

---

# Formoptimierung für Kontaktprobleme

---

## Shape Optimization for Contact Problems

Master-Thesis von Benjamin Manfred Horn aus Babenhausen/Harreshausen

Tag der Einreichung:

1. Gutachten: Prof.Dr. Stefan Ulbrich
2. Gutachten: Daniela Bratzke und Thea Göllner



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



Nonlinear  
Optimization

Formoptimierung für Kontaktprobleme  
Shape Optimization for Contact Problems

Vorgelegte Master-Thesis von Benjamin Manfred Horn aus Babenhausen/Harreshausen

1. Gutachten: Prof.Dr. Stefan Ulbrich
2. Gutachten: Daniela Bratzke und Thea Göllner

Tag der Einreichung:

---

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen bedanken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben. Zu erwähnen sind hierbei Prof. Dr. Stefan Ulbrich von der Technischen Universität Darmstadt, dem ich diese Aufgabenstellung zu verdanken habe und der mich im Rahmen dieser Arbeit stets unterstützt hat. Des Weiteren geht ein herzlicher Dank an Daniela Bratzke und Thea Göllner, ebenfalls von der Technischen Universität Darmstadt, welche immer ein offenes Ohr für mich hatten.

Ein besonderer Dank geht an meinen Eltern, die mich zu dem gemacht haben, was ich heute bin.

Danke.

---

---

## Erklärung zur Master-Thesis

---

Hiermit versichere ich, die vorliegende Master-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 16. Oktober 2014

---

(Benjamin M. Horn)

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>4</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>5</b>
1.1. Notationen . . . . .	6
<b>2. Das Kontaktproblem</b>	<b>9</b>
2.1. Lineares Elastizitätsproblem ohne Kontakt . . . . .	9
2.2. Lineares Elastizitätsproblem mit Kontakt . . . . .	14
<b>3. Finite Elemente Methode</b>	<b>20</b>
3.1. Diskretisierung . . . . .	21
<b>4. Formoptimierung</b>	<b>26</b>
4.1. Parametrisierung . . . . .	27
4.2. Herleitung der Adjungiertengleichung . . . . .	29
4.3. Diskretisiertes Problem . . . . .	30
4.4. Herleitung der Formableitungen . . . . .	32
4.5. Optimierungsalgorithmus für das reduzierte Problem . . . . .	34
4.5.1. Konvexes Bundle-Verfahren . . . . .	34
4.5.2. Nicht-Konvexe-Erweiterung des Bundle-Verfahrens . . . . .	37
4.5.3. Herleitung des Schnittebenenmodells . . . . .	39
<b>5. Implementierung</b>	<b>44</b>
5.1. Aufbau des nichtkonvexen Bundle-Verfahrens . . . . .	44
5.2. Hilfsfunktionen . . . . .	47
<b>6. Numerische Ergebnisse</b>	<b>49</b>
6.1. T-Steckverbindung . . . . .	49
6.1.1. Modellierung . . . . .	49
6.1.2. Szenariobeschreibung und Bauteilanforderungen . . . . .	50
6.1.3. Ergebnis . . . . .	52
6.2. E-Verbindung . . . . .	55
6.2.1. Modellierung . . . . .	55
6.2.2. Szenariobeschreibung und Bauteilanforderungen . . . . .	57
6.2.3. Ergebnis . . . . .	58
<b>A. Anhang</b>	<b>62</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>64</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

---

3.1. Anordnung der 6 Knoten auf dem quadratischen Dreieckselement . . . . .	22
4.1. Zulässige und nicht zulässige Modellierung . . . . .	27
4.2. Minimalbeispiel zur Zuordnung der Designvariablen . . . . .	27
4.3. Rechteckelement . . . . .	28
5.1. Schematischer Aufbau der äußern Iteration . . . . .	45
5.2. Schematischer Aufbau der inneren Iteration . . . . .	46
6.1. Domains T-Steckverbindung . . . . .	50
6.2. Gitter T-Steckverbindung . . . . .	50
6.3. Kantenummerierung T-Steckverbindung . . . . .	51
6.4. Nicht-optimierte T-Steckverbindung . . . . .	53
6.5. Optimierte T-Steckverbindung . . . . .	54
6.6. Domains E-Verbindung . . . . .	56
6.7. Gitter E-Verbindung . . . . .	56
6.8. Kantenummerierung E-Verbindung . . . . .	57
6.9. Skizze der E-Verbindung . . . . .	58
6.10. Nicht-optimierte E-Verbindung . . . . .	59
6.11. Optimierte E-Verbindung . . . . .	60

---

## 1 Einführung

---

Im Zeichen von Ressourcen- und Energieschonung tritt die optimale Gestaltung von Bauteilen immer mehr in den Vordergrund. Dabei gilt es z. B. das Strömungsverhalten oder die Stabilität zu optimieren, während gleichzeitig Material und Kosten eingespart werden sollen. Aus ökonomischen Gesichtspunkten ist es wenig sinnvoll diesen Prozess rein experimentell durchzuführen, da solche Experimente sowohl zeit- als auch kostenintensiv sind. Aus diesem Grunde gehen beispielsweise immer mehr Automobilhersteller dazu über, an ihren Fahrzeugen zuerst virtuelle Crash-Tests durchzuführen, zu dem Zweck einer simulationsbasierten Optimierung der Fahrzeuge. Wir konzentrieren uns in dieser Arbeit auf die Optimierung der Querschnitte von Blechprofilen, welche in industriellen Anwendungen vielfach Einsatz finden.

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit der expliziten Anwendung von Verfahren der nichtglatten Optimierung im  $\mathbb{R}^2$  auf eine bestimmte Klasse von statischen elastomechanischen Problemen beschäftigen. Bei dieser Problemklasse, handelt es sich um sogenannte Kontaktprobleme. Hierbei betrachtet man nicht nur das zu optimierende Bauteil und die darauf wirkenden Kräfte, sondern auch die Möglichkeit von potentiell Kontakt mit anderen Bauteilen. Mathematisch lässt sich das Problem als sogenanntes Signorini-Problem auffassen und behandeln.

Um die Verschiebung des Bauteils durch die auftretenden Lasten zu bestimmen, gilt es ein System von partiellen Differentialgleichungen zu lösen. Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente lässt sich dies unter zu Hilfenahme eines Newton-Verfahrens numerisch effizient lösen. Dabei findet das Prinzip des Minimums der gesamten potentiellen Energie eines Systems Anwendung.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein Optimalitätssystem zu formulieren und ein Lösungsverfahren zu implementieren, welches die Form eines Bauteils optimieren kann, sodass z. B. die Nachgiebigkeit (engl. compliance) minimal ist. Für den, in dieser Arbeit betrachteten Fall, bedeutet dies, dass es sich um die Optimierung eines nichtglatten, nichtkonvexen Zielfunktional, mit Variationsungleichung und Restriktionen an die Geometrie als Nebenbedingungen, handelt. Um den Aufwand der Implementierung in Grenzen zu halten, wurden für diese Arbeit einige vereinfachende Annahmen getroffen, wie z. B. ein reibungsfrei verlaufender Kontakt oder die Betrachtung von ausschließlich kleinen Verschiebungen. Die getroffenen Vereinfachungen werden im Laufe dieser Arbeit präsentiert und näher erläutert.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Wir beginnen mit der Herleitung des linearen Elastizitätsproblems mit Kontakt in Kapitel 2. Darauf aufbauend wird in Kapitel 3 unter Verwendung der Methode der finiten Elemente eine implementierbare Form bestimmt. In Kapitel 4 behandeln wir die Formoptimierung inklusive der Vorstellung eines Lösungsalgorithmus. Die Implementierung des vorgestellten Algorithmus thematisieren wir in Kapitel 5. Abschließend präsentieren wir in Kapitel 6 die vorangegangenen Arbeiten an zwei praktischen Anwendungen. Die in MATLAB implementierten Funktionen liegen dieser Arbeit auf einer CD bei.

---

## 1.1 Notationen

---

### Notationen im Unendlichdimensionalen

---

$\Omega$  Betrachteter Körper,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$\Gamma$  Rand von  $\Omega$ ,  $\partial\Omega = \Gamma$

$\Gamma_N$  Neumannrand,  $\Gamma_N \subset \partial\Omega$

$\Gamma_D$  Dirichletrand,  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$

$\Gamma_C$  Kontaktrand,  $\Gamma_C \subset \partial\Omega$

$f^V$  Volumenkräfte,  $f^V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f^N$  Oberflächenkräfte,  $f^N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\sigma$  Symmetrischer Spannungstensor,  $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$\nu$  Äußere Normale an  $\Gamma_N$  oder  $\Gamma_C$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^3$

$\text{div}(w)$  Divergenz von  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\text{div}(w) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w_i$

$\Phi$  Transformation von  $\Omega$  durch Deformation,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$Id$  Identische Abbildung im  $\mathbb{R}^3$ ,  $Id(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$y$  Verschiebung,  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\nabla_x f(x)$  Gradient von  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $x$ ,  $\nabla_x f(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

$E$  Dehnungstensor,  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$\varepsilon$  Linearisierter Dehnungstensor,  $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$C$  Elastizitätsmodul,  $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$\lambda, \mu$  Lamé-Parameter,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$H^k(\Omega)$  Sobolevraum,

$H^k(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \text{ hat schwache Ableitungen } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}, 1 \leq k < \infty$

$H_D^1(\Omega)$  Unterraum von  $H^1(\Omega)$ ,  $H_D^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$

$\mathbb{V}(\Omega)$  Raum der zulässigen Verschiebungen,  $\mathbb{V}(\Omega) = (H_D^1(\Omega))^3$

$\mathcal{L}^p(\Omega)$  Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen,

$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}, p \in [1, \infty)$

$\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega)$  Raum der auf kompakten Teilmengen Lebesgue-messbaren Funktionen,

$\mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : u \in \mathcal{L}^p(K), \text{ für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt}\}, p \in [1, \infty)$

$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  Halbnorm auf  $L^p(\Omega)$ ,  $\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \in [1, \infty)$

$\sim$  Äquivalenzrelation,  $u \sim v$  in  $L^p(\Omega) \Leftrightarrow \|u - v\|_{L^p(\Omega)} = 0$ ,  $p \in [1, \infty)$

$L^p(\Omega)$  Äquivalenzklassenraum von fast überall identischer Funktionen aus  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ,  
 $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$ ,  $p \in [1, \infty)$

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  Äquivalenzklassenraum von fast überall identischer Funktionen aus  $\mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  
 $L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega) / \sim$ ,  $p \in [1, \infty)$

$D^\alpha u$   $\alpha$ -te Schwache partielle Ableitung von  $u$ , gemäß Definition 2.1

$C_c^\infty$  Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger,  
 $C_c^\infty(\Omega) := \{u \text{ unendlich oft stetig differenzierbar auf dem Abschluss von } \bar{\Omega} : \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$ ,  $p \in [1, \infty)$

$\text{supp}(u)$  Träger von  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$

: Frobenius-Skalarprodukt,  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$   $A : B := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$

$\text{tr}(\cdot)$  Spur,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$a(u, v)$  Bilinearform aus Elastizitätsproblem,  $a(u, v) : \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$A$  Linearer Operator zu  $a(u, v)$ ,  $\langle Au, v \rangle_{\mathbb{V}(\Omega), \mathbb{V}(\Omega)} := a(u, v) \quad \forall y, v \in \mathbb{V}(\Omega)$

$F(u)$  Linearform aus Elastizitätsproblem,  $F(u) : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$  Sobolevraum mit rationaler Ordnung, gemäß Definition 2.3

$\mathbb{W}(\Gamma_C)$  Spurraum auf Kontaktrand,  $\mathbb{W}(\Gamma_C) := H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$

