, 3.289), (6, 0.668), (6, 1.496),
 (7, 0.363), (7, 1.256), (7, 0.135), (7, 1.415), (7, 2.208), (8, 1.059), (8, 1.076), (8, 1.157), (8, 0.043), (8, -0.242),
 (9, 2.184), (9, 0.766), (9, 2.073), (9, 1.752), (9, 1.375), (10, 1.724), (10, -0.246), (10, 0.697), (10, 1.484), (10, 1.09),
 (11, 2.406), (11, 1.688), (11, 2.524), (11, 0.973), (11, 1.187), (12, 2.663), (12, 2.632), (12, 2.684), (12, 2.944), (12, 0.734),
 (13, 0.006), (13, 2.603), (13, 2.856), (13, 2.607), (13, 3.222), (14, 3.496), (14, 3.481), (14, 1.694), (14, 2.061), (14, 1.431),
 (15, 1.024), (15, 1.824), (15, 3.434), (15, 1.52), (15, 4.207), (16, 3.41), (16, 3.365), (16, 3.138), (16, 4.3), (16, 2.948),
 (17, 2.927), (17, 4.005), (17, 4.613), (17, 2.527), (17, 3.75), (18, 6.07), (18, 2.3), (18, 3.846), (18, 3.186), (18, 3.722),
 (19, 1.317), (19, 2.841), (19, 6.293), (19, 4.606), (19, 4.213), (20, 2.678), (20, 4.181), (20, 4.277), (20, 3.542), (20, 4.16).

aus Beispiel (5.2 c), dann kann man (wenn x_i die ersten und y_i die zweiten Zahlen sind) von Hand $\bar{x} = 11.5$ berechnen, während man $\bar{y} = 1.85997$ lieber den Computer rechnen lässt. Setzt man nun diese Werte und die (x_i, y_i) in die Formel für ρ ein, errechnet der Computer 0.784022, also eine recht ordentliche positive Korrelation. Wir können also davon ausgehen, dass Bakterien, die starken Giftstoffen ausgesetzt sind, mehr mutieren als solche, wo das weniger der Fall ist.

Ein wichtiger Warnhinweis, der nicht fehlen darf: man sollte auf keinen Fall den Fehler machen, Korrelation mit Kausalität zu verwechseln: nur weil die Daten x_i gleichzeitig mit den y_i große Werte haben, ist nicht gesagt, dass die großen Werte der x_i der Grund für die großen Werte der y_i sind. Es könnte ja auch sein, dass umgekehrt große y_i der Grund für große x_i sind, oder dass es einen ganz anderen Grund gibt, der dafür sorgt, dass beide gleichzeitig groß sind.

Abschließend noch einige Punktwolken, an denen man gut sehen kann, was Korrelation bedeutet; in den nachfolgenden Bildern sind jeweils alle Punkte (x_i, y_i) in ein Koordinatensystem eingetragen; können Sie zuordnen, welches der Bilder welche Situation der Korrelation beschreibt?



(5.9) Lineare Regression

Gegeben seien Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$. Wir wissen aus dem letzten Punkt, dass der Korrelationskoeffizient

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2\right) \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2\right)}}$$

nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Frage: unter welchen Umständen nimmt er eigentlich die extremen Werte -1 und 1 an? Schauen Sie sich die Bilder aus dem vorigen Abschnitt an und versuchen Sie zu raten, wann das der Fall sein könnte, bevor Sie weiterlesen.

Eine Antwort ist: wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $y_i = ax_i$ für alle $i \leq N$, dann ist $\rho = 1$ falls $a > 0$ und $\rho = -1$ falls $a < 0$ (für $a = 0$ ist ρ nicht richtig definiert). Um dies nachzurechnen stellen wir fest, dass auch in diesem Fall auch

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ax_i = a\bar{x}$$

ist, und daher gilt für alle $i \leq N$ die Gleichheit $(y_i - \bar{y}) = (ax_i - a\bar{x}) = a(x_i - \bar{x})$. Im Zähler des Bruches, der ρ definiert, steht also $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})a(x_i - \bar{x}) = a \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$, und der Faktor in der Wurzel mit den y_i im Nenner ergibt aus dem gleichen Grund $\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

Setzen wir das alles ein, erhalten wir

$$\rho = \frac{a \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{\sqrt{a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}},$$

was für $a > 0$ den Wert 1 und für $a < 0$ den Wert -1 hat, wie behauptet. Es ist eine gute Übung, sich davon zu überzeugen, dass es noch eine andere Möglichkeit gibt, $\rho = 1$ oder $\rho = -1$ zu bekommen: wenn es nämlich $a, b \in \mathbb{R}$ gibt so dass $y_i = ax_i + b$ für alle i gilt, dann ist ebenfalls $|\rho| = 1$. Etwas schwieriger zu beweisen, aber ebenfalls wahr, ist es, dass dies auch schon die einzigen Möglichkeiten sind, $|\rho| = 1$ zu bekommen.

Eine andere Sichtweise dessen, was wir gerade gesehen haben, ist folgende: wenn die zweite Komponente y_i jedes Datenpaares in Wirklichkeit dadurch entstanden ist, dass jemand die erste Komponente x_i in eine sogenannte affin lineare Funktion (nämlich eine Funktion von der Gestalt $f(x) = ax + b$) eingesetzt hat, dann gilt für diese Datenpaare $|\rho| = 1$. Dieser „jemand“ kann durchaus die Natur gewesen sein, wie man an unserem Beispiel (5.2 c) sehen kann: dort könnte es ja durchaus sein, dass es ein *Naturgesetz* zu entdecken gibt, nämlich dass die Mutationsrate proportional zur gegebenen Giftmenge ist. Allerdings ist normalerweise (und auch im Beispiel) die Situation eigentlich nie so gut, dass die Datenpunkte wirklich alle genau auf einer Geraden liegen - Messfehler, zufällige Abweichungen der Umweltbedingungen und andere Unwägbarkeiten erzeugen hier eigentlich fast immer gewisse Abweichungen. Dass dies auch bei den Daten aus Beispiel (5.2 c) so ist, sieht man schon allein daran, dass wir hier etwa die Datenpaare $(1, -0.441)$ und $(1, 0.318)$ haben - eine Funktion würde niemals zum gleichen Eingabewert zwei verschiedene Ausgabewerte liefern!

Wenn man aber trotzdem vermutet, dass hinter den Daten in Wirklichkeit eine Funktion von der Art $f(x) = ax + b$ steckt, die nur ein wenig „verwackelt“ ist, dann kann man versuchen, aus den Daten zu erraten, welches a und welches b man nehmen sollte, d.h. welches a und b am „besten“ zu den Daten passen. Dies ist die Aufgabe der **linearen Regression**. Wie aber stellen wir fest, welche a und b gut zu den Daten passen? Hierzu brauchen wir eine sogenannte *Gütefunktion*, die für eine perfekte Passung (alle Datenpaare genau auf der Geraden) den Wert 0 annimmt, und um so größer ist, je schlechter die Daten zu zwei vorgeschlagenen Werten a und b passen¹³⁾. Eine solche Funktion ist

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2.$$

Man zieht also für jeden Datenpunkt x_i den tatsächlich gemessenen Wert y_i von dem „idealen“ Wert ab, den man bekommen würde, wenn man x_i in die Funktion $f(x) = ax + b$ einsetzen würde, quadriert das Ergebnis, um eine positive Zahl zu bekommen, und summiert über alle Datenpunkte. Der Grund, warum man beispielsweise nicht $|ax_i + b - y_i|$ aufsummiert ist der gleiche wie bei der empirischen Varianz - mit quadratischen Funktionen lässt es sich viel besser rechnen, wie wir auch gleich sehen werden.

Für jeden (durch die Zahlen a und b festgelegten) Vorschlag einer Funktion f haben wir also die Zahl $Q(a, b)$, die umso größer ist, je schlechter die Daten zur Funktion passen. Wir sollten also a und b so einrichten, dass $Q(a, b)$ möglichst klein ist. Hier hilft uns die Differentialrechnung:

¹³⁾Eigentlich sollte man die Funktion deshalb eher als Nicht-Güte-Funktion bezeichnen...

wenn wir für einen Moment annehmen, dass wir a schon kennen, aber wissen wollen, für welches b die Funktion $Q(a, b)$ am kleinsten ist, dann sollten wir Q ableiten (nach b), und das ganze nullsetzen. Das ergibt

$$0 = \frac{d}{db}Q(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{db}(ax_i + b - y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i) = 2N(a\bar{x} + b - \bar{y}),$$

wobei wir für die letzte Gleichheit wieder die Definitionen $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ benutzt haben. Da wir b suchen, lösen wir das nach b auf und erhalten

$$b = \bar{y} - a\bar{x}. \quad (\text{I})$$

Nun stellen wir uns andererseits vor, wir kennen b schon und wollen a bestimmen. Wir leiten also diesmal $Q(a, b)$ nach a ab und setzen null:

$$0 = \frac{d}{da}Q(a, b) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{da}(ax_i + b - y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^N x_i(ax_i + b - y_i) = 2N(a\bar{xx} + b\bar{x} - \bar{xy}),$$

wobei wir die Abkürzungen $\bar{xx} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ und $\bar{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$ eingeführt haben. Wenn wir dies nach der gesuchten Variable a auflösen, erhalten wir

$$a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{xx}} \quad (\text{II})$$

Ein Satz der Differentialrechnung, den wir nicht besprochen haben, sagt uns nun, dass wir mit den Gleichungen (I) und (II) schon genau die Bedingungen haben, die wir brauchen: wenn es überhaupt ein Minimum der Funktion Q (als Funktion der beiden Variablen a und b) gibt, dann muss an diesem Minimum sowohl die Ableitung nach a als auch die nach b gleich null sein, und daher müssen die zu diesem Minimum gehörigen a und b die Gleichungen (I) und (II) erfüllen. Dies sind zwei (lineare) Gleichungen mit zwei unbekanntem, und setzen wir beispielsweise (I) und (II) ein, dann erhalten wir

$$a = \frac{\bar{xy} - b\bar{x}}{\bar{xx}} = \frac{\bar{xy} - (\bar{y} - a\bar{x})\bar{x}}{\bar{xx}},$$

also

$$a\bar{xx} - a(\bar{x})^2 = \bar{xy} - \bar{x}\bar{y} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{xx} - (\bar{x})^2}.$$

Mit weiterer Rechnung erhalten wir dann noch

$$b = \frac{\bar{xx} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{xy}}{\bar{xx} - (\bar{x})^2}.$$

Dies sind die beiden Gleichungen der linearen Regression: bei gegebenen Datenpunkten bestimmen sie die beste Gerade, die man durch diese Datenpunkte hindurchlegen kann. Was passiert übrigens, wenn der Nenner dieser Formeln gleich null ist, und die Formeln daher sinnlos sind? Man kann beweisen, dass das nur geht, wenn die x_i alle gleich groß sind - überlegen Sie sich, dass in diesem Fall die Suche nach einer Funktion $f(x) = ax + b$ mit $f(x_i) = y_i$ tatsächlich ziemlich sinnlos ist!

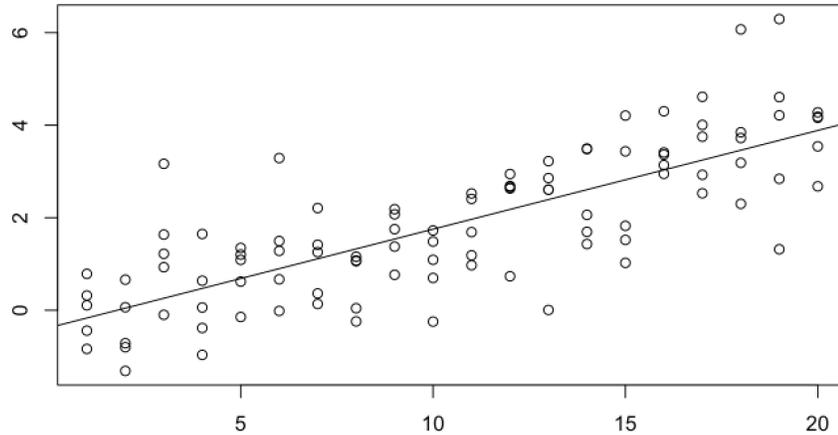
Eine andere Frage: wie gut sind eigentlich für gegebene Datenpunkte die gefundenen a und b , d.h. welchen Wert nimmt die Gütefunktion $Q(a, b)$ in diesem Fall an? Hierfür muss man

die gerade gefundenen Formeln für a und b in Q einsetzen und rechnen. Es gibt erfreulichere Tätigkeiten, aber wenn man bis zum Ende durchhält und den Überblick behält, bekommt man das Ergebnis: für die optimalen a und b hat die Gütefunktion den Wert

$$Q(a_{\text{optimal}}, b_{\text{optimal}}) = N(\overline{yy} - \bar{y}^2)(1 - \rho^2),$$

wobei ρ genau der Korrelationskoeffizient ist! Man sieht also, dass die Gütefunktion tatsächlich dann besonders gut ist, wenn man stark korrelierte Daten hat.

Zum Abschluss sehen wir uns noch unser Beispiel an: Aus unseren Daten berechnen wir (mittels R) $a = 0.2135$ und $b = -0.3814$, und einen plot der Datenpunkte samt der optimalen Geraden sehen wir rechts.



6. Wahrscheinlichkeitstheorie

(6.1) Modellierung von Zufall

Die Naturgesetze kennen eigentlich keinen echten Zufall: wenn man beispielsweise in der Newton'schen Mechanik den Ort und die Geschwindigkeit aller Teilchen eines Systems kennt (und weiß, mit welchen Kräften sie aufeinander einwirken), dann kann man im Prinzip mittels der Newton'schen Differentialgleichung (Beispiel (4.4 c)) zu jedem Zeitpunkt genau vorhersagen, an welchem Ort jedes der Teilchen sein wird.¹⁴⁾

Das Problem steckt aber in den zwei Wörtchen „im Prinzip“. Selbst für ein eigentlich so einfaches physikalisches System wie einen sechsseitigen Würfel sind die Newton-Gleichungen (oder die Gleichungen, die man aus ihnen ableitet) viel zu kompliziert, um sie mathematisch zu lösen. Sogar auf dem Computer ist es unmöglich, sie genau genug zu lösen, um vorherzusagen auf welcher Seite der Würfel liegen bleibt, wenn man ihn mit „genug Schwung“ hochwirft. Dies gilt für fast alle anfänglichen Wurf- und Drehgeschwindigkeiten, auch wenn es Ausnahmen gibt: wirft man beispielsweise den Würfel mit einer Seite nach oben zeigend ganz senkrecht hoch, ohne ihn nur im Geringsten zu drehen, und ist die Oberfläche, auf der er landet ebenso wie er selbst perfekt glatt, dann liegt die Seite oben, die man auch anfangs nach oben gedreht hat - das kann man sogar mathematisch beweisen.

Hier stoßen wir aber auch schon auf das Grundproblem, das auch stark zur praktischen Unlösbarkeit der Newton-Gleichungen in diesem Fall beiträgt: selbst wenn der Würfel nur minimal von dieser

¹⁴⁾Sogar in der Quantenmechanik, die landläufig den Ruf hat, „echten“ Zufall zu enthalten, kann man alles vorhersagen, wenn man alle Informationen über den momentanen Zustand hat. Nur ist es dort prinzipiell unmöglich, diesen beliebig genau zu messen.

idealen Anfangsposition abweicht oder ganz leicht rotiert wird, ändert sich die Seite, auf der er liegen bleibt, drastisch - und zwar so drastisch, dass es in der Praxis unmöglich ist, den Anfangszustand des Würfels so genau herzustellen, dass nicht innerhalb der Ungenauigkeit des Anfangszustandes schon alle möglichen Würfelresultate enthalten sind. Mit anderen Worten: selbst wenn irgend ein Orakel uns zu jedem gegebenen Anfangszustand vorhersagen würde, auf welche Seite der Würfel fällt, so ist es uns doch in der Praxis unmöglich, dem Orakel den Anfangszustand des Würfels genau genug zu beschreiben, um irgend einen Nutzen aus der Vorhersage zu ziehen. Solche System nennt man *chaotisch*, und sie sind (gerade auch in der Ökologie) sehr weit verbreitet. Chaotische System sind in der Praxis sehr wichtig, beispielsweise enthalten die Daten aus dem vorigen Kapitel oft Messfehler oder andere Ungenauigkeiten, die letztlich aus so einem chaotischen Verhalten herrühren. Daher brauchen wir eine Methode, um mit ihnen umzugehen. Diese Methode (die Wahrscheinlichkeitstheorie) liegt darin, zu akzeptieren, dass man das Ergebnis nicht im Einzelfall exakt vorhersagen kann, und zu versuchen, trotzdem noch so viele Vorhersagen wie möglich zu machen. Dazu brauchen wir zunächst ein mathematisches Modell der Situation.

Nehmen wir als an, wir haben ein „Experiment“, das zu kompliziert ist, um es exakt zu beschreiben, in dem also, wie man sagt, der Zufall eine Rolle spielt. Für ein Modell dieses Experimentes überlegen wir uns zunächst alle möglichen (oder zumindest alle plausiblen) Ergebnisse, die das Experiment theoretisch haben könnte, und bauen uns daraus eine (mathematische) Menge, die wir Ω nennen.

a) Im Beispiel des Würfelwurfes wäre also

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

jeder der Zahlen repräsentiert hier natürlich eine Seite, auf die der Würfel fallen kann. Schon hier brauchen wir ein wenig „gesunden Menschenverstand“ (fachlich gesprochen: Modellierungsannahmen), denn wir lassen beispielsweise nicht zu, dass der Würfel auf einer Kante liegenbleibt oder beim Würfeln zerbricht. Das scheint nach unserer Erfahrung eine vernünftige Annahme.

b) Ein anderes Beispiel: wenn wir einen Liter Wasser aus einem See schöpfen und die Mikroorganismen darin zählen, dann kann theoretisch jede ganze Zahl ≥ 0 das Ergebnis sein. Daher ist in diesem Fall

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0.$$

c) Wenn wir die Konzentration eines Schadstoffes in diesem Wasser messen wollen, dann kann theoretisch jede reelle Zahl ≥ 0 herauskommen, also wäre dann

$$\Omega = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

d) Ein letztes Beispiel: wir würfeln zwei mal hintereinander. Jedes Ergebnis hat daher die Form zweier Zahlen zwischen 1 und 6, es gibt eine erste Zahl (erster Wurf) und eine zweite Zahl (zweiter Wurf). Die richtige Menge, um alle diese Möglichkeiten zu erfassen, ist also

$$\begin{aligned} \Omega = & \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \\ = & \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}. \end{aligned}$$

Hier entspricht also beispielsweise das Element $(2, 3)$ dem Ergebnis „zuerst wurde ein Zweier und dann ein Dreier gewürfelt“.

Wenn wir dagegen nur an der Summe der beiden Würfel interessiert sind, wäre die richtige Menge

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

und wenn wir nicht an der Reihenfolge, in der die Zahlen gewürfelt wurden, interessiert sind, dann bekommen wir

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ &\quad (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\} \\ &= \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6, i \leq j\}. \end{aligned}$$

An der letzten Menge sieht man, dass wir eine gewisse Freiheit haben, wie wir unser Ω wählen: hier haben wir Ω als die Menge der Paare gewählt, bei denen die erste Zahl kleiner oder gleich als die zweite ist. Beim Würfeln dagegen bekommen wir „zwei Einser“, „einen Einser und einen Zweier“, oder „einen Sechser und einen Vierer“ etc. Wir *indentifizieren* also die ungeordneten Paare von Zahlen mit solchen geordneten Paaren, deren erste Zahl kleiner oder gleich der zweiten ist. Da es genau gleich viele solcher Paare wie ungeordnete Zahlenpaare gibt (können Sie erklären, warum?), klappt das.

Was wir bisher modelliert haben, ist aber nicht der Zufall oder unser Experiment, sondern lediglich alle möglichen Ergebnisse. Das ist ungefähr so wertvoll als sollten wir die Flugbahn eines Balles berechnen und sagen stattdessen nur, dass seine Flughöhe zu jedem Zeitpunkt durch eine reelle Zahl beschrieben wird. Wir müssen daher noch mehr tun, und der entscheidende Schritt kommt jetzt. Betrachten wir zunächst Beispiele a) und d), die die Gemeinsamkeit haben, dass unser Experiment nur endlich viele mögliche Ergebnisse haben kann. Wir belegen nun jedes $\omega \in \Omega$ dieser Ergebnisse mit einer Zahl $p(\omega) \in [0, 1]$, die wir die „Wahrscheinlichkeit“ für dieses ω nennen wollen. Zusätzlich wollen wir diese Zahlen so wählen, dass genau 1 herauskommt, wenn man all $p(\omega)$ zusammenzählt. In Erweiterung der bisher eingeführten Summen-Notation schreibt man diese Forderung als

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Beispiel b) ist auch noch nicht viel schwieriger: hier haben wir zwar unendlich viele Möglichkeiten, wie das Experiment ausgehen kann, aber die sind immerhin noch übersichtlich durchnummeriert (es sind ja die Zahlen $0, 1, 2, \dots$), und wir können eine *Funktion* p , die $i \in \mathbb{N}$ nach $p(i) \in [0, 1]$ abbildet, definieren, so dass $p(i) \in [0, 1]$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Dann fordern wir wieder, dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega=0}^{\infty} p(\omega) = 1. \quad (*)$$

Beachten Sie, dass man in der ersten Schreibweise überhaupt nicht sehen kann (und auch nicht zu wissen braucht!) ob Ω nun endlich oder unendlich viele Elemente enthält - das macht diese Schreibweise sehr elegant. Falls Sie sich übrigens fragen sollten, ob man solche $p(i)$ eigentlich finden kann, dann probieren Sie mal als Beispiel $p(i) = 2^{-(i+1)}$ aus und erinnern Sie sich an die geometrische Reihenformel.

In Beispiel c) ist die Lage leider komplizierter. Das liegt daran, dass die gemessene Schadstoffkonzentration eine reelle Zahl ist, und davon gibt es zu viele, um sie (wie die natürlichen Zahlen) übersichtlich in eine Reihenfolge zu bringen. Man zahlt hier gewissermaßen den Preis für eine frühere (aber sehr wichtige und nützliche) mathematische Abstraktion: würde man nämlich zugeben, dass man ein Messgerät für Schadstoffe gar nicht so genau ablesen kann, dann könnte man das Messergebnis beispielsweise in Schritten von $1/1000$ angeben, die möglichen Werte wären dann $\{k/1000 : k \geq 0\}$ und wir wären in einer ähnlichen Situation wie in Beispiel b). Da das rechnen mit reellen Zahlen aber so viele andere Vorteile hat (Differentialrechnung, Integrale, Differentialgleichungen etc), möchte man darauf nicht verzichten - man besteht also darauf, dass das Messergebnis eine reelle Zahl ist. Deswegen aber ergibt es nun keinen Sinn mehr, zu fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass als Schadstoffkonzentration beispielsweise genau die Zahl 2 oder auch die Kreiszahl π herauskommt - genauer gesagt, die Antwort wird immer sein „die Wahrscheinlichkeit dafür ist Null“. Was wir aber sinnvoll fragen können ist, ob die Schadstoffkonzentration beispielsweise zwischen 1 und 4 Mikrogramm pro Liter liegt. Daher ordnen wir nicht (wie in den anderen Beispielen) den einzelnen *Ergebnissen* des Experiments eine Wahrscheinlichkeit zu, sondern immer nur *Intervallen*, in denen die Ergebnisse liegen; wir schreiben $\mathbb{P}([a, b])$ für die Wahrscheinlichkeit, den Messwert im Intervall $[a, b]$ zu finden. Dass hierbei einige Regeln gelten sollen, ist klar: beispielsweise wollen wir sicher garantieren, dass $\mathbb{P}([0, 1]) \leq \mathbb{P}([0, 2])$ ist (warum?), und auch $\mathbb{P}([0, \infty[) = 1$; letzteres entspricht der Forderung (*) im Beispiel b). Wir werden unten gleich noch ganz genau darauf eingehen, was dieses \mathbb{P} eigentlich für ein mathematisches Objekt ist.

Als letztes wollen wir darüber nachdenken, was wir eigentlich intuitiv meinen, wenn wir sagen $p(\omega)$ sei die Wahrscheinlichkeit für ω ; was bedeutet es also beispielsweise, wenn wir sagen, die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine 2 zu bekommen, sei gleich $1/6$? Hierzu sehen wir nochmal zurück zum Anfang dieses Abschnittes.

Wenn wir in Situationen, wo wir Wahrscheinlichkeitstheorie brauchen, genau den gleichen Versuch sehr oft (N -mal) unter exakt den gleichen Bedingungen durchführen, bekommen wir, wie oben besprochen, nicht immer das gleiche Ergebnis. Stattdessen führen kleinste (und unvermeidliche) Unterschiede in den Anfangsbedingungen zu einer Vielzahl von scheinbar zufälligen Ergebnissen $\omega \in \Omega$. Was wir aber erwarten (und in der Praxis auch beobachten) ist eine andere Form von Regelmäßigkeit: wenn $n(\omega)$ die Anzahl der Versuche (aus insgesamt N) ist, bei denen das Ergebnis ω herauskommt, dann nähert sich der Bruchteil $\frac{n(\omega)}{N}$ der Versuche mit Ergebnis ω immer mehr einem festen Wert, wenn N immer größer wird¹⁵. Ein gutes Modell für dieses Experiment würde nun diesen Wert als $p(\omega)$ wählen.

Das beschreibt die Bedeutung von $p(\omega)$ in einer für den Experimentator vermutlich zufriedenstellenden Weise. Es ist aber konzeptionell noch etwas sauberer, die Sache anders herum zu sehen: indem wir (im Beispiel b) jedem ω eine Zahl $p(\omega)$ zuordnen, beschreiben wir ein *idealisiertes mathematisches Experiment*, das folgende Eigenschaft hat: Wenn Sie darauf wetten

¹⁵Es ist nützlich, sich ein Beispiel anzusehen, welches dieses Verhalten *nicht* zeigt: in einer Versuchsreihe mit nur zwei Ergebnissen (0 und 1) kommt zunächst 1 mal die 0, dann 2 mal die 1, dann 4 mal die 0, dann 8 mal die 1, dann 16 mal die 0 und so weiter sehen. Sie können sich als (schwierige) Übung überlegen, dass dann der Bruchteil der erzielten Einsen und Nullen nicht konvergiert. Allerdings sollte und würde es auch niemandem einfallen, eine solche Versuchsreihe durch ein zufälliges Geschehen zu modellieren.

müssten, dass bei dem Experiment das Ergebnis ω herauskommt, und wenn Sie im Falle eines Gewinnes 1 Euro erhalten würden, dann wäre $p(\omega)$ der „faire“ Einsatz, den Sie für diese Wette zahlen müssten: wenn Sie mehr als $p(\omega)$ zahlen müssten, würden Sie ein zu schlechtes Geschäft machen, würden Sie weniger als $p(\omega)$ zahlen müssen, dann wären Sie im Vorteil. Diese Überlegung lässt sich im Gegensatz zur vorherigen auch auf Ereignisse anwenden, die Ihrer Natur nach nicht genau so wiederholbar sind (z.B. die zufällige Zeit, die es noch dauert, bis ein bestimmter Vulkan ausbricht).

Ob dieses idealisierte mathematische Experiment nun einem realen Experiment entspricht (oder sogar demjenigen, das wir damit modellieren wollen) ist eine ganz andere Frage - damit es das tut, müssen wir natürlich die $p(\omega)$ richtig (und nicht einfach irgendwie) wählen. Diese Frage ist aber unabhängig von der Mathematik, ebenso wie die Frage, ob eine gewisse mit Hilfe der Newton'schen Mechanik berechnete Kurve wirklich die Flugbahn eines Balles beschreibt.

(6.2) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

a) Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume: Im letzten Abschnitt haben wir zur Modellierung eines zufälligen Geschehens eine Menge Ω und eine Funktion $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

eingeführt, falls das Experiment, das wir beschreiben wollen, nur endlich viele oder nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Das ist auch schon fast alles, was wir brauchen, lediglich eine Verbesserung ist noch nötig: oft ist man nicht daran interessiert, ob ein gewisses $\omega \in \Omega$ als Ergebnis des Experimentes herauskommt, sondern ob das Ergebnis in einer ganzen Gruppe von ω 's (einer sogenannten Teilmenge von Ω) enthalten ist. Beispiele sind:

- Wie wahrscheinlich ist es, mit einem 6-seitigen Würfel eine Primzahl zu würfeln? Mathematisch formuliert: wie wahrscheinlich ist es, dass das Ergebnis des Würfels in der Menge $A = \{2, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ ist?
- Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei 6-seitigen Würfeln eine gerade Würfelsumme zu erzielen? Mathematisch formuliert: wie wahrscheinlich ist es, dass man ein Ergebnis in $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \subset \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = \Omega$ erhält?

Die Antwort ist nicht schwer: wenn ich etwa beim Roulette auf die Zahlen 5 und 17 gesetzt habe, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich mit dieser Wette gewinne, intuitiv doppelt so groß als hätte ich nur auf eine Zahl gesetzt. Wäre andererseits (bei einem kaputten Roulett-Tisch) die Wahrscheinlichkeit $p(5)$, ein 5 zu bekommen verschieden von der Wahrscheinlichkeit $p(17)$, eine 17 zu bekommen, dann sollte bei einem Setzen auf 5 und 17 die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich $p(5) + p(17)$ sein. Wir benutzen diese Intuition für unsere mathematische Definition eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes:

Definition: Ω sei eine endliche oder abzählbar unendliche Menge (denken Sie einfach an \mathbb{Z} , das ist für uns genug). $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ sei eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

So eine Funktion heißt **Gewichtsfunktion**. Wir definieren nun eine Funktion \mathbb{P} , die eine Teilmenge A von Ω nimmt und eine Zahl ausspuckt, und zwar in folgender Weise:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \quad \text{für alle Teilmengen } A \subset \Omega.$$

Diese Funktion heißt das zur Gewichtsfunktion p zugehörige **Wahrscheinlichkeitsmaß**. Die Menge aller Teilmengen von Ω (die sogenannte Potenzmenge) schreiben wir $\mathcal{P}(\Omega)$. Die drei Objekte $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ zusammen heißen **Wahrscheinlichkeitsraum** mit **Grundmenge** Ω und Gewichtsfunktion p ¹⁶⁾.

b) Stetige Wahrscheinlichkeitsräume (mit Dichte). Im Beispiel (6.1 c) gibt es keine Gewichtsfunktion - ihre Rolle übernimmt die sogenannte **Wahrscheinlichkeitsdichte**. Dies ist eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $\rho(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$.

Wenn wir nun für ein Intervall $A \subset \mathbb{R}$ wissen möchten, wie wahrscheinlich es nach unserem (durch ρ festgelegten) Modell ist, einen Messwert im Intervall A zu bekommen, dann müssen wir nur integrieren: falls $A = [a, b]$, dann ist

$$\mathbb{P}(A) = \int_a^b \rho(x) dx = \int_A \rho(x) dx$$

wie gewünscht eine Zahl zwischen 0 und 1. Es gibt zwar außer den gerade vorgestellten Wahrscheinlichkeitsmaßen mit Dichte noch viele andere, diese sind aber für unsere Veranstaltung nicht von Bedeutung.

c) Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie: Zusammenfassung

- die Menge Ω aller möglichen Ergebnisse heißt die **Grundmenge** unseres Modells.
- Teilmengen A von Ω heißen **Ereignisse**.
- Die Abbildung \mathbb{P} , die Mengen schluckt und Zahlen zwischen 0 und 1 ausspuckt, heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**. Bei uns ist \mathbb{P} immer entweder durch eine Gewichtsfunktion oder durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben.
- Die Zahl $\mathbb{P}(A)$ heißt **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** A .

(6.3) Beispiele

a) Würfeln mit einem Würfel: In (6.1 a) hatten wir $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ als Modellraum gefunden. Ein vernünftiges Modell („fairer Würfel“) ist es, dass jede Zahl die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Damit sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu 1 aufsummieren, muss diese dann jeweils $1/6$ sein. Wir legen also die Gewichtsfunktion $p_{\text{fair}}(\omega) = 1/6$ für alle $\omega \in \Omega$ fest, und bekommen dadurch das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Beispielsweise ist das Ereignis

¹⁶⁾Man kann sich zurecht fragen, warum man $\mathcal{P}(\Omega)$ in die Definition hineinnimmt. Ein Grund ist, dass $\mathcal{P}(\Omega)$ der Definitionsbereich der Funktion \mathbb{P} ist, also alles, was man in die Funktion \mathbb{P} hineinstecken darf. Der wichtigere Grund ist, dass man manchmal einen *kleineren* Definitionsbereich als $\mathcal{P}(\Omega)$ wählen will, und das kann man dann dort ausdrücken, indem man diesen kleineren Definitionsbereich statt $\mathcal{P}(\Omega)$ einsetzt. Die Gründe, warum man das manchmal tun will, und die Konsequenzen daraus, sind jedoch für diese Vorlesung nicht wichtig.

$A = \{2, 3, 5\}$ die mathematische Übersetzung für „es wurde eine Primzahl gewürfelt“, und $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 3, 5\}) = p(2) + p(3) + p(5) = \frac{1}{2}$ ist die Wahrscheinlichkeit, eine Primzahl zu würfeln.

Ob ein echter Würfel, der uns vorliegt, wirklich fair ist, kann nur das Experiment (und nicht die Mathematik) entscheiden. Wir können aber natürlich auch einen unfairen Würfel modellieren, indem wir als Gewichtsfunktion eben etwas anderes festlegen: so modelliert zum Beispiel

$$p_{\text{unfair}}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{falls } \omega = 6 \\ \frac{1}{7} & \text{sonst} \end{cases}$$

einen Würfel, der „im Durchschnitt“ die 6 doppelt so häufig würfelt wie jede andere einzelne Zahl.

b) Mikroorganismen: In Beispiel (6.1 b) ist $\Omega = \mathbb{N}_0$, und daher ist es nicht möglich, jedem $\omega \in \Omega$ den gleichen Wert zuzuordnen (warum nicht?) - es gibt hier also keinen „fairen Würfel“. Trotzdem kann man hier ein Modell bauen. Eine (durchaus realistische) Möglichkeit ist es, einfach zu beschließen, dass man nie mehr als 10^{23} (oder eine andere sehr große Zahl von) Mikroorganismen fangen wird, und daher für alle Zahlen $\omega \in \Omega = \mathbb{N}$ mit $\omega > 10^{23}$ einfach $p(\omega) = 0$ zu setzen. In manchen Fällen ist es jedoch auch nützlich (und mathematisch bequem), theoretisch beliebig große Werte zu erlauben; einige Beispiele dafür geben wir unten. In diesem Fall braucht man eine Gewichtsfunktion $p : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ mit $p(i) \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$. Eine solche Funktion ist zum Beispiel durch die geometrische Folge $p(i) = 2^{-i-1}$, $i \geq 0$ gegeben.

c) Schadstoffkonzentration: Hier führt jede Funktion ρ wählen, für die $\rho(x) \geq 0$ für alle x und $\int_0^{\infty} \rho(x) dx = 1$ gilt, zu einem gültigen Modell. Ob diese dann auch die Wirklichkeit beschreibt, steht natürlich auf einem anderen Blatt. Wählt man zum Beispiel

$$\rho_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} & \text{falls } x \leq 1000 \\ 0 & \text{falls } x > 1000, \end{cases}$$

dann ist dies eine Wahrscheinlichkeitsdichte (prüfen Sie das nach!), und es modelliert eine Situation, wo wir nie mehr als 1000 Einheiten (vielleicht: Mikrogramm pro Liter) Schadstoffe bekommen werden, wobei alle Schadstoffkonzentrationen unterhalb von 1000 „gleich wahrscheinlich“ sind. Ein anderes Beispiel wäre

$$\rho_2(x) = 17 \exp(-17x)$$

(können Sie den Vorfaktor 17 erklären?), in diesem Modell sind prinzipiell alle Schadstoffkonzentrationen möglich, aber die Wahrscheinlichkeit, dass die gemessene Schadstoffkonzentration beispielsweise größer oder gleich 100 ist, ist

$$\mathbb{P}([100, \infty)) = 17 \int_{100}^{\infty} \exp(-17x) dx = \left[-\exp(-17x) \right]_{100}^{\infty} = e^{-1700} - 0 \approx 1.47 \cdot 10^{-740}$$

und damit so klein, dass man dies nie beobachten wird.

d) Zwei mal würfeln: Der Grundraum

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

aus Beispiel (6.1 d) hat 36 Elemente. Für den Fall, wo zwei faire Würfel geworfen werden, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen, ist das richtige Modell durch die Gewichtsfunktion p mit $p(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle ω gegeben. Denn alle 6 möglichen Ergebnisse des ersten Würfels sind

gleich wahrscheinlich (Beispiel a), und jede dieser Möglichkeiten muss nun die ihr zustehende Wahrscheinlichkeit von $1/6$ „fair“ unter den 6 möglichen Ergebnissen des zweiten Würfels verteilen. Das Ereignis „Es wird mindestens eine 6 gewürfelt“ entspricht dann beispielsweise der Menge $A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$. Diese hat 11 Elemente, daher ist

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{36} = \frac{|A|}{36} = \frac{11}{36},$$

wobei $|A|$ eine Schreibweise für die Größe¹⁷⁾ (d.h. die Anzahl der Elemente) von A ist. Ein anderes Beispiel: wenn wir wissen wollen, wie wahrscheinlich es ist, dass die Summe der beiden Zahlen genau 4 ist, dann ist die relevante Menge $B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ und wir bekommen mit der gleichen Rechnung wie gerade eben $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Das letzte Beispiel zeigt auch schon, dass das Auffinden der „richtigen“ Gewichtsfunktion nicht mehr so einfach ist, wenn wir nur an der Summe der beiden Würfel interessiert sind. In Beispiel (6.1 d) hatten wir dazu den Grundraum

$$\Omega_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

mit insgesamt 11 Elementen gefunden, aber da wir gerade gesehen haben, dass $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{12}$ für das Ereignis B , dass die Würfelsumme gleich 4 ist, kann die Gewichtsfunktion in diesem Beispiel nicht für alle $\omega \in \Omega$ den gleichen Wert annehmen (sonst wäre ja $p(4) = \frac{1}{11} \neq \frac{1}{12}$). Den Grund findet man nach kurzem Nachdenken auch: da die Zahlen 2 bis 12 ja aus zwei Würfeln zusammengesetzt sind, gibt es viel mehr Kombinationsmöglichkeiten für die Zahlen in der Mitte als für die am Rand. Die Zahl 7 kann beispielsweise durch die sechs Paare $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ erzeugt werden, jedes dieser Paare tritt mit Wahrscheinlichkeit $1/36$ auf, daher ist es plausibel, der Zahl 7 die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ zuzuweisen. Bei der Zahl 4 haben wir schon gesehen, dass sie durch 3 verschiedene Paare erzeugt wird, daher ist ihre Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Allgemein ist das Vorgehen so: Man findet zu jedem Element i von Ω_2 die Teilmenge A_i von Ω_1 , die (durch Addieren) „zum Ergebnis i führt“. Die Gewichtsfunktion $p(i)$ auf Ω_2 legt man dann fest als die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_i)$ auf dem „Ursprungsraum“, also in Formeln

$$p_2(i) = \mathbb{P}(A_i) \quad \text{für alle } i \in \Omega_2.$$

Sie sollten sich klarmachen, dass durch das Einteilen des Ursprungsraumes in „Herkunftsgebiete“ der Zahlen $i \in \Omega_2$ eine Zerlegung von Ω entsteht: jedes Paar $(j, k) \in \Omega$ gehört zu genau einem Herkunftsgebiet. Deswegen bekommt man mit dieser Methode auch wirklich eine Gewichtsfunktion, denn

$$\sum_{i=1}^{11} p_2(i) = \sum_{i=1}^{11} \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{36} = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{36} = 1.$$

Die vorletzte Gleichheit gilt deswegen, weil ja jedes $\omega \in \Omega$ in genau einem A_i drin ist, und es daher egal ist, ob ich sie zunächst A_i -weise zähle und dann alle Ergebnisse addiere, oder ob ich gleich alle zähle. Sie sollten zur Übung die $p(i)$ für die einzelnen i konkret ausrechnen. Stellen Sie eine Symmetrie fest?