$\mathcal{F}f$  Fouriertransformierte von  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , gemäß Definition 2.2

$g$  Abstandsfunktion,  $g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R}_+$  Raum der positiven reellen Zahlen,  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$\bar{\Omega}$  Abschluss von  $\Omega$ ,  $\bar{\Omega} := \bigcap_{A \supset \Omega, A \text{ abgeschlossen}} A$

$V'$  Dualer Raum von  $V$ , gemäß Definition 2.4

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$  Duale Paarung über  $V$ , gemäß Definition 2.4

$T^*$  Dualer Operator zu  $T$ , gemäß Definition 2.4

$\tau_C^\nu$  Normalspuroperator,  $\tau_C^\nu : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}(\Gamma_C)$

$B$  Linearer Operator zu  $\tau_C^\nu$ ,  $By := \tau_C^\nu(y) \quad y \in \mathbb{V}(\Omega)$

u. d. N. Unter den Nebenbedingungen

$\phi$  Komplementaritätsfunktion,  $\phi : L^2(\Gamma_C) \rightarrow L^2(\Gamma_C)$

$L$  Lagrangefunktion

---

$J$  Zielfunktion, beim Elastizitätsproblem mit Kontakt totale potentielle Energie, bei der Formoptimierung Nachgiebigkeit  $J : \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{W}(\Gamma_C)' \rightarrow \mathbb{R}$

$(\cdot)^\circ$  Inneres einer Menge,  $\Omega^\circ := \Omega \setminus \partial\Omega$

$\lambda$  Lagrange-Multiplikator

$(\cdot, \cdot)_{\Gamma_C}$  Inneres Produkt auf  $L^2(\Gamma_C)$

$\alpha$  Regularitätsparameter,  $\alpha > 0$

---

## Notationen im Endlichdimensionalen

---

$\varphi_i$  Basisfunktion von  $\mathbb{W}(\Gamma_C)'_h$

$\psi_i$  Basisfunktion von  $\mathbb{V}(\Omega)_h$

$\psi_i^C$  Basisfunktion von  $\mathbb{W}(\Gamma_C)_h$

$\chi_i^+$  Positive Basisfunktion von  $\mathbb{W}(\Gamma_C)'_h$

$n_G$  Anzahl der Designvariablen,  $n_G \in \mathbb{N}$

$n_C$  Anzahl der FE-Gitterpunkte auf dem Kontaktrand,  $n_C \in \mathbb{N}$

$n$  Anzahl der FE-Gitterpunkte,  $n \in \mathbb{N}$

$A$  Steifigkeitsmatrix (engl. Stiffness matrix),  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$b^V$  Volumenkräfte (engl. Volume forces),  $b^V \in \mathbb{R}^{2n}$

$b^N$  Neumannkräfte (engl. Neumann forces),  $b^N \in \mathbb{R}^{2n}$

$N$  Normalenmatrix (engl. Normal trace operator),  $N \in \mathbb{R}^{n_C \times 2n}$

$D$  Verbindungsmatrix (engl. Mortar matrix/Coupling matrix),  $D \in \mathbb{R}^{n_C \times n_C}$

$u$  Designvektor (engl. Design vector),  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$

$y$  Verschiebungsvektor (engl. Displacement vector),  $y \in \mathbb{R}^{2n}$

$\lambda$  Normalspannung (engl. Normal stress),  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_C}$

$g$  Abstand (engl. gap)  $g \in \mathbb{R}^{n_C}$

---

## 2 Das Kontaktproblem

---

In diesem Kapitel wollen wir das lineare Elastizitätsproblems und eine Erweiterung auf lineare Elastizität mit Kontakt vorstellen. In Abschnitt 2.1 beschreiben wir das lineare Elastizitätsproblem ohne Kontakt. Als Quelle greifen wir dabei hauptsächlich auf Hess [2010] zurück. Der Abschnitt 2.2 geht daraufhin auf die Besonderheiten des Kontaktproblems ein und bildet damit die Grundlage der weiteren Kapitel. Abschnitt 2.2 basiert vor allem auf Ulbrich u. a. [2013] und Hess [2010].

---

### 2.1 Lineares Elastizitätsproblem ohne Kontakt

---

Wir treffen folgende Annahme:

**Annahme 2.1.** *Der Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei beschränkt und liegt zu Beginn in einer spannungsfreien Konfiguration vor.*

Zu einer genaueren Beschreibung, definieren wir zunächst den Rand des Körpers  $\Omega$  als  $\Gamma = \partial\Omega$ . Diesen Rand unterteilen wir für das lineare Elastizitätsproblem ohne Kontakt in den **Dirichletrand**  $\Gamma_D \subset \Gamma$  und den **Neumannrand**  $\Gamma_N \subset \Gamma$ . Der Dirichletrand bezeichnet den Teil des Randes  $\Gamma$ , welcher im Raum festgehalten wird. Die daraus resultierende Randbedingung nennt man **wesentliche Randbedingung** (Larsson u. Thomée [2005]). Dies kann in der Praxis ein Auflagepunkt oder ähnliches sein. Der Neumannrand beschreibt den Abschnitt der Körperoberfläche auf den die Oberflächenkräfte einwirken. Bei einer Schiene, wäre dies die Lauffläche, auf der die Rolle oder Walze läuft. Eine solche Nebenbedingung nennt man **natürliche Randbedingung** (Larsson u. Thomée [2005]).

Ganz allgemein betrachtet, behandelt das lineare Elastizitätsproblem einen **elastischen Körper**  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , welcher durch die auf ihn einwirkenden Kräfte  $f^V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f^N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3$  verformt wird.

Dabei bezeichnet  $f^V$  die **Volumenkräfte**, wie z. B. das Eigengewicht und  $f^N$  die **Oberflächenkräfte**, z. B. Druck von anderen Bauteilen. Diese Unterscheidung ist notwendig, da die Volumenkräfte in jedem Massenpunkt des Körpers wirken, wo hingegen die Oberflächenkräfte nur auf einen bestimmten Teil des Körpers, den Neumannrand  $\Gamma_N$ , Auswirkungen haben. Dieser Unterschied wird sich in späteren Berechnungen nochmals zeigen.

**Annahme 2.2.** *Der Rand  $\Gamma$  sei hinreichend glatt. Die Teilränder  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  haben ein positives Oberflächenmaß und sind hinreichend regulär, was unelastische Verschiebungen verhindert. Außerdem setzen wir voraus, dass  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_C$  einen positiven Abstand zueinander haben.*

Ziel des Elastizitätsproblem ist es, eine Verschiebung zu finden, sodass der Körper  $\Omega$  im Gleichgewicht mit einwirkenden Kräften  $f^V$ ,  $f^N$  ist.

Dazu benötigen wir sowohl die Spannung, als auch die Verschiebung und die aus der Verschiebung resultierende Dehnung. Der Vektor  $\nu$  stellt die **äußere Normale** an  $\Gamma_N$  dar.

Die **Spannung** ist durch den symmetrischen Spannungstensor

$$\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ji}(x)$$

gegeben, welcher im Gleichgewicht das System von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^3 \frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j} = f_i^V & \text{in } \Omega, i = 1, 2, 3 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \nu_j = f_i^N & \text{in } \Gamma_N, i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.1)$$

löst.

Durch die einwirkenden Kräfte wird der Körper  $\Omega$  deformiert. Die Transformation  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  in den deformierten Zustand lässt sich aufteilen, in einerseits die Identität  $\text{Id} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und den Teil, den wir **Verschiebung** nennen  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Jeder Punkt  $x \in \Omega$  lässt sich somit durch

$$\Phi(x) := x + y(x)$$

nach der Deformation darstellen. Davon ausgehend, wird die **Dehnung** von  $\Omega$  definiert als

$$E(y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

$$E_{ij}y(x) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} y_i(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} y_j(x) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} y_i(x) \frac{\partial}{\partial x_k} y_j(x), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

**Annahme 2.3.** Die Verschiebung  $y$  sei hinreichend klein.

Aufgrund von Annahme 2.3 folgt, dass auch der quadratische Term in (2.2) hinreichend klein ist. Im Folgenden werden wir diesen darum vernachlässigen und erhalten somit den linearisierten Dehnungstensor  $\varepsilon(y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$\varepsilon_{ij}(y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} y_i + \frac{\partial}{\partial x_i} y_j \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Über das sogenannte Elastizitätsmodul  $C$ , ein Materialtensor 4. Ordnung, lassen sich die Spannung und die Verzerrung über das lineare Hookesche Gesetz verknüpfen.

Es gilt:

$$\sigma_{ij}(y) = \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}(y), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$= \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu \varepsilon. \quad (2.5)$$

Dabei sind  $\lambda, \mu$  die jeweiligen **Lamé-Parameter**, welche sich leicht umrechnen lassen zu der Poissonzahl und dem E-Modul (siehe Satz A.1 im Anhang).

**Annahme 2.4.** Wir verwenden ausschließlich isotropes, lineares und homogenes Material.

Die Isotropie bezeichnet die Unabhängigkeit der Materialeigenschaften von der Orientierung, während die Homogenität sicherstellt, dass in jedem Punkt die selben Materialeigenschaften gelten.

**Bemerkung 2.1.** Annahme 2.4 ergibt für die Koeffizienten  $C_{ijkl}$  des Elastizitätsmoduls folgende Eigenschaften:

1. Für fast alle  $x \in \Omega$  gelte  $C_{ijkl}(x) = C_{jikl}(x) = C_{klij}(x)$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ,  
d. h. die Koeffizienten sind unabhängig von der Orientierung.
2. Für fast alle  $x \in \Omega$  gelte  $C_{ijkl}(x) = C_{ijkl}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ,  
d. h. die Koeffizienten sind konstant auf  $\Omega$ .

Wird der Körper  $\Omega$  verformt, führt dies zu internen Kräften (sogenannten Spannungen). Die Verbindung zwischen diesen Spannungen und den Dehnungen ist materialabhängig und durch das Hookesche Gesetz gegeben. Da diese Gesetzmäßigkeit auf Beobachtungen natürlicher Prozesse beruht, lässt sie sich nicht beweisen und wird darum als gegeben hingenommen. Betrachten wir vor diesem Hintergrund abermals die beiden Gleichungen in (2.1). Wir sehen, dass die erste Gleichung das Gleichgewicht zwischen den internen Kräften pro Volumen und den Volumenkraften charakterisiert. Die zweite Gleichung hingegen stellt den Ausgleich der internen Kräfte auf den Rand pro Fläche mit den externen Lasten dar. Davon ausgehend, können wir nun das lineare Elastizitätsproblem anschaulich definieren.

Gesucht ist eine Verschiebung  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welche den verzerrten Körper im Gleichgewicht mit  $f^V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f^N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt. Außerdem soll  $y$  die homogene Dirichletrandbedingung erfüllen, d. h.  $y = 0$ , auf  $\Gamma_D$ .

**Problem 2.1 (Lineares Elastizitätsproblem).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f^V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $f^N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Des Weiteren beschreibe  $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$  das Elastizitätsmodul,  $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  den Spannungstensor und  $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  den linearisierten Dehnungstensor. Finde  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\delta \sigma_{ij}}{\delta x_j} &= f_i^V && \text{in } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \nu_j &= f_i^N && \text{in } \Gamma_N, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ij}(y) &= \sum_{k,l=1}^3 C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}(y) && \text{in } \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_D \end{aligned}$$

gilt.

Bevor wir eine schwache Formulierung des linearen Elastizitätsproblems aufstellen, wollen wir kurz einige Konstrukte der Funktionalanalysis einführen, welche wir im Folgenden verwenden werden.

Wir definieren mit  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\Omega$  Lebesgue-messbar

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &:= \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{L}^p(\Omega) &:= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : \|v\|_{L^p(\Omega)} < \infty\} \\ \mathcal{L}_{\text{loc}}^p &:= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar} : v \in \mathcal{L}^p(K), \text{ für alle } K \subset \Omega \text{ kompakt}\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Äquivalenzrelation

$$v \sim w \quad \text{in } L^p(\Omega) : \Leftrightarrow \|v - w\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

können wir den Raum, der bis auf, auf einer Nullmenge identischen Funktionen (siehe [Hinze u. a., 2009, Abschnitt 1.2.2.3])

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim$$

definieren und auch

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \mathcal{L}^p_{\text{loc}}(\Omega) / \sim.$$

Da wir häufig mit sogenannten Sobolev-Räumen in Berührung kommen werden, benötigen wir dazu das Konstrukt der schwachen Ableitung. Der in Definition 2.1 auftauchende Raum  $C_c^\infty(\Omega)$  ist definiert als

$$C_c^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \text{supp}(v) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

und beschreibt den Raum der stetigen Funktionen auf  $\Omega$  mit kompaktem Träger, welche unendlich oft stetig partiell differenzierbar sind und für deren partielle Ableitungen eine stetige Erweiterung auf  $\bar{\Omega}$  existiert.

**Definition 2.1** (Schwache Ableitung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen und sei  $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Existiert eine Funktion  $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , sodass

$$\int_{\Omega} w \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad (2.6)$$

so bezeichnet man mit  $D^\alpha v := w$  die  $\alpha$ -te schwache partiellen Ableitung von  $v$ .

Mit Hilfe der schwachen Ableitungen können wir die folgenden Sobolev-Räume definieren, welche wir im weiteren Verlauf häufiger verwenden werden.

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : v \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

Der für uns wichtigen Raum der zulässigen Verschiebungen ist durch

$$\mathbb{V}(\Omega) := H^1_D(\Omega)^3 = \{v \in H^1(\Omega)^3 : v|_{\Gamma_D} = 0\}$$

definiert, dabei ist  $H^1(\Omega)^3$  komponentenweise zu verstehen, d. h.

$$H^1(\Omega)^3 = \{(q_1, q_2, q_3)^T : q_1, q_2, q_3 \in H^1(\Omega)\}.$$

**Bemerkung 2.2.** Für zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  schreiben wir mit

$$A : B := \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij} b_{ij}$$

das sogenannte **Frobenius-Skalarprodukt**.

Darauf aufbauend können wir eine schwache Formulierung des linearen Elastizitätsproblems aufstellen.

**Problem 2.2 (Schwache Formulierung des linearen Elastizitätsproblems).** Seien die Voraussetzungen wie in Problem 2.1 gegeben. Finde eine zulässige Verschiebung  $y \in \mathbb{V}(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : C \varepsilon(y) \, dx = \int_{\Omega} f^V \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} f^N \cdot v \, ds, \quad \forall v \in \mathbb{V}(\Omega). \quad (2.7)$$

Nach [Braess, 2007, Kapitel VI, §3].

Um auf eine etwas handlichere Formulierung zu kommen, definieren wir unter Verwendung der Spur  $\text{tr}(\cdot)$  und der Divergenz  $\text{div}(\cdot)$  die Bilinearform

$$a : \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.8)$$

$$a(y, v) := \int_{\Omega} \varepsilon(v) : C \varepsilon(y) \, dx \quad (2.9)$$

$$= \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(v) : \varepsilon(y) + \lambda \text{tr}(\varepsilon(v)) \cdot \text{tr}(\varepsilon(y)) \, dx \quad (2.10)$$

$$= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(y) \, dx + \lambda \int_{\Omega} \text{div}(v) \cdot \text{div}(y) \, dx, \quad (2.11)$$

wobei (2.11) aus (2.3) folgt und der Definition der Divergenz (siehe Definition A.1), außerdem definieren wir die Linearform

$$F : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad F(v) = \int_{\Omega} f^V \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_N} f^N \cdot v \, ds. \quad (2.12)$$

Damit können wir eine übersichtlichere Formulierung von Problem 2.2 vornehmen.

**Problem 2.3.** Es seien die Voraussetzungen aus Problem 2.1 gegeben. Finde  $y \in \mathbb{V}(\Omega)$  mit

$$a(y, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}(\Omega). \quad (2.13)$$

Das Problem 2.2 und damit natürlich auch das Problem 2.3, lässt sich wegen Annahme 2.1, Annahme 2.2 und Satz A.2 nach Satz A.3 in das folgende Variationsproblem umschreiben.

**Problem 2.4 (Variationsproblem).** Es gelten die Voraussetzungen aus Problem 2.1. Finde  $\tilde{y} \in \mathbb{V}(\Omega)$  so, dass gilt:

$$J(\tilde{y}) := \frac{1}{2} a(\tilde{y}, \tilde{y}) - F(\tilde{y}) \leq J(y) \quad \forall y \in \mathbb{V}(\Omega), \quad (2.14)$$

d. h.  $\tilde{y}$  ist das globale Minimum des Funktionals  $J(y) : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Das Zielfunktional  $J(y)$  beschreibt die totale potentielle Energie des Gebietes im Gleichgewichtszustand. Siehe [Haslinger u. Mäkinen, 2003, Abschnitt 2.5.5].

**Bemerkung 2.3.** Dieses Verhalten lässt sich auch in physikalischen Beobachtungen wiederfinden. Einerseits streben in der Natur Prozesse immer einen Zustand minimaler Energie an, während andererseits nach dem dritten Newtonschen Axiom (*lex tertia*) „*actio = reactio*“ gilt und es dadurch immer zu einem Gleichgewichtszustand der Kräfte kommt.

---

## 2.2 Lineares Elastizitätsproblem mit Kontakt

---

Wir kommen nun zu einer Erweiterung des im vorherigen Kapitel vorgestellten linearen Elastizitätsproblems. In der Praxis ist es häufig der Fall, dass einzelne Bauteile durch Krafteinwirkung verschoben werden und dabei andere Elemente berühren.

Wir definieren uns dazu den möglichen Kontaktrand des Körpers  $\Omega$  als

$$\Gamma_C \subset \partial\Omega.$$

Ein solcher Kontakt beeinflusst die Verformung des betrachteten Bauteils. Um ein solches Hindernis zu modellieren, verwenden wir eine Funktion

$$g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

welche uns den linearisierten Abstand in Richtung der äußeren Normalen zwischen dem Bauteil und dem Hindernis bestimmt.

Im Folgenden werden wir, im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt auch Sobolev-Räume rationaler Ordnung verwenden. Um diese zu definieren, führen wir zuerst die Fouriertransformation ein.

**Definition 2.2** (Fouriertransformation). Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  setze

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i \sum_{j=1}^d x_j \xi_j} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Die Funktion  $\mathcal{F}f$  heißt Fouriertransformierte von  $f$  und die Abbildung  $\mathcal{F}$  Fouriertransformation. Nach [Werner, 2007, Definition V.2.1].

Damit können wir Sobolev-Räume rationaler Ordnung definieren.

**Definition 2.3** (Sobolev-Räume rationaler Ordnung). Sei  $m > 0$ . Es gilt

$$W^m(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Nach [Werner, 2007, Satz V.2.14].

Um der bisherigen Notation treu zubleiben, schreiben wir  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C) := W^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ .

**Annahme 2.5.** Wir nehmen an, dass die Funktion  $g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}_+$  hinreichend glatt ist und es gilt  $g \in \mathbb{W}(\Gamma_C) = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C)$ .

Ziel ist es, wie im vorherigen Abschnitt, eine Verschiebung  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  zu finden, sodass ein Kräftegleichgewicht vorherrscht. Hinzu kommt jedoch die Nebenbedingung, dass sich die beiden Bauteile nicht durchdringen dürfen. Analog zu Problem 2.4 lässt sich nun auch für das lineare Elastizitätsproblem mit Kontakt eine Variationsformulierung aufstellen, mit einer zusätzlichen Kontaktnebenbedingung.

Um diese Nebenbedingung aufzustellen, benötigen wir die Verschiebung des Bauteils in Richtung der äußeren Normalen  $\nu$  auf dem potentiellen Kontaktrand  $\Gamma_C$ . Für  $\nu$  gilt  $\nu(x) \perp \Gamma_C$  an der Stelle  $x \in \Gamma_C$  und  $\nu(x)$  sei normiert.

Zur Bestimmung der gesuchten Verschiebung definieren wir uns den **Normalspuroperator** auf  $\Gamma_C$

$$\tau_C^\nu : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}(\Gamma_C).$$

Für  $\tau_C$  gilt, falls  $y$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  ist,

$$\tau_C^\nu(y)(x) = \nu^T \tau_C(y)(x) = \nu^T y(x) \quad \forall x \in \Gamma_C.$$

Die Kontaktnebenbedingung lässt sich damit schreiben als

$$\tau_C^\nu(y) \leq g \quad \text{auf } \Gamma_C.$$

Zu  $\tau_C^\nu$  definieren wir wie in Ulbrich u. a. [2013] den beschränkten linearen **Operator**  $B : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}(\Gamma_C)$ , welcher definiert ist als

$$By := \tau_C^\nu(y).$$

**Problem 2.5 (Lineares Elastizitätsproblem mit Kontakt).** *Es gelten die Voraussetzungen aus Problem 2.1. Finde  $\tilde{y} \in \mathbb{V}(\Omega)$  so, dass  $\tilde{y}$  folgendes Minimierungsproblem löst:*

$$\min_{y \in \mathbb{V}(\Omega)} \frac{1}{2} a(y, y) - F(y), \quad \text{u. d. N.} \quad g - By \geq 0 \text{ auf } \Gamma_C.$$

*D. h.  $\tilde{y}$  ist das globale Minimum des Funktionales  $J(y) : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  unter der Bedingung, dass sich das Bauteil und das Hindernis nicht durchdringen. Nach Ulbrich u. a. [2013].*

Die Existenz einer Lösung für Problem 2.5 ergibt sich aus folgendem Lemma.

**Lemma 2.1** (Eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems). *Das Problem 2.5, ist konvex mit gleichmäßig konvexer quadratischer Zielfunktion und besitzt eine eindeutige Lösung  $\tilde{y} \in \mathbb{V}(\Omega)$ .*

*Beweis.* Siehe [Ulbrich u. a., 2013, Lemma 2]. □

## Herleitung einer Optimalitätsbedingung

Nachdem wir die Existenz einer eindeutigen Lösung sichergestellt haben, kommen wir nun zur expliziten Bestimmung einer Lösung. Dazu wollen wir die KKT-Bedingungen für Problem 2.5 aufstellen. Da die Lagrangemultiplikatoren auf einem dualen Raum definiert sind, führen wir diesen jedoch zunächst einmal allgemein ein.

**Definition 2.4** (Dualer Raum, duale Paarung, dualer Operator). *Sei  $X$  ein Banachraum,  $u \in X$  und  $\ell \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ , d. h.  $\ell : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein linearer Operator. Dann gilt:*

1. Der Raum  $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  der linearen Funktionale auf  $X$  heißt dualer Raum von  $X$  und ist nach [Hinze u. a., 2009, Theorem 1.2] mit der Operatornorm

$$\|\ell\| := \sup_{\|u\|_X=1} |\ell(u)|$$

ein Banachraum.

2. Wir schreiben  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  für die duale Paarung, welche definiert ist durch

$$\langle \ell, u \rangle_{X', X} := \ell(u).$$

3. Sei  $Y$  ebenfalls ein Banachraum, dann ist der zum Operator  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  duale Operator definiert durch

$$\langle T^* v, w \rangle_{X', X} = \langle v, Tw \rangle_{Y', Y} \quad \forall v \in Y', w \in X.$$

Nach [Hinze u. a., 2009, Definition 1.5 und 1.6].