Das letzte Beispiel der ungeordneten Würfelwürfe ist von dem gleichen Typ: Jedes ungeordnete

¹⁷⁾Der richtige mathematische Fachbegriff ist „Mächtigkeit“.

Paar entspricht einem geordneten Paar (i, j) mit $i \leq j$ (so hatten wir den Grundraum in (6.1 d) ja auch gebaut). Nun gibt es aber für beispielsweise das ungeordnete Paar mit den Zahlen 1 und 3 die zwei geordneten Paare $(1, 3)$ und $(3, 1)$, die zu diesem Paar führen, dagegen zu dem ungeordneten Paar mit zwei Vierern gibt es nur ein geordnetes Paare (nämlich $(4, 4)$). Daher haben ungeordnete Paare mit ungleichen Partnern die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, während solche mit gleichen Partnern nur Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ haben. Mit anderen Worten: jeder Pasch ist beim Würfeln nur halb so wahrscheinlich wie jede (feste) Kombination aus zwei verschiedenen Würfelzahlen.

(6.4) Mengenoperationen und Ereignisse

a) Übersetzung von Anwendungsproblemen in Grundräume:

Wenn man ein konkretes Problem modellieren will, muss man sich zunächst für einen Grundraum entscheiden. Manchmal ist recht offensichtlich, was zu tun ist (bei einem 6-seitigen Würfel nimmt man $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), manchmal braucht man schon ein wenig Erfahrung: bei dreimaligem Würfeln mit einem 6-seitigen Würfel ist sicher der Raum $\Omega = \{(i, j, k) : 1 \leq i, j, k \leq 6\}$ der richtige, aber um das zu sehen, sollte man entweder den Raum für zwei Würfel aus Beispiel (6.1 d) schon einmal gesehen haben, oder etwas mathematische Intuition besitzen.

In anderen Fällen muss man noch etwas freier modellieren: hat man zum Beispiel eine Urne mit roten, grünen und blauen Kugeln und zieht davon zwei Stück, dann kann man im Prinzip einen Raum Ω bauen, der die Elemente (rot,blau), (rot,grün) etc enthält. Das hat aber zwei Nachteile: erstens ist „rot“ streng genommen kein mathematisches Objekt, auch wenn man das im Prinzip reparieren kann. Der schwerere Nachteil ist, dass unsere ganze Notation nicht richtig funktioniert, was man daran sieht, wenn man es mit der anderen (besseren) Methode der Modellierung vergleicht: man kann nämlich einfach auch beispielsweise „rote Kugel“ mit der Zahl 1 codieren, „grüne Kugel“ mit der Zahl 2 und „blaue Kugel“ mit der Zahl 3. Dann bekommt man

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 3\},$$

was sich schon einmal viel besser aufschreiben lässt als das sture Aufzählen aller Farbpaare. Zusätzlich sehen wir aber auch, dass sich das Ziehen von zwei Kugeln zumindest auf dem Level des Grundraumes in nichts vom Würfeln mit zwei dreiseitigen Würfeln unterscheidet. Es ist ja gerade eine der großen Stärken der Mathematik, für ganz verschiedene Probleme einheitliche Methoden zur Verfügung zu stellen, die dann bei Bedarf wiederverwertet werden können.

b) Übersetzung von Ereignissen in Mengen:

Das Übersetzen von Ereignissen (also Aussagen, was passiert sein soll) in Teilmengen von Ω ist ebenso wie Punkt a) eine Modellierungsaufgabe: Beispielsweise bedeutet beim Würfeln mit einem Würfel die Aussage „der Würfel zeigt eine gerade Zahl“, dass wir an der Menge $A = \{2, 4, 6\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ interessiert sind. Ein etwas komplizierteres Beispiel: Beim Würfeln mit drei Würfeln bedeutet die Aussage „Der erste Würfel zeigt eine sechs und der dritte Würfel eine gerade Zahl“, dass wir an der Teilmenge

$$A = \{(6, i, j) : 1 \leq i \leq 6, j \in \{2, 4, 6\}\}$$

interessiert sind. Wichtige Beobachtung: da der Wert des zweiten Würfels keinen Einfluss darauf hat, ob das Ereignis A eintritt oder nicht, lassen wir für i alle Zahlen zu. Im Einzelfall ist das

Modellieren von realen Begebenheiten mit Hilfe von mathematischen Objekten eine Kunst, die man genau wie die Mathematik selbst üben muss. Wir werden uns in dieser Vorlesung auf ganz einfache Modellierungen beschränken.

Hat man zwei Ereignisse (nennen wir sie E_A und E_B) erst einmal durch Mengen A und B modelliert, dann lässt sich leicht feststellen, dass die Schnittmenge $A \cap B$ das richtige Modell dafür ist, dass E_A und E_B beide eintreten: denn $A \cap B$ enthält ja alle $\omega \in \Omega$, die sowohl dem Ereignis E_A zugeordnet sind (weil sie in A liegen), als auch dem Ereignis E_B (weil sie in B liegen). Ebenso modelliert die Vereinigungsmenge $A \cup B$ das Ereignis, dass entweder Ereignis E_A oder Ereignis E_B (oder beide) eintreten. Denn $A \cup B$ enthält ja alle $\omega \in \Omega$, die mindestens einem der beiden Ereignisse E_A und E_B zugeordnet wurden.

Für zwei Mengen A, B bezeichnet $A \setminus B$ (sprich A ohne B) die Menge, die entsteht, wenn man aus A alle Elemente entfernt, die in B sind - Elemente, die in B aber nicht in A sind werden natürlich nicht entfernt, sie waren ja von vorne herein nicht anwesend. Beispielsweise ist $\{1, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}$. Die Menge $A^c := \Omega \setminus A$ nennt man auch das *Komplement* von A , A^c enthält genau alle diejenigen Elemente, die A nicht enthält.

In der Modellierung steht nun $A \setminus B$ dafür, dass das Ereignis E_A eintritt, aber nicht E_B . Ebenso steht A^c dafür, dass A nicht eintritt. Überlegen Sie sich bitte kurz selbst, ob Sie diese Aussagen nachvollziehen können.

Als letztes noch eine sehr wichtige Beziehung: Falls A eine Teilmenge von B , also $A \subset B$ ist, dann bedeutet dies, dass aus dem Ereignis E_A logisch zwingend das Ereignis E_B folgt. Denn wenn E_A eintritt, dann hat das Experiment ja das Ergebnis ω für ein $\omega \in A$ gehabt, und da dieses ω auch in B ist (denn alle $\omega \in A$ sind ja auch in B), ist auch B eingetreten. Merkhilfe:

$$A \subset B \quad \text{bedeutet} \quad \text{„Aus } E_A \text{ folgt } E_B\text{“},$$

damit man hier nicht gerade die falsche Richtung bekommt, muss der Satz rechts also mit dem Wörtchen „Aus“ begonnen werden!

c) Tabelle zur Übersetzung von Ereignissen in Mengen: Wir stellen die obigen Regeln noch mal übersichtlich dar. Die Mengen A und B sollen dabei jeweils Ereignisse E_A und E_B modellieren. In der dritten Spalte geben wir jeweils ein Beispiel, wo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2\}$ die zu den Ereignissen $E_A =$ „eine gerade Zahl wird gewürfelt“, $E_B =$ „eine Zahl ≤ 3 wird gewürfelt“, und $E_C =$ „die Zwei wird gewürfelt“ gehören.

Ereignisse	Mengen	Bezeichnung	Beispiel
E_A und E_B treten ein	$A \cap B$	Schnittmenge	$A \cap B = \{2\} = C$.
E_A oder E_B treten ein	$A \cup B$	Vereinigungsmenge	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
E_A tritt nicht ein	A^c	Komplement von A	$A^c = \{1, 3, 5\}$, eine ungerade Zahl.
E_A tritt ein, aber nicht E_B	$A \setminus B$	Differenzmenge	$A \setminus B = \{4, 6\}$, eine gerade Zahl, aber nicht ≤ 3 .
Unmögliches Ereignis (tritt nie ein)	\emptyset	leere Menge	–
Sicheres Ereignis (tritt immer ein)	Ω	ganzer Grundraum	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Aus E_C folgt E_A	$C \subset A$	Enthaltens-Relation	2 ist eine gerade Zahl.

d) De Morgan'sche Regeln: Dies sind „Rechenregeln für Mengen“, vergleichbar mit den Regeln für das Klammern weglassen und Ausklammern bei Zahlen. Sie bestimmen, was passiert, wenn man das Komplement-Zeichen c „auf Vereinigungen und Durchschnitte verteilt“. In ihrer einfachsten Form lauten sie: für Mengen $A \subset \Omega$ und $B \subset \Omega$ ist

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad \text{und} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Beim Auflösen der Klammer verteilt sich das c also auf die beiden Mengen darin, aber das Schnitt- bzw. Vereinigungs-Symbol dreht sich jeweils um! Warum das so ist, ist leicht zu sehen: $\omega \in A \cup B$ passiert genau dann, wenn ω entweder in A oder in B ist. Da wir aber $\omega \in (A \cap B)^c$ wollen, muss das Gegenteil davon der Fall sein, als darf ω weder in A noch in B sein. Das bedeutet aber gerade, dass es sowohl in A^c als auch in B^c ist, daher in $A^c \cap B^c$. Die zweite Gleichung sollten Sie sich selbst auf ähnliche Weise klar machen.

Die de Morgan'schen Regeln gelten auch für mehr Mengen. Für $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ gilt

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c, \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c.$$

Hierbei funktionieren $\bigcup_{i=1}^n$ und $\bigcap_{i=1}^n$ genau wie Summen- und Produktzeichen, also etwa $\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ und $\bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Die Gleichungen oben gelten auch dann, wenn $n = \infty$ ist, wir brauchen dann aber natürlich auch unendlich viele Mengen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (also eine *Folge* von Mengen!).

Wir beweisen die allgemeinen de Morgan Regeln nicht, der Beweis ist nicht schwer, benutzt aber eine Technik (vollständige Induktion), die wir nicht besprochen haben.

(6.5) Rechenregeln für Wahrscheinlichkeitsmaße

In diesem Punkt ist immer Ω eine Grundmenge, \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß zur Grundmenge Ω , und A, B sowie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Teilmengen von Ω ¹⁸⁾

a) Leere Menge und Ganzraum: Es gilt (nach Definition):

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

b) Wahrscheinlichkeiten von Mengen ohne gemeinsame Elemente addieren sich:

Für $A, B \subset \Omega$ mit der Eigenschaft $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Das kann man sich für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume¹⁹⁾ mit Gewichtsfunktion p leicht überlegen, denn

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \mathbb{P}(A \cup B).$$

¹⁸⁾Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ darf man aus ziemlich esoterischen Gründen nicht alle Teilmengen von \mathbb{R} zulassen, es entsteht uns aber kein Schaden, wenn wir so tun, als dürfe man das.

¹⁹⁾für stetige Wahrscheinlichkeitsräume stimmt die Gleichung auch, und für Intervalle kann man sie mit den Rechenregeln für Integrale überprüfen. Für allgemeinere Mengen fehlt uns in dieser Veranstaltung die Technik, sie mathematisch sauber zu beweisen.

Die entscheidende Stelle ist hier das zweite Gleichheitszeichen: es ist egal, ob man zuerst alle $p(\omega)$ für die in A befindlichen ω summiert, dann alle $p(\omega)$ für die in B befindlichen, und dann die Ergebnisse summiert, oder ob man von vorneherein alle entweder in A oder in B befindlichen ω benutzt. Allerdings stimmt das tatsächlich nur dann, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist: denn für jedes ω , das sowohl in A als auch in B ist, taucht den Term $p(\omega)$ in *beiden* Summen links des zweiten Gleichheitszeichens auf, aber nur einmal in der Summe rechts davon! Diese Überlegung ist auch schon der Beweis für die Formel in Punkt c) unten! Bevor wir dorthin kommen, stellen wir noch fest, dass die Regel der Addition von Wahrscheinlichkeiten nicht nur für zwei, sondern für beliebig (genauer: abzählbar) viele Mengen gilt: Wenn wir endliche viele Mengen A_1, \dots, A_n oder sogar unendlich viele Mengen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ haben, und wenn gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Hierbei ist auch $n = \infty$ erlaubt. Warum das so ist, sieht man im Fall des diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes genau wie oben: es ist egal, ob man zuerst die $p(\omega)$ geordnet nach der Zugehörigkeit der ω zu den A_i summiert und dann die Ergebnisse zusammenzählt, oder ob man gleich alle $\omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ auf einmal nimmt.

c) Berechnung von Wahrscheinlichkeiten der Vereinigungen zweier allgemeiner Mengen: Für allgemeine $A, B \subset \Omega$ ist

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Man zieht hier also die zu viel gezählten $p(\omega)$ (im Kontext der Diskussion in b)) wieder ab. Es gibt auch eine Formel für $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ im Fall allgemeiner A_i (sogenannte Inklusions-Exklusions-Formel), die ist aber nicht so übersichtlich und für uns auch nicht so wichtig.

d) Gegenereignisse und Differenzmengen: Für alle $A \subset \Omega$ ist

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Um das zu sehen, stellt man die Gleichung oben zu $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$ um und sieht, dass diese wegen Punkt a) und b) stimmt. Falls außerdem $A \subset B$ ist, dann gilt

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

Auch hier benutzt man für den Beweis, dass $B = A \cup (B \setminus A)$ ist, was allerdings nur dann gilt, wenn (wie ja vorausgesetzt) $A \subset B$ ist. Dann allerdings liefert Punkt b) (wegen $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$) wieder $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$, was durch Umstellen die behauptete Gleichheit ergibt.

(6.6) Unabhängigkeit von Mengen

Der Begriff der (stochastischen) Unabhängigkeit ist einer der wichtigsten Begriffe in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Intuitiv sagen wir, dass zwei Ereignisse E_A und E_B unabhängig sind, wenn sie „nichts miteinander zu tun haben“, wenn also die Kenntnis davon, dass E_A eingetreten ist, uns keine Hilfe dabei ist, vorherzusagen, ob E_B eintreten wird. Beispielsweise ist die Kenntnis, dass bei einem Roulettrad die letzten 20 Male eine rote Zahl gerollt wurde, keine Hilfe dabei, vorherzusagen, ob beim nächsten mal eine schwarze Zahl kommt - das Roulett-Rad merkt sich schlicht und einfach nicht, was in der Vergangenheit passiert ist. Die Ereignisse „die ersten 20 Zahlen sind rot“ und „die 21te Zahl ist rot“ sind also unabhängig (auch wenn manche

Menschen das bestreiten und dadurch viel Geld verlieren).

Mathematisch definieren wir die Unabhängigkeit (der Mengen, die ja für die Ereignisse stehen) durch eine einfache Gleichung, die wir fordern: wir nennen zwei Mengen $A, B \subset \Omega$ **unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad (*)$$

gilt. Dass diese Gleichung bei weitem nicht für jede Wahl von Mengen A und B gilt, sieht man allein schon daran, wenn man $A = B$ wählt, was ja nicht verboten ist. Falls dann die Unabhängigkeitsgleichung gilt, dann erhalten wir $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$, was nichts anderes bedeutet, als dass die Zahl $\mathbb{P}(A)$ gleich groß ist wie ihr Quadrat. Es gibt aber nur zwei Zahlen (die 0 und die 1) bei denen das so ist, wenn also eine Menge A unabhängig von sich selbst ist, dann muss das zugehörige Ereignis E_A entweder sicher eintreten (also $\mathbb{P}(A) = 1$) oder sicher nicht eintreten (also $\mathbb{P}(A) = 0$), es ist kein Zufall mehr im Spiel. Das ergibt auch Sinn, denn wenn E_A von E_A unabhängig ist, dann soll das ja gerade modellieren, dass wir aus der Kenntnis der Tatsache, dass E_A wahr ist (beispielsweise dass die Augenzahl eines Würfels unter einem Becher gleich 6 ist), keine Erkenntnis darüber gewinnen, wie wahrscheinlich es ist, dass E_A wahr ist (dass also die Augenzahl gleich 6 ist). Es ist klar, dass das nur geht, wenn wir von vorneherein wussten, dass der Würfel nur Sechser (oder gar keine Sechser) würfeln kann.

Wie steht es aber nun mit der Intuition für den Fall, wo Gleichung (*) stimmt, ohne dass $\mathbb{P}(A)$ oder $\mathbb{P}(B)$ entweder 0 oder 1 sind? Nehmen wir an $\mathbb{P}(A) = 1/3$ und $\mathbb{P}(B) = 1/4$; nach unserer Interpretation aus (6.1) beobachten wir bei sehr vielen gleichen Experimenten also in einem Drittel der Fälle das Ereignis E_A ; alle anderen Fälle können wir für die Menge $A \cap B$ vergessen. Da das Eintreten von E_A mit dem von E_B „nichts zu tun hat“, müssen wir also unter diesen 30% Fällen, in denen wir E_A beobachten, in 1/4 der Fälle auch B beobachten. Also sollte tatsächlich $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ sein, die mathematische Forderung (*) führt also zu einer vernünftigen Modellierung.

Zum Schluss noch eine Warnung: Es ist durchaus möglich, dass folgende Situation eintritt: zwar sind für drei Mengen A, B, C die Gleichungen

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

alle wahr, aber trotzdem gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Die Unabhängigkeit überträgt sich also leider nicht von Mengenpärchen auf Dreier-Pärchen oder gar noch mehr Mengen. In der Mathematik hat man (durch sorgfältige Definition dessen, was man mit Unabhängigkeit mehrerer Mengen meint) einen Ausweg aus dieser Situation gefunden, der aber ein wenig technisch ist und auf Anhieb vielleicht abschreckend aussieht. Zum Glück ist die oben beschriebene Situation in der Praxis völlig unbedeutend - man hat es fast immer mit „echter“ Unabhängigkeit zu tun, wo die zweite Gleichung auch gilt. Außerdem werden wir bei der Behandlung von Zufallsvariablen eine Formulierung kennen lernen, die weniger sperrig ist als die, die für Mengen nötig wäre. Wir lassen die „echte“ mathematische Definition der Unabhängigkeit beliebig vieler Mengen also weg und begnügen uns mit der obigen Definition, die angibt, wann *zwei* Mengen unabhängig sind.

(6.7) Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Bayes'sche Formel

a) Beispiel: In einem Gewinnspiel wird aus einem Topf mit 10 Kugeln eine gezogen. Die Kugeln tragen die Zahlen 1 bis 10 auf der Außenseite und sind innen hohl; in den Kugeln Nummer 6, 7 und 8 befindet sich ein Edelstein, in den anderen ein lustiger Radiergummi. Der Moderator zieht eine Kugel und gibt ihnen wahlweise eine der drei Informationen: ob die Zahl auf der Kugel eine Primzahl ist, ob sie durch 2 teilbar ist, oder ob sie durch 3 teilbar ist. Sie dürfen dann entscheiden, ob die Kugel geöffnet werden soll, oder ob sie zurückgelegt wird. Im zweiten Fall zieht der Moderator eine neue Kugel und öffnet diese. In beiden Fällen bekommen Sie den Inhalt der geöffneten Kugel.

Ein Modell für dieses Glücksspiel ist der Grudraum

$$\Omega = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 0), (10, 0)\}$$

mit der Gleichverteilung, also mit der Gewichtsfunktion $p(\omega) = \frac{1}{10}$ für alle $\omega \in \Omega$. Die 0 in der zweiten Komponente steht hier für den Radiergummi, die 1 für den Edelstein. Die Ereignisse, die sie beim Moderator abfragen dürfen, sind, entsprechen den Teilmengen $A = \{(2, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 1)\}$ (Primzahl), $B = \{(2, 0), (4, 0), (6, 1), (8, 1), (10, 0)\}$ (für gerade Zahl) und $C = \{(3, 0), (6, 1), (9, 0)\}$ (für durch 3 teilbar).

Nehmen Sie an, Sie haben gefragt, ob die Kugel eine Primzahl ist, und die Antwort war „ja“. Sie wollen den Edelstein, nicht den Radiergummi. Sollten Sie die Kugel öffnen? Einige Überlegungen dazu:

- Wenn Sie zurücklegen lassen, beträgt Ihre Gewinnchance genau 0.3, da 3 der 10 Kugeln einen Edelstein enthalten.
- Im Ereignis A enthält eine von 4 Kugeln den Edelstein. Da alle Kugeln gleich wahrscheinlich die gezogene sind, ist ihre Gewinnchance hier $1/4 = 0.25$.

Sie sollten also die Kugel zurücklegen lassen.

Wie sieht es aber aus, wenn Sie gesagt bekommen, dass es keine Primzahl war? Sie wissen dann, dass eine der Kugeln aus A^c gezogen wurde. A^c hat 6 Elemente, davon sind 2 Gewinne und 4 Nieten. Ihre Gewinnchance ist also 2 aus 6, also $2/6 = 1/3 > 0.3$. In diesem Fall sollten Sie die Kugel öffnen lassen. Zur Übung sollten Sie sich nun noch überlegen, was die beste Strategie in den anderen Fällen ist (wenn Sie also nach B oder C fragen), und (für sehr interessierte unter Ihnen) auch noch, was die beste Frage ist, die Sie stellen können, wenn Sie Ihre Gewinnchancen maximieren wollen, oder ob die Wahl der Frage überhaupt eine Rolle dabei spielt.

b) Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wir wollen nun versuchen, das obige Beispiel mathematischer zu fassen und zu verallgemeinern. Wir setzen $G = \{(6, 1), (7, 1), (8, 1)\}$, also die Menge aller Kugeln, bei denen wir gewinnen. Wenn wir gesagt bekommen, dass das Ereignis A (Primzahl) gilt, dann wollen wir also die Wahrscheinlichkeit von G (Gewinn) unter der Bedingung, dass A gilt, berechnen. Was wir intuitiv gemacht haben ist, dass wir von den Ereignissen aus A die gewählt haben, die auch in B sind, also haben wir $A \cap G = \{(7, 1)\}$ gebildet. Nun ist aber $\mathbb{P}(\{(7, 1)\}) = 1/10$, warum haben wir aber oben stattdessen die Gewinnwahrscheinlichkeit $1/4$ bekommen? Die Antwort ist: weil wir uns intuitiv richtig nur noch auf die Ergebnisse konzentriert haben, die überhaupt noch möglich sind, wenn wir wissen, dass A gilt, und das sind 4 Stück. Da eines davon zum Gewinn führt, kommen wir auf $1/4$.

Dieses Vorgehen hat die Schwäche, dass wir es nur dann anwenden können, wenn alle Ergebnisse ursprünglich gleich wahrscheinlich waren. Wenn beispielsweise die Kugel $(7, 1)$ aus irgend einem Grund doppelt so wahrscheinlich ist wie alle anderen (etwa weil sie zwei mal im Topf ist), dann stimmt die Rechnung nicht mehr, denn warum sollte sie doppelt so wahrscheinlich sein wie beispielsweise $(5, 0)$, wenn wir ohne weitere Informationen ziehen, aber nur gleich wahrscheinlich wie $(5, 0)$, wenn wir zusätzlich wissen, dass A eintritt? Dafür gibt es keinen Grund. Zum Glück gibt es eine sehr einfache und natürliche Methode, dies zu reparieren: Wenn wir zwei beliebige Teilmengen A und G eines Grundraumes haben und die Wahrscheinlichkeit von G ausrechnen wollen unter der Bedingung, dass A wahr ist, dann

- stellen wir fest, dass wir uns durch das Wissen darum, dass A wahr ist, eigentlich auf einem anderen Wahrscheinlichkeitsraum befinden; nämlich dem, der nur aus Elementen in A besteht (die anderen können ja nicht passiert sein). Die Gesamtwahrscheinlichkeit in diesem neuen Raum A ist aber nicht 1, sondern (falls Ω diskret ist) $\sum_{\omega \in A} p(\omega) = \mathbb{P}(A)$.
- Damit aus dem reduzierten Grundraum A wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum wird, müssen wir also $\mathbb{P}_A(C) = \mathbb{P}(C)/\mathbb{P}(A)$ für alle $C \subset A$ definieren. Diese Definition ändert „so wenig wie möglich“ außer der Tatsache, dass wir uns nun nur noch in A aufhalten dürfen. Konkret bedeutet das, dass $\mathbb{P}_A(C)/\mathbb{P}_A(C') = \mathbb{P}(C)/\mathbb{P}(C')$ für alle Teilmengen $C, C' \subset A$ gilt, das heißt die Verhältnisse der Wahrscheinlichkeiten innerhalb von A bleiben erhalten; wenn C ursprünglich doppelt so wahrscheinlich war wie C' , dann ist es das nach der Einschränkung auf A immer noch.
- Schließlich wenden wir diese Vorschrift auf die Menge $C = G \cap A \subset A$ an, und erhalten folgende

c) **Definition:** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundraum Ω und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Für zwei Teilmengen $A, G \subset \Omega$ definieren wir, falls $\mathbb{P}(A) > 0$, die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $\mathbb{P}(G|A)$ von G gegeben A durch

$$\mathbb{P}(G|A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap G)}{\mathbb{P}(A)}.$$

d) **Nochmal Beispiel:** im obigen Beispiel ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G|A) &= \frac{\mathbb{P}(\{(7, 1)\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/10}{4/10} = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{P}(G|A^c) &= \frac{\mathbb{P}(\{(6, 1), (8, 1)\})}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{2/10}{6/10} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(G|B) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap G)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

und so weiter.

e) **Bayes'sche Formel:** manchmal kennt man $\mathbb{P}(G|A)$ und $\mathbb{P}(G|A^c)$, möchte aber die umgekehrte Größe $\mathbb{P}(A|G)$ wissen. Direkt aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit können wir folgende Rechnung ableiten:

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G \cap A) + \mathbb{P}(G \cap A^c) = \mathbb{P}(G|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G|A^c)\mathbb{P}(A^c),$$

und damit bekommen wir

$$\mathbb{P}(A|G) = \frac{\mathbb{P}(A \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(G|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(G|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G|A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

Dies ist die einfachste Form der **Bayes'sche Formel**, später lernen wir noch eine kompliziertere Form kennen. Um zu sehen, wozu diese Formel gut ist, hier ein Beispiel:

f) Beispiel: Bei einem Test auf eine Krankheit (z.B. Corona) gibt die *Sensitivität* $s \in [0, 1]$ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine kranke Person als solche erkannt wird, während die *Spezifität* $p \in [0, 1]$ angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine gesunde Person auch als gesund erkannt wird. Angenommen, Sie lassen einen Test machen, welcher ein positives Ergebnis erbringt, also anzeigt, dass Sie krank sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie wirklich krank sind?

Wählen wir hierzu einmal $s = 0.95$ und $p = 0.99$. Da der Test also 99 % aller gesunden Personen auch als gesund erkennt und nur 1 % fälschlicherweise als krank markiert, könnte man naiv annehmen, dass Sie nun mit Wahrscheinlichkeit 99 % krank sind. Das ist aber nicht der Fall, und um das zu verstehen brauchen wir die Bayes'sche Formel.

Was wir allerdings zusätzlich wissen müssen ist der prozentuale Anteil $k \cdot 100$ (mit $k \in [0, 1]$) der erkrankten Menschen in der Bevölkerung. Kennen wir den, dann können wir folgendes Modell machen: der Grundraum ist die (ggf durchnummerierte) Gesamtbevölkerung, A ist die Menge aller kranken Menschen, B die Menge aller Menschen, bei denen der Test ein positives Ergebnis zeigt. Unsere Informationen ergeben die Beziehungen

$$\mathbb{P}(A) = k, \quad (\text{die W'keit, dass eine zufällig gewählte Person krank ist}),$$

$$\mathbb{P}(B|A) = s, \quad (\text{die W'keit, dass bei einer kranken Person der Test positiv ist}),$$

$$\mathbb{P}(B^c|A^c) = p, \quad (\text{die W'keit, dass bei einer gesunden Person der Test negativ ist}),$$

und daher

$$\mathbb{P}(B|A^c) = 1 - p, \quad (\text{die W'keit, dass bei einer gesunden Person der Test positiv ist}).$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$ dass Sie krank sind, wenn der Test ein positives Ergebnis zeigt. Nach der Bayes'schen Formel ist dies

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)} = \frac{sk}{sk + (1 - p)(1 - k)}.$$

Anfang Januar 2020 sind nach Daten des RKI etwa 350.000 Menschen mit nachweislich Covid19 infiziert und noch nicht genesen, unter Annahme einer gewissen Dunkelziffer gehen wir von 600.000 Infizierten aus. Damit wäre $k = 600.000/83.000.000 \approx 0.0072$. Gilt nun für einen Test $s = 0.95$ und $p = 0.99$, so ergibt sich

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{0.95 \cdot 0.0072}{0.95 \cdot 0.0072 + 0.01 \cdot 0.993} \approx 0.407,$$

die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei einem positiven Test tatsächlich infiziert sind, beträgt in diesem Modell also etwas über 40%. Die Sensitivität s hat auf diesen Wert kaum einen Einfluss,

die Spezifität p aber schon: für $p = 0.999^{20}$ ergibt sich bereits

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{0.95 \cdot 0.0072}{0.95 \cdot 0.0072 + 0.001 \cdot 0.993} \approx 0.873.$$

Der Grund für diesen enormen Unterschied ist die sehr kleine Anzahl an Erkrankten im Vergleich zur Gesamtbevölkerung - machen Sie die gleiche Rechnung zur Übung mit $k = 0.2$. Natürlich ist auch die Annahme, das jemand, der zum Test geht, völlig zufällig aus der Bevölkerung gezogen wird, nicht immer gut, besonders wenn die Person Symptome hat. Trotzdem zeigt sich, dass man ohne genaueres Nachdenken sehr leicht falsche Schlüsse ziehen kann; dies ist ein schönes Beispiel dafür, wie wenig man von der Welt versteht, wenn man nicht genug Mathematik beherrscht.

g) Allgemeine Bayes'sche Formel: Man kann auch mehr als 2 sich wechselseitig ausschließende Mengen in der Bayes'schen Formel benutzen. Die allgemeine Formulierung ist dann:

Seien A_1, \dots, A_n Mengen mit $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ für alle i . Es gelte $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$. Dann gilt für jede Menge B und für jedes $k \leq n$:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

Der Beweis dieser Aussage ist nicht schwer, wird aber weggelassen.

(6.8) Zufallsvariable: eine alternative Sichtweise

a) Beispiel: zwei mal Würfeln

Für zwei mal würfeln hatten wir das Modell

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

mit Gewichtsfunktion $p(\omega) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$ eingeführt. Wollen wir das Ereignis beschreiben, dass der erste Würfel eine gerade Augenzahl zeigt, so können wir dafür die Menge

$$A = \{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), (4, 1), (4, 2), \dots, (4, 6), (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}$$

benutzen. Oder, für das Ereignis, dass die Würfelsumme gleich 4 ist, kann man

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

benutzen. Dies ist alles richtig, aber auch auf die Dauer etwas umständlich. Daher führt man sogenannte **Zufallsvariable** ein; das sind zunächst einfach einmal Funktionen, die ein Element aus Ω nehmen und eine Zahl ausspucken. Zwei sehr natürliche Zufallsvariablen im Kontext unseres Beispiels sind

$$X : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, \quad X((i, j)) = i,$$

und

$$Y : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, \quad Y((i, j)) = j.$$

²⁰Einige Labore geben an, diese sehr hohe Spezifität mit ihren PCR-Tests auch zu erreichen, andere halten sich eher bedeckt. Es ist nicht so leicht, hier genaue Informationen zu bekommen. Wikipedia gibt durchschnittlich ca. 99 % an.

X ist also die Augenzahl des ersten, und Y die des zweiten Wurfes. Mit Hilfe dieser Zufallsvariablen können wir nun (eigentlich nur als abkürzende Schreibweise) die obigen Mengen umschreiben:

$$\{X \text{ ist eine gerade Zahl}\} := \text{alle Elemente aus } \Omega, \text{ für die } X(\omega) \text{ gerade ist} = A,$$

und

$$\{X + Y = 4\} := \text{alle Elemente aus } \Omega, \text{ für die } X(\omega) + Y(\omega) = 4 \text{ gilt} = B.$$

Wir schreiben dann auch abkürzend:

$$\mathbb{P}(X \in \{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(A) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X + Y = 4) = \mathbb{P}(B) = 1/9.$$

Übung: können Sie $\mathbb{P}(X \cdot Y = 12)$ in der Form $\mathbb{P}(C)$ mit $C \subset \Omega$ aufschreiben und ausrechnen?

b) Zufallsvariable: Definition Für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume ist es ganz einfach: Eine **Zufallsvariable** ist dann einfach eine Funktion, die Elemente aus dem Grundraum Ω in Zahlen abbildet. Für stetige Wahrscheinlichkeitsräume (mit Wahrscheinlichkeitsdichte ρ) ist es streng genommen leider etwas komplizierter: nicht jede Funktion X , die reelle Zahlen auf reelle Zahlen abbildet, ist eine Zufallsvariable. Der Grund ist, dass es (mit viel Aufwand zwar) möglich ist, Funktionen X zu konstruieren, so dass der Ausdruck $\mathbb{P}(X \in (a, b))$ keinen Sinn ergibt. Um das zu verstehen, überlegen wir uns, wie man $\mathbb{P}(X \in (a, b))$ eigentlich ausrechnet: dazu muss man zunächst alle $\omega \in \Omega = \mathbb{R}$ suchen, für die $X(\omega) \in (a, b)$ ist. Das ist eine Menge $A \subset \mathbb{R}$, aber bei weitem nicht immer ein Intervall. Wenn nun diese Menge „zu wild“ ist, dann ergibt das Integral $\int_A \rho(x) dx$ keinen Sinn. Daher muss man eine weitere Eigenschaft (die sogenannte Messbarkeit) von X fordern, damit X eine Zufallsvariable ist. Zum Glück ist diese Eigenschaft für alle Funktionen, die Ihnen je begegnen werden, erfüllt. Sie können sie also getrost ignorieren. Trotzdem definieren wir, um nichts falsches hinzuschreiben:

In einem stetigen Wahrscheinlichkeitsraum ist eine Zufallsvariable eine messbare Funktion von Ω nach \mathbb{R} .

c) Die Verteilung einer Zufallsvariablen:

Um mit Zufallsvariablen etwas anfangen zu können, brauchen wir ihre Verteilung. Die Verteilung einer Zufallsvariablen X ist dabei ein spezielles Wahrscheinlichkeitsmaß, und zwar jenes, das jeder Menge A im Zielraum von X den Wert $\mathbb{P}(X \in A)$ zuordnet. In unseren zwei relevanten Spezialfällen bedeutet das:

(i): Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in einer diskreten Menge E . Die Verteilung von X hat dann die Gewichtsfunktion $p_X : E \rightarrow [0, 1]$ mit

$$p_X(y) = \mathbb{P}(X = y).$$

Für $B \subset E$ ist also

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{y \in B} p_X(y) = \sum_{y \in B} \mathbb{P}(X = y).$$

(ii): Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{R} . Wenn wir sagen, dass die Verteilung von X die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ hat, dann bedeutet dies, dass

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b \rho(y) dy \quad \text{für jedes Intervall } [a, b] \subset \mathbb{R}$$

gilt.

Man sieht also, dass der Begriff der Zufallsvariable eine Art alternative Sichtweise zum Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes ist: die Verteilung der Zufallsvariablen ist wieder eine Wahrscheinlichkeitsmaß, und in sehr vielen Fällen ist diese Verteilung das einzige, was man von einer Zufallsvariablen wissen will.

d) Beispiele:

(i): Eine **gleichverteilte** Zufallsvariable mit Werten in Menge E mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen hat die Verteilung $p_X(y) = \mathbb{P}(X = y) = \frac{1}{n}$. Eine auf $\{1, 2, \dots, 6\}$ gleichverteilte Zufallsvariable modelliert also einen sechsseitigen Würfel.

(ii): Eine **exponentialverteilte** Zufallsvariable mit Parameter $\alpha > 0$ ist eine Zufallsvariable X , die die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ_α mit

$$\rho_\alpha(y) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha y) & \text{falls } y \geq 0, \\ 0 & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

hat. Es gilt also:

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b \alpha \exp(-\alpha y) dy$$

für alle Intervalle $[a, b]$.

(6.9) Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Definition: Zwei Zufallsvariable X und Y heißen **unabhängig**, wenn für alle²¹⁾ Mengen A, B des Zielraumes gilt:

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Wie bei der Unabhängigkeit von Mengen (siehe (6.6)) muss man also die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Dinge gleichzeitig passieren, als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten schreiben können. Es lohnt sich, diese Gleichung gründlich anzusehen; zunächst einmal müssen wir uns klarmachen, was sie bedeutet, am besten am Beispiel eines diskreten Ω -Raumes mit Gewichtsfunktion p . Wir erinnern uns, dass $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ einfach zwei Funktionen sind. Daher ist (nach Definition!)

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{\omega \in C_A} p(\omega), \quad \text{wobei } C_A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{\omega \in C_B} p(\omega), \quad \text{wobei } C_B = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\},$$

und

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \sum_{\omega \in C_{A,B}} p(\omega), \quad \text{wobei } C_{A,B} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \text{ und } Y(\omega) \in B\}.$$

Außerdem gilt $C_{A,B} = C_A \cap C_B$ (machen Sie sich das klar!), und somit gilt für unabhängige Zufallsvariable X, Y die Gleichung

$$\mathbb{P}(C_A \cap C_B) = \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(C_A)\mathbb{P}(C_B).$$

²¹⁾aus technischen Gründen eigentlich: für alle *messbaren* Mengen; wir können das ohne Schaden ignorieren

Die Menge C_A heißt *Urbildmenge* von A unter X , die Menge C_B heißt Urbildmenge von B unter Y . Unabhängigkeit von Zufallsvariablen bedeutet also, dass alle möglichen Urbildmengen unter X von alle möglichen Urbildmengen unter Y unabhängig (gemäß Definition (6.6)) sind. Mit anderen Worten: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen nachzuprüfen ist richtig viel Arbeit! Zum Glück muss man das fast nie tun, oft steckt die Unabhängigkeit schon in der Annahme einer Aufgabe.