Zusätzlich definieren wir uns **Operator A**:  $\mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}(\Omega)'$  mit

$$\langle Ay, v \rangle_{\mathbb{V}(\Omega)', \mathbb{V}(\Omega)} := a(y, v) \quad \forall y, v \in \mathbb{V}(\Omega).$$

Aufgrund der Eigenschaften der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  ist der Operator  $A$  selbstadjungiert,  $\mathbb{V}(\Omega)$ -elliptisch, beschränkt und linear.

Bevor wir die KKT-Bedingungen aufstellen, beweisen wir zuerst deren Gültigkeit. Dazu zeigen wir, dass die Regularitätsbedingung von Robinson gilt.

**Definition 2.5** (Allgemeines Optimierungsproblem). Seien  $W, V$  Banachräume,  $J : W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : W \rightarrow V$  stetig Fréchet-differenzierbar. Es sei  $\mathcal{C} \subset V$  nichtleer, abgeschlossen und konvex und  $\mathcal{K}_G \subset V$  sei ein abgeschlossener konvexer Kegel. Damit definieren wir

$$\min_{w \in W} J(w) \quad \text{u. d. N.} \quad G(w) \in \mathcal{K}_G, w \in \mathcal{C}$$

als allgemeine Form eines Optimierungsproblems.

Für diese allgemeine Form definieren wir nun die Regularitätsbedingungen von Robinson.

**Definition 2.6** (Regularitätsbedingung von Robinson).

$$0 \in (G(w) + G'(w)(\mathcal{C} - w) - \mathcal{K}_G)^\circ$$

Mit  $(\cdot)^\circ$  bezeichnen wir das Innere einer Menge.

Nach [Hinze u. a., 2009, Theorem 1.54] impliziert diese Regularitätsbedingung eine Constraint Qualification. Wir wollen nun zeigen, dass jede Lösung von Problem 2.5 die genannte Bedingung erfüllt.

**Satz 2.1.** Jeden Lösung  $y^* \in \mathbb{V}(\Omega)$  von Problem 2.5 erfüllt die Regularitätsbedingung von Robinson.

*Beweis.* Wir verwenden analog zu Definition 2.5 folgende Mengen und Abbildungen:

$$\begin{aligned} W &:= \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{W}(\Gamma_C), \\ V &:= \mathbb{W}(\Gamma_C), \\ G(y) &:= g - By, \\ \mathcal{K}_G &:= \{v \in \mathbb{W}(\Gamma_C), v \geq 0\}, \\ \mathcal{C} &:= \mathbb{V}(\Omega). \end{aligned}$$

Für die Fréchet-Ableitung von  $G(y)$  nach  $y$  gilt unter Verwendung von Definition A.2:

$$G_y(y) = -By.$$

In den folgenden Schritten, werden wir die Surjektivität von  $B$  verwenden. Das  $B$  diese Eigenschaft besitzt, zeigt [Ulbrich u. a., 2013, Lemma 3].

Sei nun  $y^* \in \mathbb{V}(\Omega)$  eine Lösung von Problem 2.5, dann gilt

$$\begin{aligned} G(w) + G'(w)(\mathcal{C} - w) - \mathcal{K}_G &= g - By^* - B(\mathbb{V}(\Omega) - y^*) - \{v \in \mathbb{W}(\Gamma_C) : v \geq 0\} \\ &= g - B\mathbb{V}(\Omega) - \{v \in \mathbb{W}(\Gamma_C) : v \geq 0\} \\ &= \mathbb{W}(\Gamma_C). \end{aligned}$$

□

Nach [Hinze u. a., 2009, Theorem 1.56] gelten nun für jede Lösung von Problem 2.5 die KKT-Bedingungen. Wir können diese wie in [Ulbrich u. a., 2013, Abschnitt 3] formulieren. Dazu verwenden wir die Lagrangefunktion

$$L : \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{W}(\Gamma_C)' \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(y, \lambda) = J(y) + \langle \lambda, By - g \rangle_{\mathbb{W}(\Gamma_C)', \mathbb{W}(\Gamma_C)}.$$

**Satz 2.2 (KKT-Bedingungen für das lineare Kontaktproblem).** *Sei  $L : \mathbb{V}(\Omega) \times \mathbb{W}(\Gamma_C)' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(y, \lambda) = J(y) + \langle \lambda, By - g \rangle_{\mathbb{W}(\Gamma_C)', \mathbb{W}(\Gamma_C)}$  die Lagrangefunktion zu dem in Problem 2.5 beschriebenen Minimierungsproblem. Eine Lösung  $y^* \in \mathbb{V}(\Omega)$  erfüllt die KKT-Bedingungen genau dann, wenn Lagrangemultiplikatoren  $\lambda^* \in \mathbb{W}(\Gamma_C)'$  existieren, sodass gilt*

$$L_y(y^*, \lambda^*) = Ay^* - F + B^* \lambda^* = 0, \quad (2.15)$$

$$\lambda^* \in K^+, \quad L_\lambda(y^*, \lambda^*) = By^* - g \leq 0, \quad \langle \lambda^*, L_\lambda(y^*, \lambda^*) \rangle_{\mathbb{W}(\Gamma_C)', \mathbb{W}(\Gamma_C)} = 0, \quad (2.16)$$

wobei  $K^+ = \{\lambda \in \mathbb{W}(\Gamma_C)' : \langle \lambda, v \rangle_{\mathbb{W}(\Gamma_C)', \mathbb{W}(\Gamma_C)} \geq 0 \quad \forall v \in K\}$  der duale Kegel zum zulässigen Bereich von Problem 2.5 ist. Die Notationen  $L_u$  und  $L_y$  bezeichnen die Fréchet-Ableitungen (siehe Definition A.2) nach  $u$  bzw.  $y$ .

Nach [Ulbrich u. a., 2013, Theorem 1] sind die KKT-Bedingungen für Problem 2.5 sowohl notwendig als auch hinreichend.

Das zu Problem 2.5 duale Problem lässt sich mit Hilfe der Lagrangefunktion aufstellen.

**Problem 2.6 (Duales Kontaktproblem).**

$$\max_{\lambda \in \mathbb{W}(\Gamma_C)'} d(\lambda) = L(y(\lambda), \lambda) \quad \text{u. d. N. } \lambda \in K^+ \quad (2.17)$$

Dabei gilt, aufgrund der, in unserem Fall, eindeutigen Lösbarkeit der Lagrangefunktion und (2.15)  $y(\lambda) = A^{-1}(F - B^*\lambda)$ .

Um eine spätere numerische Behandlung des Optimierungsproblems zu erleichtern, leiten wir eine punktweise Formulierung her. Dazu betrachten wir, ausgehend von den bisherigen Erkenntnissen, das Problem 2.6.

Wie wir bereits gesehen haben, gilt für den Lagrangemultiplikator  $\lambda \in \mathbb{W}(\Gamma_C)'$ . Hierbei ist  $\lambda$  eine sogenannte verallgemeinerte Funktion, auch Distribution genannt. Unser Ziel ist es, die Bedingung (2.16) mithilfe einer Komplementaritätsfunktion

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit } \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ und } x_1 x_2 = 0$$

punktweise zu reformulieren. Aufgrund der speziellen Struktur von  $\lambda$  ist dies jedoch nicht ohne Weiteres möglich.

Der Argumentation in [Ulbrich u. a., 2013, Abschnitt 4] folgend nehmen wir an, dass  $\lambda \in L^2(\Gamma_C)$  gilt. Es ist zu beachten, dass durch diese Annahme die Constraint Qualification aus [Ulbrich u. a., 2013, Lemma 3] ihre Gültigkeit verliert und damit auch die KKT-Bedingungen keine notwendigen Optimalitätsbedingungen darstellen. Aus diesem Grund fügen wir einen  $L^2$ -Regularisierungsterm zu der, in Problem 2.6 beschriebenen, dualen Zielfunktion hinzu und erhalten:

**Problem 2.7 (Regularisiertes duales Kontaktproblem).**

$$\max_{\lambda \in L^2(\Gamma_C)} d_\alpha(\lambda) = d(\lambda) - \frac{\alpha}{2} \|\lambda - \lambda_r\|_{L^2(\Gamma_C)}^2 \quad \text{u. d. N. } \lambda \geq 0 \text{ auf } \Gamma_C. \quad (2.18)$$

Dabei ist  $\lambda_r \in L^2(\Gamma_C)$  beliebig, aber fest und  $\alpha > 0$ .

**Bemerkung 2.4.** Später werden wir zu der konkreten Berechnung  $\lambda_r = 0$  wählen. Aktuell lassen wir jedoch, der Vollständigkeit halber,  $\lambda_r$  weiterhin als beliebig zu.

**Definition 2.7** (Inneres Produkt für  $L^2(\Gamma_C)$ ). Seien  $v, w \in L^2(\Gamma_C)$ . Wir definieren

$$(v, w)_{\Gamma_C} = \int_{\Gamma_C} v(x)w(x)dx.$$

Damit können wir nun abschließend eine Optimalitätsbedingung mit punktweiser Formulierung präsentieren.

**Satz 2.3 (Regularisierte Optimalitätsbedingung).** Eine Lösung  $\lambda_\alpha^* \in L^2(\Gamma_C)$  von Problem 2.7, erfüllt die KKT-Bedingungen genau dann, wenn ein  $y_\alpha^* \in \mathbb{V}(\Omega)$  existiert, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$Ay_\alpha^* - F + B^*\lambda_\alpha^* = 0, \quad (2.19)$$

$$\lambda_\alpha^* \geq 0, \quad By_\alpha^* - \alpha(\lambda_\alpha^* - \lambda_r) - g \leq 0, \quad (\lambda_\alpha^*, By_\alpha^* - \alpha(\lambda_\alpha^* - \lambda_r) - g)_{\Gamma_C} = 0. \quad (2.20)$$

Nach [Ulbrich u. a., 2013, Abschnitt 4] folgt daraus:

$$\lambda_\alpha^* \in L^2(\Gamma_C) \text{ löst (2.18)} \Leftrightarrow \exists y_\alpha^* \in \mathbb{V}(\Omega), \text{ welches (2.19) und (2.20) erfüllt.} \quad (2.21)$$

---

Mit Hilfe der **Komplementaritätsfunktion**  $\phi(x, y) = \min(a, b) = a - \max(0, a - b)$  lässt sich Bedingung (2.20) auf eine kompaktere Weise darstellen.

$$\phi(\lambda_\alpha^*, -By_\alpha^* + \alpha(\lambda_\alpha^* - \lambda_R) + g) = 0 \quad (2.22)$$

Zu unserem vorgestellten Optimierungsproblem können wir nun zusammenfassend folgendes Optimalitätssystem aufstellen.

$$C(y, \lambda) := \begin{pmatrix} Ay - F + B^* \lambda \\ \phi(\lambda, -By + \alpha(\lambda - \lambda_R) + g) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{NCP})$$

Diese Formulierung werden wir im Folgenden ausschließlich verwenden.

---

### 3 Finite Elemente Methode

---

Das im vorherigen Kapitel hergeleitete Kontaktproblem soll mit der Methode der finiten Elemente behandelt werden. Dabei handelt es sich um eine numerisches Verfahren zur approximativen Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Dessen grundlegenden Gedanken und Vorgehensweisen wollen wir hier kurz nach Schwarz [1991] darlegen.

Der erste Schritt besteht darin, das Grundgebiet  $\Omega$  in endlich viele abgeschlossene Teilgebiete, auch Elemente genannt, aufzuteilen. Da wir uns im Folgenden auf den zweidimensionalen Fall beschränken, bieten sich dazu Drei- und Vierecke an. Die Vereinigung dieser Teilgebiete stellt im Allgemeinen eine Approximation des zugrunde liegenden Gebietes dar, welche sich beliebig gut an das ursprüngliche Gebiet annähern lässt. Für die Menge  $E$  der Teilgebiete gilt:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e \in E} e.$$

Da wir ausschließlich Dreiecke verwenden werden, sagen wir im Folgenden dazu auch Triangulierung oder allgemein FE-Gitter.