Unabhängigkeit von mehr als zwei Zufallsvariablen ist (im Gegensatz zur Unabhängigkeit von mehr als zwei Mengen) eine ganz einfache Verallgemeinerung: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit Zielraum E heißen **unabhängig**, wenn die Produktformel

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

für alle Kombinationen von Teilmengen $A_1, \dots, A_n \subset E$ gilt.

(6.10) Unabhängige Versuche: geometrische Verteilung und Binomialverteilung

Bernoulli-verteilte Zufallsvariable:

Die einfachsten zufälligen Experimente sind die, die nur zwei verschiedene Ergebnisse (0 oder 1, Misserfolg oder Erfolg, gesund oder krank) haben können. Sie sind in der Praxis aber sehr wichtig und bekommen daher einen eigenen Namen: Eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ heißt **Bernoulli-verteilte Zufallsvariable** mit Erfolgswahrscheinlichkeit p . Ein Experiment, dessen Ergebnis eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable ist, heißt Bernoulli-Experiment.

Die Binomialverteilung:

Nehmen wir nun an, Sie machen n Bernoulli- Experimente, die unabhängig voneinander sind, und jedes der Experimente hat die Erfolgswahrscheinlichkeit p . Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau $k \leq n$ Erfolge (und $n - k$ Misserfolge) haben? Um diese Frage zu beantworten, modellieren wir die n Experimente mit n unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n . Eine Möglichkeit, wie wir k Erfolge haben können ist die, dass diese Erfolge gleich zu Anfang kommen, und ab dem $k + 1$ -ten Versuch nur noch Misserfolge auftreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das passiert, ist (wegen der Unabhängigkeit der X_i)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0) &= \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_k = 1)}_{k \text{ Faktoren mit Wert } p} \underbrace{\mathbb{P}(X_{k+1} = 0)\mathbb{P}(X_{k+2} = 0) \cdots \mathbb{P}(X_n = 0)}_{n-k \text{ Faktoren mit Wert } 1-p} = p^k(1 - p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Dies ist allerdings nicht die einzige Möglichkeit, wie man k Erfolge haben kann - man könnte ja auch zunächst $(n - k)$ Misserfolge und dann k Erfolge haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass letzteres passiert, ist aber auch $p^k(1 - p)^{n-k}$, und tatsächlich ist dies für jede Reihenfolge von Erfolgen und Misserfolgen der Fall, solange es genau k Erfolge sind. Sie sollten dies an einigen Beispielen (oder gerne auch in voller Allgemeinheit) nachrechnen!

Um herauszufinden, wie hoch die Gesamtwahrscheinlichkeit für k Erfolge ist, müssen wir also die Wahrscheinlichkeiten für jede mögliche Reihenfolge, in der diese k Erfolge gemischt mit $(n - k)$ Misserfolgen auftreten können, addieren. Dies ist deshalb so, weil beispielsweise die Mengen $\{X_1 = 1, \dots, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \dots, X_n = 0\}$ und $\{X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k =$

$0, \dots, X_{n-1} = 0, X_n = 1$ eine leere Schnittmenge haben: denn für ein $\omega \in \Omega$, das in der ersten Menge drin ist, gilt ja $X_n(\omega) = 0$, und daher kann es nicht in der zweiten Menge sein, denn für die $\omega \in \Omega$ in dieser Menge gilt ja immer $X_n(\omega) = 1$. Umgekehrt ebenso. Daher addieren sich die Wahrscheinlichkeiten nach unserer Regel aus (6.5 b).

Die Aufgabe lautet also, zu zählen, auf wie viele Arten man k Erfolge in n Versuchen erzielen kann. Dies ist ein klassisches Problem der sogenannten Kombinatorik, das zum Glück recht einfach zu lösen ist. Wir stellen uns n durchnummerierte leere Kästchen vor, von denen wir k ankreuzen dürfen - das sind dann die Erfolge.

- Für unser erstes Kreuz haben wir n Kästchen zur Auswahl.
- Für jede der n möglichen ersten Kästchen haben wir nun noch $n - 1$ Kästchen zur Auswahl für das zweite Kreuz.
- Für jede der nun $n(n - 1)$ möglichen Wahlen des ersten und zweiten Kreuzes haben wir nun noch $n - 2$ Möglichkeiten für das dritte Kreuz.
- Wenn wir das bis zum k -ten Kreuz so weitermachen, dann haben wir für das k -te Kreuz noch $n - k + 1$ Möglichkeiten.

Wir haben also insgesamt $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ Möglichkeiten, k Kreuze zu setzen. Allerdings haben wir hier einen Fehler gemacht, denn viele dieser $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ Möglichkeiten führen letztlich auf das gleiche „Muster“ von angekreuzten und leeren Kästchen; beispielsweise ist es egal, ob wir zuerst Kästchen 1 und dann Kästchen 2 ankreuzen oder umgekehrt. Die Zahl $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ ist also größer als die Anzahl der Möglichkeiten, Muster mit k Kreuzen und $(n - k)$ leeren Kästchen zu bilden. Um herauszufinden, um wieviel sie größer ist, schauen wir uns ein beliebiges Muster an, und überlegen, auf wie viele Arten es aus der oben beschriebenen Prozedur hervorgehen kann. Wir stellen uns also k angekreuzte Kästchen vor, jedes davon hat eine Nummer, und machen eine ähnliche Überlegung wie vorher:

- Das Kästchen mit der kleinsten Nummer kann in jedem der k Schritte unserer ersten Prozedur angekreuzt worden sein.
- Wenn wir uns festgelegt haben, in welchem Schritt das Kästchen mit der kleinsten Nummer angekreuzt wurde (dafür gibt es k Möglichkeiten), dann bleiben $k - 1$ Möglichkeiten, in welchem Schritt das Kästchen mit der zweitkleinsten Nummer angekreuzt wurde.
- Wenn wir uns auf eine der $k(k - 1)$ Möglichkeiten festlegen, wann die niedrigsten zwei Kästchen angekreuzt wurden, dann bleiben $k - 2$ mögliche Schritte, in denen das drittniedrigste Kästchen angekreuzt wurde.
- Für das Kästchen mit der höchsten Nummer bleibt schließlich nur noch ein Schritt übrig, in dem es angekreuzt worden sein kann, wenn wir uns schon vorher festgelegt haben, wann die anderen angekreuzt wurden.

Insgesamt kann also jedes Muster aus Kreuzen und leeren Kästchen auf $k(k - 1)(k - 2) \cdots 2 \cdot 1 = k!$ Möglichkeiten entstehen. Von den $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ Möglichkeiten unserer ersten Prozedur führen also jeweils $k!$ zum gleichen Ergebnis. Daher gibt es insgesamt

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Möglichkeiten, Muster mit k angekreuzten und $n - k$ leeren Kästchen zu zeichnen. Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient** für n Versuchen und k Erfolge.

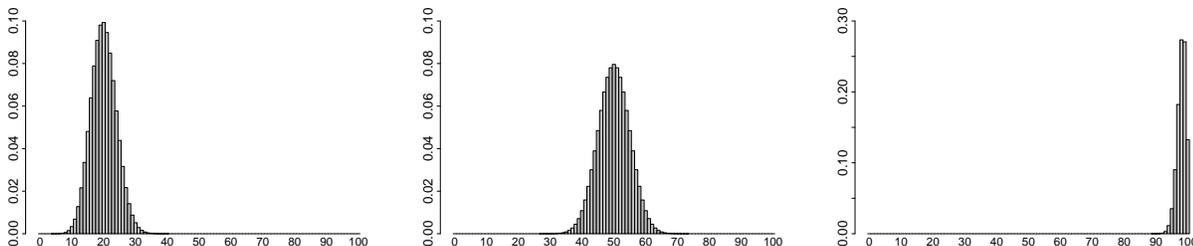
Als Ergebnis bekommen wir also folgende Aussage: Bei n Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau k Erfolge hat, durch die Zahl

$$b_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gegeben. Die Verteilung mit Grundraum $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ und Gewichtsfunktion $p(k) := b_{n,p}(k)$ heißt **Binomialverteilung** mit n Versuchen und Erfolgswahrscheinlichkeit p . Mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n haben wir nun die Gleichung

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) = b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Wenn man n Versuche hat und in jedem Versuch die Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg, dann sollte man intuitiv annehmen, dass man insgesamt ungefähr np Erfolge hat. Ein wichtiges Merkmal der Binomialverteilung ist, dass (zumindest für einigermaßen große n) die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Erfolge sehr stark von np abweicht, wirklich sehr klein ist. Dies verdeutlichen die unten stehenden Abbildungen: sie zeigen die Gewichtsfunktion $b_{100,p}$ für 100 Versuche und $p = 0.2$, $p = 0.5$ und $p = 0.98$. Die Wahrscheinlichkeiten für stark von np abweichende Erfolgszahlen sind zwar nicht gleich null, aber so klein, dass sie auf den Grafiken nicht mehr sichtbar gemacht werden können.



Die geometrische Verteilung: Eine andere Frage bei unabhängigen Bernoulli-Versuchen ist, wie viele Fehlversuche man hat, bevor man den ersten Erfolg erzielt. Diese Frage ist beispielsweise relevant, wenn mit X_i der Erfolg bei der i -ten Wiederholung einer Klausur modelliert werden soll, wobei hier (hoffentlich) die Unabhängigkeit der Versuche in Wirklichkeit nicht gegeben ist.

Seien also nun X_1, \dots, X_n wieder unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$. Sei T das erste Mal, dass ein X_i den Wert 1 annimmt - ist das überhaupt eine Zufallsvariable? Es ist eine, denn es ist eine Funktion, und zwar diejenige, die ein $\omega \in \Omega$ nimmt, daraus zunächst die Werte $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ ausrechnet, dann diese Werte (in aufsteigender Reihenfolge) so lange durchsucht, bis eine 1 gefunden wurde, und die Anzahl $T(\omega)$ der Fehlversuche zurückgibt, die bis dahin gefunden wurden. Mathematisch kann man schreiben

$$T(\omega) = \begin{cases} \max\{i \in \{1, \dots, n\} : X_j(\omega) = 0 \text{ für alle } j \leq i\} & \text{falls } X_1(\omega) = 0 \\ 0 & \text{falls } X_1(\omega) = 1 \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T = k)$ für $0 \leq k \leq n$ können wir ziemlich einfach mit Hilfe der Unabhängigkeit berechnen: für $1 \leq k < n$ ist

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_k = 0, X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_k = 0) \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = (1-p)^k p.$$

Von Hand sieht man, dass $\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = p = (1-p)^0 p$ die selbe Form hat, nur die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_i = 0 \text{ für alle } i \leq n) = (1-p)^n$ sieht anders aus, da hier der Faktor p fehlt.

In Gedanken können wir aber nun n so groß machen wie wir wollen, und sogar gleich ∞ setzen - das bedeutet, dass man so viele Versuche hat, wie man will, und so lange weiter macht, bis der erste Erfolg kommt. Dann verschwindet der letzte Term $(1-p)^n$ (er konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 außer wenn $p = 0$, aber dann ist das Modell ziemlich uninteressant - warum das?). Technisch ist das ein wenig schwieriger, da wir nicht in der Lage sind, mit den in der Vorlesung eingeführten Mitteln ein sauberes Modell (Grundraum und Wahrscheinlichkeitsmaß) für unendlich viele unabhängige Versuche zu konstruieren. Das macht aber nichts, denn das Ergebnis stimmt trotzdem:

Hat man unendlich viele unabhängige Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p > 0$, dann hat die Anzahl T der Misserfolge vor dem ersten Erfolg die Verteilung mit Gewichtsfunktion

$$\mathbb{P}(T = k) = \text{geo}_p(k) := (1-p)^k p \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Sie sollten mit Hilfe der geometrischen Reihe prüfen, dass dies wirklich eine Gewichtsfunktion ist; wegen der Verwandtschaft zu dieser Reihe heißt die Verteilung von T auch geometrische Verteilung zur Erfolgswahrscheinlichkeit p .

Die geometrische Verteilung ist eng verknüpft mit der folgenden wichtigen Standardaufgabe: Wie viele Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit p muss ich machen, damit ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens p_0 (beispielsweise $p_0 = 0.99$) einen Erfolg habe? Die Lösung liegt in folgender Rechnung:

$$\mathbb{P}(\text{Mindestens ein Erfolg in } k \text{ Versuchen}) = \mathbb{P}(T < k) = 1 - \mathbb{P}(T \geq k),$$

und für $k \geq 1$ gilt

$$\{T \geq k\} = \{X_1 = 0, \dots, X_k = 0\}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Mindestens ein Erfolg in } k \text{ Versuchen}) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - (1-p)^k. \end{aligned}$$

Wegen $p > 0$ wird die Folge (a_k) mit $a_k = 1 - (1-p)^k$ gegen 1 konvergieren, außerdem ist sie monoton wachsend. Wenn wir also wissen wollen, wann sie das erste mal größer als (beispielsweise) 0.99 ist, dann müssen wir die Gleichung

$$1 - (1-p)^k = 0.99$$

nach k auflösen. Dies können wir tun:

$$\begin{aligned} 1 - (1-p)^k = 0.99 &\Leftrightarrow (1-p)^k = 0.01 \Leftrightarrow \ln((1-p)^k) = \ln 0.01 \\ \Leftrightarrow k \ln(1-p) = \ln 0.01 &\Leftrightarrow k = \frac{\ln 0.01}{\ln(1-p)}. \end{aligned}$$

k wird hier keine ganze Zahl sein, da wir aber eine höhere Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg wollen, müssen wir also k auf die nächste ganze Zahl aufrunden. Wenn beispielsweise $p = 0.2$ ist, dann bekommt man

$$\frac{\ln 0.01}{\ln(1 - p)} = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.8} \approx \frac{-4.6051}{-0.2231} \approx 20.64.$$

Man muss also mindestens 21 Versuche machen, um mit 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Erfolg zu haben.

Man hätte dies auch anders ausrechnen können: da wir die Gewichtsfunktion von T kennen, ist

$$\mathbb{P}(T \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} \text{geo}_p(k) = \sum_{j=k}^{\infty} (1 - p)^j p = (1 - p)^k.$$

Schaffen Sie es, mit Hilfe der geometrischen Reihe und einer Indexverschiebung das letzte = zu bestätigen?

(6.11) Reduktion auf wenige Zahlen: Erwartungswert und Varianz

In (5.4) und (5.5) haben wir mit dem Mittelwert und der empirischen Varianz zwei Methoden kennengelernt, große Datenmengen mit Hilfe weniger Kennzahlen bis zu einem gewissen Grad zu beschreiben. Das gleiche können wir mit Wahrscheinlichkeitsmaßen oder Zufallsvariablen tun. Wir beginnen mit dem Fall diskreter Zufallsvariablen:

a) Diskrete Zufallsvariable:

Definition Erwartungswert: Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$, und mit Gewichtsfunktion $p(y) = \mathbb{P}(X = y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Der **Erwartungswert** der Zufallsvariablen X ist die Zahl

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{y \in E} yp(y).$$

Beispiele: Um zu verstehen, was der Erwartungswert ist, sehen wir uns zunächst den einfachen Würfelwurf an: sei also $p(y) = \mathbb{P}(X = y) = 1/6$ für $y = 1, \dots, 6$, dann ist

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{y=1}^6 yp(y) = \frac{1}{6} \sum_{y=1}^6 y = 3.5.$$

Allgemeiner ist für eine gleichverteilte Zufallsvariable X mit n möglichen Werten y_1, \dots, y_n

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n y_i p(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

also genau der Durchschnitt der möglichen Werte. Ist andererseits X eine Bernoulli-Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X = 0) = 1/7$, $\mathbb{P}(X = 1) = 6/7$, dann ist

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{6}{7} \cdot 1 = \frac{6}{7},$$

also nicht der Durchschnitt $1/2$ der möglichen Werte 0 und 1. Der Grund ist, dass der Wert 1 mit einer viel höheren Wahrscheinlichkeit auftritt als der Wert 0, und daher auch stärker in der Berechnung von $\mathbb{E}(X)$ berücksichtigt wird. Der Erwartungswert ist also das **gemäß der**

Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens gewichtete Mittelwert aller möglichen Werte von X .

Berechnung von Erwartungswerten zusammengesetzter Zufallsvariablen: Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in einer Menge $E \subset \mathbb{R}$ und Gewichtsfunktion $\mathbb{P}(Y = y) = p(y)$ für alle $y \in E$. Sei f eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Dann ist auch $f(X)$ (d.h. $f(X)(\omega) := f(X(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$) eine diskrete Zufallsvariable. Für ihren Erwartungswert gibt es die einfache Formel

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{y \in E} f(y)p(y).$$

Es ist nicht sehr schwer, diese Formel zu beweisen, wir lassen das aber weg. Ein wichtiger Spezialfall ist $f(x) = x^2$; dann ist

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{y \in E} y^2 p(y).$$

Rechenregeln für den Erwartungswert: Es gibt einige sehr wichtige Rechenregeln für den Erwartungswert:

(i): Erwartungswerte addieren sich: Sind X und Y Zufallsvariablen, dann ist

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

(ii): Vorfaktoren kann man aus dem Erwartungswert herausziehen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

(iii): Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit nur einem Wert ist dieser Wert: Falls $X(\omega) = a$ für alle $\omega \in \Omega$, dann ist

$$\mathbb{E}(X) = a.$$

(iv): Erwartungswerte **unabhängiger** Zufallsvariablen kann man multiplikativ trennen: sind X und Y unabhängig, dann ist

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Achtung: Falls X und Y nicht unabhängig sind, stimmt das fast nie!

Den Beweis dieser Regeln lassen wir weg, alle bis auf die letzte sind nicht sehr schwer zu beweisen.

Beispiele:

Die Regeln für den Erwartungswert sind sehr nützlich für die Berechnung zusammengesetzter Erwartungswerte. Seien X und Y jeweils Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X = y) = \mathbb{P}(Y = y) = \frac{1}{6}$ für $y = 1, \dots, 6$, also zwei Würfel. Dann ist der Erwartungswert der Würfelsumme

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Man kann dies natürlich auch über die Verteilung von $X + Y$ (auf den Zahlen 2 bis 12) berechnen, das ist aber viel aufwändiger. Falls X und Y außerdem unabhängig sind, dann ist der Erwartungswert des Produktes der Würfelaugen gleich

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 3.5^2 = \frac{49}{4}.$$

Definition Vairanz:

Die Varianz einer diskreten Zufallsvariablen X mit Werten in einer Menge $E \subset \mathbb{R}$ und Gewichtsfunktion $p(y) = \mathbb{P}(X = y)$ für $y \in E$ ist die Zahl

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{y \in E} (y - \mathbb{E}(X))^2 p(y),$$

Ihnen sollte eine gewisse Ähnlichkeit mit der Formel für die empirische Varianz (siehe (5.5)) auffallen - wie beim Erwartungswert werden jedoch auch hier die Werte y , die eine höhere Wahrscheinlichkeit haben, in der Summer auch höher gewichtet.

Bedeutung der Varianz: Die Varianz ist eine Zahl, die angibt, wie sehr die Werte von X „im Durchschnitt“ vom „idealen Wert“ $\mathbb{E}(X)$ abweichen. Beachten Sie auch die Ähnlichkeit zu der Formel für die lineare Regression - auch hier haben wir die Abweichung von Werten von ihrem „idealen“ Wert quadriert und aufsummiert (allerdings nicht gewichtet). Eine kleine Varianz bedeutet also, dass X „nicht sehr zufällig“ ist, dass also meist ein Ergebnis herauskommt, das nahe bei $\mathbb{E}(X)$ ist; eine große Varianz dagegen bedeutet, dass X mit recht hoher Wahrscheinlichkeit Werte annimmt, die recht weit von $\mathbb{E}(X)$ entfernt sind, und erst durch Mittelung dieser sehr verschiedenen Werte ergibt sich der Erwartungswert.

Beispiele: Die Bedeutung der Varianz lässt sich intuitiv sehr gut an folgendem Beispiel erklären: vergleichen Sie die beiden folgenden Glücksspiele: in jedem der beiden Spiele werfen Sie eine faire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ die Zahl 0 (Kopf) und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit die Zahl 1 (Zahl) zeigt. Im ersten Spiel (modelliert durch die Zufallsvariable X) bekommen Sie bei „Zahl“ 1 Euro, bei „Kopf“ verlieren Sie 1 Euro. Es ist also $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Im zweiten Spiel (modelliert durch Y) erhalten Sie beim Ergebnis „Zahl“ 1.000 Euro, verlieren aber beim Ergebnis „Kopf“ auch 1.000 Euro. Beide Spiele haben Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0 = \frac{1}{2} \cdot (-1000) + \frac{1}{2} \cdot 1000 = \mathbb{E}(Y).$$

Sie werden aber vermutlich zustimmen, dass sich das zweite Spiel „anders anfühlt“ (und zwar riskanter!) als das erste. Dieses gefühlte Risiko wird eben durch die Varianz beschrieben: es gilt

$$\mathbb{V}(X) = (-1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

aber

$$\mathbb{V}(Y) = (-1000 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1000 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 10^6$$

Dass übrigens auch Erwartungswert und Varianz zusammen bei weitem nicht alles über eine Zufallsvariable aussagen, sieht man an folgendem dritten Beispiel: nun wir eine unfaire Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{1000000}$ das Ergebnis „Kopf“ erzeugt und mit $1 - p = \frac{999999}{1000000}$ das Ergebnis „Zahl“. Bei „Zahl“ gewinnen Sie 1 Euro, im sehr unwahrscheinlichen Fall von „Kopf“ verlieren Sie jedoch satte 999.999 Euro. Die Zufallsvariable Z mit $\mathbb{P}(Z = 1) = 0.999999$ und $\mathbb{P}(Z = -999999) = 0.000001$ modelliert dieses Spiel. Es gilt

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1000000} \cdot (-999999) + \frac{999999}{1000000} \cdot 1 = 0,$$

und

$$\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{1000000} \cdot (999999 - 0)^2 + \frac{999999}{1000000} \cdot (1 - 0)^2 = 999999.$$

Erwartungswert und Varianz von Y und Z sind also völlig bzw. beinahe gleich²²⁾, trotzdem fühlen sich sicher das Spiel Y und das Spiel Z wieder anders an. Welches der beiden Spiele würden Sie lieber spielen?

Rechenregeln für die Varianz: Die Varianz kann auch mit Hilfe folgender Formel ausgerechnet werden:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X),$$

Vorfaktoren kann man also aus der Varianz herausziehen, muss sie dabei aber quadrieren; additive Konstanten kann man dagegen völlig ignorieren. Es ist eine sehr nützliche Übung, diese Formeln mit Hilfe der Eigenschaften des Erwartungswertes nachzurechnen!

Falls zwei Zufallsvariablen X und Y **unabhängig** sind (und in der Regel sonst nicht!), dann gilt

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Für mehrere **unabhängige** Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n gilt entsprechend

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Die Varianz einer Summe **unabhängiger** Zufallsvariablen ist also die Summe der Einzelvarianzen. Auch diese Rechenregel kann man (zumindest für zwei Zufallsvariablen) mit Hilfe der Rechenregeln des Erwartungswertes relativ leicht nachrechnen.

b) Stetige Zufallsvariable:

Alle besprochenen Rechenregeln, Eigenschaften und Intuitionen gelten genau so für stetige Zufallsvariable. Das einzige, was sich ändert, ist die Formel, nach der man den Erwartungswert ausrechnet. Sei also X eine stetige Zufallsvariable, und sei ρ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung von Y (also: $\mathbb{P}(Y \in [a, b]) = \int_a^b \rho(x) dx$). Dann ist der Erwartungswert von Y die Zahl

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x) dx.$$

Hier (und streng genommen auch schon bei diskreten Zufallsvariablen mit mehr als endlich vielen Werten) muss man aufpassen, dass das Integral auf der rechten Seite der Definition von $\mathbb{E}(Y)$ überhaupt existiert - das bedeutet, dass es nicht den Wert ∞ oder $-\infty$ oder (noch schlimmer) gar keinen vernünftigen Wert annimmt. Das kann durchaus vorkommen, wird uns aber bei den Anwendungen, die uns interessieren, nicht begegnen. Wir merken uns daher nur, dass man hier eigentlich immer überprüfen müsste, ob der Erwartungswert auch existiert, werden dies aber nie tun. Die gleichen Bemerkungen gelten sinngemäß auch für alle weiteren Integrale, die wir noch aufschreiben werden.

²²⁾durch etwas sorgfältigere Wahl von p kann man auch gleiche Varianz erreichen, das ist aber für dieses Beispiel gar nicht so wichtig

Für eine Funktion²³⁾ f von \mathbb{R} nach \mathbb{R} gilt analog zum diskreten Fall

$$\mathbb{E}(f(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(x) dx.$$

Die **Varianz** ist analog zu oben gegeben durch die Formel

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(Y))^2 \rho(x) dx$$

oder die alternative Formel

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx \right)^2.$$

Alle Rechenregeln gelten wie gesagt unverändert weiter, also sind wir mit dem Punkt „Erwartungswert“ nun fertig.

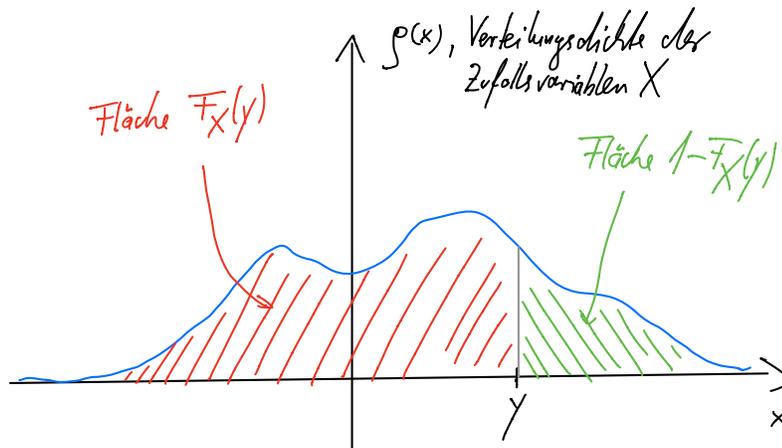
(6.12) Die Fläche unter einem Teil der Kurve: Verteilungsfunktionen, Median und Quantile

Definition Verteilungsfunktion: Sei X eine Zufallsvariable. Die **Verteilungsfunktion** F_X ist definiert durch

$$F_X(y) := \mathbb{P}(X \leq y),$$

ist also die Funktion, die zu einer Zahl $y \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit ausgibt, dass der Wert von X unterhalb von (oder auf) y liegt.

Besonders im Fall eine stetigen Zufallsvariable kann man die Verteilungsfunktion sehr gut visualisieren: im nebenstehenden Bild ist die Verteilungsdichte einer Zufallsvariablen X skizziert. $F_X(y)$ ist die Fläche unter der Kurve links von y , und da die Gesamtfläche gleich 1 ist, ist $1 - F_X(y)$ die Fläche rechts von y .



In Formeln ausgedrückt hat man also in diesem Fall $F_X(y) = \int_{-\infty}^y \rho(x) dx$. Daher gilt auch $F'_X(y) = \rho(y)$; die Verteilungsfunktion enthält als alle Informationen über die Verteilung der Zufallsvariable X .

Im Fall einer diskreten Zufallsvariablen ist die Verteilungsfunktion eine Sprungfunktion: wenn

²³⁾auch hier schummeln wir etwas: die Funktion sollte *messbar* sein - das ignorieren wir, nicht-messbare Funktionen muss man mit viel Aufwand konstruieren, sie kommen in der freien Wildbahn nicht vor

beispielsweise $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, dann ist

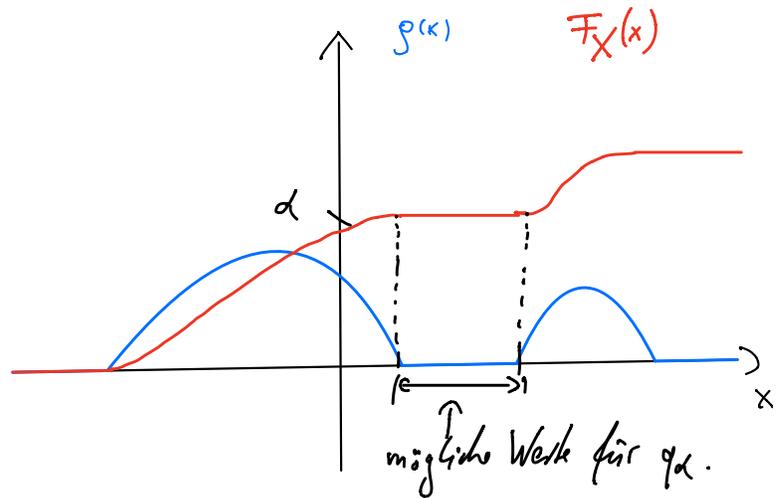
$$F_X(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < y < 0 \\ 1 - p & \text{für } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq y < \infty. \end{cases}$$

Quantile: Sehen wir uns zunächst wieder nur den Fall stetiger Zufallsvariablen mit Verteilungsdichte ρ an. Zu gegebenem $y \in \mathbb{R}$ sagt uns die Verteilungsfunktion $F_X(y)$, wie groß die Fläche unter der Kurve ρ links von y ist. Was aber, wenn wir die umgekehrte Frage stellen: wir hätten gerne, dass beispielsweise die Fläche links von y den Wert 0.1 hat, wie müssen wir y wählen? Mit anderen Worten, wie müssen wir y wählen, damit $F_X(y) = 0.1$ gilt?

Die Situation ist ähnlich wie wir sie bei der Behandlung von arcsin und arccos gesehen hatten: auch dort haben wir gefragt, welchen Wert x wir beispielsweise in die Sinusfunktion einsetzen müssen, damit $\sin(x) = 0.5$ gilt. Hier wie dort ist es zwar klar, dass es eine Antwort geben muss, aber sie ist nicht so leicht zu finden. Als Mathematiker stört uns das nicht, wir geben der Antwort einfach einen Namen (im Fall der Sinusfunktion eben $\arcsin(0.5)$) und sehen, wie wir damit weiterkommen. So machen wir das auch im Fall der Verteilungsfunktion:

Defintion α -Quantil für stetige Verteilungen: Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsdichte ρ , und sei $\alpha \in]0, 1[$. Ein α -**Quantil** der Verteilung von X ist jede Zahl q_α , für die gilt: $F_X(q_\alpha) = \alpha$.

Warum haben wir so vorsichtig formuliert (also „ein α Quantil ist jede Zahl...“)? Den Grund sehen wir in nebenstehender Abbildung: es ist durchaus erlaubt, dass die Verteilungsdichte an manchen Stellen gleich null ist. Dort steigt dann die Verteilungsfunktion nicht an, und daher gibt es mehrere mögliche Werte q_α , die alle $F_X(q_\alpha) = \alpha$ liefern. Wir lassen alle diese Werte als α -Quantile zu. In eigentlich allen in der Praxis wichtigen Fällen ist aber $\rho(x) > 0$ für alle x , und dann ist q_α eindeutig bestimmt.



Für allgemeine Verteilungsfunktionen kommt noch ein zusätzliches Problem hinzu: die oben für die Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ angegebenen Verteilungsfunktion hat beispielsweise Sprünge, es gibt daher etwa für $\alpha = \frac{(1-p)}{2}$ keinen Wert x mit $F_X(x) = \alpha$. Das zwingt uns zu einer etwas anderen Definition von Quantilen:

Defintion α -Quantil, allgemein: Ein α -Quantil einer Zufallsvariablen X ist jede Zahl q_α , für die gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq q_\alpha) \geq \alpha, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

Diese Definition ist intuitiv nicht so einfach wie die vorige, stimmt aber im Fall einer stetig verteilten Zufallsvariablen mit dieser überein (überprüfen Sie das!). Außerdem sollte sie Sie an die Definition der Quantile von Daten (siehe (5.6)) erinnern! Zum Glück ist wie gesagt für

Zufallsvariable der Fall von stetigen Verteilungen hier viel wichtiger. Außerdem sind Quantile fast immer tabelliert (oder der Computer berechnet sie), Sie müssen sie also fast nie von Hand ausrechnen.

Es gibt noch zwei weitere Vokabeln in diesem Zusammenhang: Ein $\frac{1}{2}$ -Quantil heißt auch **Median** der Zufallsvariablen X , und statt $(1 - \alpha)$ -Quantil sagt man manchmal auch **α -Fraktile**. Im Fall stetiger Zufallsvariable ist ein α -Fraktile f_α also so zu wählen, dass die Fläche unter ρ rechts von f_α den Wert α hat.

(6.13) Das Gesetz der großen Zahl

In Punkt (5.4) haben wir den Mittelwert $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ der Daten x_1, \dots, x_n kennengelernt. Andererseits haben wir für eine Zufallsvariable X den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ kennengelernt und behauptet, dass dieser etwas mit dem „mittleren“ Verhalten von X zu tun hat. Dies wollen wir nun genauer begründen.

Wir beginnen mit einem Beispiel. Sei X eine Bernoulli- p -Zufallsvariable, also $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. Wir erzeugen uns nun Daten, indem wir mit dem „zweiseitigen Würfel“, den X ja repräsentiert, n mal unabhängig voneinander würfeln. Technisch richtig betrachten wir also n unabhängige Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Bernoulli- p -Verteilung. Wenn wir nun mit allen diesen Zufallsvariablen einmal „gewürfelt“ haben, liegen uns n Daten x_1, \dots, x_n vor, und zwar ist $x_i \in \{0, 1\}$ für alle i . Was für ein Ergebnis würden wir erwarten, wenn wir den Mittelwert $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ dieser Daten bilden?

Zunächst einmal könnte es natürlich sein, dass $x_i = 1$ für alle i gilt - das ist aber nicht sehr wahrscheinlich, genauer gesagt gilt wegen der Unabhängigkeit

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \text{ für alle } i \leq n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n,$$

und beispielsweise für $n = 100$ und $p = 3/4$ ist $p^n = (3/4)^{100} \approx 3.2 \cdot 10^{-13}$. Es wird sicher eher darauf hinauslaufen, dass man eine Mischung von 1ern und 0ern erhält, wobei (wenn unsere Vorstellung des Wahrscheinlichkeitsmaßes irgend etwas taugt) herauskommen sollte, dass etwa pn der Daten den Wert 1 haben und $(1 - p)n$ den Wert 0. Im Beispiel mit $n = 100$ und $p = 3/4$ hätten also 75 Daten den Wert 1 und 25 den Wert 0. In diesem Fall hätte man

$$m = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = p = \mathbb{E}(X_1),$$

also ist in dieser „idealen“ Situation der Mittelwert der Daten genau gleich groß wie der Erwartungswert *einer* der zur Erzeugung der Daten benutzten Zufallsvariablen.

Natürlich tritt dieser ideale Fall eher selten ein - wenn Sie beispielsweise 100 mal eine faire Münze werfen, dann sollten Sie nicht zu sehr darauf wetten, dass Sie *genau* 50 mal „Kopf“ bekommen - allerdings auch nicht darauf, dass der Wert von „Kopf“ allzu weit von der Zahl 50 abweicht. In der Tat haben wir die Antwort auf die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit wie oft „Kopf“ auftritt, schon beantwortet - schauen Sie Bilder im Punkt (6.10) zur Binomialverteilung an, dort sehen Sie die relevanten Gewichtsfunktionen! Man sieht, unterhalb von 35 und oberhalb von 65 mal „Kopf“ ist diese Gewichtsfunktion sehr, sehr nahe an 0.

Wenn Sie statt 100 nun 10000 Würfe ausführen, dann verstärkt sich dieses Bild - Sie erwarten

nun (bei $p = 3/4$) circa 7500 mal die 1, gewisse Abweichungen sind möglich, aber diesmal stellen Sie fest, dass Sie mit extrem hoher Wahrscheinlichkeit zwischen ca. 7350 und 7650 Einsern haben. Zwar hat sich die Unsicherheit vergrößert (von $65 - 35 = 30$ auf $7350 - 7650 = 300$, also um den Faktor 10) aber nicht so stark wie die Anzahl der Versuche, die sich um den Faktor $10000/100 = 100$ vergrößert hat. Daher wird $\frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} x_i$ näher an $\mathbb{E}(X_1)$ dran sein als vorher. Das macht folgende Aussage zumindest plausibel:

Das Gesetz der großen Zahl: Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariable; die X_i sollen alle die gleiche Verteilung haben, und man soll $\mathbb{E}(X_1)$ bilden können. Wenn man nun durch „Würfeln“ mit den X_1, \dots, X_n die Daten x_1, \dots, x_n erzeugt, dann gilt mit (für große n) sehr hoher Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert dieser Daten ziemlich genau dem Erwartungswert einer der Zufallsvariablen²⁴⁾ entspricht. In Formeln:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx \mathbb{E}(X_1).$$

Die Approximation von $\mathbb{E}(X_1)$ wird um so besser, je größer man die Anzahl n der Versuche wählt.

Man kann sich in dieser Formulierung gut vorstellen, was das Gesetz der großen Zahl sagt, allerdings ist es mathematisch unbefriedigend, weil sehr schwammig formuliert. Für Sie reicht es zwar im Prinzip aus, das Gesetz der großen Zahl so wie oben erläutert zu verstehen, da wir aber alles gemacht haben, was nötig ist, um eine exakte mathematische Formulierung des Gesetzes zu geben, wollen wir das auch noch tun.

(Schwaches) Gesetz der großen Zahl, mathematische Formulierung:

Sei X eine Zufallsvariable für die $\mathbb{E}(X)$ existiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariable, und die Verteilung von X_i sei für alle i die gleiche wie die Verteilung von X . Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}(X)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Versuchen Sie zu verstehen, warum dieser Satz eine mathematische Präzisierung des oben genannten Gesetzes der großen Zahl ist - wenn Ihnen das gelingt, dürfen Sie zu Recht stolz sein auf Ihre Fähigkeit, mathematische Formeln zu lesen!

(6.14) Die Poissonverteilung

Man sagt, eine Zufallsvariable X habe die **Poissonverteilung zum Parameter** $\lambda > 0$, wenn gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = p_\lambda(k) := \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Poissonverteilung ist also ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Grundraum $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; man kann beweisen, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda)$ gilt, somit ist p_λ wirklich eine Gewichtsfunktion.

Man sollte sich natürlich fragen, warum wir uns für eine (scheinbar) so obskure Gewichtsfunktion interessieren. Die Antwort ist folgende: nehmen Sie an, Sie dürfen bei einem Gewinnspiel

²⁴⁾Da die Verteilung und daher auch der Erwartungswert für alle X_i gleich ist, ist es egal welche man nimmt

mitmachen: Sie dürfen mehrmals in unabhängigen Versuchen eine unfaire Münze werfen, auf deren einer Seite eine 1 und auf deren anderer eine 0 steht. Sie Gewinnen so viele Tausend Euro, wie Sie Einser erzielt haben. Leider hat die Münze eine sehr, sehr kleine Wahrscheinlichkeit p (beispielsweise $p = 1/10000$), eine 1 zu erzeugen. Zum Ausgleich dürfen Sie aber n (z.B. $n = 500$) Versuche machen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie in diesem Spiel genau k Erfolge erzielen?

Die Antwort kennen wir eigentlich schon. Wenn X_i den i -ten Münzwurf modelliert, so ist die Anzahl $N = \sum_{i=1}^n X_i$ der Erfolge binomialverteilt, also ist

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Leider kann man mit diesem Ausdruck scheinbar nicht wirklich sehr viel anfangen, denn die Binomialkoeffizienten sind für große n und halbwegs große k nicht leicht auszurechnen. Immerhin können wir ausrechnen, dass $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n p = pn$ ist.

Man kann jedoch beweisen (wir können das allerdings im Rahmen dieser Vorlesung nicht!), dass die Zahl $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ für kleine p und große n sehr nahe an der Zahl $\exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ mit $\lambda = pn$ dran ist. Mathematisch formuliert: wenn man eine Folge von immer kleineren Wahrscheinlichkeiten p_n und eine andere Folge von immer größer werdenden Anzahlen n von Versuchen hat, und zwar so, dass das Produkt np_n gegen eine Zahl $\lambda > 0$ konvergiert, dann konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $a_n := \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert $a = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$. Dies ist eine viel schönere Formel, die für große n auch sehr genau stimmt, und daher kommen wir zu folgendem

Merksatz: Wenn man sehr viele (nämlich n) unabhängige Versuche mit einer sehr kleinen Erfolgswahrscheinlichkeit p machen darf, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau k Erfolge zu erzielen, in sehr guter Näherung durch die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = pn$ beschrieben.

In unserem Beispiel wäre der Parameter dann $\lambda = \frac{1}{10000} \cdot 500 = \frac{1}{20}$, damit wäre die Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn (mit Hilfe der Poissonverteilung ausgerechnet) gleich $p_{1/20}(0) = e^{-1/20} \approx 0.9512294$. Der exakte Wert der Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn kann hier noch leicht ausgerechnet werden und ist gleich $(1 - p)^{500} = (9999/10000)^{500} \approx 0.9512270$. Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Gewinn ist nach der Poissonverteilung gleich

$$p_{1/20}(1) = e^{-1/20} \left(\frac{1}{20}\right)^1 / 1! = e^{-1/20} \frac{1}{20} \approx 0.047561,$$

der exakte Wert ist $500 \cdot p(1 - p)^{499} \approx 0.047566$. Die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Gewinne ist

$$p_{1/20}(2) = e^{-1/20} \left(\frac{1}{20}\right)^2 / 2! = e^{-1/20} \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.001189,$$

und der exakte Wert ist

$$\frac{500 \cdot 499}{2} \cdot p^2 (1 - p)^{498} \approx 0.01186.$$

Beispiel: In Deutschland sterben pro Jahr im Durchschnitt 4 Menschen durch Blitzschlag. Eine Versicherung möchte wissen, wie wahrscheinlich es ist, dass im kommenden Jahr 8 oder mehr Menschen durch Blitzschlag sterben. Sie modelliert die Situation so, als ob jeder der

$n = 84.000.000$ Deutschen einmal pro Jahr „eine Münze werfen“ müsste, die eine „Erfolgswahrscheinlichkeit“ von $p = 4/84.000.000$ hat. Im „Erfolgsfall“ stirbt diese Person durch Blitzschlag. Die Wahrscheinlichkeit, dass k Menschen durch Blitzschlag sterben, ist somit durch eine Poissonverteilung mit Parameter $np = 4$ gegeben. Wenn N die zufällige Anzahl der durch Blitzschlag getöteten Menschen beschreibt, dann gilt also

$$\mathbb{P}(N \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(N \leq 7) = 1 - \sum_{k=0}^7 p_4(k) = 1 - e^{-4} \sum_{k=0}^7 \frac{4^k}{k!} \approx 0.051.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also etwas mehr als 5 %.

(6.15) Die Normalverteilung

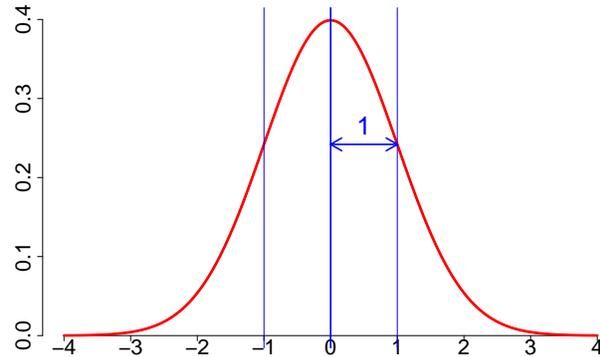
Kommen wir nun zur wichtigsten Verteilung überhaupt. Dies ist die Normalverteilung. Wir beginnen mit der

Standard-Normalverteilung: Eine Zufallsvariable X ist **standard-normalverteilt**, wenn ihre Verteilungsdichte durch

$$\rho_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

gegeben ist.

Warum die Normalverteilung so wichtig ist, sehen wir erst im nächsten Punkt - hier wollen wir sie zunächst besser kennen lernen. Die Formel für die Dichte ist nicht die einfachst denkbare, aber in diesem Fall müssen wir uns dringend mit ihr beschäftigen. Zur Veranschaulichung ist die Dichte $\rho_{0,1}$ auf der rechten Seite abgebildet. Man sieht, dass $\rho_{0,1}$ außerhalb von etwa dem Intervall $[-3.5, 3.5]$ fast gleich 0 ist, daher ist also $\mathbb{P}(|X| > 3.5) \approx 0$ für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.



Da die Kurve $\rho_{0,1}$ achsensymmetrisch zur y -Achse ist, gilt mit der Regel „Wahrscheinlichkeit eines Intervalls ist Fläche unter der Kurve“:

$$\mathbb{P}(X \leq c) = \mathbb{P}(X \geq -c) = 1 - \mathbb{P}(X < -c) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -c).$$

Diese Formel werden wir später noch einmal brauchen. Der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ hat keine besondere Bedeutung - es ist einfach genau die Zahl, die man nehmen muss, damit die Fläche unter der Kurve ρ genau 1 ist. Ein Teil der Bedeutung der Normalverteilung kommt daher, dass sie trotz ihrer etwas unhandlichen Form einige sehr schöne Eigenschaften hat. Bevor wir diese besprechen, brauchen wir jedoch die

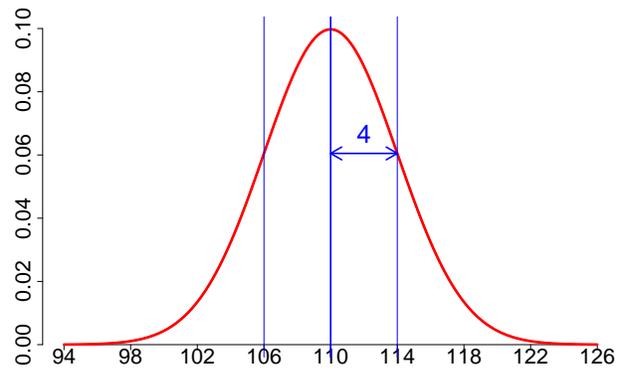
Allgemeine Normalverteilung mit Mittelwert m und Varianz σ^2 : Eine Zufallsvariable Y ist normalverteilt mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\rho_{\mu,\sigma^2} := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

gegeben ist. Die Zahl $\sigma > 0$ heißt auch **Standardabweichung** von X .

Im Vergleich zu $\rho_{0,1}$ hat sich bei ρ_{μ,σ^2} folgendes verändert:

- Der „Mittelpunkt“ (besser: Symmetriepunkt) der Kurve liegt nun bei μ statt bei 0.
- Die Kurve ist flacher und breiter falls $\sigma^2 > 1$, oder höher und spitzer falls $\sigma^2 < 1$.
- Der Vorfaktor wurde angepasst, damit immer noch die Fläche 1 herauskommt.



Ein Beispiel mit den Werten $\mu = 110$ und $\sigma = 4$ finden Sie rechts. Man sieht, dass sich „bis auf die Achsenbeschriftung“ (die aber natürlich sehr wichtig ist!) nicht viel verändert hat. Beachten Sie jedoch, dass die „Verbreiterung“ der Kurve mit dem Faktor σ (der Standardabweichung), nicht mit der Varianz σ^2 passiert.

Wenn X eine Normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 ist, dann schreiben wir das mittels der Formel $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Die angekündigten wichtigen Rechenregeln für die Normalverteilung sind folgende:

a) Reduktion auf Standard-Normalverteilung: Wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dann ist $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Man kann also jede Normalverteilung X auf die Standard-Normalverteilung zurückrechnen, indem man von den Werten $X(\omega)$, die herauskommen, den Mittelwert μ abzieht uns das Ergebnis dann noch durch die Wurzel aus der Varianz (also durch die Standardabweichung σ) teilt. Wir werden das später gleich noch mal brauchen.

b) Summen von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen sind wieder normalverteilt:

Seien $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, und seien X und Y unabhängig. Dann ist $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

In Worten: bei unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen ist die Summe wieder normalverteilt, die Mittelwerte und die Varianzen addieren sich einfach. Diese Eigenschaft ist überhaupt nicht selbstverständlich, erinnern Sie sich etwa daran dass die Summe von zwei 6-seitigen Würfeln (Gleichverteilungen) keine Gleichverteilung mehr ist.

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung: Eine Unannehmlichkeit der Dichte $\rho_{0,1}$ der Standard-Normalverteilung ist es, dass es für die Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(y) dy$ keine explizite Formel gibt. Da die Normalverteilung aber so wichtig ist, hat man dafür ein Symbol eingeführt:

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy$$

bezeichnet die Verteilungsfunktion einer Standard-normalverteilten Zufallsvariable X , also $\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Die Funktion Φ ist tabelliert (und in das Programm R eingebaut), das Auslesen von

$\Phi(x)$ aus den entsprechenden Tabellen lernen wir im Beispiel weiter unten. Eine ganz wichtige Eigenschaft von Φ folgt aus der Symmetrie der Standardnormalverteilung: da die Kurve $\rho_{0,1}$ spiegelsymmetrisch bezüglich der y -Achse ist, ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Fläche links von x genau gleich groß wie die Fläche rechts von $-x$. Es gilt daher

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

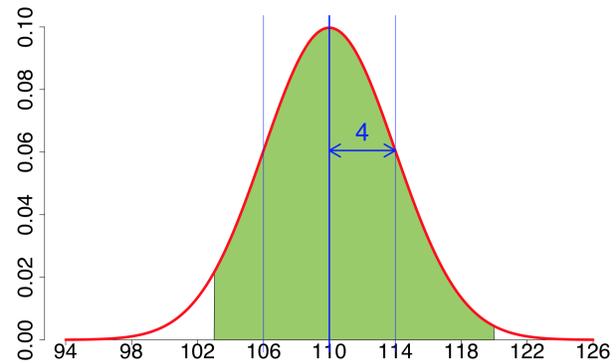
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Um nun $\mathbb{P}(Y \leq x)$ für eine Zufallsvariable $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ zu berechnen, benutzen wir Regel a):

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

wobei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. So kann also durch die Funktion Φ die Verteilungsfunktionen aller Normalverteilungen ausdrücken.

Beispiel: Die Größe Y von fünfjährigen Mädchen ist normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 110$ (cm) und Standardabweichung $\sigma = 4$ (cm). Wie wahrscheinlich ist es, dass ein zufällig ausgewähltes fünfjähriges Mädchen mindestens 103 und höchstens 120 cm groß ist? Mit anderen Worten, wie groß ist die Fläche $\int_{103}^{120} \rho_{110,16}(x) dx$, die rechts abgebildet ist? Um diese Fläche zu berechnen, gehen wir in drei Schritten vor:



1) Wir schreiben sie als Differenz von zwei Flächen links von einer Zahl, da wir dann Verteilungsfunktionen benutzen können:

$$\int_{103}^{120} \rho_{110,16}(x) dx = \int_{-\infty}^{120} \rho_{110,16}(x) dx - \int_{-\infty}^{103} \rho_{110,16}(x) dx = \mathbb{P}(Y \leq 120) - \mathbb{P}(Y \leq 103).$$

2) Wir rechnen die $\mathcal{N}(110, 16)$ -verteilte Zufallsvariable Y auf eine standard-normalverteilte Zufallsvariable X zurück:

$$\mathbb{P}(Y \leq 120) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{120 - 110}{4}\right) = \mathbb{P}(X \leq 2.5) = \Phi(2.5),$$

und

$$\mathbb{P}(Y \leq 103) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{103 - 110}{4}\right) = \mathbb{P}(X \leq -1.75) = \Phi(-1.75),$$

und daher

$$\mathbb{P}(103 \leq Y \leq 120) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.75)$$

3) Wir schauen die Werte von Φ in der relevanten Tabelle nach (oder fragen den Computer): in der Tabelle ist die zweite Nachkommastelle jeweils als Spalte gegeben, hier also $\Phi(2.5) = 0.9938$. Die Zahl -1.75 kommt dagegen in der Tabelle nicht vor. Hier benutzen wir die Symmetrie: $\Phi(-1.75) = 1 - \Phi(1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Insgesamt erhalten wir also

$$\mathbb{P}(103 \leq Y \leq 120) = 0.9938 - 0.0401 = 0.9537$$

Ca. 95 % aller fünfjährigen Mädchen haben also (falls unsere Annahme stimmt) eine Größe zwischen 103 und 120 cm.

(6.16) Der zentrale Grenzwertsatz

Der Grund, warum normalverteilte Zufallsvariable die wichtigsten überhaupt sind, ist der zentrale Grenzwertsatz. Wir formulieren ihn in einer eher intuitiven und dann in einer mathematisch strengen Version:

Zentraler Grenzwertsatz, intuitive Version: Die Zufallsvariable X soll ein zufälliges Geschehen modellieren, das auf folgende Weise zustande kommt:

- Der Wert von X ist die Summe vieler kleiner zufälliger Effekte Y_1, \dots, Y_n , also $X = Y_1 + \dots + Y_n$.
- Die einzelnen Y_n sind unabhängig und etwa alle gleich wichtig. Das bedeutet, dass kein einziges Y_n alleine einen wesentlichen Einfluss auf die Größe von X hat.
- $\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i)$ bezeichne den Erwartungswert von X , und $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i)$ (letzte Gleichheit wegen Summenformel der Varianz bei Unabhängigkeit) bezeichne die Varianz von X , von der wir annehmen, dass sie $< \infty$ ist.

In diesem Fall gilt in sehr guter Näherung für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leq a) \approx \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx,$$

Eine solche Zufallsvariable X ist also näherungsweise normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 .

Die mathematische Version benutzt den Begriff des Grenzwertes; deswegen müssen wir die Zufallsvariablen Y_i so wählen, dass der Mittelwert μ und die Varianz σ^2 nicht gegen unendlich gehen, wenn n gegen unendlich geht. Den allgemeineren Fall der intuitiven Version kann man

durch sogenannte Reskalierung aus dem Spezialfall wiederherstellen, man muss dann aber sehr gut aufpassen, in welchem Sinne die Zufallsvariable X einer Normalverteilung ähnlich ist - wir gehen darauf nicht weiter ein. Betrachten Sie die mathematische Version lediglich als (eventuell) interessante Zusatzinformation, für Sie ist die intuitive Version des zentralen Grenzwertsatzes wichtiger.

Zentraler Grenzwertsatz, mathematische Version: Seien $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei folgende Situation gegeben:

- Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n seien unabhängig.
- Für alle $i \leq n$ gilt $\mathbb{E}(Y_i) = \frac{\mu}{n}$ und $\mathbb{V}(Y_i) = \frac{\sigma^2}{n}$.
- Wir interessieren uns für die Summe $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ der zufälligen Beobachtungen Y_i .

In diesem Fall gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Diesen Satz können wir mit Hilfe der uns zur Verfügung stehenden Mittel nicht beweisen; was wir aber tun können ist nachzurechnen, dass X_n zumindest den richtigen Erwartungswert und die richtige Varianz hat:

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu}{n} = \mu,$$

und (wegen der Rechenregeln der Varianz bei unabhängigen Zufallsvariablen):

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2.$$

Beispiel 1: Ein kleines Teilchen (Bakterium oder Pollen) schwimmt auf einer Flüssigkeit. Durch zufällige Zusammenstöße mit den Molekülen der Flüssigkeit wird es hin und hergetrieben (der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die beiden Richtungen links und rechts). Die Stöße sind alle unabhängig voneinander, und die resultierenden Verschiebungen Y_i des Teilchens haben Mittelwert (Erwartungswert) 0. In diesem Fall ist dann die Verteilung des Aufenthaltsortes $\sum_{i=1}^n Y_i$ des Teilchens eine Normalverteilung mit Mittelwert 0.

Beispiel 2: Normalapproximation der Binomialverteilung: Eine Münze mit Gewinnwahrscheinlichkeit p wird n mal geworfen. Das Modell sind also n unabhängige Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n mit $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 1 - p$. Der Gesamtgewinn $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ ist also binomialverteilt, es gilt

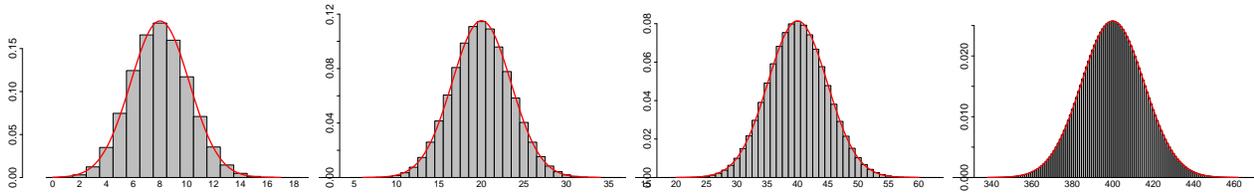
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^n p = pn,$$

und

$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Y_i) = \sum_{i=1}^n ((1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p)) = n(1-p)p.$$

In den Diagrammen unten sehen Sie die Gewichtsfunktion der Binomialverteilung für $p = 0.4$ und $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$ bzw. $n = 1000$, und jeweils im gleichen Diagramm die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert pn und Varianz $np(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeiten, dass

X in einem Bereich $[a, b]$ liegt, sind in beiden Fällen die Flächen unter der Kurve über dem Intervall $[a, b]$. Die sehen die sehr gute Übereinstimmung für große n .



Wenn Sie also wissen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit (mit der obigen Notation) $X_n \leq b$ für eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ ist, dann gehen Sie so vor:

- a) Sie berechnen $\mu = \mathbb{E}(X) = pn$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_n) = np(1 - p)$.
- b) Sie benutzen die Normalapproximation und bekommen

$$\mathbb{P}(X_n \leq b) \approx \mathbb{P}(Z \leq b + 1/2),$$

wobei Z eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 ist. Hier wurde die sogenannte „Stetigkeitskorrektur“ angewandt: man kann beweisen, dass die Normalapproximation noch ein wenig verbessert wird, wenn man statt $\mathbb{P}(Z \leq b)$ eben durch $\mathbb{P}(Z \leq b + 1/2)$ approximiert. Anschaulich bedeutet diese Approximation, dass man den Balken, der zu $\mathbb{P}(X_n = b + 1)$ gehört, noch „zur Hälfte mitapproximiert“. Wir werden unten noch sehen, dass der dadurch erzielte Gewinn an Genauigkeit meist sehr klein ist, trotzdem nehmen wir ihn mit.

c) Wir erinnern uns, dass wir in (6.15) die Formel $\mathbb{P}(Z \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ gefunden hatten. Angewendet auf $x = b + 1/2$ erhalten wir als Ergebnis

$$\mathbb{P}(X_n \leq b) \approx \mathbb{P}(Z \leq b + 1/2) = \Phi\left(\frac{b + 1/2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b + 1/2 - pn}{\sqrt{np(1 - p)}}\right).$$

d) Damit diese Approximation etwas taugt, muss n und p so gewählt sein, dass $np(1 - p)$ nicht zu klein ist (ein Wert von ca. 10 oder größer wäre schon wünschenswert). Der Faktor $1/2$, der zur Stetigkeitskorrektur gehört, entspricht dann einer Verschiebung der Auswertungsstelle von Φ um höchstens $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \approx \frac{1}{6}$. In diesem Grenzfall trägt die Stetigkeitskorrektur durchaus noch etwas zur Qualität der Approximation bei. In sehr vielen Fällen ist aber eher $np(1 - p) \approx 100$, und dann verschiebt die Stetigkeitskorrektur die Auswertungsstelle nur mehr um ca. $1/60$, was kaum mehr einen Unterschied macht.

7. Schließende Statistik

(7.1) Die Grundfrage: welcher Würfel?

a) **Beispiel:** Wir beginnen wieder mit einem Gewinnspiel. Der Spielleiter hat zwei Würfelbecher, in einem befindet sich ein paar 6-seitiger Würfel, in einem anderen ein einziger 11-seitiger Würfel, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen von 2 bis 12 anzeigt. Der Spielleiter nimmt nun einen der Becher, würfelt, und sagt Ihnen das Ergebnis - im Falle der beiden 6-seitigen Würfel sagt er die Augensumme. Ihre Aufgabe ist es, zu erraten, welchen der beiden Becher er zum Würfeln benutzt hat.

Nehmen wir an, es wurde eine 4 gewürfelt - sollten Sie lieber auf den 11-seitigen Würfel oder auf das Würfelpaar tippen? Eine Idee, um hier eine Antwort zu finden, ist es, sich zu überlegen, wie wahrscheinlich eine 4 in beiden Szenarien ist. Im Falle eines 11-seitigen Würfels kommt die 4 mit Wahrscheinlichkeit $1/11$, im Falle eines Würfelpaares kommt sie in den Fällen $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ also mit Wahrscheinlichkeit $3/36 = 1/12$. Sie sollten also vermutlich lieber auf den 11-seitigen Würfel tippen.

Beachten Sie aber, dass die Aussage „Ich habe eine 4 gesagt bekommen, daher ist es wahrscheinlicher, dass der 11-seitige Würfel benutzt wurde“ nicht ganz richtig ist: denn in dem Moment, wo Sie die 4 gesagt bekommen, liegt ja schon fest, mit welchem Becher gewürfelt wurde; die Wahrscheinlichkeit (aus Sicht eines allwissenden Beobachters), dass das Würfelpaar benutzt wurde, ist also entweder 0 oder 1. Der ganze Punkt an der Sache ist jedoch, dass Sie eben kein allwissender Beobachter sind; wenn Ihre Strategie gut ist (und wir werden gleich noch sehen, unter welchen Bedingungen das der Fall ist), dann sollten Sie bei sogar sehr häufiger Wiederholung des Spieles mit der Strategie „bei einer 4 tippe ich auf den einzelnen Würfel“ auf Dauer öfter gewinnen als verlieren.

Genau so können Sie für jedes andere Ergebnis festlegen, was Sie raten wollen: in der Tabelle unten ist p_1 die Gewichtsfunktion für den einen Würfel und p_2 die für die zwei Würfel.

Ergebnis:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_1	$\frac{1}{11}$										
p_2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Sie sollten also bei 2, 3, 4, 10, 11, 12 auf den 11-seitigen Würfel tippen, und bei den anderen Zahlen auf das Würfelpaar. Die Entscheidungsregel ist ein Beispiel für den sogenannten **Maximum-Likelihood-Schätzer**, den wir weiter unten noch allgemeiner kennenlernen werden. Die Grundidee ist extrem einfach: Sie haben Daten x vorliegen, und haben mehrere zufällige Mechanismen (z.B. repräsentiert durch Gewichtsfunktionen) zur Auswahl, mit deren Hilfe x „erwürfelt“ worden sein könnte. Sie entscheiden sich für den Mechanismus, dessen Gewichtsfunktion (hier auch „Likelihood“ genannt) an der Stelle x größer ist als alle anderen (bei Unentschieden treffen Sie irgend eine Wahl).

b) **Bayes'sche und Nicht-Bayes'sche Statistik:** Es ist wichtig zu verstehen, dass es unter den Annahmen, die wir gemacht haben, keine Garantie gibt, dass unser Auswahlmechanismus etwas taugt. Nehmen Sie zum Beispiel an, dass der Spielleiter an diesem Tag beschließt, immer mit dem Würfelpaar zu würfeln (das wissen Sie aber natürlich nicht). Dann ist natürlich jede

Strategie, die auf den 11-seitigen Würfel tippt, schlecht. Umgekehrt stimmt das aber auch, wenn der Spielleiter immer den 11-seitigen Würfel nimmt, ist jede Strategie, die auf das Würfelpaar tippt, schlecht.

Anders sieht es aus, wenn man weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Spielleiter welchen Würfelbecher wählt. Nehmen Sie beispielsweise an, der Spielleiter wirft vor dem Würfeln eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ auf „Kopf“ fällt. In diesem Fall wählt er das Würfelpaar, sonst den 11-seitigen Würfel. Bezeichne mit A das Ereignis, dass die Münze auf „Kopf“ fällt, also dass das Würfelpaar benutzt wurde, und B das Ereignis, dass eine 4 gewürfelt wurde. Dann gilt mit der Bayes'schen Formel:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)} = \frac{1/12 \cdot 3/4}{1/12 \cdot 3/4 + 1/11 \cdot 1/4} \approx 0.73.$$

Da $0.73 > 0.5$ ist, sollte man also unter diesen Annahmen auf das Würfelpaar tippen. Dies ist ein Beispiel für die sogenannte *Bayes'sche Statistik*, die auf der Annahme beruht, dass man weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit welcher Zufallsmechanismus „ausgewählt“ wurde. Da man hier stärkere Annahmen hat, hat man natürlich auch stärkere Ergebnisse - man weiß in unserem Beispiel sicher, dass es besser ist, bei einer 4 auf zwei Würfel zu setzen, und kann sogar angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich in diesem Fall irrt (nämlich mit $1 - 0.73 = 0.27$). Da man oft aber eben nicht weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit welcher Mechanismus benutzt wurde, werden wir uns im Folgenden vor allem mit der Nicht-Bayes'schen Statistik beschäftigen. Wir merken uns, dass es hier grundsätzlich *nicht* möglich ist, im konkreten Fall zu sagen, wie gut eine gewählte Strategie ist, die aus den Daten auf den verwendeten Würfel schließt. Wenn wir sorgfältig sind, können wir aber trotzdem gute von schlechten Strategien unterscheiden, und wie wir das machen, wird Thema des restlichen Teils der Vorlesung sein.

c) Datensätze von unabhängigen Experimenten: Im Beispiel a) oben hatten wir nur eine Zahl gegeben, aufgrund derer wir raten sollten, welcher Würfel benutzt wurde. Hier wird es uns natürlich recht oft passieren, dass wir falsch liegen. Anders sieht es schon aus, wenn der Spielleiter mit dem von ihm gewählten Becher zwei mal würfelt und uns beide Ergebnisse mitteilt. Wird uns beispielsweise eine 4 und eine 3 mitgeteilt, dann rechnen wir nach, dass die Wahrscheinlichkeit, diese Zahlen mit einem Würfelpaar zu erzielen, gleich

$$\mathbb{P}_{\text{paar}}(\{(4, 3)\}) = \mathbb{P}_{\text{paar}}(\{4\})\mathbb{P}_{\text{paar}}(\{3\}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{216},$$

während die Wahrscheinlichkeit, dies bei einem 11-seitigen Würfel zu finden, gleich $\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{121}$ ist. Im Vergleich zu vorher (W'keit $1/12$ bzw. $1/11$) sieht es also so aus, als könnten wir uns nun wesentlich sicherer sein, das der einzelne Würfel verwendet wurde. Natürlich kann das auch anders ausgehen - wenn wir beispielsweise eine 3 und eine 7 gesagt bekommen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Paar gleich $\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$ und die für den Einzelwürfel gleich $1/121$, also sehr ähnlich. Das liegt daran, dass wir in diesem Fall widersprüchliche Informationen erhalten - die 7 spricht eher für das Würfelpaar, die 3 eher für den Einzelwürfel.

Allerdings verbessert sich die Situation weiter, wenn man vom Spielleiter das Ergebnis von 3, 4, 5 oder allgemein von n Würfeln (immer mit dem gewählten Becher) mitgeteilt bekommt. Der Grund ist, dass widersprüchliche Ergebnisse seltener werden - für große n wird in der Regel den Datensatz für das Würfelpaar ziemlich sicher daran erkennen, dass in ihm die mittelgroßen Zahlen viel häufiger vorkommen als die großen oder die kleinen, außer man hat „einen

rabenschwarzen Tag erwischt“ und das Würfelpaar verhält sich durch einen unglücklichen Zufall so, dass es wie ein 11-seitiger Würfel aussieht. Da dies aber selten passiert, kann man aus Datensätzen mit vielen unabhängigen Daten mit viel größerer Sicherheit vorhersagen, welcher Würfel benutzt wurde.

Aus diesem Grund werden uns im Rest des Kapitels fast ausschließlich Datensätze vom Typ (x_1, \dots, x_n) mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ begegnen, von denen wir meist annehmen, dass sie das Ergebnis von unabhängig durchgeführten Experimenten des gleichen Typs sind. Versuchen Sie in den Beispielen im nächsten Abschnitt, diese Datensätze zu identifizieren!

(7.2) Beispiele

a) Tomatensamen:

Wir erinnern uns an Beispiel (5.2 b): in einer der Petrischalen werden je 100 Samen unter einer gegebenen Umweltbedingung (wählen wir hier konkret ABS-Säure) angesetzt. Es wird beobachtet, wie viele davon keimen. Als Modell für diesen (in der Natur natürlich recht komplexen) Vorgang wählt man einen Münzwurf: jeder Samen in der Petrischale „wirft eine Münze“, deren Erfolgswahrscheinlichkeit p von der gewählten Umweltbedingung abhängt. Wenn die Münze ein „Kopf“ ergibt, dann keimt der Samen, sonst nicht. Im Kontext von Beispiel (7.1) haben wir daher einen Spielleiter, der eine (ihnen unbekannte) Zahl p wählt, und Ihnen dann 100 Ergebnisse eines Münzwurfes mit einer Münze der Erfolgswahrscheinlichkeit p zur Verfügung stellt. Es gibt dann zwei Grundaufgaben:

(i): Sie sollen p so gut wie möglich erraten. Zusätzlich sollen Sie angeben, wie sicher Sie sich sind, dass das von Ihnen geratene p nicht zu sehr von dem wahren (vom Spielleiter gewählten) Parameter abweicht.

(ii): Sie wissen (aus anderen Gründen), dass für eine Schale mit ABS $p = 0.4$ sein muss, es keimen aber 50 % aller Samen. Wie sicher können Sie sich sein, dass sich in der Schale *keine* Lösung mit ABS befindet?

b) Geburten:

In Frankfurt a.M. wurden im Jahr 2001 insgesamt 6153 Geburten registriert, davon 3240 männliche und 2913 weibliche. Können Sie aufgrund dieser Datenlage eine der folgenden Vermutungen bestätigen? Falls ja, können Sie angeben, wie sicher Sie sich über ihre jeweilige Aussage sein können?²⁵⁾

(i): Die Geburt eines männlichen und die eines weiblichen Babys findet *nicht* mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt.

(ii): Die Geburt eines männlichen Babys ist *wahrscheinlicher* als die eines weiblichen Babys.

Wie sieht es aus, wenn Sie eine größere Datenbasis heranziehen, etwa die deutschlandweiten Geburten mit 377586 männlichen und 356889 weiblichen Babys?

Übrigens: obwohl der Unterschied zwischen Aussage (i) und Aussage (ii) gering zu sein scheint, werden wir feststellen, dass er wichtige Konsequenzen hat.

c) Tierversuche: Fallzahlplanung

²⁵⁾Auch hier wie im oberen Beispiel gehen wir von dem mathematischen Modell aus, dass bei der Zeugung eine Münze mit Wahrscheinlichkeit p für „Zahl“ geworfen wird, und dass bei „Kopf“ ein weibliches und bei „Zahl“ ein männliches Embryo entsteht.

Bei vielen Tierversuchen möchte man herausfinden, wie giftig eine Substanz ist, indem man Versuchstieren so lange immer mehr von dieser Substanz verabreicht, bis sie sterben. Man bezeichnet dann etwa als LD50 (LD steht für „lethale Dosis“) die Dosis, bei der 50 % der Versuchstiere gestorben sind. Schon aus ethischen Gründen möchte man die Anzahl der Versuchstiere hierbei so klein wie möglich halten, andererseits möchte man aber belastbare Aussagen darüber haben, wie groß die Giftigkeit wirklich ist; nimmt man zu wenige Versuche, so kann man nie ausschließen, dass man aufgrund eines zufällig aufgetretenen Effektes (z.B. besonders viele außergewöhnlich robuste Versuchstiere) hier falsche Schlüsse zieht. Die Fallzahlplanung erlaubt es, schon im Voraus die Größe eines Versuches zu planen, wenn man vorgibt, welche Qualität die Ergebnisse schließlich haben sollen.

d) Trauerschnäpper:

In einem Versuch soll geklärt werden, ob der Magnetsinn der Zugvögel davon abhängt, welcher Lichtfarbe die Tiere ausgesetzt sind. Hierzu lässt man insgesamt 17 Vögel einmal in blauem und einmal in grünem Licht unter ansonsten gleichen Bedingungen losfliegen. Bei jedem Vogel wird die Treffsicherheit bei blauem Licht mit der bei grünem Licht verglichen. Man möchte wissen, ob man aus den erzielten Ergebnissen schließen darf, dass die Lichtfarbe einen Einfluss auf die Orientierungsfähigkeit der Vögel hat.

e) Hipparion:

Das Hipparion ist eine Vorform des Pferdes, die vor etwas weniger als 1 Million Jahren ausstarb. Ihnen liegen Backenzahnfunde dieses Tieres vor, und zwar aus zwei verschiedenen Zeitaltern: der eine Satz Zähne ist ca. 4 Millionen Jahre alt und stammt vom *Hipparion africanum*, der andere ist ca. 2.5 Millionen Jahre alt und stammt vom *Hipparion lybicum*. Kilmadaten legen nahe, dass diese Zeiträume von recht unterschiedlichen Klimata geprägt waren, so dass das *Hipparion africanum* vermutlich Laubfresser, das *Hipparion lybicum* dagegen Grasfresser war. Sie stellen die These auf, dass dieser Wandel der Ernährung sich auch in der Länge der Zähne wiederfinden lässt: durch das härtere Gras werden die Zähne schneller abgenutzt, daher sind längere Zähne ein Evolutoinsvorteil. Sie haben 39 Zähne des *Hipparion africanum* und 38 Zähne des *Hipparion lybicum* vorliegen. Können Sie anhand der Längen dieser Zähne ihre These bestätigen, dass *Hipparion lybicum* längere Zähne hatte als *Hipparion africanum*?

f) Kuhstärling:

Der Kuhstärling ist der einzige Brutparasit auf dem amerikanischen Kontinent. Er legt seine Eier unter anderem in Nester des *Oropendula*. Hierbei ist interessant, dass die Eier des Kuhstärlings auch in solchen Fällen nicht aus den Nestern der *Oropendula* entfernt werden, wo sie von diesen recht deutlich zu unterscheiden sind.

Als Grund kann man vermuten, dass die Anwesenheit von Kuhstärlingen im Nest die Jungen des *Oropendula* vor anderen Parasiten, nämlich den Larven der Dasselfliege, schützt. Um diese Vermutung zu untermauern, wurden Nester auf den Befall mit Dasselfliegenlarven untersucht. Von 17 Nestern mit 2 Kuhstärling-Eiern war 1 Nest befallen, von 13 Nestern mit einem Kuhstärling-Ei waren 2 befallen, und von 18 Nestern ohne Kuhstärling-Eier waren 16 befallen. Es scheint aus den Daten schon klar zu sein, dass hier ein Zusammenhang bestehen muss, aber können wir auch wirklich ausschließen (oder uns zumindest ziemlich sicher sein), dass es nicht daran liegt, dass wir zufällig „untypische“ Nester erwisch haben? Mit anderen Worten: können wir

die Gegenbehauptung, dass die Zufallsvariablen „Anzahl der Kuhstärling-Eier im Nest“ und „Das Nest ist von Dasselfliegenlarven befallen“ unabhängig voneinander sind?

(7.3) Schätzer: wichtige Beispiele

Die einfachste Technik, um „den benutzten Würfel zu erraten“, sind Schätzer. Dies sind Funktionen, die die vorliegenden Daten als Eingabe bekommen und einen der benutzten Würfel (oder zumindest ein Merkmal des benutzten Würfels, siehe unten) als Ergebnis liefern. Dieses Ergebnis ist dann unsere (hoffentlich gute) Schätzung für den wirklich benutzten Würfel, wir machen aber keinerlei Aussage darüber, wie gut unsere Schätzung wirklich ist. Einige Beispiele:

a) Der Mittelwertschätzer: Zu den Daten x_1, \dots, x_n ist der Mittelwertschätzer einfach durch

$$M(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

gegeben, also genau der empirische Mittelwert der Daten.

Wenn wir annehmen, dass die Daten x_1, \dots, x_n dadurch entstanden sind, dass mit einem durch eine Zufallsvariable X modellierten Würfel n -mal gewürfelt wurde, dann können wir aufgrund des Gesetzes der großen Zahl hoffen, dass $M(x_1, \dots, x_n)$ vernünftig nahe an $\mathbb{E}(X)$ ist. Mit anderen Worten: in jeder Situation, wo der Spielleiter eine (beliebig große) Auswahl (beliebiger) Würfel zur Verfügung hat und wir nicht den genauen Würfel, sondern nur den Erwartungswert des verwendeten Würfels erraten sollen, ist der Mittelwertschätzer nützlich.

b) Der Varianzschätzer: Zu den Daten x_1, \dots, x_n ist der Varianzschätzer durch die empirische Varianz der Daten gegeben, also

$$V(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - M(x_1, \dots, x_n) \right)^2.$$

Um den Varianzschätzer zu berechnen, müssen wir also zunächst den Mittelwertschätzer $M(x_1, \dots, x_n)$ berechnen. Ob der Varianzschätzer tatsächlich in der in a) beschriebenen Situation (der Spielleiter würfelt mit einem beliebigen, durch eine Zufallsvariable X modellierten, Würfel n mal unabhängig) die Zahl $\mathbb{V}(X)$ vernünftig annähert, können wir mit bloßem Auge im nicht so einfach sehen, obwohl die Formel sicher ganz vernünftig aussieht. Wir werden später noch einige Hinweise darauf besprechen, dass $V(x_1, \dots, x_n)$ tatsächlich eine gute Schätzung für $\mathbb{V}(X)$ ist.

c) Der Medianschätzer: In der gleichen Situation wie in a) und b) sind wir daran interessiert, den Median (siehe Punkt 6.12) der Zufallsvariable X zu erraten, mit der die Daten x_1, \dots, x_n „erzeugt“ wurden. Wie oben benutzen wir hierzu den analogen Begriff für Daten (als den Median aus Punkt (5.6)), und erhalten den Medianschätzer

$$\begin{aligned} \text{Med}(x_1, \dots, x_n) &= \text{ein Median der Daten } (x_1, \dots, x_n) = \\ &= \text{eine Zahl } a, \text{ so dass mindestens } n/2 \text{ Daten } \leq a \text{ sind} \\ &\quad \text{und mindestens } n/2 \text{ Daten } \geq a \text{ sind.} \end{aligned}$$

Wie schon in Punkt (5.6) haben wir hier eine gewisse Wahlfreiheit wenn n gerade ist. Auch hier ist es am vernünftigsten, einfach den Mittelwert zwischen dem $n/2$ -größten und dem $(n/2 + 1)$ -größten Datenpunkt zu wählen.