Im zweiten Schritt werden auf diesem FE-Gitter lineare, quadratische oder höhergradige Ansatzfunktionen  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, welche jeweils nur auf wenigen Teilgebieten ungleich null sind. Wir werden einen quadratischen Ansatz wählen, weswegen jedes Element 6 Gitterpunkte, oder auch Knotenpunkte genannt, besitzt, wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Ansatzfunktionen müssen dabei bestimmte problemabhängige Stetigkeitsanforderungen erfüllen, um eine zulässige Funktionenklasse zu bilden. Die Ansatzfunktionen werden dazu für jedes Element  $e$  mittels sogenannter Formfunktionen  $N_i^e(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und Knotenvariablen  $f_i^e \in \mathbb{R}$  dargestellt. Die Knotenvariablen  $f_i^e$  stellen dabei die geforderten Funktionswerte oder Werte von Ableitungen der Ansatzfunktion im Knoten  $i$  des Elementes  $e$  dar. Für ein Element  $e$  im quadratischen Ansatz gilt damit:

$$f^e(x, y) = \sum_{i=1}^6 f_i^e N_i^e(x, y). \quad (3.1)$$

Für die Ansatzfunktionen gilt dabei in einen Gitterpunkt  $p_i^e = (x_i^e, y_i^e) \in \mathbb{R}^2$  eines Elementes  $e$

$$N_i^e(x_j^e, y_j^e) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ansatzfunktion  $f(x, y)$  lässt sich mittels sogenannter globaler Formfunktionen  $N_k(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben, wobei  $k \in \{1, \dots, n\}$  für den Index eines Gitterpunktes steht, wenn man alle Gitterpunkte von 1 bis  $n$  durchnummeriert. Dabei ist  $N_k(x, y)$  aus den Formfunktionen  $f_i^e(x, y)$ , die im  $k$ -ten Gitterpunkt ungleich null sind, zusammengesetzt. Es gilt somit,  $N_k(x, y)$  ist genau in den Elementen von null verschieden, die den  $k$ -ten Gitterpunkt gemeinsam haben. Damit ergibt sich

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k N_k(x, y).$$

Im dritten Schritt lässt sich, unter Verwendung linearer Operatoren zur Beschreibung der partiellen Differentialgleichungen, das ursprüngliche Problem in ein lineares Gleichungssystem umformen und lösen.

### 3.1 Diskretisierung

In diesem Abschnitt wollen wir eine diskretisierte, algebraische Formulierung der zuvor hergeleiteten Optimalitätsbedingungen erarbeiten. Diese Diskretisierung ist notwendig, damit wir die unendlichdimensionalen Räume verlassen können, um auf den, für den Computer möglichen, endlichdimensionalen Räumen zu operieren. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Erkenntnisse aus Ulbrich u. a. [2013] und Hess [2010].

**Definition 3.1.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^d$  eine Menge und  $\partial M \subset \mathbb{R}^d$  deren Rand. Wir definieren das Innere von  $M$  als

$$M^\circ := M \setminus \partial M.$$

Wir fordern, dass  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sich in endlich viele disjunkte, kompakte Dreiecke mit positivem Maß zerlegen lässt. Dabei seien zwei Dreiecke  $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$  disjunkt, wenn gilt  $T_1^\circ \cap T_2^\circ = \emptyset$ . Für den Fall, dass der Körper  $\Omega$  diese Eigenschaft nicht besitzt, verwenden wir eine hinreichend gute Approximation  $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ , die diese Eigenschaft besitzt. Die Bezeichnungen  $\Gamma_{C,h}, \Gamma_{D,h}$  und  $\Gamma_{N,h}$  stehen für die Approximation des jeweiligen Teilstückes von  $\partial\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ . Die Menge der Dreiecke nennen wir eine Triangulierung  $\mathcal{T}$  von  $\Omega$ . Unsere approximierten, zulässigen Verschiebungen  $y_h$  sind ab sofort auf dem endlichdimensionalen Raum der  $\mathcal{T}$ -stückweise definierten Polynome mit Grad kleiner gleich zwei definiert.

$$y_h \in \underbrace{\{v \in H^1(\Omega_h) : v \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq 2 \text{ stückweise definiert auf } \mathcal{T}, v|_{\Gamma_{D,h}}=0\}}_{=: \mathbb{V}(\Omega)_h}$$

Die Approximation der Lagrangemultiplikatoren  $\lambda_h$  wird auf der entsprechenden Approximation des dualen Raumes  $\mathbb{W}(\Gamma_C)_h \subset L^2(\Gamma_{C,h})$  definiert.

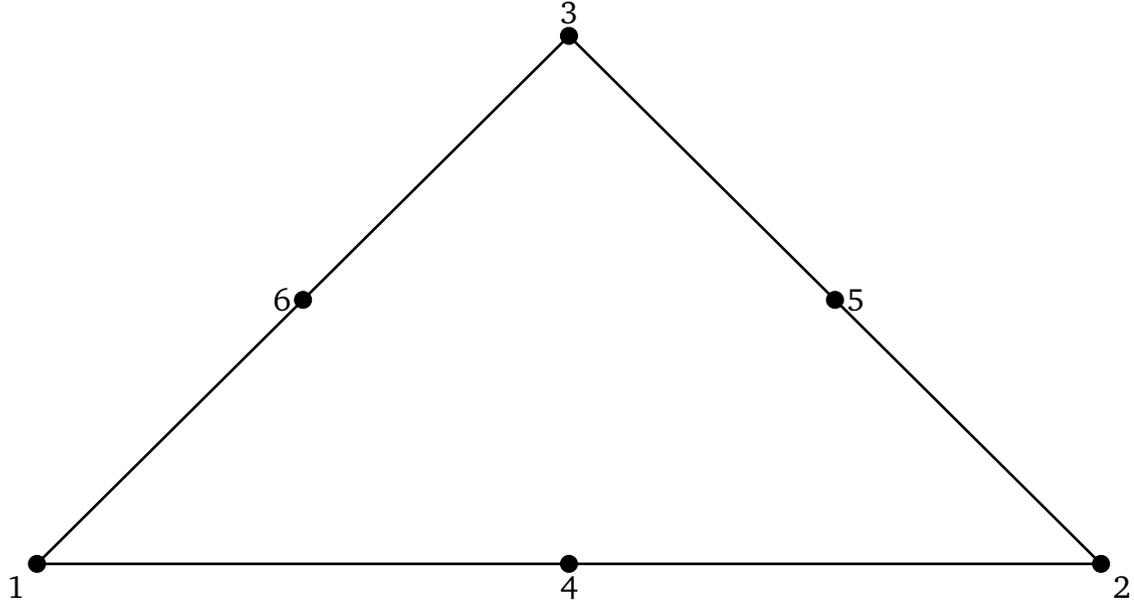
Wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, verwenden wir quadratische Elemente. Aus diesem Grund besitzt jedes Dreieck sechs Gitterpunkte. Die Anordnung ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

Analog zu Hess [2010] verwenden wir baryzentrische Koordinaten  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3$  bzgl. der kartesischen Koordinaten der Ecken eines Dreiecks  $(x_i, y_i)^T, i = 1, 2, 3$ , um einen Punkt  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  im Inneren zu beschreiben. Die baryzentrischen Koordinaten berechnen sich als Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Wir wählen als Basis von  $\mathbb{V}(\Omega)_h$  die Knotenbasis  $\{\psi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq 6\}$  (siehe auch [Schwarz, 1991, Abschnitt 2.3.2]), für die gilt.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 2\phi_1^2 - \phi_1, & \psi_2 &= 2\phi_2^2 - \phi_2, \\ \psi_3 &= 2\phi_3^2 - \phi_3, & \psi_4 &= 4\phi_1\phi_2, \\ \psi_5 &= 4\phi_2\phi_3, & \psi_6 &= \phi_1\phi_3. \end{aligned}$$



**Abbildung 3.1.:** Anordnung der 6 Knoten auf dem quadratischen Dreieckselement

Zur Beschreibung einer quadratischen Funktion  $v \in \mathbb{V}(\Omega)_h$  definieren wir mit  $v_i(T)$  den Funktionswert der Funktion  $v$  am  $i$ -ten Knoten des Dreieckes  $T$ . Analog steht  $\psi_i(T)$  für den  $i$ -ten Basiseintrag in Bezug auf  $T$ . Die Funktion  $v$  auf dem Element  $T \in \mathcal{T}$ , können wir damit analog zu (3.1), beschreiben durch

$$v|_T = \sum_{i=1}^6 v_i(T)\psi_i(T). \quad (3.3)$$

Da wir gefordert haben, dass  $\mathcal{T}$  eine Triangulierung durch disjunkte Dreiecke sei, gilt für jede Seite  $\partial_i T$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eines Elementes  $T \in \mathcal{T}$ , dass entweder gilt  $\partial_i T \subset \partial\Omega$  oder es gibt ein Element  $\tilde{T} \in \mathcal{T}$  mit  $T \cap \tilde{T} = \partial_i T = \partial_i \tilde{T}$ . Hierbei muss die Nummerierung der Seiten eventuell angepasst werden. Dies führt wiederum dazu, dass die Funktion  $v$  nicht nur quadratisch und stetig auf alle  $T \in \mathcal{T}$  ist, sondern auch auf  $\Omega_h$ . Die Knotenbasis  $\Psi \in \mathbb{R}^{2 \times 2n}$  lässt sich in der algebraischen Form

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & \psi_n & 0 \\ 0 & \psi_1 & \dots & 0 & \psi_n \end{pmatrix}$$

ausdrücken, wobei  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Knotenpunkte bezeichnet. Damit kann ein Element  $v_h \in \mathbb{V}(\Omega)_h$ , mit einem Koeffizientenvektor  $\bar{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ , durch

$$v_h = \Psi \bar{v}$$

dargestellt werden.

Wir kommen nun zurück auf die Darstellung des linearen Elastizitätsproblems aus Problem 2.2. Da wir uns nun in  $\mathbb{V}(\Omega)_h$  bewegen, gilt für die (2.7)

$$\int_{\Omega_h} \varepsilon(v_h) : C \varepsilon(y_h) dx = \int_{\Omega_h} f^V \cdot v_h dx + \int_{\Gamma_{N,h}} f^N \cdot v_h ds, \quad \forall v_h \in \mathbb{V}(\Omega)_h^2. \quad (3.4)$$

Wir können die einzelnen Komponenten in (3.4) bzgl. der Knotenbasis  $\Psi$  umschreiben, zu

$$\int_{\Omega_h} \varepsilon(\Psi \bar{v}) : C \varepsilon(\Psi \bar{y}) \, dx = \bar{v}^T \underbrace{\left( \int_{\Omega_h} \varepsilon(\Psi_{\cdot i}) : C \varepsilon(\Psi_{\cdot j}) \, dx \right)_{i,j \in \{1, \dots, 2n\}}}_{=:A} \bar{y}. \quad (3.5)$$

Die Umformung verwendet die Linearität des approximierten Dehnungsoperators  $\varepsilon(y)$  (siehe Seite 10). Die sogenannte **Steifigkeitsmatrix** wird mit  $A$  bezeichnet. Sie lässt sich im unendlichdimensionalen Fall mit dem Operator  $A$  (siehe Seite 16) identifizieren. Die beiden anderen Bestandteile lassen sich analog umformen zu

$$\int_{\Omega_h} f^V \cdot \Psi \bar{v} \, dx = \bar{v}^T \underbrace{\left( \int_{\Omega_h} f^V \cdot \Psi_{\cdot i} \, dx \right)_{i,j \in \{1, \dots, 2n\}}}_{=:b^V}, \quad (3.6)$$

$$\int_{\Gamma_{N,h}} f^N \cdot \Psi \bar{v} \, ds = \bar{v}^T \underbrace{\left( \int_{\Gamma_{N,h}} f^N \cdot \Psi_{\cdot i} \, ds \right)_{i,j \in \{1, \dots, 2n\}}}_{=:b^N}. \quad (3.7)$$

Damit lässt sich (3.4) umschreiben zu

$$\bar{v}^T A \bar{y} = \bar{v}^T (b^V + b^N).$$

Da dies jedoch nur den Fall ohne Kontakt beschreibt, wollen wir auch ein endlichdimensionales Analogon zu Operator  $B : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}(\Gamma_C)$  (siehe Seite 15) herleiten. Für eine detaillierte Beschreibung der numerischen Berechnung von  $A, b^V, b^N$  verweisen wir auf [Hess, 2010, Seite 40-45].