Genauso können Sie natürlich auch beliebige Quantilschätzer bauen - wir führen das hier nicht

weiter aus, da diese Schätzer in der Praxis nicht so wichtig sind.

(7.4) Modellierung und allgemeine Theorie der schließenden Statistik

Bisher haben wir nur Beispiele für Schätzer gemacht, und jedes Beispiel war ein wenig anders; hier wollen wir einen „theoretischen Rahmen“ um das ganze legen; in der Praxis ist dieser Rahmen von geringer Bedeutung, er hilft uns aber weiter unten, Sachverhalte genau zu formulieren und zeigt außerdem, dass sich unsere Methoden in den großen Kontext der mathematischen Sprache und Methodik einbetten lassen.

Da wir in der Mathematik eigentlich immer mit Mengen zu tun haben wollen, definieren wir uns zunächst zwei davon:

- die Menge \mathfrak{X} der möglichen Daten,
- die Menge Θ , die die möglichen benutzten Würfel codiert. Man nennt Θ auch den **Parameterraum** und $\theta \in \Theta$ den **Parameter** der benutzten Verteilung.

Um zu verstehen, was diese Mengen zu bedeuten haben, geben wir einige Beispiele:

a) Tomatensamen: wir zählen die in der Petrischale gekeimten Tomatensamen. Wir interpretieren das als Münzwürfe, d.h. jeder Samen hat eine Münze mit Erfolgswahrscheinlichkeit p geworfen, und bei Erfolg ist er gekeimt. Mathematisch haben wir es mit $n = 100$ unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{100} zu tun mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ für alle i . Man hat nun zwei Möglichkeiten:

Die naive Möglichkeit: Jeder Samen kann entweder gekeimt sein (Wert 1) oder nicht (Wert 0). Daher ist die Menge der möglichen Daten gegeben durch eine Ansammlung von Nullern und Einsern, also

$$\mathfrak{X} = \{(x_1, \dots, x_{100}), x_i = 0 \text{ oder } x_i = 1 \text{ für alle } i \leq 100\}.$$

Die Menge der möglichen Münzen können wir einfach durch die Erfolgswahrscheinlichkeit p codieren, also $\Theta = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Der Mittelwertschätzer ist dann einfach eine Funktion T , die ein Element (x_1, \dots, x_{100}) der Menge \mathfrak{X} als Eingabe bekommt, und den Wert $T((x_1, \dots, x_n)) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \in [0, 1] = \Theta$ ausspuckt.

Die „clevere“ Möglichkeit: Man könnte auch sagen: wir sind ja nur daran interessiert, wie viele Samen keimen. Daher ist der einzige Datenpunkt, den wir kennen wollen, die Summe $S = \sum_{i=1}^n x_i$. Wir hätten dann also $\mathfrak{X} = \{0, 1, \dots, 100\}$, und nach wie vor $\Theta = [0, 1]$. Der Vorteil dieser Methode ist es, dass nun \mathfrak{X} viel einfacher aussieht - es ist nicht mehr der unübersichtliche Raum aller Sammlungen von Nullern und Einsern, sondern einfach die Zahlen von 0 bis 100. Der Schätzer für p wäre dann einfach $x/100$ für $x \in \mathfrak{X}$ (können Sie nachvollziehen, warum?).

Der Nachteil aber ist, dass wir „vergessen“ haben, dass es ursprünglich 100 Experimente waren, die wir gemacht haben. Daher mussten wir schon beim Schätzen von p ein wenig clever sein, wenn wir nun auch noch die Varianz oder den Median schätzen wollen, so ist das zwar möglich (denn in diesem Fall hängt all das nur davon ab, wie groß p ist), aber wir müssen noch ein Stück mehr nachdenken. Daher ist diese „clevere“ Methode eigentlich fast nie zu empfehlen - es ist besser, mit der Wahl der Datenmenge \mathfrak{X} so nahe wie möglich am gemachten Experiment zu bleiben.

b) Geburten: Beispiel (7.2 b) geht eigentlich genau gleich wie gerade besprochen: hier ist eben

$\mathfrak{X} = \{(x_1, \dots, x_{6153}), x_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i\}$, und wieder $\Theta = [0, 1]$. Überzeugen Sie sich, dass sich im Vergleich zu Beispiel a) mathematisch fast nichts ändert.

c) Tierversuche: Der Datenraum ist hier wieder einfach: wenn Sie n Tierversuche machen, haben Sie n Zahlen ≥ 0 , die die Dosis angeben, bei denen das Tier gestorben ist. Also ist $\mathfrak{X} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0 \text{ für alle } i\}$.

Der Parameterraum, den wir wählen sollten, ist hier nicht ganz so einfach, da wir keine Annahme gemacht haben, wie die zufällige Toleranz der Tiere gegenüber dem Giftstoff verteilt ist. Fest steht jedoch, dass wir annehmen sollten, dass die Tiere bei einer zufälligen, aber „für jedes Tier gleich zufälligen“ Dosis sterben. Außerdem sollte die Dosis verschiedener Tiere voneinander unabhängig sein. Unser Modell bedeutet also, dass es eine Zufallsvariable X gibt, die jedes Tier „bei Geburt auswürfelt“ und die festlegt, wie viel Gift dieses Tier verträgt. Diese Zufallsvariable hat einen Median m , und diesen suchen wir. Der Parameterraum ist dann also die Menge $\Theta = [0, \infty]$ der möglichen Mediane.

d) Trauerschnäpper: Hier ist die Lage noch etwas komplizierter, da man zunächst aus den geflogenen Richtungen der Vögel eine Zahl bilden muss, die angibt, wie gut sie die richtige Richtung „treffen“. Wir verschieben das und nehmen an, dass wir für jeden der 17 Vögel eine Zahl $x_i \in [0, 1]$ und eine Zahl $y_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, 17$) ermitteln können, die seine Treffsicherheit bei blauem bzw. bei grünem Licht codiert. Unsere Datenmenge wäre dann also

$$\mathfrak{X} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_{17}, y_{17}) : x_i, y_i \in [0, 1] \text{ für alle } i\}.$$

Das sieht schon ein wenig kompliziert aus, man sollte sich aber klarmachen, dass die Situation gar nicht so anders ist als in den vorigen Beispielen: man hat 17 „Datenpunkte“, nur dass jeder Datenpunkt jetzt eben aus zwei statt aus einer Zahl besteht.

Wir stellen uns nun vor, dass die „Treffsicherheit“ bei blauem Licht durch eine Zufallsvariable X und bei grünem Licht durch eine Zufallsvariable Y beschrieben wird, die beide Werte in $[0, 1]$ annehmen. Zu jedem Vogel gehört je eine unabhängige Kopie jeder dieser Zufallsvariablen. Wir fragen uns, ob blaues Licht treffsicherer macht, ob also $\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y)$. Da wir hier zwei Erwartungswerte haben, ist der natürliche Parameterraum $\Theta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u, v \leq 1\}$, wobei u den Erwartungswert von X und v den von Y codiert. Wir stellen uns die Frage, ob die „wahren Würfel“ die Eigenschaft haben, dass $u > v$ ist.

Alternativ können wir auch hier wieder clever sein und die Mengen

$$\mathfrak{X} = \{(z_1, \dots, z_{17} : -1 \leq z_i \leq 1\}$$

und $\Theta = [-1, 1]$ betrachten; hierbei codiert dann $z_i = x_i - y_i$ die „Verbesserung“ der Trefferleistung bei blauem Licht gegenüber grünem, und $\theta \in [0, 1]$ wäre $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X - Y)$. Auch hier ist es klarer, einfach bei dem ursprünglichen Modell zu bleiben, allerdings hat das andere auch seine Vorteile - wir haben es jetzt nur noch mit Daten statt mit Datenpaaren zu tun.

e) Hipparion: Wir haben 39 Zähne der *H. africanum* und 38 Zähne des *H. lybicum* gefunden. Wir gehen davon aus, dass die Zahnlängen der ersten Gruppe von Zähnen durch eine Zufallsvariable X (bzw. durch 39 unabhängige Kopien davon) erwürfelt wurden, während die zweite Gruppe durch 38 unabhängige Kopien einer Zufallsvariable Y erwürfelt wurde. Anders als im vorigen Beispiel (wo die Zufallsvariablen X_i und Y_i zum gleichen (nämlich i -ten) Vogel

gehörten, ergibt hier die Bildung von Pärchen keinen Sinn. Unsere Datenmenge ist also

$$\mathfrak{X} = \{((x_1, \dots, x_{39}), (y_1, \dots, y_{38})) : x_i \geq 0, y_i \geq 0 \text{ für alle } i\},$$

besteht also aus *einem* „ungleichen Pärchen“, dessen erster Partner 39 Zahlen und dessen zweiter Partner 38 Zahlen hat. Die Parametermenge ist $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v \geq 0\}$, also die Menge aller möglichen Mittelwerte. Auch hier stellen wir uns die Frage, ob für den „wahren Würfel“ $u < v$, $u > v$ oder $u = v$ gilt.

f) Kuhstärling: Hier hat man insgesamt 48 Nester untersucht, jedes davon kann zwischen 0 und 2 Kuhstärling-Eier enthalten und entweder von Parasiten befallen sein oder nicht. Die Datenmenge kann also am einfachsten als

$$\mathfrak{X} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_{48}, y_{48})) : x_i \in \{0, 1, 2\}, y_i \in \{0, 1\} \text{ für alle } i\}$$

angegeben werden, dabei ist x_i die Anzahl der Eier im i -ten Nest und $y_i = 1$ falls das i -te Nest von Parasiten befallen ist und 0 sonst. Die Parametermenge ist hier allerdings nicht mehr so einfach und wird durch folgende konkrete Frage ersetzt: Wir wollen wissen, ob es plausibel ist, dass die zufälligen Pärchen (x_i, y_i) durch das 48-malige Würfeln mit einem Pärchen von Zufallsvariablen X_i, Y_i entstanden sind, bei denen X_i unabhängig von Y_i ist (für gleiches i).

Anders ausgedrückt lautet die Frage wie folgt: angenommen, jemand wirft einen (möglicherweise unfairen) dreiseitigen Würfel mit den Zahlen 0, 1 und 2, und wirft dann eine (möglicherweise unfaire) Münze mit den Zahlen 0 und 1 darauf. Der Würfel und die Münze sind unabhängig, und die Prozedur wird 48 mal unabhängig wiederholt. Ist es plausibel (d.h. vernünftig wahrscheinlich), dass bei dieser Prozedur Daten herauskommen, die den von uns beobachteten entsprechen?

Beachten Sie hierbei folgenden etwas kniffligen Punkt: besonders wenn die Anzahl der gemachten Versuche hoch ist, ist jedes *einzelne* exakte Ergebnis a priori nicht sehr wahrscheinlich ist, weil sich die Gesamtwahrscheinlichkeit ja auf so viele Möglichkeiten aufteilen muss. Trotzdem können wir aber die (sehr kleine) Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen unabhängigen Würfeln unsere Daten zu sehen, mit den (ebenfalls sehr kleinen) Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten anderer Daten vergleichen - wenn die Wahrscheinlichkeit, dass unsere Daten herauskommen würden, noch sehr viel geringer ist als „ausreichend viele“ Einzelwahrscheinlichkeiten für anders geartete Daten, dann können wir recht sicher sagen, dass unsere Daten wohl nicht durch zufälliges unabhängiges Würfeln entstanden sein können. Dies zu formalisieren und zu quantifizieren ist eine der Leistungen der Statistik.

(7.5) Maximum-Likelihood-Schätzer

Der Maximum-Likelihood-Schätzer kann immer dann eingesetzt werden, wenn unser Parameterraum Θ eine Menge von explizit angegebenen Verteilungen repräsentiert. Beispiele sind:

- Der gesuchte Würfel ist eine Zufallsvariable X mit Poissonverteilung, wir kennen aber den Parameter λ nicht. Mit anderen Worten, die Gewichtsfunktion ist $p_\lambda(k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$ (für $k \in \mathbb{N}_0$) mit unbekanntem und gesuchtem λ . Der Parameterraum ist hier $\Theta =]0, \infty[$.
- Der gesuchte Würfel ist eine Zufallsvariable X mit Exponentialverteilung, wir kennen aber den Parameter α nicht. Mit anderen Worten, die Dichtefunktion ist $\rho_\alpha(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ (für $x \in [0, \infty[$) mit gesuchtem und unbekanntem α . Auch hier ist $\Theta =]0, \infty[$.

- Der gesuchte Würfel ist eine Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$, wobei p unbekannt und gesucht ist. Hier wäre also $\Theta = [0, 1]$.

Der für die Praxis wichtige Fall:

- Wir haben einen Datensatz $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}$ vorliegen.
- Wir wissen, dass dieser Datensatz durch das n -malige unabhängige Würfeln auf eine Zufallsvariable X zustande gekommen ist.
- Wir wissen, dass X eine Verteilung mit bekannter Gewichtsfunktion $p_\theta(k)$ oder eine Dichte $\rho_\theta(k)$ hat; wir wissen aber nicht, zu welchem θ sie gehört.

Um die Vorhersage des Maximum-Likelihood-Schätzers für diese Situation zu bestimmen, gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Bestimmung der sogenannten Likelihood-Funktion.

Wir überlegen uns, wie wahrscheinlich es eigentlich ist, dass genau unsere Daten herauskommen, wenn der wahre Parameter den Wert θ hat. Im Fall einer unbekanntes Gewichtsfunktion ist das einfach: falls jedes X eine Verteilung mit Gewichtsfunktion θ hat, gilt nämlich wegen der Unabhängigkeit der X_1, \dots, X_n , dass

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\theta) := \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i).$$

Dies ist die Likelihood-Funktion zu den Daten x_1, \dots, x_n . Sie bildet den Parameter θ in eine Zahl ab, nämlich in die Wahrscheinlichkeit, mit einer Zufallsvariablen mit Gewichtsfunktion p_θ genau die Daten (x_1, \dots, x_n) zu bekommen. Man kann sie in vielen Fällen explizit auszurechnen. Für die Poissonverteilung gilt beispielsweise (mit $\lambda = \theta$), dass

$$\prod_{i=1}^n p_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^n \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \right) = e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}.$$

Das sieht zwar vielleicht etwas abschreckend aus, aber erstens ist das schon einer der komplizierteren Fälle, und zweitens werden wir im zweiten Schritt sehen, dass wir sogar mit dieser Formel recht leicht etwas anfangen können.

Im Fall einer stetigen Verteilung ergibt es keinen Sinn zu fragen, wie wahrscheinlich es a priori war, unsere Daten x_1, \dots, x_n zu erhalten, da die Antwort immer 0 wäre. Wie wir wissen, übernimmt hier die Dichtefunktion die Rolle der Gewichtsfunktion. Eine Tatsache, die wir nicht behandelt haben (dazu bräuchte man mehrdimensionale Integrale), die aber nicht schwer zu glauben ist, ist folgende: wenn man n unabhängige Zufallsvariable X_1, \dots, X_n hat, die alle die Dichtefunktion ρ haben, dann hat die gemeinsame Verteilung von X_1, \dots, X_n als Dichtefunktion die Funktion, die $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ in das Produkt $\rho(x_1) \cdots \rho(x_n)$ abbildet - genau wie das auch bei der Gewichtsfunktion der Fall war. Ebenso analog bestimmt man die Likelihood-Funktion: zu den Daten x_1, \dots, x_n und den Dichten ρ_θ ist dies einfach

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\theta) := \prod_{i=1}^n \rho_\theta(x_i).$$

Auch hier kann man in vielen Fällen explizit rechnen, beispielsweise im Fall der Exponentialverteilung (mit $\alpha = \theta$)

$$L_{x_1, \dots, x_n}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \rho_\alpha(x_i) = \prod_{i=1}^n (\alpha e^{-\alpha x_i}) = \alpha^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Schritt 2: Maximieren der Likelihood-Funktion

Wenn wir die Funktion L_{x_1, \dots, x_n} bestimmt haben, suchen wir das θ , für das sie so groß wie möglich ist. Mathematischer formuliert: der Maximum-Likelihood-Schätzer gibt zu den Daten x_1, \dots, x_n den Wert θ aus, an dem die Likelihood-Funktion ihr Maximum hat - wenn es mehrere Maxima geben sollte, darf man sich eines aussuchen.

Wenn der Parameterbereich $\Theta \subset \mathbb{R}$ ist, haben wir eine sehr praktische Methode, Maxima zu finden: um das Maximum irgend einer (differenzierbaren) Funktion zu finden, müssen wir sie „einfach nur“ ableiten und die Ableitung dann Null setzen²⁶⁾ Natürlich kann es im Prinzip passieren, dass das Finden einer Lösung der Gleichung $L'_{x_1, \dots, x_n}(\theta) = 0$ Schwierigkeiten macht - das kommt auf die genauen Umstände an. In vielen Fällen klappt es aber ganz gut. Wir machen zur Demonstration die beiden oben erwähnten Fälle.

In diesen und vielen weiteren Fällen ist ein weiterer Rechenrick sehr nützlich: eine Funktion ist nämlich genau an der Stelle maximal, wo auch ihr Logarithmus maximal ist - das liegt daran, dass der Logarithmus eine monoton wachsende Funktion ist, wenn also $F(x)$ größer ist als $F(y)$ für alle y , dann ist auch $\ln F(x) > \ln F(y)$ für alle y . In sehr vielen Fällen lässt sich der Logarithmus der Likelihoodfunktion viel besser ableiten als die Funktion selbst:

für den Fall der Poissonverteilung ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \ln(L_{x_1, \dots, x_n}(\lambda)) &= \ln \left(e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \right) = \ln e^{-\lambda n} + \ln \left(\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \right) - \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i! \right) \\ &= -\lambda n + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i! \right). \end{aligned}$$

Die gute Nachricht ist, dass der hässlichste Term in diesem Ausdruck nicht von λ abhängt und daher beim Differenzieren wegfällt. Ableiten und Nullsetzen ergibt daher

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \ln(L_{x_1, \dots, x_n}(\lambda)) = -n + \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{\lambda} + 0,$$

und wenn man das umstellt, dann bekommt man $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Der Maximum-Likelihood-Schätzer sagt also voraus, dass zu den Daten x_1, \dots, x_n der Parameter der gesuchten Poissonverteilung gerade der Mittelwert der Daten ist.

Man kann nun ausrechnen, dass der Erwartungswert einer Poissonverteilten Zufallsvariable mit Parameter λ gerade selbst λ ist - versuchen Sie das mal als (nicht ganz einfache) Übung; der Erwartungswert ist ja gleich $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}$, und mit einer geschickten Indexverschiebung in der Summe kommen Sie drauf! Jedenfalls bedeutet das, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer

²⁶⁾Eigentlich findet man ja so nur Stellen für entweder Maxima, oder Minima, oder Flachpunkte. Man müsste also für alle gefundenen Lösungen der Gleichung $L'(x_1, \dots, x_n)(\theta) = 0$ noch von Hand prüfen, ob wirklich ein Maximum vorliegt. Wir lassen das hier aus Bequemlichkeit weg.

und der Mittelwertschätzer in diesem Fall genau gleich sind.

Für den Fall der Exponentialverteilung hat man

$$(L_{x_1, \dots, x_n}(\alpha)) = \ln(\alpha^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i}) = n \ln \alpha - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Es sollte Ihnen auffallen, dass die Rechnung genau die gleiche ist, obwohl wir nun eine stetige statt einer diskreten Verteilung haben - im Schritt 2 macht das keinen Unterschied mehr. Setzt man dies gleich 0 und löst auf, dann bekommt man $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, also wieder den Mittelwertschätzer. Da der Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter α genau α ist (das können Sie mit partieller Integration nachrechnen!), ergibt das auch Sinn.

Wir haben jetzt in zwei Beispielen gesehen, dass der Maximum-Likelihood Schätzer genau gleich ist wie der Mittelwertschätzer. Das lag daran, dass in beiden Fällen der Parameter, den wir schätzen wollten, gleichzeitig der Mittelwert war. Natürlich gibt es auch Fälle, wo man etwas anderes als den Mittelwert schätzen will, aber die sind oft rechnerisch nicht mehr so einfach.

Der allgemeine Fall: Wir haben oben immer den Fall von n unabhängigen Daten behandelt, weil der in der Praxis mit großem Abstand am wichtigsten ist. Man kann aber eine Likelihood-Funktion auch ganz allgemein definieren: man braucht nur eine Menge \mathfrak{X} , in der die Daten \mathbf{x} liegen (die können die Form $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ haben, oder einfach eine Zahl sein, oder sonst etwas), und eine mit $\theta \in \Theta$ parametrisierte Familie von Gewichtsfunktionen (oder Dichten) $p_\theta(\mathbf{x})$ (oder $\rho_\theta(\mathbf{x})$), die angeben, wie wahrscheinlich im Fall des zu θ gehörigen Würfels das Ergebnis \mathbf{x} ist. Zu festen Daten \mathbf{x} ist dann die Likelihood-Funktion einfach $L_{\mathbf{x}}(\theta) := p_\theta(\mathbf{x})$, oder $L_{\mathbf{x}}(\theta) := \rho_\theta(\mathbf{x})$. Man vertauscht also eigentlich nur den unteren Index mit dem Platz in der Klammer, das soll uns aber eine wichtige Botschaft übermitteln: bei $p_\theta(\mathbf{x})$ stellen wir uns vor, dass θ festgehalten ist und alle möglichen \mathbf{x} in die Funktion eingesetzt werden, was dann zu den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für dieses \mathbf{x} führt. Dagegen denken wir bei $L_{\mathbf{x}}(\theta)$ daran, dass die Daten \mathbf{x} uns jetzt vorliegen und daher fest sind, während wir θ variieren (also verschiedene davon in die Funktion einsetzen), um dasjenige zu finden, das den größten Wert erzeugt.

Sonderfall: nur endlich viele mögliche Parameter: Es kann vorkommen (etwa im Beispiel (7.1) mit den zwei Würfelbechern), dass es nur endlich viele mögliche Parameter gibt. In diesem Fall kann man natürlich nicht ableiten, es bleibt einem nichts anderes übrig als für alle dieser Parameter die Likelihoodfunktion für die gegebenen Daten zu berechnen und von Hand das Maximum zu suchen.

(7.6) Unverzerrtheit und Konsistenz

Wir kommen nun zu zwei mathematischen Eigenschaften, die Schätzer haben sollten. Wir erinnern uns, dass ein Schätzer im Prinzip einfach eine Vorschrift (also eine Funktion T) ist, die zu gegebenen Daten $(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{X}$ einen Wert $T(x_1, \dots, x_n) \in \Theta$ für den Parameter vorschlägt, der zu dem Würfel gehört, mit dem die Daten in Wirklichkeit erzeugt wurden. Nun schließen wir dadurch nicht aus, dass ein Schätzer sich beliebig dumm anstellt - er könnte zum Beispiel immer $\theta = 0$ vorschlagen, egal was die Daten sind. Solche Schätzer wollen wir natürlich meistens nicht! Wir stellen daher zwei Qualitätskriterien auf, denen Schätzer genügen sollten²⁷⁾.

²⁷⁾In seltenen Fällen kann man auf die Unverzerrtheit auch verzichten, die Konsistenz will man aber eigentlich immer haben

Unverzerrtheit: In der Praxis haben wir die Daten x_1, \dots, x_n und unseren Schätzer T und können nichts anderes tun, als diese Daten in den Schätzer einzusetzen und das Ergebnis $T(x_1, \dots, x_n)$ zur Kenntnis zu nehmen. Wir wissen im Einzelfall nicht, wie gut unsere Schätzung ist. Was wir aber tun können, ist folgendes Gedankenspiel: nehmen wir an, wir erzeugen uns die Daten künstlich, und zwar durch einen Würfel, der genau zum Parameter θ gehört - wir kennen θ also bereits! Trotzdem setzen wir die Daten in den Schätzer ein - leider werden wir meist einen Schätzwert erhalten, der sich von θ unterscheidet, denn unsere Daten waren ja zufällig. Wir können uns aber nun fragen, ob wenigstens „im Durchschnitt“ das richtige Ergebnis herauskommt.

Dazu könnten wir uns entweder sehr viele Datensätze (immer mit dem gleichen θ) erzeugen, damit sehr viele Vorschläge für das wahre θ bekommen, und diese mitteln. Da wir aber das Gesetz der großen Zahl kennen, bekommen wir die Idee, dass wir uns diese Arbeit auch sparen können: wir wissen ja, dass bei einer solchen Prozedur der Mittelung vieler unabhängiger Versuchen der Erwartungswert herauskommen muss - aber der Erwartungswert von was genau eigentlich?

Um diese Frage zu beantworten, überlegen wir uns, was genau wir getan haben: wir haben in die Funktion T , die n Zahlen x_1, \dots, x_n schluckt und einen Parameter $T(x_1, \dots, x_n) \in \Theta$ ausspuckt, die mit dem zu θ gehörigen Würfel erzeugten Zufallszahlen eingesetzt; wir haben also die Zufallsvariable $T(X_1, \dots, X_n)$ betrachtet, die durch dieses Einsetzen entsteht. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariable ist es, der bei der häufigen Wiederholung des oben beschriebenen Versuches als Mittelwert auftauchen muss - und da wir ja das wahre θ schon kennen, hätten wir gerne, dass dieser Erwartungswert auch wieder gleich θ ist. Schließlich wollen wir, dass dies nicht nur für einige besonders günstig gewählte θ gilt, sondern für alle die möglich sind. Wir erhalten daher das folgenden Gütekriterium für einen Schätzer, das wir als Definition formulieren:

Definition: Ein Schätzer $T : \mathfrak{X} \rightarrow \Theta$ für den Parameter θ heißt **unverzerrt** oder **erwartungstreu**, wenn für jeden Parameter $\theta \in \Theta$ gilt: die Zufallsvariable $Y = T(X_1, \dots, X_n)$, die durch einsetzen von zu θ gehörigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n in T entsteht, hat den Erwartungswert θ . Formal: für alle $\theta \in \Theta$ muss gelten:

$$\mathbb{E}(T(X_1, \dots, X_n)) = \theta, \quad \text{falls die } X_i \text{ die zu } \theta \text{ gehörige Verteilung haben.}$$

Es gibt auch Fälle, wo man nicht den Parameter θ selbst schätzen will, sondern beispielsweise θ^2 oder $\exp(\theta)$. In diesen Fällen definiert man Unverzerrtheit genau wie oben: der Schätzer S einer Funktion $f(\theta)$ ist unverzerrt, wenn für alle $\theta \in \Theta$ gilt:

$$\mathbb{E}(S(X_1, \dots, X_n)) = f(\theta) \quad \text{falls die } X_i \text{ die zu } \theta \text{ gehörige Verteilung haben.}$$

Nun könnte man denken, dass ja alles ganz einfach ist: wenn man schon einen unverzerrten Schätzer T für θ hat, dann nimmt man etwa einfach $(T(x_1, \dots, x_n))^2$ als Schätzer für θ^2 . Das Problem ist aber, dass dieser Schätzer dann oft nicht mehr unverzerrt ist. Warum ist das so? Damit $(T(x_1, \dots, x_n))^2$ automatisch unverzerrt wäre, müsste ja

$$\mathbb{E}\left(T(X_1, \dots, X_n)^2\right) = \theta^2$$

sein. Wir wissen aber nur, dass (wegen der Unverzerrtheit von T)

$$\mathbb{E}\left(T(X_1, \dots, X_n)\right)^2 = \theta^2$$

ist, das Quadrat steht hier *außerhalb* des Erwartungswertes. Leider ist es für die allerwenigsten Zufallsvariablen der Fall, dass $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$ ist - für solche ist nämlich dann $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0$, was bedeutet, dass sie gar nicht zufällig sind!

Fazit: für einen unverzerrten Schätzer T von θ ist T^2 so gut wie nie ein unverzerrter Schätzer von θ^2 . Das ist nicht besonders intuitiv (wenn T gut genug für die Schätzung von θ war, warum ist dann T^2 nicht gut genug für die Schätzung von θ^2 ?) und ist einer der Gründe, warum man in der Praxis nicht immer darauf besteht, dass der Schätzer unverzerrt sein muss. Andererseits nimmt man Unverzerrtheit gerne, wenn man sie bekommen kann, und hier liegt auch der Grund, warum man den Varianzschätzer

$$v(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j\right)^2$$

mit dem Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$ statt mit $\frac{1}{n}$ definiert: man kann durch eine etwas längliche Rechnung zeigen, dass $\mathbb{E}(v(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{V}(X_1)$ ist, wenn die X_i unabhängige Zufallsvariable sind. Das gilt aber nur mit dem Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$.

Konsistenz: Im Gegensatz zur Unverzerrtheit ist Konsistenz eine Eigenschaft, auf die man nicht verzichten will. Intuitiv bedeutet Konsistenz, dass man, wenn man nur genug Daten erhebt, mit Hilfe des konsistenten Schätzers T auch beliebig gut den wahren Parameter θ erraten kann.

Um dies genauer zu formulieren, brauchen wir streng genommen nicht nur einen einzigen Schätzer, sondern unendlich viele, und zwar für jede Anzahl n von Messungen einen. In eigentlich allen Fällen von praktischer Bedeutung ist klar, was hierbei gemeint ist: beim Mittelwertschätzer haben wir für n Datenpunkte den Schätzer $M_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, ebenso geht es beim Varianz- und Medianschätzer. Auch bei den Maximum-Likelihood-Schätzern mit n Datenpunkten maximiert man für jedes n die Likelihood-Funktion $\theta \mapsto L_{x_1, \dots, x_n}(\theta)$. Hat man nun also zu allen möglichen n einen Schätzer, so geht man zunächst wieder ähnlich vor wie bei der Unverzerrtheit: man wählt sich einen beliebigen Parameter θ , erzeugt mit den zu θ gehörigen Würfeln (in Gedanken) unendlich viele Zufallszahlen, und setzt jeweils die ersten n in den passenden Schätzer T_n ein. Man erhält dadurch also eine *Folge* von geschätzten Parametern, und man nennt den Schätzer (eigentlich: die Folge von Schätzern (T_n)) **konsistent**, wenn diese Folge immer gegen den wahren (von uns ausgewählten) Wert von θ konvergiert. Wie schon beim Gesetz der großen Zahl müssen wir hier ein wenig vorsichtig sein, was wir mit „immer konvergieren“ meinen, denn im Prinzip könnten wir ja bei der Erzeugung der Daten beliebig viel Pech haben und auf die falsche Fährte gelockt werden. Eine von mehreren Möglichkeiten, dies mathematisch exakt zu formulieren, ist folgende

Definition: Zu jedem n sei ein Schätzer T_n für den Parameter θ gegeben. Die Folge von Schätzern (T_n) heißt **schwach konsistent**, wenn für jedes $\theta \in \Theta$ gilt: hat man eine Folge X_n von Zufallsvariablen, deren Verteilung zum Parameter θ gehört, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|T_n(X_1, \dots, X_n) - \theta| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Sie sollten einmal zur schwachen Gesetz der großen Zahl zurückblättern die Ähnlichkeit dieser Formel mit der dortigen bemerken. Tatsächlich folgt direkt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahl, dass der Mittelwertschätzer schwach konsistent ist, wenn die X_i unabhängige Zufallsvariable sind, alle die gleiche Verteilung haben, und wenn die zu θ gehörigen Zufallsvariablen X auch $\mathbb{E}(X) = \theta$ erfüllen. Wenn Sie wollen, können Sie das für sich selbst verifizieren. Ebenso sind der Varianzschätzer und alle anderen Schätzer, die wir einführen, schwach konsistent.

Es gibt auch noch andere Formen der Konsistenz, zum Beispiel die sogenannte starke Konsistenz. Für Sie als Anwender sind allerdings die technischen Feinheiten bei der Konsistenz nicht so wichtig; was Sie sich merken sollten ist, dass konsistente Schätzer bei der Erhöhung der Datenmenge immer genauere Vorhersagen machen, und dass diese Vorhersagen auch die richtigen sind. Daher sollte man einen Schätzer, der nicht konsistent ist, niemals verwenden.

(7.7) Konfidenzintervalle

Wir betrachten wieder einmal ein Gewinnspiel: der Spielleiter würfelt mit einem Würfel (möglicherweise mehrmals). Er wählt den Würfel aus einer unendlich großen Anzahl möglicher Würfel, die mit Hilfe des Parameters $\theta \in \Theta$ identifiziert werden. Hierbei ist $\Theta = \mathbb{R}$ oder $\Theta = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Wenn Sie nun mit Hilfe der erzeugten Daten (x_1, \dots, x_n) und eines Schätzers T_n den wahren Wert von θ herausfinden sollen, dann ist das Spiel ziemlich unfair: da es unendlich viele Möglichkeiten für das wahre θ gibt, können Sie sich in dem meisten konkreten Fällen sicher sein, dass Sie *genau* das richtige nie treffen werden.

Daher werden die Regeln des Spiels verändert: Sie müssen aufgrund der Daten (x_1, \dots, x_n) nun ein *Intervall* $[q_-, q_+]$ angeben. Wenn der wahre Wert von θ in diesem Intervall liegt, haben Sie gewonnen. Natürlich können Sie jetzt ganz schlau sein und als Intervall einfach \mathbb{R} oder $[a, b]$ wählen, um immer zu gewinnen - aber hier können Sie sich vorstellen, dass die Regel sagt, dass Sie bei der Angabe von zu großen Intervallen wenig oder gar nichts gewinnen. Ihre Aufgabe ist es also, ein möglichst kurzes Intervall zu finden, so dass Sie möglichst oft gewinnen. Da dies zwei konkurrierende Forderungen sind, legt man konkret fest:

Sie suchen zu $\alpha \in [0, 1]$ eine Vorschrift, die Ihnen (abhängig von den Ihnen vorgelegten Daten x_1, \dots, x_n) ein möglichst kurzes Intervall liefert, das die Eigenschaft hat, dass Sie mit dieser Strategie auf lange Sicht mindestens $(1 - \alpha) \cdot 100$ Prozent aller Spiele gewinnen. Ein konkretes Beispiel hilft hoffentlich beim Verständnis:

Der Spielleiter erzeugt 10 unabhängige, normalverteilte Daten mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 2$. Sie sollen zu den gegebenen Daten x_1, \dots, x_{10} ein Intervall $[q_-, q_+]$ angeben, mit dem Sie in mindestens 95 % aller Fälle gewinnen, und zwar egal, welchen Wert μ der Spielleiter ausgewählt hatte. Nehmen wir also an, der Spielleiter hat sich für $\mu = 7$ entschieden (wir wissen das aber natürlich nicht). Die Daten, die er uns vorlegt, sind also durch 10 unabhängige $\mathcal{N}(7, 2)$ -verteilte Zufallsvariable gegeben. Wir müssen uns nun für irgend eine Methode $q_-(x_1, \dots, x_{10})$ zur Festlegung der unteren Intervallgrenze entscheiden, wenn wir die Daten x_1, \dots, x_{10} vorgelegt bekommen, ebenso für eine Methode $q_+(x_1, \dots, x_{10})$ für die obere Intervallgrenze.

Natürlich sind q_- und q_+ einfach wieder Funktionen (wie so vieles in der Mathematik!), die von \mathbb{R}^{10} auf \mathbb{R} abbilden. Wenn wir in diese Funktionen die gemäß $\mathcal{N}(7, 1)$ verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{10} einsetzen, bekommen wir zwei Zufallsvariable $q_-(X_1, \dots, X_{10})$ und $q_+(X_1, \dots, X_{10})$.

Wir wollen, dass mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit der wahre Wert $\mu = 7$ in dem Intervall $[q_-(X_1, \dots, X_{10}), q_+(X_1, \dots, X_{10})]$ liegt, in Formeln: wir fordern, dass

$$\mathbb{P}(q_-(X_1, \dots, X_{10}) \leq 7 \leq q_+(X_1, \dots, X_{10})) \geq 0.95.$$

So allgemein, wie das hier steht, sieht es nicht so aus, als käme man hier viel weiter. Im konkreten Fall (und in vielen anderen Fällen) kann man aber sehr gut erraten, wie so eine Funktion $q_-(x_1, \dots, x_{10})$ vermutlich aussehen sollte: da der Mittelwertschätzer $m = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i$ das beste ist, was wir anhand der Daten über das wahre μ sagen können, sollte er vermutlich die Intervallmitte markieren. Damit sollte $q_-(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i - r$ und $q_+(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i + r$ sein. Wir setzen das oben ein, und sehen, dass wir nun eine Zahl $r > 0$ suchen, so dass

$$\mathbb{P}\left(q_-(X_1, \dots, X_{10}) \leq 7 \leq q_+(X_1, \dots, X_{10})\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i - r \leq 7 \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i + r\right) \geq 0.95$$

Anders ausgedrückt (nämlich mit Hilfe des Gegenereignisses): wir suchen $r > 0$, so dass

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i - r \geq 7 \text{ oder } \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i + r \leq 7\right) < 0.05.$$

Da aber nicht gleichzeitig $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i - r \geq 7$ und $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i + r \leq 7$ sein kann, sind die Ereignisse disjunkt, und die Wahrscheinlichkeiten addieren sich. Unsere Forderung heißt also nun

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i - r \geq 7\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i + r \leq 7\right) < 0.05.$$

Wir erinnern uns, dass der wahre Wert von μ gleich 7 ist, und dass die Summe von 10 unabhängigen $\mathcal{N}(7, 2)$ -verteilten Zufallsvariablen die Verteilung $\mathcal{N}(10 \cdot 7, 10 \cdot 2) = \mathcal{N}(70, 20)$ hat. Wir erhalten als neue Forderung

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{10}Y - r \geq 7\right) + \mathbb{P}\left(\frac{1}{10}Y + r \leq 7\right) < 0.05, \quad \text{mit } Y \sim \mathcal{N}(70, 20),$$

oder durch Umstellung der Ungleichungen in den Klammern:

$$\mathbb{P}(Y \geq 70 + 10r) + \mathbb{P}(Y \leq 70 - 10r) < 0.05.$$

Wir erinnern uns an die Formel $\mathbb{P}(Y \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ (hier mit $\mu = 70$ und $\sigma = \sqrt{20}$) und bekommen

$$\mathbb{P}(Y \leq 70 - 10r) = \Phi\left(\frac{70 - 10r - 70}{\sqrt{20}}\right) = \Phi\left(\frac{-10r}{\sqrt{20}}\right),$$

und

$$\mathbb{P}(Y \geq 70 + 10r) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 70 + 10r) = 1 - \Phi\left(\frac{70 + 10r - 70}{\sqrt{20}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10r}{\sqrt{20}}\right) = \Phi\left(\frac{-10r}{\sqrt{20}}\right).$$

Um also $\mathbb{P}(Y \geq 70 + 10r) + \mathbb{P}(Y \leq 70 - 10r) < 0.05$ zu erhalten, brauchen wir $2\Phi\left(\frac{-10r}{\sqrt{20}}\right) < 0.05$, also

$$\Phi\left(\frac{-10r}{\sqrt{20}}\right) < 0.025.$$

Mit anderen Worten: der Ausdruck $\frac{-10r}{\sqrt{20}}$ muss genau das 0.025-Quantil $q_{0.025}$ der Normalverteilung sein. In Formeln:

$$\frac{-10r}{\sqrt{20}} = q_{0.025} \Leftrightarrow r = -\frac{q_{0.025}\sqrt{20}}{10} = -\frac{q_{0.025}\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{q_{0.975}\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

In der letzten Gleichheit haben wir benutzt, dass die Standard-Normalverteilung symmetrisch ist, dass also $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$ für alle $\alpha \in]0, 1[$.