Zunächst benötigen wir eine Basis  $\Psi^C \in \mathbb{R}^{2 \times 2n_C}$  von  $\mathbb{W}(\Gamma_C)_h$ . Diese lässt sich durch Einschränkung der Knotenbasis auf die potentiellen Kontaktknoten bestimmen. Wir verwenden dazu die durch  $n_C \in \mathbb{N}$  festgelegte Anzahl potentieller Kontaktknoten. Es gilt zu beachten, dass in diesem Fall der  $i$ -te Kontaktknoten nicht unbedingt dem  $i$ -ten Knotenpunkt, bezogen auf alle Knotenpunkte, entspricht. Die Basis lässt sich in einer analogen Form wie die Knotenbasis der zulässigen Verschiebungen schreiben

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \psi_1^C & 0 & \dots & \psi_{n_C}^C & 0 \\ 0 & \psi_1^C & \dots & 0 & \psi_{n_C}^C \end{pmatrix}.$$

Die Einträge  $\psi_i^C$  lassen sich, für den zu Index  $i$  korrespondierenden globalen Index  $j$ , lesen als  $\psi_j|_{F \in \mathcal{F}}$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  ist die Menge aller potentiellen Kontaktflächen der Elemente der Triangulierung. Damit gilt für ein Element  $w_h \in \mathbb{W}(\Gamma_C)_h$ ,  $w_h = \Psi^C \bar{w}$  mit entsprechendem Koeffizientenvektor  $\bar{w} \in \mathbb{R}^{2n_C}$ .

Eine entsprechende Basis  $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, \dots, n_C\}}$  des dualen Raumes  $\mathbb{W}(\Gamma_C)'_h$  definieren wir, nach [Wohlmuth u. Krause, 2003, (2.6)], über die Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{\Gamma_C} \psi_i^C \varphi_j \, ds = \delta_{ij} \int_{\Gamma_C} \varphi_j \, ds \quad i, j \in \{1, \dots, n_C\}.$$



Damit ergibt sich als diskrete algebraische Form für  $B^* \lambda_\alpha^* \in \mathbb{V}(\Omega)'$  die Matrix  $DN \in \mathbb{R}^{n_c \times 2n}$ . Die approximierten Abstandsfunktion  $g_h \in \mathbb{W}(\Gamma_C)_h$  lässt sich analog mit dem Koeffizientenvektor  $\bar{g} \in \mathbb{R}^{n_c}$  algebraisch durch  $D\bar{g} \in \mathbb{R}^{n_c}$  darstellen. Die Verbindungsmatrix  $D$  lässt sich durch folgende Vorschrift relativ einfach berechnen:

$$D = \sum_{F \in \mathcal{F}} D^{(F)}. \quad (3.10)$$

Die Diagonalmatrix  $D^{(F)}$  besitzt nur drei Einträge ungleich Null. Diese entsprechen den jeweiligen Knoten der Kontaktfläche  $F$ . Beschränkt man  $D^{(F)}$  auf die Teilmatrix bzgl. dieser drei Knoten, ergibt sich folgende Gestalt:

$$D_{\text{loc}}(F) = \text{vol}(F) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Die Konvention der Knotenindizes lautet dabei, Knoten eins und zwei entsprechen den äußeren Knoten der Fläche und Knoten drei dem inneren Knoten.

Zusammengefasst ergibt dies das folgende diskretisierte lineare Kontaktproblem in algebraischer Form. Als Vorbereitung auf die folgenden Kapitel schreiben wir einzelnen Komponenten in Abhängigkeit vom Design  $u$  mit auf. Die Anzahl der Designvariablen sei mit  $n_G \in \mathbb{N}$  festgelegt. Das diskretisierte lineare Kontaktproblem ist definiert durch.

**Problem 3.1 (Diskretisiertes lineares Kontaktproblem).** Seien  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $b^V + b^N \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{2n \times n_c}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $g \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $\lambda_r \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $\max(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$ . Finde Vektoren  $y \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^{n_c}$  sodass gilt:

$$C(u, y, \lambda) := \begin{pmatrix} A(u)y(u) - b^V(u) - b^N(u) + N^T D(u)\lambda \\ \lambda - \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1} D(u)(Ny - g)) \end{pmatrix} = 0 \quad \in \mathbb{R}^{(2n+n_c)}. \quad (3.12)$$

Für  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$  fest.

**Bemerkung 3.1.** Korrekterweise müssten die Normalenmatrix  $N$  und die Abstandsfunktion  $g$  ebenfalls abhängig vom Design sein. Aufgrund von Annahme 4.1 können wir diese Abhängigkeit jedoch vernachlässigen.

## 4 Formoptimierung

**Annahme 4.1.** Wir nehmen an, dass nur die Blechdicke und -länge optimiert werden. Dies bedeutet, dass die Normalen  $\nu \in \mathbb{R}^2$  nicht abhängig vom Design sind und als Folge dessen auch nicht die Normalenmatrix  $N \in \mathbb{R}^{n_C \times 2n}$ . Des Weiteren liegt das Bauteil in einer formschlüssigen Konfiguration vor. Damit gilt  $g = 0$  konstant.

Wir wollen nun wie bereits angedeutet eine sogenannte Kontrollvariable  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$ ,  $n_G \in \mathbb{N}$  einführen. Da wir uns mit Formoptimierung beschäftigen, verwenden wir als Kontrollvariable Parameter, welche die Form des zu optimierenden Bauteils beschreiben, d. h. das zugrundeliegende Gebiet  $\Omega$  ist nun nicht mehr fix gegeben, sondern ist nun abhängig von  $u$ . Um dies zu verdeutlichen schreiben wir  $\Omega(u)$ . Als Zielfunktion verwenden wir die **Nachgiebigkeit** des Bauteils (engl. compliance). Mit der Notation aus Abschnitt 2.1 lässt sich die Zielfunktion durch

$$J : \mathbb{R}^{n_G} \times \mathbb{V}(\Omega) \times L^2(\Gamma_C) \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(u, y, \lambda) := \int_{\Omega(u)} f^V(x)^T y(x) dx + \int_{\Gamma_N(u)} f^N(x)^T y(x) dx$$

beschreiben. Hier ist  $y \in \mathbb{V}(\Omega)$  die eindeutige Lösung von (NCP). Zur besseren Übersichtlichkeit werden wir alle Ungleichungsnebenbedingungen an  $u$  in der Funktion  $G : \mathbb{R}^{n_G} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  zusammenfassen. Dabei steht  $m$  für die Anzahl der Restriktionen. Analog definieren wir für die Gleichungsnebenbedingungen, die Funktion  $H : \mathbb{R}^{n_G} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Es gilt zu beachten, dass sowohl  $G$  als auch  $H$  lineare und auch nichtlineare Nebenbedingungen enthalten können. Mit Hilfe dieser Funktionen, können wir das von uns betrachtete Formoptimierungsproblem aufstellen.

**Problem 4.1 (Formoptimierungsproblem).** Seien  $\Omega(u) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f^V : \Omega(u) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f^N : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda_R \in L^2(\Gamma_C)$  und  $\alpha > 0$  gegeben. Es seien  $A : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}(\Omega)'$ ,  $B : \mathbb{V}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}(\Gamma_C)$ ,  $F \in \mathbb{V}(\Omega)'$  und  $\phi : L^2(\Gamma_C) \rightarrow L^2(\Gamma_C)$  wie in Kapitel 2 definiert. Wir betrachten das Formoptimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{R}^{n_G}, y \in \mathbb{V}(\Omega), \lambda \in L^2(\Gamma_C)} J(u, y, \lambda) \\ & \text{u. d. N} \\ & \left( \begin{array}{l} A(u)y - F(u) + B(u)^* \lambda, \\ \phi(\lambda, -B(u)y + \alpha(\lambda - \lambda_R) + g) \end{array} \right) = 0, \\ & G(u) \leq 0, \\ & H(u) = 0. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit der Operatoren  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $g$  vom Design  $u$  ergibt sich implizit aus der Abhängigkeit des Gebietes  $\Omega$  vom Design. Im weiteren Verlauf werden wir die Designabhängigkeit nur dann explizit ausweisen, wenn dies für das Verständnis erforderlich ist.

## 4.1 Parametrisierung

Zur Optimierung des Designs ist es notwendig als Kontrollvariablen für Problem 4.1 Parameter zu wählen, welche das Design möglichst unmittelbar beschreiben. Da wir uns auf den zweidimensionalen Fall beschränken, handelt es sich in unserem Fall um eine Optimierung des Querschnittes eines Bauteils. Diesen Querschnitt modellieren wir durch achsenparallele Rechtecke aufgrund von Annahme 4.1. Als Optimierungsvariablen verwenden wir die Koordinaten der Eckpunkte der einzelnen Gebiete. Es gilt dabei für jedes Gebiet, dass die Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn nummeriert sind. Weiterhin gilt, dass ein Eckpunkt nie auf einer Kante eines anderen Teilgebietes liegen darf. D. h. entweder der Eckpunkt ist ein gemeinsamer Eckknoten von benachbarten Teilgebieten oder er hat keinen Kontakt mit einem anderen Teilgebiet. In Abbildung 4.1 ist links eine zulässige und rechts eine nicht zulässige Modellierung abgebildet.



Abbildung 4.1.: Zulässige und nicht zulässige Modellierung

Die Zuordnung der Designvariablen  $u_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n_G\}$  präsentieren wir zunächst an einem Minimalbeispiel in Abbildung 4.2.

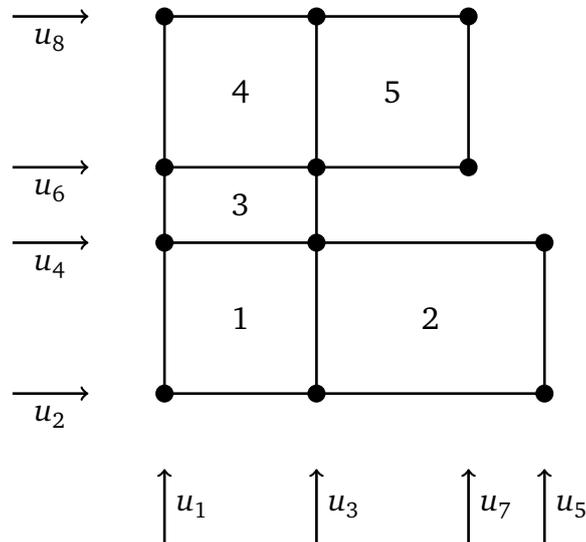


Abbildung 4.2.: Minimalbeispiel zur Zuordnung der Designvariablen

Das Minimalbeispiel besteht aus fünf Gebieten mit insgesamt zwölf Eckpunkten, die Bezeichnung Eckpunkt bezieht sich dabei immer auf die einzelnen Gebiete und nicht auf das gesamte Objekt. Durch die Zuordnung der Variablen ist gewährleistet, dass sich die Rechtecke nicht durch die Optimierung im Raum drehen. Wären bei der Modellierung auch Dreiecke zugelassen, so würde jede Koordinate eines Eckpunktes eines solchen Dreieckes eine eigene Variable zugeordnet bekommen, da für Dreiecke eine Drehung im Raum zugelassen ist. Durch diese Zuordnung

---

der Designvariablen zu den Eckkoordinaten ist sichergestellt, dass geometrische Eigenschaften nicht verloren gehen und dass das Bauteil über den Optimierungsprozess zusammenhängend bleibt.