Nach langer Rechnung kommen wir also nun zu dem Ergebnis: Wenn der wahre (unbekannte) Mittelwert $\mu = 7$ ist, und wenn wir wissen, dass die Varianz $\sigma^2 = 2$ ist, dann führt folgende Vorschrift dazu, dass wir in 95 % aller Spiele gewinnen: wenn die Daten x_1, \dots, x_{10} vorliegen, dann schätzen wir, dass der wahre Wert von θ in dem Intervall

$$C(x_1, \dots, x_{10}) = \left] \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i - \frac{q_{0.975}\sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i + \frac{q_{0.975}\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \right[$$

liegt, wobei $q_{0.975}$ das entsprechende Quantil der Standard-Normalverteilung ist. Nachdem wir die Rechnung gemacht haben, fällt uns außerdem auf, dass diese Vorschrift gar nicht davon abhängt, dass $\mu = 7$ war, und wenn wir sorgfältig durch die Rechnung gehen, können wir außerdem sehen, dass für allgemeine (bekannte) Varianz σ^2 einfach die $\sqrt{2}$ durch σ ersetzt werden muss. Ebenso muss für eine andere Anzahl als n Daten die $\sqrt{10}$ durch den Ausdruck \sqrt{n} ersetzt werden. Schließlich können wir statt $\alpha = 0.05$ auch ein allgemeines α verwenden, dann bekommen wir $q_{1-\alpha/2}$ statt $q_{0.975}$. Wir erhalten

$$C(x_1, \dots, x_n) = \left] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{q_{1-\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{q_{1-\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

Hier können wir aber schon einmal festhalten:

- Höhere Varianz macht das Konfidenzintervall länger, d.h. wir wissen weniger sicher, wo sich der wahre Wert μ befindet.
- Mehr Versuche n machen das Intervall kürzer; insgesamt ist dessen Länge proportional zu $1/\sqrt{n}$.
- Je mehr Spiele wir im Durchschnitt gewinnen wollen, desto länger ist das Intervall - denn für sehr kleine $\alpha/2$ ist $q_{1-\alpha/2}$ sehr groß.

Sie sehen schon, dass Konfidenzintervalle sowohl rechnerisch als auch konzeptionell etwas schwieriger sind. Zum Glück brauchen wir sie nur für wenige Spezialfälle. Diese geben wir gleich an, vorher schreiben wir aber der Vollständigkeit halber die mathematische Definition eines Konfidenzintervalls auf:

Definition: Ein Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha > 0$ (oder zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$) ist eine Vorschrift (also: eine Funktion), die zu gegebenen Daten (x_1, \dots, x_n) ein Intervall $C(x_1, \dots, x_n) = [q_-, q_+]$ ausspuckt, das folgende Eigenschaft hat: für jeden möglichen Parameter $\theta \in \Theta$ gilt: falls die Daten von zu θ gehörigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n erzeugt wurden, dann enthält das durch sie bestimmte Intervall $[q_-, q_+]$ den wahren Parameter θ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \alpha$. In Formeln: für alle $\theta \in \Theta$ gilt

$$\mathbb{P}(\theta \in C(X_1, \dots, X_n)) > 1 - \alpha \quad \text{wenn die } X_i \text{ zum Parameter } \theta \text{ gehören.}$$

Spezialfall 1: Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert bekannter Varianz.

Uns liegen n unabhängige Daten vor, die normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2 sind. Diesen Fall haben wir oben (im Spezialfall) schon besprochen. Ein Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Irrtumsniveau α ist hier durch

$$C(x_1, \dots, x_n) = \left] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{q_{1-\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{q_{1-\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

gegeben.

Spezialfall 2: Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert und unbekannter Varianz, gesucht ist der Mittelwert:

Die Formel aus Spezialfall 1 hat hier ein Problem, weil dort explizit die Varianz σ auftaucht, die wir aber nicht kennen. Eine nahe liegende Idee ist es, σ einfach durch die empirische Standardabweichung

$$s(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2}$$

zu ersetzen, die wir ja aus den Daten errechnen können. Die schlechte Nachricht ist, dass das leider so nicht funktioniert. Der Punkt, wo es im unserem ausgearbeiteten Beispiel schiefeht ist die harmlos wirkende Formel $\mathbb{P}(Y \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ - hier nehmen wir an, dass wir σ kennen! Die gute Nachricht ist, dass man (mit einigem mathematischen Aufwand) immer noch auf eine Formel kommt, die fast gleich ist: Es stellt sich heraus, dass man ein Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Irrtumsniveau α durch den Ausdruck

$$C(x_1, \dots, x_n) = \left] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2} s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{t_{n-1, 1-\alpha/2} s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}} \right[$$

erhält. Hier ist aber $t_{n-1, 1-\alpha/2}$ nicht mehr das Quantil der Normalverteilung, sondern dasjenige der sogenannten **Student'schen t -Verteilung**, und es hängt außerdem von der Anzahl n der Daten ab - man braucht mindestens $n = 2$, dann bekommt man $t_{1, 1-\alpha/2}$. Was diese Verteilung genau ist, ist für uns nicht so wichtig, ihre Quantile kann man genau so wenig explizit in Formeln angeben wie die der Normalverteilung - man schlägt sie also in einer Tabelle nach, aber eben in einer anderen als diejenigen der Normalverteilung.

Spezialfall 3: Binomialverteilung mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit

Gegeben sind n Ergebnisse x_1, \dots, x_n (mit $x_i \in \{0, 1\}$ für alle i) eines Versuches mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$. Um diesen Parameter zu schätzen, machen wir zwei Vorüberlegungen:

- Die Summe $\sum_{i=1}^n X_i$ von Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen ist binomialverteilt mit parameter p und n Versuchen.
- Zumindest für halbwegs große n ist die Binomialverteilung sehr gut approximiert durch eine Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = pn$ und Varianz $\sigma^2 = np(1-p)$.

Mit diesen beiden Beobachtungen können wir ein (approximatives) Konfidenzintervall angeben: Sei $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ die Anzahl der erzielten Erfolge in den Daten. Zum Irrtumsniveau α ist ein Konfidenzintervall gegeben durch

$$C_n(\mathbf{x}) = \left] \frac{\mathbf{x}}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{n} \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{n}\right)} q_{1-\alpha/2}, \frac{\mathbf{x}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{n} \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{n}\right)} q_{1-\alpha/2} \right[.$$

Hier ist $q_{1-\alpha/2}$ wieder das entsprechende Quantil der Standard-Normalverteilung. Die Begründung hierfür lassen wir weg und machen stattdessen noch ein

Beispiel: Geburten Die Geburten in Frankfurt am Main vom Jahr 2001 (Beispiel (7.2 b)) ergeben die Werte $n = 6153$, $\mathbf{x} = 3240$. Wir berechnen

$$\frac{\mathbf{x}}{n} \approx 0.5265, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{n} \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{n}\right)} \approx 0.0063652047.$$

Für $\alpha = 0.05$ erhält man $q_{0.975} \approx 1.95996$, also erhalten wir wegen $0.0063652047 \cdot 1.95996 \approx 0.12475$ das Konfidenzintervall

$$C_{6153}(3240) =]0.51402, 0.53897[.$$

Wir können also aufgrund der uns vorliegenden Daten vorhersagen, dass in 19 von 20 Jahren der Anteil der männlichen Babys zwischen 51.4 und 53.8 Prozent liegt. Die gleiche Rechnung mit den Geburtenzahlen von Deutschland ergibt zum gleichen Niveau ein Konfidenzintervall

$$C_{734475}(377586) =]0.5129, 0.5152[.$$

Die Tatsache, dass in das Frankfurter Intervall nur sehr wenig Überlapp mit dem auf viel mehr Daten basierenden deutschlandweiten Intervall hat lässt vermuten, dass gerade im Jahr 2001 in Frankfurt untypisch viele männliche Babys geboren wurden - vielleicht war ja 2001 das eine aus 20 Jahren, wo die 5-prozentige Chance wahr wurde, dass die Anzahl der Geburten sehr weit von ihrem üblichen Verhältnis abweicht? Wenn wir allerdings nur die Daten aus Frankfurt und dem Jahr 2001 hätten, dann bliebe uns dies völlig verborgen.

(7.8) Testen: Fehler erster und zweiter Art

Es ist in vielen Bereichen des Lebens so, dass man eine Ja-Nein-Entscheidung mit weitreichenden Folgen treffen muss, die auf „stetigen“ Daten beruht. Schönes Beispiele sind hier demokratische Abstimmungen über Dinge wie den Austritt von Großbritannien aus der EU oder über den nächsten Präsidenten der USA. Hier macht ein sehr geringer Unterschied in der Anzahl der jeweils abgegebenen Stimmen einen extrem großen Unterschied im Ergebnis. Weitere Beispiele sind die Zulassung oder Nichtzulassung eines Medikaments bei oft nicht mit völliger Sicherheit zu bestimmender Wirksamkeit und Sicherheit, oder die Abschaltung eines Atomkraftwerks aufgrund von leicht abnormalen Kennzahlen (ab wann wird man nervös?).

Mathematisch kann man das als Unstetigkeit auffassen: Wenn eine Funktion, die Werte in \mathbb{R} nimmt, nur die Werte 0 und 1 ausspucken kann, dann muss es (falls beide Werte auch angenommen werden) irgendwo eine Sprungstelle geben, und nahe dieser Sprungstelle machen winzige Veränderungen einen riesigen Unterschied. Je nach Lebenseinstellung und Situation machen solche Unstetigkeiten das Leben erst interessant oder sind ein nicht zu vermeidendes Ärgernis, in jedem Fall sind sie jedoch vorhanden und wir müssen mit ihnen umgehen. ²⁸⁾

²⁸⁾In manchen Fällen (vor allem bei Regeln und Gesetzen) resultiert so eine Unstetigkeit allerdings aus purer Dummheit oder mangelnder mathematischer Bildung - beispielsweise bekommt man bei der Überbrückungshilfe 2 zur Corona-Pandemie 90 % der Fixkosten erstattet, wenn man einen Umsatzeinbruch von 70.0001 % hatte, aber nur 50 %, wenn der Umsatzeinbruch nur 69.999 % betrug. Hier gibt es keinen Grund, warum man nicht eine stetige Funktion des Umsatzeinbruches als Erstattungs-Prozentzahl wählen sollte – außer vielleicht, dass man das Konzept stetiger Funktionen in den relevanten Behörden nicht kennt, oder Angst hat, eine Regelung aufzustellen, zu deren Formulierung man eine mathematische Formel hinschreiben muss.

Die Testtheorie ist dazu entwickelt, um in solchen Situationen auf nachvollziehbare und rationale Weise Ja-Nein-Entscheidungen zu treffen. Um dies zu tun, formalisiert sie zunächst die beiden Entscheidungen. Meist ist eine der beiden Entscheidungen mit wesentlich höherem Risiko behaftet als die andere, wenn sie sich denn nachträglich als die falsche herausstellt. Zum Beispiel:

- (1) Schaltet man ein Atomkraftwerk irrtümlich ab, obwohl alles in Ordnung war, hat man Ressourcen und Geld verschwendet. Schaltet man es jedoch nicht ab, obwohl ein kritischer Fehler vorlag, hat man wesentlich mehr Ärger.
- (2) Lässt man ein Medikament irrtümlich zu, obwohl es schwere Nebenwirkungen hat (oder wirkungslos ist), dann hat man entweder tausende geschädigte Menschen (oder, falls wirkungslos, einen sehr hohen Schaden für die öffentlichen Krankenkassen). Verweigert man dem Medikament jedoch die Zulassung, obwohl es wirken würde, dann ist dies eine verpasste Chance, aber niemand bemerkt etwas davon²⁹⁾.
- (3) Man hat eine sehr große Lieferung Feuerwerkskörper bekommen. Der Hersteller verspricht, dass höchstens 5 % der Raketen nicht funktionieren, ansonsten gibt es Geld zurück. Man zündet probeweise 50 Raketen, davon starten 4 nicht, also 8 %. Soll man reklamieren? Wenn man es tut, werden alle Raketen gezündet, und man erhält den vollen Kaufpreis und Schadenersatz, falls wirklich mehr als 5% nicht starten. Ansonsten bekommt man jedoch gar nichts und die Raketen sind auch weg. Die Reklamation ist also mit höherem Risiko verbunden als die Möglichkeit, dass man nicht reklamiert und dadurch nicht bemerkt, dass tatsächlich 5.5 % der Raketen defekt sind.
- (4) Versucht man mit einem Experiment eine etablierte Lehrmeinung zu stürzen, und es stellt sich heraus, dass man sich geirrt hat und die Lehrmeinung doch gilt, ist man blamiert. Veröffentlicht man das Experiment wegen eigener Zweifel jedoch nicht, und die Lehrmeinung ist tatsächlich falsch, dann ist man eben nicht diejenige, die dies herausgefunden hat, und das Leben geht normal weiter.
- (5) Entscheidet man sich für den Austritt von Großbritannien aus der EU, dann hat das enorme Konsequenzen - eine falsche Entscheidung diesbezüglich wäre sehr schmerzhaft. Entscheidet man sich dagegen irrtümlich für den Verbleib, dann bleibt alles, wie es ist, und man weiß nicht, was man verpasst hat.

Die Theorie der Tests formalisiert dies, indem sie zwei sogenannte Hypothesen formuliert: die Annahme, dass die risikoarme Entscheidung die richtige ist, nennt man **Nullhypothese**. Die Annahme, dass man sich für die riskante Variante entscheiden sollte, nennt man **Alternativhypothese**. Die Argumente, aufgrund derer man sich für eine der beiden Hypothesen entscheidet, sind die Daten. In unseren Beispielen:

- (1) Beim Atomkraftwert sind die Daten die Werte der Messinstrumente, die Nullhypothese ist, dass die Daten besorgniserregend sind und das Wert abgeschaltet werden muss, die

²⁹⁾Wir sollten aber auch wichtige Schwäche in dieser Denkweise nicht unbemerkt lassen: natürlich ist es keinesfalls gesagt, dass man mit der irrtümlichen Nichtzulassung des Medikamentes nicht viel größeren Schaden anrichtet, weil viele Menschen sterben müssen, die man sonst hätte heilen können. Das wird aber nie jemand erfahren, während für eine fehlerhafte Zulassung jemand die Verantwortung übernehmen muss. Dieser Mechanismus sorgt in modernen Gesellschaften in öffentlich regulierten Bereichen für eine systematische Überbetonung der Sicherheit zu Lasten der Gelegenheit. Weil das aber eben so ist, ist die Nichtzulassung in diesem Fall die „sichere Variante“.

Alternativhypothese ist, dass diese Daten noch in Ordnung sind und man sich keine Sorgen zu machen braucht.

- (2) Beim Medikament sind die Daten die Ergebnisse einer Studie. Die Nullhypothese ist, dass das Medikament wirkungslos und gesundheitlich bedenklich ist, die Alternativhypothese ist, dass das Medikament wirkt und gesundheitlich unbedenklich ist.
- (3) Bei den Feuerwerkskörpern ist die Nullhypothese, dass die Ausfallquote unter 5 % liegt. Die Daten sind die Ergebnisse unserer getesteten 50 Raketen. Die Alternativhypothese ist, dass wir betrogen worden sind und reklamieren sollten.
- (4) Bei der Lehrmeinung kommen die Daten aus unseren Experiment. Die Nullhypothese ist, dass die Lehrmeinung stimmt, die Alternative ist, dass wir eine wissenschaftliche Sensation gefunden und die althergebrachte Lehrmeinung widerlegt haben.
- (5) Im Fall des Brexit könnte man als Nullhypothese der Verbleib in der EU formulieren, als Alternative den Austritt. Die Daten wären natürlich die Ergebnisse der Referendums, aber sinnvollerweise auch möglichst neutrale und belastbare wissenschaftliche Expertisen über die Folgen des Austritts. Man sieht schon, dass in der Politik die Testtheorie keine Rolle spielt.

Hat man festgelegt, was Nullhypothese und Alternative sind, dann führt man die sogenannten **Fehler erster Art** und **Fehler zweiter Art** ein. Hierbei ist der Fehler erster Art derjenige, der weh tut: das Nichtabschalten des AKW samt folgendem GAU, die fehlerhafte Zulassung des Medikaments, die fehlerhafte Reklamation der Feuerwerkskörper, die fälschliche Behauptung, die Lehrmeinung sei falsch. Der Fehler zweiter Art ist dagegen der, der zwar ärgerlich ist, aber mit dem man gut leben kann, also die unnötige Abschaltung des AKW und so weiter. Formal:

- Einen **Fehler erster Art** begeht man, wenn man die Nullhypothese ablehnt, obwohl sie wahr ist.
- Einen **Fehler zweiter Art** begeht man, wenn man die Nullhypothese nicht ablehnt, obwohl sie stimmt.

(7.9) Testtheorie: formaler Rahmen

Wir brauchen nun einen formalen Rahmen, in dem wir die obigen Beispiele beschreiben können und eine Entscheidungsregel aufstellen können. Als Grundlage unserer Entscheidung dienen ja die Daten, beispielsweise Zahlen x_1, \dots, x_n . Der erste und ganz wesentliche Schritt ist, dass wir uns vorstellen, dass diese Zahlen durch einen (uns unbekanntem) Würfel erzeugt wurden. Die möglichen Würfel, die benutzt worden sein könnten, parametrisieren wir wieder wie vorher mit $\theta \in \Theta$ durch. Wir teilen nun Θ in zwei Teile ein: einerseits H_0 , den Bereich der Nullhypothese. Wenn das wahre θ sich in H_0 befindet, dann würden wir uns irren, wenn wir die Nullhypothese ablehnen. Andererseits $H_1 = \Theta \setminus H_0$, den Bereich der Alternativhypothese. Wenn sich das wahre θ in H_1 befindet, dann sind wir im Recht, wenn wir die Nullhypothese ablehnen.

Unsere Aufgabe ist es nun, aufgrund der vorliegenden Daten entweder die Nullhypothese nicht abzulehnen (also zu behaupten, dass $\theta \in H_0$ ist), oder sie abzulehnen (also $\theta \in H_1$ zu behaupten). Bevor wir erklären, wie wir das machen, sehen wir uns nochmals unsere Beispiele an:

- (1) Im Fall des Atomkraftwerkes könnte man sich vorstellen, dass $\theta \in \mathbb{R}$ eine Zahl ist, die angibt, wie stabil das System läuft. Für $\theta < 10$ ist alles völlig sicher, ab $\theta > 10$ beginnt

die Gefahr zu wachsen, und bei $\theta > 100$ ist eine Katastrophe zu erwarten. Wir können also zum Beispiel $H_0 = [10, \infty)$ und $H_1 =]-\infty, 10[$ wählen. Da die Messinstrumente nicht mit völliger Zuverlässigkeit arbeiten können, bekommen wir, wenn das System sich im Zustand θ befindet, lediglich eine Normalverteilte Zufallsvariable X angezeigt, die eine Normalverteilung mit dem unbekanntem Mittelwert θ und der bekannten Varianz 0.1 hat. Wir wollen entscheiden, ab welchem angezeigten Wert wir das System abschalten.

- (2) Beim Medikament beschränken wir unser Beispiel auf die Wirksamkeit: wir haben es an 100 Freiwilligen getestet, und haben (in einer Langzeitstudie) jeweils die Restlebenszeit nach der Behandlung ermittelt. Wir stellen uns vor, dass diese (gemessenen) Lebenszeiten auf einer Zufallsvariable mit Median θ „erwürfelt“ wurden. Eine Kontrollgruppe haben wir mit einem Placebo behandelt, und ebenfalls die Restlebenszeit ermittelt. Wir stellen uns vor, dass Restlebenszeit der Kontrollgruppe mit einer Zufallsvariable mit Median $\tilde{\theta}$ erwürfelt wurde. Die Nullhypothese ist $\theta \leq \tilde{\theta}$, also die Unwirksamkeit oder sogar Schädlichkeit des Experimentes. Wir wollen wissen, ob wir aus den Daten schließen können, dass die Nullhypothese falsch und in Wirklichkeit $\theta > \tilde{\theta}$ ist. Unser Parameterraum wäre dann also $\Theta = \{(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2 : \theta > 0, \theta' > 0\}$, und die Nullhypothese wäre $\{(\theta, \theta') \in \Theta : \theta \leq \theta'\}$.
- (3) Die Feuerwerkskörper modellieren wir einfach mit einer Bernoulli-Verteilung: bei jeder Rakete wird eine Münze geworfen, die mit einer (unbekannten) Wahrscheinlichkeit p einen Erfolg (d.h. eine intakte Rakete) erzielt. Wir haben das Ergebnis von 50 solchen Münzwürfen vorliegen und wollen herausfinden, ob $p > 0.05$ ist. Genauer: wir wählen $H_0 = [0, 0.05)$ und $H_1 = [0.05, 1]$.
- (4) Bei dem Experiment zur Lehrmeinung kann es zum Beispiel um den Energieverbrauch von Bakterien gehen. Man misst bei 40 unabhängigen Bakterienkulturen den Energieverbrauch, und nimmt an, dass die Ergebnisse normalverteilt mit unbekannter Varianz und unbekanntem Mittelwert sind. Mit anderen Worten: wir nehmen an, dass unsere 40 Messungen durch 40 mal unabhängig würfeln auf Gaußverteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{40} zustande gekommen sind, deren Mittelwert θ und deren Varianz σ^2 wir nicht kennen. Die Lehrmeinung könnte sein, dass $\theta = 10$ ist. Dies bedeutet, dass für uns $H_0 = \{10\}$, und $H_1 = \mathbb{R} \setminus \{10\}$ ist. Wir wollen also wissen, ab welchen Messergebnissen wir $\theta = 10$ ziemlich sicher ausschließen können.
- (5) Das Beispiel des Brexit ist nicht besonders sinnvoll und wurde hauptsächlich zum Zweck der Unterhaltung gewählt. Wir verfolgen es nicht weiter.

Neben dem Modellraum Θ und den Hypothesen H_0 und H_1 ist das **Niveau** $\alpha \in]0, 1[$ eines Tests der dritte wichtige Begriff. Um seine Rolle zu verstehen, erinnern wir uns nochmals daran, dass wir uns ja aufgrund der Daten (und nur der Daten) dafür oder dagegen entscheiden müssen, ob zur Erzeugung der Daten „ein Würfel mit $\theta \in H_0$ verwendet wurde“ oder nicht. Mit anderen Worten: wir müssen eine **Entscheidungsregel** T einführen, die es uns erlaubt, angesichts der Daten entweder H_0 oder H_1 für wahr zu erklären. Mathematisch haben wir es also mit einer Funktion $T : \mathfrak{X} \rightarrow \{0, 1\}$ zu tun, die gegebene Daten in 0 (wir behaupten, H_0 sei zumindest nicht auszuschließen) oder 1 (wir behaupten, H_1 sei wahr) abbildet. Schließlich wollen wir eine Fehlentscheidung der Art „Wir haben H_1 für wahr erklärt, aber in Wirklichkeit gilt H_0 “, also einen Fehler erster Art, sehr dringend vermeiden. Das Niveau α legt fest, wie dringend, und

zwar in folgendem Sinn: wenn wir (neue) Daten mit einem Zufallsmechanismus erzeugen, der zu einem beliebigen $\theta \in H_0$ gehört, und dann auf Grundlage dieser zufälligen Daten unsere Entscheidungsregel T anwenden, dann werden wir in höchstens $\alpha \cdot 100\%$ der Fälle (also mit höchstens Wahrscheinlichkeit α) die falsche Entscheidung treffen und behaupten, dass $\theta \in H_1$ ist. Wie schon früher hilft uns das bei *konkret* vorliegenden Daten nicht direkt weiter - wenn sie uns in die Irre führen, dann haben wir keine Chance, das zu bemerken. Was uns ein Test zum Niveau α aber garantiert, ist, dass wir bei der Durchführung vieler weiterer identischer Versuche (die in der Praxis aber nicht immer möglich sind!) nur in $\alpha \cdot 100\%$ der Fälle die falsche Entscheidung treffen *würden*.

Wir fassen all dies nochmals übersichtlich zu einer Definition zusammen:

Definition:

- Für einen statistischen Test teilen wir den Parameterraum Θ in disjunkte Teilmengen H_0 und H_1 auf, die zusammen Θ ergeben.
- Die Menge \mathfrak{X} unserer Daten hat die Form³⁰⁾ (x_1, \dots, x_n) mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Zu jedem $\theta \in \Theta$ gehört ein Zufallsmechanismus, codiert durch Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Bildraum \mathbb{R} .
- Ein **Test zur Nullhypothese** H_0 ist eine (erst einmal völlig beliebige) Abbildung $T : \mathfrak{X} \mapsto \{0, 1\}$, die wir so interpretieren, dass wir im Fall $T(x_1, \dots, x_n) = 0$ einen Zufallsmechanismus aus H_0 für die Erzeugung der Daten verantwortlich machen, und ansonsten einen aus H_1 .
- Man sagt, ein Test T **hält das Niveau** $\alpha > 0$ **ein**, wenn für jede beliebige Wahl von $\theta \in H_0$ gilt: sind X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen, die zu diesem $\theta \in H_0$ gehören, dann ist

$$\mathbb{P}(T(X_1, \dots, X_n) = 1) \leq \alpha.$$

Wie schon im Fall der Konfidenzintervalle können wir nun ganz schlau sein und einfach immer H_0 behaupten, egal was die Daten sagen. Dann sind wir auf der sicheren Seite. Natürlich ist das nicht Sinn der Sache - wir wollen für einen *möglichst großen* Teilbereich $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ zu der Aussage gelangen können, dass H_1 gilt, ohne das Niveau zu verletzen. Sie sollten aber bemerken, dass wir diese Idealvorstellung nirgendwo fest vereinbart haben. Man kann das tun (und wir werden bei der Fallzahlplanung eine Möglichkeit dazu kennen lernen), im Moment schließen wir aber die trivialen Tests, die immer H_0 ergeben, nicht aus.

(7.10) Der Gaußtest

Der Gaußtest der Größe $n \in \mathbb{N}$ wird angewandt, wenn wir n Datenwerte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vorliegen haben, von denen wir annehmen können, dass sie durch unabhängiges Würfeln mit einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ (wird statt θ benutzt) und bekannter Varianz σ^2 entstanden sind. Da wir uns für den Mittelwert interessieren, ist es vernünftig (und auch das beste, was man tun kann), aus den Daten zunächst den empirischen Mittelwert zu bestimmen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Von den vielen Möglichkeiten, $H_0 \subset \mathbb{R}$ zu wählen, sind vor allem drei wichtig:

³⁰⁾man kann auch viel allgemeinere Daten zulassen, das brauchen wir aber nicht.

- **Die linksseitige Alternative:** Dieser Fall heißt so, weil die Alternativhypothese H_1 auf dem Zahlenstrahl *links* von der Nullhypothese zu finden ist - es gibt also ein $y \in \mathbb{R}$, wo dass $H_0 = [y, \infty[$ und $H_1 =] - \infty, y[$. Insbesondere machen wir hier einen Fehler erster Art, wenn wir aufgrund der Daten zu dem Schluss $\mu < y$ kommen, während in Wirklichkeit $\mu \geq y$ ist.
- **Die rechtsseitige Alternative:** wie oben, nur umgekehrt, nun ist H_1 rechts von H_0 . Es gibt also ein $y \in \mathbb{R}$ mit $H_0 =] - \infty, y]$ und $H_1 =]y, \infty[$.
- **Die beidseitige Alternative:** Hier ist die Nullhypothese extrem ehrgeizig: sie besteht nur aus einem einzigen Wert $y \in \mathbb{R}$. Deswegen liegt die Alternativhypothese $H_1 =] - \infty, y[\cup]y, \infty[$ zu beiden Seiten von $H_0 = \{y\}$. Wir machen also einen Fehler erster Art, wenn wir $\mu \neq y$ behaupten, obwohl $\mu = y$ ist.

Für eine Entscheidungsregel aufgrund der Datenlage kommt eigentlich auch nur eine Methode in Frage:

- Im Fall der linksseitigen Alternative lehnen wir H_0 ab, wenn der Mittelwert \bar{x} der Daten „ausreichend viel“ kleiner als y ist.
- Im Fall der rechtsseitigen Alternative lehnen wir H_0 ab, wenn \bar{x} „ausreichend viel“ größer als y ist.
- Im Fall der beidseitigen Alternative lehnen wir H_0 ab, wenn \bar{x} „weit genug weg“ von y ist.

Der Knackpunkt ist hier natürlich, was wir mit „ausreichend viel“ und „weit genug“ meinen. Das können wir uns aber mit gar nicht so viel Aufwand überlegen - es kommt ja darauf an, für jeden beliebigen „wahren“ Mittelwert $\mu \in H_0$ höchstens mit Wahrscheinlichkeit α fälschlicherweise H_1 zu behaupten. Im Falle der beidseitigen Alternative kommt als „wahrer Würfel mit Mittelwert in H_0 “ natürlich nur der mit Mittelwert $\mu = y$ in Frage. Bei den beidseitigen Alternativen ist es anschaulich klar (und man kann das auch recht leicht beweisen, was wir aber weglassen), dass der Fall $\mu = y$, wo der Würfel genau auf der Kante von H_0 sitzt, derjenige ist, der uns am meisten Schwierigkeiten machen wird. Wir nehmen also in allen Fällen an, dass die Daten durch normalverteilte Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Mittelwert $\mu = y$ (und natürlich Varianz σ^2) erzeugt wurden, und fragen uns, wie wir die Entscheidungsregel einrichten müssen, um diesen Würfel nicht fälschlicherweise in H_1 einzuordnen.

Nun erinnern wir uns, dass die Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist, berechnen

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y = y,$$

und

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

und stellen fest, dass unter der Annahme, dass der wahre Mittelwert $\mu = y$ ist und die Daten durch entsprechende Zufallsvariable erzeugt wurden, die Größe $Z := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ eine Normalverteilung mit Mittelwert y und Varianz σ^2/n hat. Also ist

$$\frac{Z - y}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\sqrt{n}(Z - y)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass Z ein Ergebnis kleiner als $y - c$ (für $c > 0$) erzeugt, ist

$$\mathbb{P}(Z < y - c) = \mathbb{P}(Z - y < -c) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(Z - y)}{\sigma} < -\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right).$$

Wenn die Daten also tatsächlich durch eine Normalverteilung mit Mittelwert y entstanden sind, dann liegt ihr Mittelwert genau mit Wahrscheinlichkeit α im Intervall $(-\infty, c]$, falls wir c so wählen, dass

$$\Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{nc}}{\sigma} = q_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad c = -q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Hierbei ist q_α das α -Quantil der Standard-Normalverteilung. Umgekehrt bedeutet dies, dass wir bei Daten, deren Mittelwert unterhalb von $y - c$ für dieses c liegt, die Nullhypothese ablehnen können, und „auf lange Sicht“ in höchstens $\alpha \cdot 100$ % der Fälle unrecht haben werden. Wir fassen zusammen:

Entscheidungsregel für den linksseitigen Gaußtest: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf eine Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2 erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu \in [y, \infty[$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq y - q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten diese Ungleichung erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Der Fall der rechtsseitigen Alternative geht (wegen der Symmetrie der Normalverteilung um ihren Mittelwert herum) genau so. Wir schreiben hier nur das Endergebnis auf, bitte überlegen Sie sich zur Übung die Details.

Entscheidungsregel für den rechtsseitigen Gaußtest: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2 erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu \in]-\infty, y]$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq y + q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten diese Ungleichung erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Beachten Sie in beiden die Rollen von σ , α und n . Eine größere Varianz σ und ein kleineres (ehrgeizigeres) α führen beide zu einer strengeren Bedingung - man kann H_0 (im Vergleich zu kleinerem σ oder größerem α) erst ablehnen, wenn man weiter vom kritischen Wert y entfernt ist. Die Anzahl n der Versuche dagegen hilft uns: je größer n ist, desto näher rückt die Grenze $y \pm q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ab der wir H_0 ablehnen können, an y heran.

Der Fall bei der beidseitigen Alternative ist ein wenig anders als die vorigen. Hier wollen Sie die Nullhypothese ablehnen, wenn der Mittelwert \bar{x} der Daten *entweder* zu groß *oder* zu klein ist. Es ist naheliegend (aber nicht zwingend, siehe unten!), eine Regel der Form „wenn $|y - \bar{x}| > c$

ist, dann lehne H_0 ab“ aufzustellen. Wenn man das tut, dann kann man wieder leicht nachrechnen, wie groß c sein muss. Wie oben gilt: Falls H_0 stimmt, also für unabhängige X_i mit $X_i \sim \mathcal{N}(y, \sigma^2)$, ist der Mittelwert der zufällig erzeugten Daten $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ normalverteilt, und wir haben wieder

$$\frac{Z - y}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\sqrt{n}(Z - y)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns irren, wenn wir ab $|y - \bar{x}| > c$ die Nullhypothese ablehnen, ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Z - y| > c) &= \mathbb{P}(Z - y < -c) + \mathbb{P}(Z - y > c) = \mathbb{P}(Z - y < -c) + 1 - \mathbb{P}(Z - y \leq c) = \\ &= \Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) + 1 - \left(1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Wir müssen nun also c so wählen, dass $\Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right) = \alpha/2$ ist (statt $= \alpha$, wie oben). Wir wiederholen die vorher gemachten Rechnungen, wobei wir α durch $\alpha/2$ ersetzen, und kommen zu der

Entscheidungsregel für den beidseitigen Gaußtest: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2 erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu = y$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq y - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq y + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten eine dieser beiden Ungleichungen erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Wir stellen fest, dass wir im Fall der beidseitigen Alternative „weiter weg“ von y sein müssen, um ablehnen zu können. Als ausgleichende Gerechtigkeit dürfen wir dafür sowohl bei zu großen als auch bei zu kleinen Werten von \bar{x} ablehnen, während wir bei der linksseitigen Alternative ja auch im Fall $\bar{x} - y = 10^{22}$ (aus gutem Grund) die Nullhypothese als wahr erachten. Wenn man in der Rechnung schaut, dann ist dieser „beidseitige Ablehnungsbereich“ auch gerade der Grund dafür, dass man hier $\alpha/2$ statt α in den Quantilen stehen hat - man muss vorsorglich verhindern (genauer: unwahrscheinlich machen), dass man sich durch untypisch große *oder* durch untypisch kleine Daten irrt. Bei der linksseitigen Alternative dagegen sind untypisch (viel zu) große Daten kein Problem - wir nehmen die Nullhypothese höchstens mit etwas mehr Überzeugung an, als das angebracht wäre, was uns aber nicht schadet. Trotz dieser vernünftigen Erklärung gibt es einige sehr merkwürdige Konsequenzen, die wir aber erst nach dem nächsten Punkt besprechen wollen. Stattdessen hier noch ein

Beispiel: Im Atomkraftwerk zeigen Ihre Messgeräte potentiell bedenkliche Werte an. Leider ist aufgrund von Mittelkürzungen bei der letzten Wartung das hochgenaue Messgerät durch billigere ausgetauscht worden, von denen man weiß, dass ihre Messwerte um den wahren Wert herum normalverteilt mit einer Varianz von 2 sind - zum Ausgleich haben Sie aber statt früher einem nun 3 Messgeräte.

Diese Messgeräte zeigen also die Werte 8.1, 8.4 und 7.8 an. Ab einem Wert von 10 wird es gefährlich. Die Nullhypothese ist, dass der wahre Warnwert 10 oder mehr ist, und Sie abschalten müssen. Da Sie eine Katastrophe gerne mit hoher Sicherheit verhindern wollen, legen Sie sich auf das sehr strenge Niveau $\alpha = 0.0001$ fest. Sollten Sie abschalten?

Wir benutzen den Gaußtest mit $H_0 = [10, \infty[$ und linksseitiger Alternative, und bekommen aufgrund unserer Daten den Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{3}(8.1 + 8.4 + 7.8) = 8.1$. Die rechte Seite der Entscheidungsregel berechnet sich zu

$$y - q_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 - q_{0.999} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 10 - 3.09 \cdot 0.81 \approx 7.47$$

Da diese Zahl kleiner als 8.1 ist, sind die gemessenen Werte zu hoch, um sicher genug zu sein, dass Sie das Kraftwerk weiter betreiben können - Sie müssen also abschalten.

(7.11) Der t -Test

Ein t -Test muss gemacht werden, wenn man annehmen kann, dass die Daten normalverteilt sind, wenn aber sowohl Mittelwert als auch Varianz unbekannt sind. Der t -Test ist (wie der Gaußtest) ein Test auf den Mittelwert μ der Daten, die unbekannte Varianz interessiert uns nicht, verändert aber den Test, den wir machen müssen.

Um einen t -Test zu machen, verschafft man sich bei gegebenen Daten x_1, \dots, x_n zunächst deren empirischen Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und die empirische Varianz und empirische Standardabweichung

$$v(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad s(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{v(x_1, \dots, x_n)}.$$

$v(x_1, \dots, x_n)$ soll die Rolle übernehmen, die beim Gaußtest die bekannte Varianz σ^2 gespielt hat. Das Problem ist aber folgendes: beim Gaußtest war es so, dass man unter der Annahme, die Daten seien durch normalverteilte Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Mittelwert y entstanden, die Verteilung der Zufallsvariable $\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - y \right) / \sigma$ direkt angeben konnte, das war nämlich die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$. Dies war ja dann auch der Grund, warum die Quantile der Normalverteilung in der Entscheidungsregel eine Rolle gespielt haben. Da wir aber nun σ nicht kennen, sind wir gezwungen, es durch die empirische Varianz zu ersetzen, und müssen stattdessen die Zufallsvariable

$$W := \frac{\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - y \right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2}}$$

ansetzen. Diese ist leider nicht mehr normalverteilt, weil sie ja keine einfache Summe von normalverteilten Zufallsvariablen ist, sondern die X_i im Nenner (und dann auch noch einmal auf recht komplizierte Weise!) vorkommen. Die gute Nachricht ist jedoch, dass man die Verteilung dieser Zufallsvariable trotzdem mehr oder weniger konkret ausrechnen kann, und es ist die sogenannte Student'sche t -Verteilung mit Parameter $n-1$ (für n Datenpunkte). Da man mindestens 2 Datenpunkte braucht, um überhaupt eine empirische Varianz zu berechnen, ist der kleinste mögliche Parameter der t -Verteilung gleich 1.