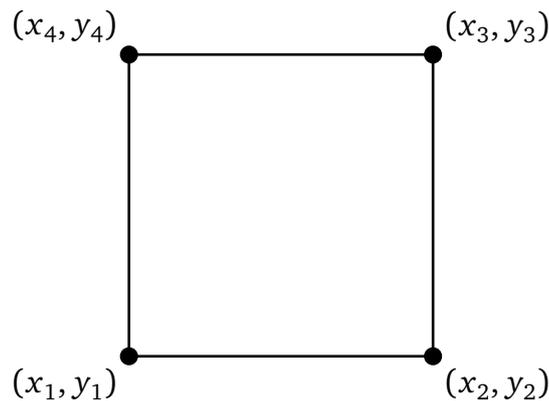
---

## Transformation

---

Aufbauend auf der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Parametrisierung des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , wollen wir nun eine Charakterisierung der Punkte  $(x, y)^T \in \Omega$  in Abhängigkeit vom aktuellen Design vorstellen. Um Punkte innerhalb eines Elementes zu charakterisieren, wollen wir diese jeweils in Abhängigkeit der Eckpunkte des Elementes darstellen.

Im Folgenden wollen wir die Transformation eines Punktes  $(x, y)^T \in \Omega$  bei Veränderung der Designvariablen darstellen. Wir beschränken uns hierbei auf den Fall, dass der Punkt zu einem Rechteck gehört. Wir bezeichnen die Koordinaten der Eckpunkte mit  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Die Indexierung der Eckkoordinaten ist nicht zwingend übereinstimmend mit den Indizes der



**Abbildung 4.3.:** Rechteckelement

Designvariablen. Der Zuordnung ist in Abschnitt 4.1 dargestellt und zeigt, dass sich ein achsenparalleles Rechteck prinzipiell bereits durch vier Variablen beschreiben lässt. Wir verwenden diese Notation um eine möglichst allgemeine Beschreibung der Transformation zu erhalten.

Für einen Knoten  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  eines Rechteckes definieren wir zuerst:

$$c_x := \frac{x - \bar{x}_1}{x_2 - x_1} \quad (4.1)$$

$$c_y := \frac{y - \bar{y}_1}{y_3 - y_1} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

Dabei sind  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}$  die Eckkoordinaten des Elementes in der Ausgangskonfiguration. Daraus lässt sich der transformierte Knoten  $(x_{\text{trafo}}, y_{\text{trafo}})$  bezüglich der, durch ein anderes Design  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$  veränderten, neuen Eckpunkte schreiben als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{\text{trafo}} \\ y_{\text{trafo}} \end{pmatrix} &= (1 - c_x - c_y + c_y c_x) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (c_x - c_y c_x) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &+ (c_y - c_y c_x) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + (c_y c_x) \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mit Hilfe dieser Transformation können wir direkt die Knotenpunkte des Gitters (Triangulierung) in Abhängigkeit von den Designvariablen  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$  darstellen.

Falls bei der Parametrisierung auch Dreiecke zugelassen sind, so lässt sich für diese ein analoger Ansatz wählen. Die Transformation für Dreiecke folgt unmittelbar aus den baryzentrischen Koordinaten mit

$$\begin{pmatrix} x_{\text{trafo}} \\ y_{\text{trafo}} \end{pmatrix} = \phi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \phi_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \phi_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Die Parameter  $\phi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$  lassen sich mittels (3.2) bestimmen.

---

## 4.2 Herleitung der Adjungiertengleichung

---

Die Optimierung von Problem 4.1 wollen wir mit einem Bundle-Verfahren (siehe z. B. in Ulbrich [2009]) lösen. Dazu benötigen wir in jeder Iteration den aktuellen Funktionswert und die Formableitung unserer Zielfunktion  $J(u, y)$ . Zur Bestimmung der Formableitung wählen wir einen Adjungierten-Ansatz. Wie in [Hinze u. a., 2009, Abschnitt 1.6.4] wollen wir diesen aus Sichtweise der Lagrangefunktion herleiten.

Wie wir bereits gesehen haben, ergibt sich für jedes  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$  aus der Zustandsgleichung (NCP) eine eindeutige Lösung  $(y(u), \lambda(u))^T \in \mathbb{V}(\Omega) \times L^2(\Gamma_C)$ . Damit können wir ein reduziertes Problem definieren, sodass (NCP) als Nebenbedingung wegfällt. Die reduzierte Zielfunktion definieren wir durch

$$\tilde{J}(u) := J(u, y(u), \lambda(u)).$$

Für diese reduzierte Zielfunktion wollen wir nun mittels des Adjungierten-Ansatzes eine Ableitung bestimmen.

Betrachten wir dazu die Lagrangefunktion der ursprünglichen Zielfunktion

$$L : \mathbb{R}^{n_G} \times \mathbb{V}(\Omega) \times L^2(\Gamma_C) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(u, y, \lambda, p) = J(u, y, \lambda) + \langle p, C(u, y, \lambda) \rangle_{(\mathbb{V}(\Omega)' \times L^2(\Gamma_C)), (\mathbb{V}(\Omega) \times L^2(\Gamma_C))}.$$

Da durch die Zustandsgleichung (NCP)  $C(u, y, \lambda) = 0$  gilt, folgt  $J(u, y, \lambda) = L(u, y, \lambda, p)$  für beliebiges  $p \in \mathbb{V}(\Omega)' \times L^2(\Gamma_C)$ . Differenzieren wir diese Gleichung nach dem Design  $u \in \mathbb{R}^{n_G}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}'(u), s \rangle_{\mathbb{R}^{n_G}, \mathbb{R}^{n_G}} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} L(u, y, \lambda, p), s \right\rangle_{\mathbb{R}^{n_G}, \mathbb{R}^{n_G}} \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial y, \lambda} L(u, y, \lambda, p), \frac{\partial}{\partial u} (y(u), \lambda(u))^T s \right\rangle_{(\mathbb{V}(\Omega)' \times L^2(\Gamma_C)), (\mathbb{V}(\Omega) \times L^2(\Gamma_C))}. \end{aligned}$$

Mit der, in [Ulbrich u. a., 2013, Abschnitt 3] bereits gezeigten, Invertierbarkeit von  $\frac{\partial}{\partial y, \lambda} C(u, y, \lambda)$ , folgt nach dem Satz über implizite Funktionen [Hinze u. a., 2009, Theorem 1.41], dass  $(y(u), \lambda(u))^T$  stetig differenzierbar ist. Da die Bestimmung von  $\frac{\partial}{\partial u} (y(u), \lambda(u))^T$  jedoch sehr aufwendig ist, wählen wir den Adjungierten  $p$  abhängig von  $u$  so, dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial y, \lambda} L(u, y, \lambda, p) = 0.$$

Dies gelingt uns durch Lösen der Adjungiertengleichung (engl. adjoint equation)

$$-\frac{\partial}{\partial y, \lambda} J(u, y, \lambda) = \frac{\partial}{\partial y, \lambda} C(u, y, \lambda)^* p. \quad (4.6)$$

Für die Formableitung gilt damit:

$$\tilde{J}'(u) = \frac{\partial}{\partial u} J(u, y, \lambda) + \frac{\partial}{\partial u} C(u, y, \lambda)^* p. \quad (4.7)$$

---

### 4.3 Diskretisiertes Problem

---

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der diskretisierten Form von Problem 4.1 beschäftigen. Als Zustandsgleichung verwenden wir die diskretisierte Form von (NCP) definiert in Problem 3.1. Als diskretisierte Form der Zielfunktion werden wir

$$J_h(u, y, \lambda) := y^T (b^V + b^N)$$

verwenden.

**Problem 4.2 (Diskretisiertes Formoptimierungsproblem).** Sei  $n_G \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Designvariablen,  $n \in \mathbb{N}$  die der Gitterpunkte des FE-Gitters und  $n_C \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Kontaktrand. Die zu minimierende Zielfunktion sei  $J_h : \mathbb{R}^{n_G} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{n_C} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $C(u, y, \lambda) : \mathbb{R}^{n_G} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+n_C}$  definiert wie in Problem 3.1 und es seien  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $b^V \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $b^N \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n_C \times 2n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n_C \times n_C}$ . Die weiteren Nebenbedingungen seien durch  $A_{ineq} \in \mathbb{R}^{n_G \times m_1}$ ,  $A_{eq} \in \mathbb{R}^{n_G \times p_1}$ ,  $u_{lb} \in \mathbb{R}^{n_G}$ ,  $u_{ub} \in \mathbb{R}^{n_G}$ ,  $c : \mathbb{R}^{n_G} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $c_{eq} : \mathbb{R}^{n_G} \rightarrow \mathbb{R}^{p_2}$  mit  $m_1, m_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$  gegeben.

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{n_G}, y \in \mathbb{R}^{2n}, \lambda \in \mathbb{R}^{n_C}} J_h(u, y, \lambda) \quad (4.8)$$

u. d. N

$$\begin{pmatrix} A(u)y(u) - b^V(u) - b^N(u) + N^T D(u)\lambda \\ \lambda - \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1} D(u)(Ny - g)) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

$$Au \leq b \quad (4.10)$$

$$A_{eq}u = b_{eq} \quad (4.11)$$

$$c(u) \leq 0 \quad (4.12)$$

$$c_{eq}(u) = 0 \quad (4.13)$$

$$u_{lb} \leq u \leq u_{ub} \quad (4.14)$$

(4.9) beschreibt die diskretisierte Zustandsgleichung aus Problem 3.1. (4.10) und (4.11) beschreiben die linearen Ungleichungs-, bzw. Gleichungsnebenbedingungen. Analog dazu beschreiben (4.12) und (4.13) die nichtlinearen Nebenbedingungen. (4.14) setzt abschließend noch allgemeine Schranken an die Designvariable  $u$ .

**Bemerkung 4.1.** Zur Vereinfachung der Notation werden wir im Folgenden  $b^V$  und  $b^N$  zusammenfassen und schreiben:

$$b := b^V + b^N.$$

---

### Anwendung des Adjungierten Ansatzes auf das diskretisierte Formoptimierungsproblem

---

Den bereits in Abschnitt 4.2 gezeigten Adjungierten Ansatz, wollen wir im Folgenden auf das Problem 4.2, bzw. das reduzierte Problem anwenden. Zuvor wollen wir jedoch sowohl die Zustandsgleichung, als auch die Zielfunktion noch dahingehend reduzieren, dass wir nur noch mit einer Zustandsvariablen arbeiten müssen, anstatt wie bis her mit zweien. Die reduzierte Zielfunktion  $\tilde{J}_h$  ist analog wie in Abschnitt 4.2 definiert. Es gilt:

$$\tilde{J}_h(u) = y(u)^T b.$$

Sei  $(u^*, y^*, \lambda^*)$  die eindeutige Lösung von Problem 3.1. Dann gilt:

$$C(u^*, y^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} A(u^*)y^*(u^*) - b(u^*) + N^T D(u^*)\lambda^* \\ \lambda^* - \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1}(D(u^*)N y^*(u^*) - g)) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.15)$$

Betrachten wir nun die zweite Zeile genauer. Wir sehen, dass wir diese umformen können zu:

$$\lambda^* \stackrel{!}{=} \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1}(D(u^*)N y^*(u^*) - g)). \quad (4.16)$$

Eingesetzt in die obere Zeile von  $C(u, y, \lambda)$  ergibt dies eine reduzierte Version des Optimalitätssystems

$$C^{\text{red}}(u^*, y^*) = A(u^*)y^*(u^*) - b(u^*) + N^T D(u^*) \cdot \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1}(D(u^*)N y^*(u^*) - g)) \stackrel{!}{=} 0.$$

Mit dieser Version werden wir nun weiter arbeiten.