Bis auf die Verteilung, die W hat, sind aber alle anderen Überlegungen genau wie beim Gaußtest, und daher sind auch die Entscheidungsregeln sehr ähnlich. Sie lauten:

Entscheidungsregel für den linksseitigen t -Test: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu \in [y, \infty[$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq y - t_{n-1, 1-\alpha} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}$$

Hierbei ist $t_{n-1, 1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der t -Verteilung zum Parameter $n-1$, das entweder vom Computer ausgerechnet oder aus einer Tabelle entnommen werden muss. Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten diese Ungleichung erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Entscheidungsregel für den rechtsseitigen t -Test: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu \in [-\infty, y]$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq y + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}$$

Hierbei ist $t_{n-1, 1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der t -Verteilung zum Parameter $n-1$, das entweder vom Computer ausgerechnet oder aus einer Tabelle entnommen werden muss. Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten diese Ungleichung erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Entscheidungsregel für den beidseitigen t -Test: Wir nehmen an, die Daten x_1, \dots, x_n wurden durch unabhängiges Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz erzeugt. Die Nullhypothese ist $\mu = y$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Eine Entscheidungsregel, die das Niveau $\alpha > 0$ einhält, besteht darin, die Nullhypothese abzulehnen, wenn gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq y - t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq y + t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}.$$

Hierbei ist $t_{n-1, 1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$ -Quantil der t -Verteilung zum Parameter $n-1$, das entweder vom Computer ausgerechnet oder aus einer Tabelle entnommen werden muss. Anders ausgedrückt: wenn unsere Daten eine dieser beiden Ungleichungen erfüllen, dann dürfen wir die Nullhypothese zum Niveau α ablehnen.

Wie schon beim Gaußtest, und aus den gleichen Gründen wie dort, muss man beim beidseitigen Test das $(1-\alpha/2)$ -Quantil statt der $1-\alpha$ -Quantil benutzen. Dass dies nicht immer zu intuitiv vernünftigen Schlussfolgerungen führt, sehen wir am folgenden

Beispiel: Im Beispiel (4) unserer Testbeispiele wollen Sie die wissenschaftliche Lehrmeinung widerlegen, dass der Energieverbrauch von Bakterien den Wert genau 10 (in passenden Einheiten) hat. Sie machen dazu 40 Versuche und messen jeweils den Energieverbrauch x_i im i -ten

Versuch. Sie gehen davon aus, dass Sie die Ergebnisse Ihrer Versuche als Würfeln auf einer Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert μ (dem wahren Energieverbrauch) und unbekannter Varianz σ^2 (dem Resultat der unvermeidlichen Schwankungen und Messfehler bei Versuchen) interpretieren dürfen. Daher machen Sie einen t -Test mit $n = 40$ Versuchen. Sie berechnen aus Ihren Daten den empirischen Mittelwert $\bar{x} = 10.7$ und die empirische Standardabweichung $s(x_1, \dots, x_n) = 2.3$. Sie wollen ein Niveau von $\alpha = 0.05$ einhalten, dies ist ein weithin akzeptierter Wert in der Wissenschaft. Da der Mittelwert Ihrer Daten mehr als 10 beträgt, kann die erste Ungleichung der Entscheidungsregel für den beidseitigen Test auf keinen Fall gelten. Sie müssen also noch prüfen, ob der Wert 10.7 größer ist als die rechte Seite der zweiten Ungleichung, also größer als

$$y + t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}} = 10 + t_{39, 0.975} \frac{2.3}{\sqrt{40}} \approx 10 + 2.02 \cdot 0.36 \approx 10.73.$$

Da dies nicht der Fall ist, können Sie die Lehrmeinung, dass der Energieverbrauch exakt 10 beträgt, nicht zum Niveau 0.05 widerlegen!

Die etwas unintuitive Tatsache ist jedoch, dass Sie die viel weniger ehrgeizige und tatsächlich logisch schwächere Aussage „der Energieverbrauch beträgt 10 oder weniger“ durchaus hätten widerlegen können - hierzu benutzen Sie ja dann den einseitigen t -Test, und der liefert Ihnen als rechte Seite der Ungleichung

$$y + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}} = 10 + t_{39, 0.95} \frac{2.3}{\sqrt{40}} \approx 10 + 1.68 \cdot 0.36 \approx 10.61.$$

Hier sind Ihre Messwerte $\bar{x} = 10.7$ dann wirklich größer! Wie kann das sein, bzw. wie können wir so einer offensichtlich unsinnigen Regelung vertrauen? Um das zu verstehen, muss man einen Test zum Niveau α als so etwas wie eine Wette umformulieren: wir legen einen Ablehnungsbereich $\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ im Datenraum fest, und wenn die Daten in diesen Ablehnungsbereich fallen, dann „dürfen“ wir H_0 ablehnen. Die einzige weitere Spielregel ist, dass wir den Ablehnungsbereich nicht zu groß wählen dürfen: es darf nämlich für keinen der möglichen Würfel aus H_0 die Wahrscheinlichkeit größer als α sein, dass mit diesem Würfel erzeugte Daten in \mathfrak{X}_1 liegen. Innerhalb dieser Spielregel sind wir jedoch völlig frei: insbesondere wäre es uns erlaubt gewesen, auch im beidseitigen obigen Beispiel (also mit $H_0 = \{10\}$) die Entscheidungsregel so zu wählen, dass wir H_0 ablehnen, falls $\bar{x} \geq y + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}$ (mit α , nicht $\alpha/2$) ist. Dieser Ablehnungsbereich erfüllt die Spielregeln, prüfen Sie das nach! Allerdings wäre der Ablehnungsbereich dann wirklich nur das Intervall $[y + t_{n-1, 1-\alpha} \frac{s(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{n}}, \infty[$, und insbesondere hätten wir dann akzeptieren müssen, dass wir H_0 nicht ablehnen dürfen, auch wenn die Daten uns klar sagen, dass der wahre Wert viel *kleiner* als $y = 10$ ist, also beispielsweise falls $\bar{x} = -1000000$ (ok, ergibt als Energieverbrauch wenig Sinn, aber egal).

Diese Überlegungen lehren uns zwei Dinge:

- 1.) Die Theorie statistischer Tests verlässt das Gebiet der eigentlichen Mathematik schon zum Teil - denn anders als in der Mathematik müssen wir hier naturwissenschaftliches Geschick einfließen lassen, um „sinnvolle“ Tests im Rahmen der bestehenden Spielregeln zu konstruieren. Es reicht nicht, die Spielregeln stumpf einzuhalten und sich dann darauf hinauszureden, dass man ja alles formal richtig gemacht habe;
- 2.) Es ist eminent wichtig, sowohl das Niveau des Tests als auch die genaue Entscheidungsregel

festzulegen, *bevor* man die Daten erhebt. Tut man dies nämlich nicht, dann hat der Test fast gar keinen Wert: denn beim zweiseitigen Test hätten wir ja wegen des „sehr knappen“ Ergebnisses, dass wir H_0 leider nicht zum Niveau $\alpha = 0.05$ ablehnen dürfen, nachträglich entscheiden können, dass das Niveau $\alpha = 0.05$ doch etwas sehr streng war, und dass man in diesem Fall ausnahmsweise mit $\alpha = 0.07$ zufrieden ist, denn 7 % Fehlerquote sind ja auch nicht so viel mehr als 5 %. Damit ist man dann mit dem Datenmittelwert 10.7 (den man ja schon kennt) im Ablehnungsbereich, und man kann seine wissenschaftliche Sensation verkünden. Der Grund, warum das so nicht geht (was nicht heißt, dass es nicht passiert), ist, dass man dann fast alle Tests so machen kann, dass sie das gewünschte Ergebnis liefern.

Noch drastischer geht es, wenn man den Ablehnungsbereich erst dann festlegt, wenn man die Daten kennt. Denn da man ja (im Beispiel) lediglich einen Bereich finden muss, so dass die mit Mittelwert 10 erzeugten Daten mit weniger als Wahrscheinlichkeit α in diesem Bereich landen, könnte man einfach „geschickt“ den Bereich $[10.69999, 10.70001]$ wählen und triumphierend verkünden, dass man sogar zum Niveau $\alpha = 0.0001$ (oder was immer die Wahrscheinlichkeit ist, dass mit Mittelwert 10 erzeugte Daten gerade diesen winzigen Bereich treffen) „bewiesen“ hat, dass 10 nicht der Mittelwert sein kann. Das ist natürlich völliger Blödsinn, aber a priori ist $[10.69999, 10.70001]$ als Ablehnungsbereich natürlich erlaubt. Wenn man ihn aber wählen muss, *bevor* man die Daten gesehen hat, dann braucht man schon gehöriges Glück, damit die Daten genau dort landen, und man hat sich durch die Wahl eines so schlecht gewählten Ablehnungsbereiches nur selbst hereingelegt.

Natürlich ist so ein absurder, nachträglich gewählter Ablehnungsbereich eine sehr plumpe wissenschaftliche Täuschung, die jedem sofort auffallen wird. Leider ist es jedoch in der Statistik recht leicht möglich, Betrug viel besser zu verstecken, manchmal sogar so gut, dass man ihn selbst nicht bemerkt. Zum Glück ist in vielen Bereichen der Naturwissenschaften (Medizin ist oft eine traurige Ausnahme) die Datenlage oft so klar, dass man mit den gängigen Tests sehr klare Ergebnisse erhält. Die Grenzfälle treten meist im regulatorischen Bereich (Zulassung von Medikamenten, Wirkung von Umweltgiften) auf, wo zwar einerseits der Anreiz zum Betrug besonders hoch ist, andererseits aber auch die Regeln sehr strikt sind - hier ist dann beispielsweise nicht nur der genaue Test samt Ablehnungsbereich streng vorgeschrieben, sondern man muss auf vor der Erhebung der ersten Daten den Test bei der entsprechenden Behörde anmelden, die den gesamten Ablauf dann engmaschig überwacht, aufpasst, dass keine Daten „verloren gehen“ etc. - aus gutem Grund!

(7.12) Der Binomialtest

Der Binomialtest wird eingesetzt, wenn man ein „Experiment“ beobachtet, das zwei mögliche Ergebnisse hat. Das kann „Erfolg“ und „Misserfolg“ sein, aber auch „männliches Baby“ oder „weibliches Baby“. Mathematisch codieren wir die beiden Möglichkeiten mit 1 und 0. Wenn die Experimente unabhängig sind, ist die einzige sinnvolle Modellierung, dass es eine „Erfolgswahrscheinlichkeit“ p gibt, mit der die 1 erscheint. Dieses p wollen wir testen.

Die Parametermenge $[0, 1]$ enthält also alle denkbaren Werte für p , und die Daten sind Folgen mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen aus $\{0, 1\}$, also beispielsweise von der Form $(0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$. In diesem Fall ist es tatsächlich sehr sinnvoll, die Datenmenge dadurch zu vereinfachen, dass man einfach die Anzahl der Erfolge zählt. Die Datenmenge (bei n Versuchen) ist somit $\mathfrak{X} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Wenn nun diese Daten durch Aufsummieren der Ergebnisse von n unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n entstehen, von denen jede die Erfolgswahrscheinlichkeit p hat, dann hat $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ eine $b(n, p)$ -Binomialverteilung. Das Ziel bei Tests zum Niveau α ist das gleiche wie vorher: für jeden Parameter $p_0 \in H_0$ soll die Wahrscheinlichkeit, dass zufälliges Würfeln mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_0 Daten erzeugt, die zur Ablehnung von H_0 führen, kleiner oder gleich α sein. Dies führt zu den drei Entscheidungsregeln für den „echten“ Binomialtest - bei allen drei Regeln sei $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ die Gesamtzahl der Erfolge.

Linksseitige Alternative: Hier ist $H_0 = [p_0, 1]$ für $p_0 \in [0, 1]$. Der am schwierigsten zu erkennende Fall unter den Fällen mit $p \in H_0$ ist der Grenzfall $p = p_0$. Wir suchen uns daher das α -Quantil einer $b(n, p_0)$ -binomialverteilten Zufallsvariablen Y , also die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die gilt: $\mathbb{P}(Y \leq k) \geq \alpha$. Nun wählen wir $k_0 = k$ falls $\mathbb{P}(Y \leq k) = \alpha$ und $k_0 = k - 1$ falls $\mathbb{P}(Y \leq k) > \alpha$. Mit diesem k_0 legen wir fest, dass wir H_0 ablehnen, falls die Gesamtzahl der Erfolge in unseren Daten höchstens k_0 ist.

Rechtsseitige Alternative: Hier ist $H_0 = [0, p_0]$ für $p_0 \in [0, 1]$. Der am schwierigsten zu erkennende Fall unter den Fällen mit $p \in H_0$ ist der Grenzfall $p = p_0$. Wir suchen uns daher das $1 - \alpha$ -Quantil einer $b(n, p_0)$ -binomialverteilten Zufallsvariablen Y , also die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die gilt: $\mathbb{P}(Y \leq k) \geq 1 - \alpha$. Dadurch ist automatisch $\mathbb{P}(Y > k) \leq \alpha$. Daher wählen wir hier immer $k_0 = k + 1$. Mit diesem k_0 legen wir fest, dass wir H_0 ablehnen, falls die Gesamtzahl der Erfolge in unseren Daten mindestens k_0 ist.

Beidseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{p_0\}$ für $p_0 \in [0, 1]$. Wie beim Gaußtest wählen wir eine Kombination aus den beiden vorherigen Methoden, müssen aber statt der α -Quantile wieder die $\alpha/2$ -Quantile verwenden³¹⁾. Wir suchen uns daher: erstens das $\alpha/2$ -Quantil einer $b(n, p_0)$ -binomialverteilten Zufallsvariablen Y , also die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die gilt: $\mathbb{P}(Y \leq k) \geq \alpha/2$. Wie oben wählen wir dann $k_- = k$ falls $\mathbb{P}(Y \leq k) = \alpha/2$ und $k_- = k - 1$ sonst. Damit ist $\mathbb{P}(Y \leq k_-) \leq \alpha/2$. Zweitens brauchen wir das $1 - \alpha/2$ -Quantil von Y , also also die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die gilt: $\mathbb{P}(Y \leq k) \geq 1 - \alpha$. Wie oben wählen wir $k_+ = k + 1$. Dadurch ist automatisch $\mathbb{P}(Y \geq k_+) \leq \alpha/2$. Daher wählen wir hier immer $k_0 = k + 1$. Zum Schluss legen wir fest, dass wir H_0 ablehnen, falls die Gesamtzahl der Erfolge in unseren Daten entweder $\leq k_-$ oder $\geq k_+$ ist.

Die Gauß-Approximation des Binomialtests: Die obigen Entscheidungsregeln sind zwar klar formuliert und (hoffentlich) auch nachvollziehbar, aber gerade für große n nicht so leicht zu berechnen. Eine gern benutzte Vereinfachung ergibt sich, wenn man sich daran erinnert, dass die Binomialverteilung sich durch eine Normalverteilung sehr gut approximieren lässt; genauer gesagt ist für eine eine $b(n, p)$ -verteilte Zufallsvariable Y ab ungefähr $np(1 - p) \geq 10$ die Annäherung

$$\mathbb{P}(Y \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 1/2 - pn}{\sqrt{np(1 - p)}}\right)$$

mit recht hoher Genauigkeit richtig, und diese Genauigkeit wird sehr schnell besser, wenn $np(1 - p)$ noch größer wird - siehe (6.16), Beispiel 2 c. Wenn wir das auf die Entscheidungsregel

³¹⁾Wie schon vorher diskutiert könnten wir auch anders vorgehen, und die Werte des Ablehnungsbereiches weniger „gerecht“ auf zu große oder zu kleine Erfolgswahrscheinlichkeiten verteilen. Das ist aber unüblich und ohne weitere Argumente auch schwer zu rechtfertigen.

für die linksseitige Alternative anwenden, bekommen wir (approximativ)

$$\mathbb{P}(Y \leq k_0) \leq \alpha \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k_0 + 1/2 - p_0 n}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{k_0 + 1/2 - p_0 n}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq q_\alpha,$$

wobei q_α das α -Quantil der Standard-Normalverteilung ist. Wir ersetzen das \leq durch ein $=$ für die beste Schranke, formen ein wenig um und erhalten die

Verwerfungsregel für den Binomialtest mit linksseitiger Alternative (Gaußapproximation):

In der Situation $H_0 = [p_0, 1]$ und bei n Versuchen verwirft man die Nullhypothese zum Niveau α , wenn der Anteil k/n der Erfolge die Ungleichung

$$\frac{k}{n} \leq p_0 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)}$$

erfüllt. Hierbei ist $q_{1-\alpha}$ das $1 - \alpha$ -Quantil der Standard-Normalverteilung.

Verwerfungsregel für den Binomialtest mit rechtsseitiger Alternative (Gaußapproximation):

In der Situation $H_0 = [0, p_0]$ und bei n Versuchen verwirft man die Nullhypothese zum Niveau α , wenn der Anteil k/n der Erfolge die Ungleichung

$$\frac{k}{n} \geq p_0 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)}$$

erfüllt. Hierbei ist $q_{1-\alpha}$ das $1 - \alpha$ -Quantil der Standard-Normalverteilung.

Verwerfungsregel für den Binomialtest mit beidseitiger Alternative (Gaußapproximation):

In der Situation $H_0 = \{p_0\}$ und bei n Versuchen verwirft man die Nullhypothese zum Niveau α , wenn der Anteil k/n der Erfolge eine der beiden Ungleichungen

$$\frac{k}{n} \leq p_0 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} \quad \text{oder} \quad \frac{k}{n} \geq p_0 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)}$$

erfüllt. Hierbei ist $q_{1-\alpha/2}$ das $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standard-Normalverteilung.

Bemerkung: manchmal lässt man den Summanden $\pm \frac{1}{2n}$, der aus der Stetigkeitskorrektur kommt, auch weg, dies bringt für fast alle Fälle keine wesentliche Änderung.

Beispiele:

a) Tomatensamen: Von 100 Samen in der Petrischale sind 52 gekeimt. Ihr Laborassistent hat jedoch die Anweisung gehabt, in die Schale ABS-Säure zu geben, und Sie wissen aus der Theorie, dass ABS-Säure zu einer Keimwahrscheinlichkeit von höchstens 0.45 führt. Sie vermuten, dass zu wenig oder gar keine ABS-Säure in die Petrischale gekommen ist. Wie sicher können Sie sich sein? Um das zu prüfen, nehmen wir als Nullhypothese $H_0 = [0, 0.45]$ an, und machen einen Binomialtest zum Niveau $\alpha = 0.1$ mit $n = 100$ und rechtsseitiger Alternative. Da $100 \cdot p_0(1 - p_0) = 24.75 > 0$ ist, können wir die Gaußapproximation nehmen. $p_0 = 0.45$ ist der rechte Rand von H_0 , und wir berechnen

$$p_0 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} = 0.45 + \frac{1}{200} + \frac{1}{10} q_{0.9} \sqrt{0.45 \cdot 0.55} \approx 0.45 + 0.005 + 0.057 = 0.512.$$

Da der tatsächliche Anteil der gekeimten Samen mit 0.52 höher liegt, können Sie die Nullhypothese $p \leq 0.45$ zum Niveau 0.1 ablehnen - Sie können sich also (in dem für Tests relevanten Sinn) „zu 90 % sicher sein“, dass mit dem Experiment etwas nicht gestimmt hat.

b) Geburten: Im Fall der Geburtenregister (Beispiel (7.2 b)) wollen wir klären, ob nicht doch die Geburt eines Mädchens genau gleich wahrscheinlich ist wie die eines Jungen, und wir nur bei den Daten Pech gehabt haben. Wir wählen hier das sehr strenge Niveau $\alpha = 0.00001$ und machen den Binomialtest (natürlich in der Gaußapproximation) mit $n = 6153$ und $H_0 = \{0.5\}$. Wir berechnen

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} = \frac{1}{12306} + \frac{1}{\sqrt{6153}} q_{0.999995} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.000081 + \frac{1}{78.44} \cdot 4.4171 \cdot \frac{1}{2} \approx 0.02823.$$

Unsere Daten ergeben $\frac{k}{n} = \frac{3240}{6153} = 0.52657$, und da $0.52657 < 0.5 + 0.02823$ ist, können wir die Nullhypothese $p = 0.5$ nicht aufgrund unserer Frankfurter Daten zum (zugegebenermaßen extrem ehrgeizigen) Niveau $\alpha = 0.00001$ ablehnen.

Wie sieht es aus, wenn wir die Daten aus ganz Deutschland nehmen? Wir haben dann $n = 734475$ und $k = 377586$. Alles andere bleibt gleich, und wir erhalten

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \sqrt{p_0(1-p_0)} = \frac{1}{1468950} + \frac{1}{\sqrt{734475}} q_{0.999995} \cdot \frac{1}{2} \approx 6.8 \cdot 10^{-7} + 0.0011 \cdot 4.4171 \cdot 0.5 \approx 0.00257.$$

In den deutschlandweiten Daten haben wir $\frac{k}{n} = \frac{377586}{734475} \approx 0.514$. Da $0.514 > 0.5 + 0.00257$ ist, können wir aufgrund der deutschlandweiten Daten die Nullhypothese $p = 0.5$ zum Niveau $\alpha = 0.00001$ ablehnen.

(7.13) Der p -Wert eines Tests

Bisher haben wir beim Testen immer zuerst die Nullhypothese H_0 festgelegt, dann ein Niveau α , und dann die Daten angesehen und nachgeprüft, ob aufgrund dieser Daten H_0 zum Niveau α abgelehnt werden kann. Wie wir schon diskutiert haben, ist diese Reihenfolge auch sehr wichtig für die Integrität unserer Tests.

Trotzdem kann man sich natürlich, falls man H_0 nicht ablehnen konnte, nachträglich die Frage stellen: wie hätte ich das Niveau denn wählen müssen, um H_0 doch noch ablehnen zu können? Eine solche Situation hatten wir bei den Beispielen zum t -Test. Umgekehrt kann man sich (zum Beispiel im Fall der Geburten und deutschlandweiten Daten) die Frage stellen: um wie viel schärfer hätte ich das Niveau denn noch machen können, so dass der Test H_0 immer noch abgelehnt hätte?

Diese beiden Fragen sind eigentlich die gleiche Frage, nämlich: was ist das kleinste Niveau, zu dem ein gegebener Test bei gegebenen Daten die Nullhypothese gerade noch ablehnt? Die Antwort auf diese Frage nennt man den **p -Wert des Tests zu gegebenen Daten**. Der p -Wert ist tatsächlich sogar etwas leichter zu berechnen als die bisherigen Verwerfungsregeln, da man den Schritt zu den Quantilen nicht braucht. Um dies zu illustrieren, gehen wir noch einmal zurück zur Konstruktion des Gaußtests mit linksseitiger Alternative: dort hatten wir als Zwischenschritt festgehalten, dass die Formel

$$\mathbb{P}(Z < y - c) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{nc}}{\sigma}\right)$$

gilt, wobei $Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ die normierte Summe aus unabhängigen, $\mathcal{N}(y, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen ist, und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Im nächsten Schritt haben wir dort das Quantil benutzt, um eine Entscheidungsregel zu bekommen, aber das brauchen wir hier nicht: Denn wenn $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ der Mittelwert unserer Daten ist, und wenn wir annehmen, dass diese Daten eigentlich durch $\mathcal{N}(y, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable erzeugt wurden, dann ist

$$\mathbb{P}(Z < \bar{x}) = \mathbb{P}(Z < y - (y - \bar{x})) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(y - \bar{x})}{\sigma}\right).$$

Dies bedeutet, dass durch zufälliges Erzeugen von $\mathcal{N}(y, \sigma^2)$ -verteilten, unabhängigen Daten der Datenmittelwert \bar{x} (oder ein noch kleinerer Datenmittelwert) mit höchstens Wahrscheinlichkeit $\alpha = \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(y - \bar{x})}{\sigma}\right)$ herauskommen kann. Dies ist also genau der p -Wert zum Gaußtest mit linksseitiger Alternative und zu den Daten \bar{x} . Alle anderen p -Werte lassen sich genau so berechnen - der Vollständigkeit halber geben wir die entsprechenden Formeln als Tabelle an; hierbei ist Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und Ψ_n die Verteilungsfunktion der t -Verteilung zum Parameter n .

Typ des Tests	Nullhypothese	Kenngroße aus Daten	p-Wert
Gaußtests:			
linkss. Alternative	$H_0 = [y, \infty[$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}(y-\bar{x})}{\sigma}\right)$
rechtss. Alternative	$H_0 =]-\infty, y]$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}(y-\bar{x})}{\sigma}\right)$
beids. Alternative	$H_0 = \{y\}$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$2\Phi\left(-\frac{\sqrt{n} y-\bar{x} }{\sigma}\right)$
t-Tests:			
linkss. Alternative	$H_0 = [y, \infty[$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$\Psi_{n-1}\left(-\frac{\sqrt{n}(y-\bar{x})}{s(x_1, \dots, x_n)}\right)$
rechtss. Alternative	$H_0 =]-\infty, y]$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$\Psi_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(y-\bar{x})}{s(x_1, \dots, x_n)}\right)$
beids. Alternative	$H_0 = \{y\}$	\bar{x} , empir. Mittelwert	$2\Psi_{n-1}\left(-\frac{\sqrt{n} y-\bar{x} }{s(x_1, \dots, x_n)}\right)$
Binomialtests:			
linkss. Alternative	$H_0 = [p_0, 1]$	k , Anzahl Erfolge	$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j}$
rechtss. Alternative	$H_0 = [0, p_0]$	k , Anzahl Erfolge	$\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j}$
beids. Alternative	$H_0 = \{p_0\}$	k , Anzahl Erfolge	$2 \sum_{j=0}^{\min\{k, n-k\}} \binom{n}{k} p_0^j (1-p_0)^{n-j}$
Binomialtests, Gaußapproximation:			
linkss. Alternative	$H_0 = [p_0, 1]$	k , Anzahl Erfolge	$\Phi\left(\frac{k+1/2-p_0n}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$
rechtss.. Alternative	$H_0 = [0, p_0]$	k , Anzahl Erfolge	$\Phi\left(-\frac{k+1/2-p_0n}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$
beids. Alternative	$H_0 = \{p_0\}$	k , Anzahl Erfolge	$2\Phi\left(-\frac{ k+1/2-p_0n }{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$

Beispiel: Im Beispiel (7.2 b) der Geburten ist der p -Wert (Binomialtest, Gaußapproximation, beidseitig) für die Daten aus Frankfurt gleich

$$2\Phi\left(-\frac{|3240 + 1/2 - 0.5 \cdot 6153|}{\sqrt{6153 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = 2\Phi\left(-\frac{164}{0.5 \cdot \sqrt{6153}}\right) \approx 2\Phi(-4.181) \approx 0.00002904.$$

Da dieser p -Wert größer ist als 0.00001 konnten wir auch die Nullhypothese im vorigen Punkt nicht aufgrund der Daten aus Frankfurt zum Niveau $\alpha = 0.00001$ ablehnen.

Wie wir also gerade gesehen haben, können wir den p -Wert benutzen, um auszurechnen, ob unser Test die Nullhypothese ablehnt. Wir müssen ihn nur mit dem (vorher festzulegenden!) gewünschten Niveau α vergleichen, und wenn er kleiner ist als dieses Niveau, dann lehnen wir H_0 ab. Aus diesem Grund gibt Ihnen übrigens das Programm R bei Tests standardmäßig immer nur den p -Wert an.

Für die Daten zu den Geburten aus ganz Deutschland ergibt sich ein p -Wert von

$$2\Phi\left(-\frac{|377586 + 1/2 - 0.5 \cdot 734475|}{\sqrt{734475 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}\right) = 2\Phi\left(-\frac{10349}{0.5 \cdot \sqrt{734475}}\right) \approx 2\Phi(-24.151) \approx 7.2 \cdot 10^{-129}.$$

Das ist ein recht beeindruckender p -Wert!

(7.14) Fallzahlplanung

Wir haben besprochen, und im Beispiel der Geburten gerade nochmal eindrucksvoll gesehen, dass mehr Daten für dramatisch bessere Testergebnisse sorgen. In fast allen Fällen ist die Erhebung der Daten aber auch mit (manchmal erheblichen) Kosten verbunden, und manchmal ist sie noch dazu (wie beispielsweise bei Tierversuchen) schon aus ethischen Gründen nur so groß wie eben nötig zu wählen. Um planen zu können, wie viele Versuche wir machen wollen, müssen wir uns vor Beginn der Planung drei grundlegende Fragen stellen:

- (1) Welches Niveau α soll mein Test haben, wie sicher will ich also sein, wenn ich H_0 verwerfe?
- (2) Bei welchen Werte aus H_1 akzeptiere ich, dass ich sie wahrscheinlich auch unter guten Bedingungen nicht als zu H_1 gehörig erkennen werde?
- (3) Bei allen anderen Werten aus H_1 kann es natürlich trotzdem passieren, dass ich sie durch „Pech beim Experimentieren“ fälschlicherweise zu H_0 zuordne (Fehler zweiter Art). Wie dringend will ich sicherstellen, dass so viel Pech unwahrscheinlich ist, wie klein (etwa: höchstens $\beta > 0$) will ich also die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art machen?

Punkt 1 sollte uns inzwischen vertraut sein, die übrigen Punkte benötigen noch etwas Erläuterung. Zu Punkt 2 stellen Sie sich folgende Situation vor: Die zu widerlegende „Lehrmeinung“ ist, dass die wahre Wahrscheinlichkeit, dass ein männliches Baby geboren wird, genau 0.5 ist. In Wirklichkeit (das wissen wir aber nicht) ist diese Lehrmeinung zwar tatsächlich falsch, aber nicht sehr falsch - die wahre Wahrscheinlichkeit ist nämlich genau 0.50000000001³²⁾. Zwar liegt dieser Wert tatsächlich in H_1 , und wenn Sie das nicht erkennen, dann führt das zu einem Fehler zweiter Art - aber der Aufwand an Daten, um so einen winzigen Unterschied zu erkennen, ist immens! Wir müssen also etwas bescheidener sein und von vorneherein akzeptieren, dass wir allzu kleine Abweichungen von der Lehrmeinung nicht entdecken werden. Wir wählen also eine Schranke, beispielsweise $d = 0.005$, und akzeptieren, dass wir Abweichungen um d oder weniger von der Nullhypothese wahrscheinlich nicht bemerken werden.

Mathematisch bedeutet dies, dass wir die *Alternativhypothese verkleinern* - im Beispiel $d = 0.005$ und $p_0 = 0.5$ wäre dann also

$$H_0 = \{0.5\}, \quad \text{und} \quad H_1 = [0, 0.495] \cup [0.505, 1],$$

und für den „Graubereich“, der nicht von H_0 und H_1 abgedeckt wird, akzeptieren wir, dass wir Werte aus diesem vermutlich fälschlicherweise der Nullhypothese zuordnen werden. Für alle Werte $p_1 \in H_1$ jedoch wollen wir nun (und das ist Punkt 3 oben) erreichen, dass wir Daten, mit zu p_1 gehörigen Zufallsvariablen erzeugt wurden, mit höchstens Wahrscheinlichkeit $\beta > 0$ fälschlicherweise der Nullhypothese H_0 zuordnen. Dies ist nun einfacher, da die „ungünstigste

³²⁾Aus den realen Daten für Deutschland kann man allerdings gut sehen, dass dies zumindest bei Menschen definitiv nicht so ist!

Wahl“ solcher Daten ja jetzt einen „Sicherheitsabstand“ zu H_0 einhalten muss.

Wie kann man nun also aus diesen Überlegungen die genaue Fallzahl errechnen? Im Prinzip kann man sich das nun ausrechnen, das wollen wir uns jedoch sparen. Stattdessen geben wir die Formeln an und diskutieren ihre Bedeutung:

Fallzahlplanung beim Gaußtest:

Zu H_0 (das kann $] - \infty, y]$, $[y, \infty[$ oder $\{y\}$ sein) legen wir einen Sicherheitsabstand $d > 0$ fest, und H_1 sind dann alle Punkte, die von H_0 um d oder mehr entfernt sind; also $[y + d, \infty[$, $] - \infty, y]$ oder $\{x \in \mathbb{R} : |x - y| \geq d\}$. Wir legen außerdem fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\beta > 0$ wir Werte aus H_1 nicht fälschlicherweise nach H_0 einordnen wollen (das nennt man die **Schärfe des Testes**), und natürlich legen wir auch das Niveau $\alpha > 0$ fest. Mit diesen Festlegungen brauchen wir

$$n = \sigma^2 \left(\frac{q_{1-\beta} + q_{1-\alpha}}{d} \right)^2$$

Versuche, um bei **einseitigen** Tests sowohl Niveau α als auch Schärfe β zu garantieren. Hierbei ist $q_{1-\alpha}$ das $1 - \alpha$ -Quantil der Normalverteilung. Bei **zweiseitigen Tests** brauchen wir

$$n = \sigma^2 \left(\frac{q_{1-\beta} + q_{1-\alpha/2}}{d} \right)^2$$

Versuche. Beachten Sie, dass hier nur im zum Niveau gehörigen Quantil das α durch $\alpha/2$ ersetzt wird, nicht aber im zur Schärfe β gehörigen. Der Grund ist, dass für jeden „wahren“ Wert $\mu \in H_1$ der „falsche“ Wert nur auf einer Seite von μ liegt, und wir daher immer noch in einer „einseitigen“ Situation sind.

Obwohl wir diese Formeln nicht herleiten, wollen wir sie kurz besprechen: klar ist, dass die nötige Anzahl der Versuche mit der Varianz σ^2 steigt, denn die verrauscht ja die Ergebnisse der Experimente. Dass sie genau proportional zu σ^2 steigt (und nicht beispielsweise proportional zu σ), hat den gleichen Grund, der bei den Tests dafür gesorgt hat, dass die „Ränder“ der Ablehnungsbereiche einen Abstand von Konstante $\cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ vom Rand von H_0 haben - man kann das ausrechnen, letztlich liegt es am zentralen Grenzwertsatz und der Tatsache, dass auch dort durch \sqrt{n} geteilt werden muss. Wir beobachten weiter, dass Schärfe β und Niveau α bei einseitigen Tests gleichberechtigt eingehen. Das muss auch so sein, denn wenn man sich genau überlegt, was wir tun, dann könnten wir einfach H_0 und H_1 vertauschen und müssten zum selben Ergebnis kommen. Wichtig ist aber, dass wir durch den Sicherheitsabstand d teilen müssen - ist man hier zu gierig und macht d zu klein, dann bezahlt man das mit viel mehr Versuchen, insbesondere da ja auch hier alles nochmals quadriert wird.

Fallzahlplanung beim Binomialtest:

Zu $H_0 = [0, p_0]$ oder $H_0 = [p_0, 1]$ wählt man wieder einen Sicherheitsabstand d und setzt $H_1 = [p_0 + d, 1]$ oder $H_1 = [0, p_0 - d]$. Hierzu darf natürlich keine der Grenzen von H_1 ausserhalb von $[0, 1]$ liegen. Wir definieren $p_1 = p_0 - d$ oder $p_1 = p_0 + d$, je nachdem in welchem Fall man ist. Wenn man ein erwünschtes Niveau α und eine erwünschte Schärfe β des Tests festgelegt hat, dann muss man (unter Benutzung der Normalapproximation) mindestens

$$n = \left(\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}q_{1-\alpha} + \sqrt{p_1(1-p_1)}q_{1-\beta}}{|p_0 - p_1|} \right)^2$$

Versuche machen, um das Niveau α und die Schärfe β zu bekommen. Beachten Sie, dass hier (anders als im Gaußtest) die Größe p_0 der Grenze von H_0 eine Rolle spielt. Daher ist Formel für die Fallzahlplanung im beidseitigen Fall noch etwas unschöner - wir lassen sie weg.

Fallzahlplanung und t -Test: Beim t -Test kann man keine exakte Fallzahlplanung machen. Der Grund ist, dass eine Formel, wenn es sie denn gäbe, so aussehen müsste wie die vom Gaußtest, wobei aber die Quantile der Normalverteilung $q_{1-\alpha}$ durch die der t -Verteilung $t_{n-1,1-\alpha}$ ersetzt werden müssen (das ist erst mal noch harmlos), und die Varianz σ^2 durch die empirische Varianz $s(x_1, \dots, x_n)$, die man aus den Daten gewinnt. Hier liegt aber das Problem, denn die Daten kennt man noch gar nicht! Wenn man natürlich eine Vorstellung davon hat, was die Varianz sein könnte, dann kann man einfach die Fallzahlplanung für den Gaußtest nehmen und liegt nicht so falsch; denn für einigermaßen große n (so etwa ab $n = 10$) unterscheiden sich $q_{1-\alpha}$ und $t_{n-1,1-\alpha}$ auch nicht mehr sehr stark. Eine „mathematisch exakte“ Fallzahlplanung aber ist nicht möglich.

Beispiel: Wir wollen im Beispiel der Feuerwerkskörper wissen, wie viele Raketen wir abschießen müssen, damit wir bei einem Niveau von $\alpha = 0.02$ mit einer Schärfe von $\beta = 0.07$ (also in 7 Prozent aller Fälle) eine zu hohe Ausschussquote entdecken. Die behauptete Ausschussquote ist „höchstens 0.05“, also ist $H_0 = [0, 0.05]$. Wir sind zufrieden, wenn wir wenigstens grobe Verstöße recht zuverlässig entdecken und wählen $p_1 = 0.1$. Um einen entsprechenden Binomialtest zu bekommen, müssen wir daher

$$n = \left(\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}q_{1-\alpha} + \sqrt{p_1(1-p_1)}q_{1-\beta}}{|p_0 - p_1|} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{0.05 \cdot 0.95}q_{0.98} + \sqrt{0.1 \cdot 0.9}q_{0.93}}{0.05} \right)^2 =$$

$$\approx \left(\frac{0.22 \cdot 2.05 + 0.3 \cdot 1.475}{0.05} \right)^2 \approx 316$$

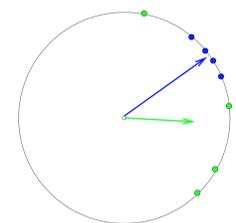
Raketen zünden. Ob sich das lohnt?

(7.15) Gepaarter und ungepaarter t -Test, Welch-Test

a) Gepaarter t -Test: Beispiel

Wir betrachten Beispiel (7.2 d), die Orientierung von Zugvögeln. Man möchte statistisch belegen, dass der magnetische Sinn der Vögel eine bestimmte Lichtfarbe braucht, um zu funktionieren. Der Versuchsaufbau ist wie folgt: man hat insgesamt 17 Vögel; jeden diese Vögel lässt man aus der Mitte einer großen kreisförmigen Voliere je 4 mal bei grünem und je 4 mal bei blauem Licht losfliegen und registriert den Punkt, wo er an die Grenze der Voliere stößt. Um die „Treffericherheit“ einer einheitlichen Himmelsrichtung zu messen, trägt man für jeden Vogel seine 4 „blauen“ und seine 4 „grünen“ Versuche auf einem Kreis ein und berechnet (zum Beispiel mittels Addition von Vektoren) den Schwerpunkt dieser Auftreffpunkte.

Dies ist in der Abbildung rechts angedeutet. Die genaue Formel für die Berechnung des Schwerpunktes ist für uns nicht wichtig, entscheidend ist, dass der resultierende Pfeil um so kürzer ist, je weniger die vier Richtungen jedesmal gleich waren. Im Ergebnis erhalten wir für jeden der 17 Vögel zwei Zahlen, eine für die „blauen“ und eine für die „grünen“ Flüge. Je näher diese Zahlen an 1 sind, desto besser hat der Vogel immer die gleiche Richtung gewählt.



Wir haben nun also die Datenpunkte x_1, \dots, x_{17} und y_1, \dots, y_{17} , wobei die x_i zu den blauen und

die y_i zu den grünen Lichtverhältnissen gehören. Die Nullhypothese ist, dass das Licht keinen Einfluss auf die Richtungsstabilität der Vögel hat. Man kann also für jeden der 17 Vögel die Größe $x_i - y_i$ bilden - ist sie (nahe) Null, dann legt das nahe, dass die Nullhypothese stimmt, ist sie dagegen weit von 0 entfernt, dann kann man versucht sein, die Nullhypothese zu verwerfen. Um von hier aus weiter zu kommen, brauchen wir genauere Annahmen. Wir machen die (durchaus diskussionswürdige) Annahme, dass die x_i und y_i normalverteilt mit unbekannter Varianz und unbekanntem Mittelwert sind. Dann sind alle $z_i := x_i - y_i$ ebenfalls normalverteilt, da sie die Summe (eigentlich: Differenz, aber das ist ja auch eine Summe) zweier Normalverteilungen sind. Ist μ der Erwartungswert der Zufallsvariablen, die man für die Erzeugung der z_i für verantwortlich hält, dann ist die Nullhypothese, dass $\mu = 0$ ist. Wir haben es also mit einem ganz gewöhnlichen t -Test mit beidseitiger Alternative und 17 Datenpunkten tun. Wir beschließen, diesen Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ zu machen. Der p -Wert dieses Tests ist

$$p = 2\Psi_{16}\left(-\frac{\sqrt{n}|\bar{z}|}{s(z_1, \dots, z_{17})}\right).$$

Aus den Daten berechnen wir (diese Rechnung und die Daten lassen wir weg!), dass der Mittelwert der z_i durch $|\bar{z}| = 0.0581$ und die empirische Standardabweichung durch $s(z_1, \dots, z_n) = 0.0912$ gegeben ist. Damit ergibt sich der p -Wert

$$p = 2\Psi_{16}\left(-\frac{\sqrt{17} \cdot 0.0581}{0.0912}\right) = 2\left(1 - \Psi_{16}\left(-\frac{\sqrt{17} \cdot 0.0581}{0.0912}\right)\right) \approx 0.034.$$

Da der p -Wert kleiner als das Niveau 0.5 ist, können wir daher die Nullhypothese, dass das Licht keine Rolle spielt, zum Niveau 0.05 ablehnen.

b) Gepaarter t -Test: allgemeines Vorgehen:

Voraussetzung für den gepaarten t -Test ist, dass man **Datenpaare** $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ hat, so dass für gleiches i die x_i und y_i „zusammenpassen“. x_i und y_i können also etwa vom gleichen Tier bei unterschiedlichen Bedingungen stammen, die gleiche chemische Reaktion bei unterschiedlichen Temperaturen charakterisieren, oder die Antworten auf die gleiche Frage einer Umfrage bei zwei verschiedenen Bevölkerungsgruppen darstellen. Testen will man, ob man $x_i < y_i$, $x_i > y_i$ oder $x_i = y_i$ ausschließen kann.

Die zweite wichtige Voraussetzung ist, dass sowohl die x_i als auch die y_i normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert und unbekannter Varianz sind. Außerdem nimmt man an, dass alle x_i und alle y_i unabhängig sind. In diesem Fall sind die Differenzen $z_i = x_i - y_i$ ebenfalls normalverteilt mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz. Man macht dann, je nachdem was man wissen will, einen der folgenden Tests:

Gepaarter t -Test mit linksseitiger Alternative: Man wählt $H_0 = [0, \infty[$ und macht zum gewünschten Niveau α einen t -Test mit den z_1, \dots, z_n als Daten.

Gepaarter t -Test mit rechtsseitiger Alternative: Man wählt $H_0 =]-\infty, 0]$ und macht zum gewünschten Niveau α einen t -Test mit den z_1, \dots, z_n als Daten.

Gepaarter t -Test mit beidseitiger Alternative: Man wählt $H_0 = \{0\}$ und macht zum gewünschten Niveau α einen t -Test mit den z_1, \dots, z_n als Daten.

c) Ungepaarter t -Test:

Wir behandeln Beispiel (7.2 e), die Länge der Zähne des Hipparion. Sie haben 39 Zähne des H.

africanum und 38 Zähne des *H. lybicum* gefunden. Die Längen (x_1, \dots, x_{39}) der *H. africanum*-Zähne sind

$$(30.0, 24.0, 26.0, 23.0, 23.0, 23.0, 29.0, 29.0, 26.5, 24.0, 24.5, 23.0, \\ 27.0, 27.0, 27.0, 27.0, 27.0, 25.0, 24.5, 26.0, 27.0, 26.0, 25.0, 23.0, \\ 23.5, 24.0, 25.0, 27.0, 25.0, 24.0, 26.5, 24.0, 28.5, 31.0, 28.0, 31.0, 27.5, 24.0, 25.0)$$

und die Längen (y_1, \dots, y_{38}) der *H. lybicum* Zähne sind

$$(23.0, 25.0, 30.0, 26.0, 28.5, 28.5, 25.5, 24.0, 35.0, 23.0, 25.0, 27.0, \\ 26.0, 26.0, 40.0, 32.0, 33.0, 30.0, 26.0, 35.0, 24.0, 32.5, 25.0, 26.0, \\ 27.0, 30.0, 36.0, 25.0, 34.0, 29.0, 22.0, 26.0, 37.0, 25.5, 29.0, 30.5, 26.5, 27.0)$$

Die Nullhypothese ist, dass die Zähne im Durchschnitt gleich lang sind, die Alternative ist, dass sich in der Länge ein Unterschied ergibt. Hier ergibt es allerdings (allein schon wegen der unterschiedlichen Anzahl der Zähne, aber nicht nur deswegen) keinen Sinn, jeweils ein x_i mit einem y_i zu paaren - der gepaarte t -Test kommt daher nicht in Frage.

Stattdessen kann man natürlich einfach die Mittelwerte $\bar{x} = \frac{1}{39} \sum_{i=1}^{39} x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{38} \sum_{i=1}^{38} y_i$ nehmen und die vergleichen. Damit man hier konkreter werden kann, brauchen wir wieder spezifische Annahmen. Für den Moment nehmen wir an, dass die x_i und die y_i durch normalverteilte, unabhängige Zufallsvariable X_i und Y_i erzeugt werden; wir nehmen an, dass die Erwartungswerte μ_x und μ_y der X_i und Y_i unbekannt und möglicherweise unterschiedlich sind (das wollen wir ja gerade testen), dass aber die Varianz der X_i und der Y_i die gleiche ist (aber auch unbekannt).

Wie bei allen Tests bilden wir aus den Daten eine „Kenngröße“ und setzen diese in die Verteilungsfunktion einer passenden Verteilung ein. Allerdings ist hier die Kenngröße etwas komplizierter als vorher; wir behandeln erst den allgemeinen Fall und spezialisieren dann wieder auf das Beispiel.

Ungepaarter t -Test, Voraussetzungen und Kenngröße:

Der ungepaarte t -Test kann gemacht werden, wenn man Daten x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_m mit $m, n \in \mathbb{N}$ vorliegen hat, von denen man annimmt, dass sie aus unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen mit X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_m erzeugt wurden. Die unbekanntes Erwartungswerte μ_x und μ_y der X_i und der Y_i könnten verschieden sein, die unbekanntes Varianzen der X_i und der Y_i sollen aber gleich sein. Unter diesen Voraussetzungen bilden wir die Kenngröße

$$T_{\text{unpaar}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) := \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\bar{y} - \bar{x})}{s_{\text{pool}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)},$$

mit der sogenannten *gepoolten Stichproben-Standardabweichung*

$$s_{\text{pool}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) := \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}}.$$

Hierbei sind $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ und $s_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$ die altbekanntes empirischen Varianzen. Man kann beweisen, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Zufallsvariable $T_{\text{unpaar}}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ eine t_{n+m-2} -Verteilung hat. Daraus ergeben sich die drei üblichen Fälle:

Ungepaarter t -Test, linksseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{\mu_x \geq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \Psi_{n+m-2}(-T_{\text{unpaar}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$$

gegeben. Hier ist Ψ_{n+m-2} die Verteilungsfunktion der t -Verteilung.

Ungepaarter t -Test, rechtsseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{\mu_x \leq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \Psi_{n+m-2}(T_{\text{unpaar}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$$

gegeben.

Ungepaarter t -Test, beidseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{\mu_x \leq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 2\Psi_{n+m-2}(-|T_{\text{unpaar}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)|)$$

gegeben.

Zurück zum Beispiel: Wir berechnen

$$\bar{x} = 25.9, \quad \bar{y} = 28.4, \quad s_x = 2.2, \quad s_y = 4.3,$$

und daher

$$s_{\text{pool}} = \sqrt{\frac{38 \cdot 2.2^2 + 37 \cdot 4.3^2}{39 + 38 - 2}} \approx 3.402, \quad \text{und} \quad T_{\text{unpaar}} \approx 3.22.$$

Wir erhalten somit als p -Wert

$$p = 2\Psi_{75}(-3.22) \approx 0.001845.$$

Dieser p -Wert ist natürlich sehr schön, wir können also sogar (beispielsweise) zum Niveau $\alpha = 0.01$ noch die Nullhypothese ablehnen, dass die Zahnlänge gleich sei. Allerdings ergibt sich ein Problem: Wir haben $s_x = 2.2$ und $s_y = 4.3$ berechnet, aber andererseits angenommen, dass die X_i und Y_i die gleiche Varianz haben. Das ist angesichts der gemessenen empirischen Varianzen nicht sehr plausibel - die Varianz der Y_i scheint ja viel größer zu sein. Wir sollten daher eigentlich den ungepaarten t -Test gar nicht machen, da eine der Voraussetzungen nicht erfüllt ist. Der Test, den wir stattdessen machen sollten, ist der

d) Welch-Test:

Für den Welch-Test machen wir die gleichen Annahmen wie für den ungepaarten t -Test, mit der Ausnahme dass wir nun nicht mehr annehmen, dass die Varianz der X_i und der Y_i gleich sein muss. Am Prinzip ändert sich dadurch nicht viel: wir bilden zunächst eine Testgröße T und setzen diese in eine Verteilungsfunktion Ψ_{Welch} ein, um einen p -Wert zu erhalten. Im Detail wird es leider noch ein wenig komplizierter: die Testgröße ist nun

$$T_{\text{Welch}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}.$$

Wir brauchen aber zusätzlich noch die Größe $f \in \mathbb{N}$; dies ist die nächstliegende ganze Zahl zu der reellen Zahl

$$f(s_x, s_y, n, m) = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n^2(n-1)} + \frac{s_y^4}{m^2(m-1)}}.$$

Diese Zahl f dient als Parameter für die t -Verteilung. Wir erhalten die entsprechenden Regeln: **Welch-Test, linksseitige Alternative:** Hier ist $H_0 = \{\mu_x \geq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \Psi_f(-T_{\text{Welch}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$$

gegeben. Hier ist Ψ_f die Verteilungsfunktion der t -Verteilung zum Parameter f .

Welch-Test, rechtsseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{\mu_x \leq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \Psi_f(T_{\text{Welch}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$$

gegeben.

Welch-Test, beidseitige Alternative: Hier ist $H_0 = \{\mu_x \leq \mu_y\}$, und der p -Wert des Tests ist durch

$$p(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 2\Psi_f(-|T_{\text{Welch}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)|)$$

gegeben.

Beispiel Hipparion: Wir berechnen $f = 55$ (das ist kleiner als die 75 vom ungepaarten t -Test). Wenn wir dann die Rechnung durchführen, erhalten wir einen p -Wert von 0.0022, was (etwas) größer als der zum ungepaarten t -Test gehörige p -Wert von 0.001845.

(7.16) Der Rangsummentest von Wilcoxon

Wir bleiben bei dem Beispiel der Hipparion-Zähne. Die Annahme, dass die Zahn­längen normalverteilt sind, kann man zwar machen, sie ist aber möglicherweise nicht sehr gut begründet. Daher ist es zumindest interessant, was wir noch tun können, wenn wir diese Annahme fallen lassen. Tatsächlich machen wir einen ziemlich radikalen Schritt und nehmen überhaupt nichts über den zufälligen Mechanismus an, der die jeweiligen Daten (Zahn­längen) (x_1, \dots, x_{39}) und (y_1, \dots, y_{38}) erzeugt haben soll - wir nehmen einfach an, dass es *irgend welche* unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_{39} und Y_1, \dots, Y_{38} waren, wobei immerhin die X_i alle die gleiche Verteilung haben sollen, und die Y_i untereinander ebenfalls. Was können wir unter diesen Umständen überhaupt noch aussagen?

Rangsummentest allgemein: Eine recht clevere Möglichkeit ist die folgende: wir ordnen zunächst alle Daten (allgemein: (x_1, \dots, x_n) und (y_1, \dots, y_m)) der Größe nach, markieren dabei aber die x_i anders als die y_i (z.B. farblich oder durch Unterstreichen). Als kleinen Beispieldatensatz nehmen wir

$$(x_1, \dots, x_4) = (4, 1.3, 5.1, 2), \quad (y_1, \dots, y_7) = (11, 3, 5, 4.2, 6.1, 2.5, 14).$$

Unterstreichen wir die x_i , so erhalten wir die Reihung

$$(\underline{1.3}, \underline{2}, 2.5, 3, \underline{4}, 4.2, 5, \underline{5.1}, 6.1, 11, 14).$$

Nun berechnen wir für jedes x_i seinen **Rang** $r(x_i, y_1, \dots, y_m)$ **innerhalb der** y_j : das ist die Anzahl der y_j , die vor x_i auftauchen. Es gilt also (wir kürzen ab: $r(x_i, y) = r(x_i, y_1, \dots, y_m)$)

$$r(1.3, y) = 0, \quad r(2, y) = 0, \quad r(4, y) = 2, \quad r(5.1, y) = 4.$$

Wenn die x_i und die y_j mit Zufallsvariablen erzeugt worden sind, die den gleichem Mittelwert haben, dann sollten „im Durchschnitt“ etwa die Hälfte aller y_j (also $m/2$) vor einem gegebenen x_i stehen - natürlich werden es bei manchem x_i mehr und bei anderen weniger sein, aber das sollte sich dann insgesamt ausgleichen. Das bedeutet, dass die sogenannte **Rangsumme**

$$U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) := \sum_{i=1}^n r(x_i, y_1, \dots, y_m)$$

etwa den Wert $mn/2$ haben sollte, wenn die x_i mit dem gleichen Mittelwert erzeugt wurden wie die y_i , denn sie hat n Terme, und jeder hat „im Durchschnitt“ den Wert $m/2$. Andererseits wird $U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) < mn/2$ sein, wenn die x_i eher kleiner als die y_j sind (dann sind weniger y_j vor einem typischen x_i), und eher größer als $mn/2$ wenn die x_i eher größer als die y_j sind. Eine sinnvolle Kenngröße für „die Größe der x_i im Vergleich zu den y_j “ ist also durch

$$U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) - \frac{mn}{2}$$

gegeben. Unter der Bedingung, dass die x_i und die y_j von Zufallsvariablen mit dem gleichen Erwartungswert stammen, hat man die Verteilung der Größe $U_{n,m} = U(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ ausgerechnet, sie heißt **Wilcoxon'sche U-Verteilung**. Wir brauchen sie nicht, der Computer weiß sie für uns. Für große m und n kann diese Verteilung außerdem gut durch eine Normalverteilung approximieren. Nur für diesen Fall geben wir explizite Formeln für den p -Wert an: Sei also $U_{n,m}(x, y)$ die Rangsumme der x_i in den y_j , für n Datenwerte x_i und m Datenwerte y_j . Dann ist der p -Wert des Wilcoxon-Tests (näherungsweise, für n, m eher groß) gegeben durch

$$p_{\text{Wilcox,links}} = \Phi\left(-\frac{U_{m,n}(x, y) - \frac{nm}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}\right)$$

für die linksseitige Alternative, das heißt für $H_0 =$ „der Erwartungswert der y_i ist größer als der der x_j “. Falls die Nullhypothese gilt, dann ist in der Tat $U_{m,n}(x, y)$ eher kleiner als $mn/2$, daher ist das Argument von Φ positiv, und der p -Wert ist groß. Ist umgekehrt $U_{m,n}(x, y) - \frac{nm}{2}$ selbst (stark) positiv, dann ist das Argument der Verteilungsfunktion Φ der Normalverteilung (stark) negativ, und der p -Wert ist klein.

Analog gilt:

$$p_{\text{Wilcox,rechts}} = \Phi\left(\frac{U_{m,n}(x, y) - \frac{nm}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}\right)$$

für die rechtsseitige Alternative, also mit $H_0 =$ „der Erwartungswert der y_i ist kleiner als der der x_j “, und

$$p_{\text{Wilcox,beid}} = 2\Phi\left(-\left|\frac{U_{m,n}(x, y) - \frac{nm}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}}\right|\right)$$

für die beidseitige Alternative, also mit $H_0 =$ „der Erwartungswert der y_i ist gleich wie der der x_j “.

Beispiel: Hipparion

Aus den Daten können wir (besser: der Computer) die Rankschritte $U_{39,38}(x_1, \dots, x_{39}, y_1, \dots, y_{38}) = 990$ berechnen. Hierbei kommt es vor, dass ein x_i und ein y_j gleich sind. Wenn das passiert, dann zählen wir alle y_j mit $y_j = x_i$ einfach nur zur Hälfte, also

$$U(x_i, y_1, \dots, y_n) = (\text{Anzahl der } j \text{ mit } y_j < x_i) + \frac{1}{2}(\text{Anzahl der } j \text{ mit } y_j = x_i).$$

Wir berechnen $mn/2 = 741$ und dann den p -Wert zu

$$p_{\text{Wilcox,beid}} = 2\Phi\left(-\frac{990 - 741}{\sqrt{9633}}\right) \approx 2\Phi(-2.537) \approx 0.0114.$$

Wenn wir das mit dem p -Wert von 0.0022 aus dem Welch-Test vergleichen, dann sehen wir, dass wir durch die weggelassene Annahme der Normalverteilung einen mehr als 5 mal so großen p -Wert bei gleichen Daten erhalten. Das ist völlig in Ordnung, denn je mehr Wissen wir über unser System haben (oder zu haben glauben), desto besser können wir Daten, die aus diesem System kommen, interpretieren. Die Tatsache, dass wie die Normalverteilung annehmen, erlaubt uns also bei gleicher Datenlage viel schärfere Schlussfolgerungen, aber wenn diese Annahme falsch ist, dann können uns diese Schlussfolgerungen natürlich auch in die Irre führen!

(7.17) Mediantest**a) Beispiel:**

Bei der Behandlung mit einem etablierten Herzmedikament lebt die Hälfte der Patienten noch acht Jahre oder länger. Bei einem neuen Medikament wurde in einer Langzeitstudie an 20 Patienten festgestellt, wie lange die Patienten noch leben:

Patient Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lebensdauer x_i	45	0	9	28	4	2	6	23	35	7
Patient Nr.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Lebensdauer x_i	27	1	4	12	2	24	10	3	27	24

Ist das neue Medikament besser als das etablierte?

Mit anderen Worten: wir wollen wissen ob wir (zum Niveau $\alpha = 0.05$) ausschließen können, dass die Daten x_1, \dots, x_{20} in Wirklichkeit doch von einer Zufallsvariablen mit einem Median von höchstens 8 worden sind. Dazu überlegen wir uns folgendes: wenn der Median der Zufallsvariablen, die für die x_i verantwortlich ist, genau 8 wäre (das ist der am schwierigsten zu erkennende Fall), dann müssten typischerweise etwa die Hälfte der Datenpunkte ≤ 8 und die andere Hälfte ≥ 8 sein. Wir können also modellieren, dass das Ereignis „der i -te Datenwert ist ≥ 8 “ durch eine Münze mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit p erzeugt wurde, und die Nullhypothese wäre dann $H_0 = [0, 1/2]$, also dass die „wahre“ Münze mit Wahrscheinlichkeit höchstens $1/2$ einen Erfolg erbringt.

Wir müssen also einfach einen Binomialtest machen: Aus unseren Daten sehen wir, dass wir 11 Werte über 8 haben, also einer mehr als die „durchschnittlich zu erwartenden“ 10 Werte, die man bei einer Münze mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1/2$ erwarten sollte. Der p -Wert für einen

Binomialtest mit Nullhypothese $[0, 1/2]$ und rechtsseitiger Alternative ist durch

$$p_{\text{binom}}(11) = \sum_{k=11}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{20-k} \approx 0.4119$$

gegeben. Wir können also die Nullhypothese, dass das neue Medikament besser wirkt als das alte, zu keinem vernünftigen Niveau ablehnen. Konkret bedeutet so ein p -Wert ja: hätten wir bei der Versuchsreihe den 20 Patienten einfach das etablierte Medikament gegeben und die Überlebenszeiten registriert, dann wären in mehr als 40 % der Fälle ebenfalls Messreihen herausgekommen, die 11 oder mehr Überlebende nach mehr als 8 Jahren zeigen. Natürlich ist eine so kleine Fallzahl wie 20 hochproblematisch, man kann hier (außer in Fällen, die so klar sind, dass man eigentlich keine Statistik braucht) fast nie etwas sinnvolles sagen - was nicht bedeutet, dass es (vor allem in der Medizin) nicht trotzdem versucht wird.

Mediantest allgemein: Übersetzung in einen Binomialtest:

Gegeben sind Daten x_1, \dots, x_n , von denen man annimmt, dass sie durch unabhängige Zufallsvariable X_1, \dots, X_n entstanden sind, die alle die gleiche Verteilung haben. Man ist interessiert am Median m dieser Verteilung, und formuliert die Nullhypothese $H_0 = [m_0, \infty[$ (linksseitige Alternative), $H_0 =] - \infty, m_0]$ (rechtsseitige Alternative), oder $H_0 = \{m_0\}$ (beidseitige Alternative), jeweils mit $m_0 \in \mathbb{R}$. Dann stellt man fest, man dieses Problem mit Hilfe von Bernoulli-Zufallsvariablen umformulieren kann: wenn der Median tatsächlich m_0 ist (und nur diesen Fall braucht man, weil er in allen drei Szenarien der am schwierigsten zu erkennende ist), dann kann man die Daten als Ergebnis von Münzwürfen Y_1, \dots, Y_n mit Erfolgswahrscheinlichkeit p sehen: ist $x_i \geq m_0$, verbucht man einen „Erfolg“, ansonsten einen „Misserfolg“. Weil bei einem Median von m_0 die Wahrscheinlichkeit, größer als m_0 zu sein, definitionsgemäß genau $1/2$ ist, ist die Nullhypothese entweder $p \geq 1/2$ (linksseitige Alternative), $p \leq 1/2$ (rechtsseitige Alternative) oder $p = 1/2$ (beidseitige Alternative). Hat man also insgesamt k Datenpunkte, die den kritischen Wert m_0 überschreiten (oder genau treffen), dann bedeutet dies k Erfolge, und daher ist der p -Wert eines Mediantests zum Niveau α bei n Datenpunkten gegeben durch den des passenden Binomialtests. Konkret:

$$p(k) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{j}$$

im Fall der linksseitigen Alternative (wenige Erfolge führen zu kleinem p -Wert!), sowie

$$p(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=k+1}^n \binom{n}{j}$$

im Fall der rechtsseitigen Alternative (viele Erfolge führe zu kleinem p -Wert), und

$$p(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} + \sum_{j=k+1}^n \binom{n}{j} \right)$$

im Fall der beidseitigen Alternative (Werte von k , die von $n/2$ zu verschieden sind, führen zu kleinem p -Wert). Für große n kann man alternativ auch die Gauß-Approximation machen, man

erhält dann

$$p_{\text{Gauß,links}}(k) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2}\right) = \Phi\left(\frac{2k + 1 - n}{\sqrt{n}}\right)$$

für die linksseitige Alternative,

$$p_{\text{Gauß,rechts}}(k) = \Phi\left(-\frac{2k + 1 - n}{\sqrt{n}}\right)$$

für die rechtsseitige Alternative, und

$$p_{\text{Gauß,beid}}(k) = 2\Phi\left(-\left|\frac{2k + 1 - n}{\sqrt{n}}\right|\right)$$

für die beidseitige Alternative. Hier ist Φ immer die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

Fallzahlplanung beim Mediantest: Beim Mediantest ist die Fallzahlplanung besonders wichtig, da er oft bei Tierversuchen verwendet wird. Im Beispiel (7.2 c) untersucht man die LD50 eines Giftes, also die Dosis, bei der 50 % der Versuchstiere gestorben sind. Ein Anwendungsfall ist, dass ein Hersteller behauptet, seine Substanz sei nicht so giftig, dass sie verboten werden muss, was beispielsweise bedeutet, dass LD50 oberhalb eines gewissen Wertes $D > 0$ liegen muss (denn große LD50 bedeutet ja, dass die Tiere viel von dem Stoff aushalten). Man möchte testen, ob das stimmen kann. Die Nullhypothese ist also, dass der Median der Zufallsgröße „Giftmenge, die das Tier Nummer i genau umbringt“ bei D oder höher. Übersetzt in den Binomialtest bedeutet das, dass wir einen Erfolg haben, wenn das Tier mehr als D Einheiten Gift verträgt, und einen Misserfolg, wenn es schon vorher stirbt. Die Nullhypothese ist dann $H_0 = [1/2, 1]$, und wir haben es daher mit einer linksseitigen Alternative zu tun. Wir wollen die Nullhypothese zum Niveau $\alpha = 0.001$ überprüfen.

Nehmen wir zunächst an, dass wir 200 Tiere vergiften, von denen nur 80 nach bei einer Giftmenge von D noch leben. Der p -Wert ist nach unserer obigen Formel (in der Gaußapproximation) gegeben durch

$$p_{\text{Gauß,links}}(80) = \Phi\left(\frac{160 + 1 - 200}{\sqrt{200}}\right) = \Phi\left(\frac{-39}{10\sqrt{2}}\right) \approx 0.003.$$

Da wir uns für $\alpha = 0.001$ entschieden haben, können wir die Nullhypothese nicht zum Niveau α verwerfen, und die Tiere sind leider umsonst gestorben.

Daher ist es besser, vorher zu planen. Wir wollen müssen (wie immer in der Fallzahlplanung) einen Abstand zur Nullhypothese festlegen, bei dem wir akzeptieren, dass wir eine Überschreitung der Nullhypothese nicht erkennen werden, wenn sie um weniger als diesen Abstand erfolgt. Hier wählen wir $H_1 = [0.45, 1]$, wir akzeptieren also, dass wir nicht kontrolliert erkennen können, zwar weniger als 50%, aber mehr als 45% der Tiere eine „wahre“ Gift-Verträglichkeit von D oder weniger haben. Wenn aber die wahre Gift-Verträglichkeit bei mehr als 45 % der Tiere unter D liegt, dann wollen wir das mit einer Schärfe $\beta = 0.05$ (also „in 95% aller Fälle“) erkennen.

Wir haben es also mit der Fallzahlplanung für den Binomialtest mit den Werten $p_0 = 0.5$ (Grenze der Nullhypothese), $p_1 = 0.45$ (Grenze der verkleinerten Alternative), $\alpha = 0.001$ und

$\beta = 0.005$ zu tun. Die Formel hierfür liefert

$$n = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}q_{0.999}} + \sqrt{0.45 \cdot 0.55}q_{0.95}}{0.05} \right)^2 \approx \left(\frac{0.5 \cdot 3.0902 + 0.4975 \cdot 1.645}{0.05} \right)^2 \approx 2235.$$

Man müsste also 2235 Versuchstiere vergiften, um einen so genauen Test mit der Schärfe $\beta = 0.05$ zu erhalten. Hätte man sich dagegen damit zufrieden gegeben, nur Fälle relativ sicher zu erkennen, wo weniger als 40 % der Tiere bei der Dosis D noch leben, dann hätte man $p_1 = 0.4$ und daher nur

$$n = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{4}q_{0.999}} + \sqrt{0.4 \cdot 0.6}q_{0.95}}{0.1} \right)^2 \approx \left(\frac{0.5 \cdot 3.0902 + 0.489 \cdot 1.645}{0.1} \right)^2 \approx 553.$$

Tiere gebraucht.

(7.18) Der χ^2 -Test

a) Der allgemeine χ^2 -Test:

Wir nehmen an, dass wir Daten haben, die nur $k \in \mathbb{N}$ verschiedene Werte annehmen können. Wir haben also die Daten x_1, \dots, x_n vorliegen, und jedes x_i hat einen der Werte $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$. Wir nehmen weiter an, dass es eine Theorie gibt die sagt dass der Wert y_j mit der Wahrscheinlichkeit $p_j \in [0, 1]$ auftauchen soll; anders formuliert, die Nullhypothese ist, dass die Daten durch n -maliges unabhängiges Würfeln mit Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n entstanden sind, und dass für alle $i \leq n$ und alle $j \leq k$ gilt: $\mathbb{P}(X_i = y_j) = p_j$. Den Fall $k = 2$ kennen wir schon, das ist der Binomialtest. Den Fall $k \geq 3$ behandeln wir jetzt.

Es liegt nahe, sich zunächst die Häufigkeiten anzusehen, mit denen der Wert y_j in den Daten vorkommt: wir definieren

$$N_j(x_1, \dots, x_n) = \text{Anzahl der } x_i \text{ mit } x_i = y_j.$$

Wenn die Nullhypothese stimmt, dann sollte $N_j(x_1, \dots, x_n)$ in etwa gleich $p_j n$ sein, denn man hat ja zur Erzeugung eines gegebenen Wertes y_j genau n Versuche mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_j gehabt. Daher scheint die folgende Kenngröße (auch „Teststatistik“ genannt) sinnvoll zu sein:

$$T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j(x_1, \dots, x_n) - p_j n)^2}{p_j n}.$$

Je weiter die von 0 weg ist, desto stärker sollten wir an der Vorhersage $\mathbb{P}(X_i = j) = p_j$ zweifeln. Warum warum ist das so? Im Zähler jedes des Summanden steht die jeweilige quadratische Abweichung der tatsächlich beobachteten Anzahl von Daten mit Wert y_j zu ihrem von der Theorie vorhergesagten Wert; das wird also um so größer, je weniger die Daten zur Vorhersage passen. Der Nenner kann so verstanden werden: je kleiner die Wahrscheinlichkeit p_j ist, dass man einen Wert y_j sieht, desto stärker fallen Abweichungen ins Gewicht. Wenn beispielsweise (bei 100 Messwerten) von der Theorie vorhergesagt wird, dass der Wert y_1 in 50 % der Fälle auftritt (also: $p_1 = 0.5$), dann ist $N_1 = 55$ (statt dem Idealwert 50) noch kein Grund, stark an dieser Vorhersage zu zweifeln. Wenn aber ein anderer Wert y_2 nur in 1 % der Fälle vorhergesagt wird, aber statt 1 mal gleich 6 mal in den Daten auftaucht, (also $N_2 = 6$), dann ist dies ein viel stärkerer Hinweis darauf, dass etwas nicht stimmen kann. Beachten Sie, dass die Zähler in

beiden Fällen gleich $5^2 = 25$ sind, die Nenner sich aber stark unterscheiden.

Man kann nun (analog wie schon in allen Tests zuvor) mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie die Verteilung der Zufallsvariable $T(X_1, \dots, X_n)$ für den Fall berechnen, wo die X_i tatsächlich unabhängig Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X_i = j) = p_j$ sind. Für große n ist dies in sehr guter Näherung³³⁾ die sogenannte **χ^2 -Verteilung mit $k - 1$ Freiheitsgraden**, wobei k die Anzahl der möglichen Werte ist, die angenommen werden können. Der p -Wert zum χ^2 -Test mit $k - 1$ Freiheitsgraden ist gegeben durch

$$p = 1 - \Psi_{\chi^2, k-1}(T(x_1, \dots, x_n)),$$

wobei $\Psi_{\chi^2, k-1}$ die Verteilungsfunktion der χ^2 -Verteilung mit $k - 1$ Freiheitsgraden ist. Diese Verteilungsfunktion ist wieder tabelliert oder vom Computer zu berechnen. Beachten Sie aber, dass es hier keine rechts-, links- oder beidseitige Alternative gibt, denn die Nullhypothese liefert ja im Idealfall $T(X_1, \dots, X_n) = 0$, und Abweichungen sind nur nach oben möglich, da $T \geq 0$ ist. Man hat also, wenn man so will, zwangsweise eine rechtsseitige Alternative.

Der χ^2 -Test auf Unabhängigkeit: Der χ^2 -Test auf Unabhängigkeit teilt zwar den Namen und einige Formeln mit dem gerade besprochenen Test, hat aber auch einige Unterschiede. Wir erklären ihn an einem Beispiel, und zwar an Beispiel (7.2 f) mit dem Kuhstärling. Wenn man dort noch einmal nachliest, so hat man insgesamt 48 Nester untersucht, die jeweils 0, 1 oder 2 Kuhstärling-Eier enthalten können, die jeweils von Dasselfliegen befallen sein können oder nicht. In einer Tabelle sehen die gefundenen Daten so aus:

Anzahl Kuhstärling-Eier	0	1	2	\sum
befallen	16	2	1	19
nicht befallen	2	11	16	29
\sum	18	13	17	48

Wie immer nehmen wir an, dass die Daten durch das Würfeln auf Zufallsvariablen entstanden sind; zum einen haben wir die Zufallsvariable X , die codiert, ob ein Nest befallen ist ($X = 1$) oder nicht ($X = 0$), und die Zufallsvariable Y , die die Anzahl der Eier (0, 1 oder 2) angibt. Aus der letzten Spalte und der untersten Zeile lesen wir ab, dass 19/48 aller Nester befallen sind, und dass 18/48 aller Nester kein Kuhstärling-Ei, 13/48 genau eines und 17/48 zwei Eier enthalten. Daher ist die vernünftigste Annahme, dass

$$\mathbb{P}(X = 1) = 19/48 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 29/48$$

und

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 18/48, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 13/48, \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Y = 2) = 17/48$$

gilt. Diese Annahme sehen wir als gegeben an und überprüfen sie *nicht* mit Hilfe eines Tests. Das ist sehr wichtig, denn durch diese Annahme sind die in der Tabelle rot gefärbten Zahlen ein für alle mal festgelegt, denn die fließen ja in die Berechnung unserer angenommenen Wahrscheinlichkeiten ein. Das wird gleich noch mal wichtig werden.

³³⁾diese Näherung hat große Ähnlichkeit mit der Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung, für $k = 2$ ist sie sogar im wesentlichen das Gleiche.

Die Nullhypothese ist nun, dass X und Y unabhängig sind. Wenn sie stimmt, dann sollte die Tabelle idealerweise so aussehen:

Anzahl Kuhstärling-Eier	0	1	2	Σ
befallen	7.13	5.15	6.72	19
nicht befallen	10.87	7.85	10.28	29
Σ	18	13	17	48

Warum? Weil beispielsweise unter der Nullhypothese gilt: $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{19 \cdot 18}{48^2}$, und wenn man 48 Versuche (d.h. untersuchte Nester) hat, dann erwartet man $18 \cdot \frac{19 \cdot 18}{48^2} \approx 7.13$ Vorkommnisse der Kombination $X = 1$ und $Y = 0$, also befallene Nester mit keinem Kuhstärling-Ei. Die anderen Einträge berechnet man genauso.

Als nächstes ziehen wir die beiden Tabellen voneinander ab, um festzustellen, wie sehr die Daten der Annahme der Unabhängigkeit widersprechen. Es ergibt sich die Tabelle

Anzahl Kuhstärling-Eier	0	1	2	Σ
befallen	8.87	-3.15	-5.72	0
nicht befallen	-8.87	3.15	5.72	0
Σ	0	0	0	0

Es fällt auf, dass diese Tabelle eigentlich nur noch zwei Einträge enthält, die dann alle anderen festlegen, da die Summen der Zeilen und Spalten ja alle 0 sein müssen. Das ist auch der Grund, warum man im Folgenden gleich „nur“ zwei Freiheitsgrade in der χ^2 -Verteilung benutzt, obwohl man ja 6 Einträge in der Tabelle hat und man daher meinen könnte, man müsse 5 Freiheitsgrade benutzen. Jedenfalls berechnet man nun die Teststatistik

$$T = \sum_{j=1}^6 \frac{(N_j - p_j n)^2}{p_j n},$$

wobei die $p_j n$ die Einträge in der idealen Tabelle sind, und die N_j die in der wirklichen Tabelle. Die $N_j - p_j n$ haben wir schon in der Differenztabellen stehen. Wir erhalten also

$$T = \frac{8.87^2}{7.13} + \frac{(-3.15)^2}{5.15} + \frac{(-5.72)^2}{6.72} + \frac{(-8.87)^2}{10.87} + \frac{3.15^2}{7.85} + \frac{5.72^2}{10.28} \approx 29.5$$

Die Teststatistik ist also genau, wie man sie vom χ^2 -Test erwartet, was aber wie schon angedeutet anders ist, ist die Zahl der Freiheitsgrade. Bei allen solchen Tabellen (sogenannten Kontingenztabellen) ist sie durch

$$(Anzahl\ Zeilen - 1) \cdot (Anzahl\ Spalten - 1)$$

gegeben, in unserem Fall also durch $(2 - 1) \cdot (3 - 1) = 2$. Einen Grund dafür haben wir schon angedeutet (die Werte der Tabelle sind durch zwei Einträge schon festgelegt), die genaue mathematische Begründung müssen wir leider schuldig bleiben. In jedem Fall ergibt sich der p -Wert dur Nullhypothese „Anzahl der Eier und Parasitenbefall sind unabhängig“ nun durch

$$\Psi_{\chi^2,2}(29.5) \approx 3.823 \cdot 10^{-7},$$

ein Test zum Niveau $\alpha = 0.0001$ würde also beispielsweise die Nullhypothese verwerfen (und hätte noch reichlich Luft nach oben). Mit anderen Worten: man kann es als erwiesen ansehen, dass die Kuhstärling-Eier vor dem Befall mit Dasselfliegen schützen.