Es gilt nun mit dem Adjungierten  $\pi \in \mathbb{R}^{2n}$ :

$$\tilde{J}'_h(u) = \underbrace{J_h(u, y(u))}_{:=J_h(u, y(u), \lambda(y))} + \underbrace{\pi^T C^{\text{red}}(u, y(u))}_{=0}. \quad (4.17)$$

Für die Formableitung des reduzierten Zielfunktional gilt damit:

$$\begin{aligned} \tilde{J}'_h(u, y) &= \frac{\partial}{\partial y} J_h(u, y) \frac{\partial}{\partial u} y(u) + \frac{\partial}{\partial u} J_h(u, y) \\ &\quad + \pi^T \frac{\partial}{\partial y} C^{\text{red}}(u, y) \frac{\partial}{\partial u} y(u) + \pi^T \frac{\partial}{\partial u} C^{\text{red}}(u, y). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wählen wir nun den Parameter  $\pi$  geschickt, fallen alle Summanden, die als Faktor  $\frac{\partial}{\partial u} y(u)$  enthalten, weg. Um dies zu erreichen, fordern wir, dass  $\pi$  die folgende Adjungiertengleichung erfüllt.

$$\pi^T \frac{\partial}{\partial y} C^{\text{red}}(u, y(u)) = -\frac{\partial}{\partial y} J_h^{\text{red}}(u, y(u)) \quad (4.19)$$

$$\Leftrightarrow (A + \alpha^{-1} N^T D M D N)^T \pi = -b \quad (4.20)$$

**Bemerkung 4.2.** Die verwendete Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n_C \times n_C}$  ist ein Subgradient der Funktion  $\max(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n_C} \rightarrow \mathbb{R}^{n_C}$ . Siehe [Ulbrich u. a., 2013, Kapitel 6].

Dadurch können wir die geschlossene Formableitung des Zielfunktionals unabhängig vom Faktor  $\frac{\partial}{\partial u} y(u)$  aufstellen.

$$\begin{aligned}
 (J_h^{\text{red}}(u, y))' &\in \mathbb{R}^{1 \times n_G} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} J(u, y) + \pi^T \frac{\partial}{\partial u} C^{\text{red}}(u, y) \\
 &= y^T \frac{\partial}{\partial u} b(u) + \pi^T \left[ \frac{\partial}{\partial u} A(u) y \right. \\
 &\quad \left. + N^T \left( \frac{1}{\alpha} D M \frac{\partial}{\partial u} D(u) N y + \frac{\partial}{\partial u} D(u) \cdot \max(0, \lambda_r + \alpha^{-1} (D(u^*) N y^*(u^*) - g)) \right) \right] \\
 &\qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathbb{R}^{2n \times n_G}}
 \end{aligned}$$

#### 4.4 Herleitung der Formableitungen

Zur Bestimmung der Formableitungen, gehen wir analog zu Hess [2010] vor und leiten zuerst eine Ableitung nach den einzelnen FE-Gitterpunkten her.

Sei  $k_I = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$  ein Tupel entsprechend der Parametrisierung eines Elementes  $I$  der Triangularisierung. Wir schreiben das Tupel bzgl. des gesamten Bauteils als  $k = (k_1, \dots)$ . Zu Beginn betrachten wir jedoch lediglich die Ableitung nach  $k_I$ .

$$\frac{\partial}{\partial k_I} A(k_I) u - \frac{\partial}{\partial k_I} b_V(k_I) - \frac{\partial}{\partial k_I} b_N(k_I) + \frac{\partial}{\partial k_I} N^T D(k_I) y = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial k_I} [y - \max(0, y_r + \alpha^{-1} (D(k_I) N u - g(k_I)))] = 0. \quad (4.22)$$

Für die Dimensionen gilt:  $\frac{\partial}{\partial k_I} A(k) y, \frac{\partial}{\partial k_I} b^V(k), \frac{\partial}{\partial k_I} b^N(k), \frac{\partial}{\partial k_I} N^T D(k) \lambda \in \mathbb{R}^{2n \times 6}$ .

Da das Modell nur Veränderungen der Blechdicke und -länge zulässt, wie bereits in Annahme 4.1 postuliert, sind die Matrix  $N$  und der Vektor  $g$  unabhängig von  $k_I$ . Die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial k_I} A(k_I) y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial k_I} b_V(k_I) - \frac{\partial}{\partial k_I} b_N(k_I)$$

sind bereits durch die Betrachtung von Elastizitätsproblemen ohne Kontakt bekannt (siehe Hess [2010] S.87 f.), weswegen wir uns auf

$$\frac{\partial}{\partial k_I} N^T D(k_I) \lambda$$

konzentrieren. Aufgrund der, in Annahme 4.1, getroffenen Vereinfachungen in der Modellierung können wir diesen Term umformen zu

$$N^T \frac{\partial}{\partial k_I} D(k_I) \lambda$$

und betrachten darum erst einmal ausschließlich

$$\frac{\partial}{\partial k_I} D(k_I) \lambda.$$

Die Verknüpfungsmatrix  $D$  (engl. Mortarmatrix) ist, wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, eine Diagonalmatrix, welche sich als Summe von Teilmatrizen schreiben lässt.

$$D = \sum_{I \in \mathcal{F}} D^{(I)}, \quad D^{(I)} \in \mathbb{R}^{n_C \times n_C}$$

, diese lassen sich wiederum, eingeschränkt auf einzelne Elemente  $I$ , in einfacher Form schreiben.

$$D_{\text{loc}}^{(I)} = \text{vol}(I) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{vol}(I) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (4.23)$$

Bestimmen wir nun die Formableitung der lokalen Teilmatrix  $D_{\text{loc}}^{(I)} \lambda_{\text{loc}}^{(I)}$ .

Dazu benötigen wir die Ableitung der Volumenfunktion  $\text{vol}()$  nach den Gitterpunkten. Sie ist gegeben durch

$$\nabla_{k_I} \text{vol}(I) = \frac{2}{\text{vol}(I)} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \\ y_2 - y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Damit können wir

$$\nabla_{k_I} D_{\text{loc}}^{(I)} \lambda_{\text{loc}}^{(I)} = \frac{1}{6 \cdot \text{vol}(I)} \begin{pmatrix} \nabla_{k_I} \text{vol}(I) \cdot (\lambda_{\text{loc}}^{(I)})_1 \\ \nabla_{k_I} \text{vol}(I) \cdot (\lambda_{\text{loc}}^{(I)})_2 \\ 4 \cdot \nabla_{k_I} \text{vol}(I) \cdot (\lambda_{\text{loc}}^{(I)})_3 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

bestimmen. Der Vektor  $\nabla_{k_I} D_{\text{loc}}^{(I)} \lambda_{\text{loc}}^{(I)} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  stellt die Ableitung der lokalen Teilmatrix an der Stelle  $\lambda_{\text{loc}}^{(I)}$ , des Elementes  $(I)$ , nach den Gitterpunkten dar. Da die Formableitung von  $D\lambda$  aus den einzelnen Formableitungen  $\frac{\partial}{\partial k_I} D_{\text{loc}}^{(I)}(k_I)$  zusammengesetzt ist, gilt damit:

$$\nabla_{k_I} (N^T D \lambda) = N^T \nabla_{k_I} (D \lambda) = N^T \sum_{I \in \mathcal{F}} (\nabla_{k_I} D^{(I)} \lambda). \quad (4.26)$$

Dabei beschreibt wie gewohnt  $\mathcal{F}$  die Menge der potenziellen Kontaktflächen.

Um die gewünschten Formableitungen zu erhalten, ist es nach der Kettenregel lediglich noch von Nöten bzgl. des Designvektors nachzudifferenzieren. Dies lässt sich durch die Differenzierung der bereits vorgestellten Transformation aus Abbildung 4.1 nach den Designvariablen realisieren.

---

## 4.5 Optimierungsalgorithmus für das reduzierte Problem

---

Bei dem in Problem 4.2 beschriebenen Optimierungsproblem handelt es sich um ein nichtkonvexes und nichtglattes Problem. Aus diesem Grund müssen wir auf Verfahren der nichtglatten Optimierung zurückgreifen. Explizit haben wir hier ein Bundle-Verfahren gewählt, welches in einigen Punkten modifiziert wurde, um die Nicht-Konvexität bewältigen zu können.

Bevor wir den verwendeten Algorithmus detailliert vorstellen, betrachten wir zunächst die Grundform des Bundle-Verfahrens und motivieren diese über eine Schnittebenenmethode. Als vorrangige Quelle diene dabei Ulbrich [2009] und für die Erweiterung auf den nichtkonvexen Fall, Schramm u. Zowe [1992]. Jedoch betrachten wir im Gegensatz zu den genannten Quellen direkt den restringierten Fall, wie in Problem 4.2 beschrieben. Wir beziehen uns in den folgenden Betrachtungen immer auf den allgemeinen Fall eines restringierten Optimierungsproblems. Dazu sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  die betrachtete, nicht notwendigerweise glatte oder auch konvexe Zielfunktion. Die zulässige Menge  $X \in \mathbb{R}^n$  sei beschrieben durch die linearen Nebenbedingungen  $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ ,  $A_{eq} \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$ ,  $x_{lb} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_{ub} \in \mathbb{R}^n$  mit  $m_1, p_1 \in \mathbb{N}$  und die nichtlinearen Nebenbedingungen  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $c_{eq} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_2}$  mit  $m_2, p_2 \in \mathbb{N}$ . Das allgemeine, restringierte Optimierungsproblem ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) & \tag{P} \\ \text{u. d. N.} & \\ x \in X \Leftrightarrow & \begin{cases} Ax & \leq b, \\ A_{eq}x & = b_{eq}, \\ c(x) & \leq 0, \\ c_{eq}(x) & = 0, \\ x_{lb} \leq x & \leq x_{ub}. \end{cases} \end{aligned}$$

Obwohl ein nichtkonvexes Optimierungsproblem vorliegt, betrachten wir zunächst ein Verfahren für konvexe Probleme. Dies ist dahingehend sinnvoll, dass das Verfahren in großen Teilen für den nichtkonvexen Fall verwendet werden kann.

---

### 4.5.1 Konvexes Bundle-Verfahren

---

**Definition 4.1.** Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvex auf der konvexen, offenen Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Der Vektor  $g \in \mathbb{R}^n$  heißt Subgradient von  $f$  im Punkt  $x \in X$ , wenn gilt:

$$f(y) - f(x) \geq g^T(y - x) \quad \forall y \in X.$$

Die Menge der Subgradienten von  $f$  in  $x$  nennt man das Subdifferential

$$\partial f(x) \subset \mathbb{R}^n.$$

Nach [Ulbrich, 2009, Definition 2.3.3].

Das konvexe Bundle-Verfahren (Algorithmus 1) lässt sich prinzipiell als eine Schnittebenenmethode auffassen. Dabei wird die, in diesem Fall konvexe, Zielfunktion  $f$  eines Optimierungsproblems ( $P$ ) von unten durch sogenannte Schnittebenen approximiert, welche wir direkt mit einem Subgradienten am aktuellen Knoten bestimmen. Über die approximierte Zielfunktion

$$f_k^{se} := \max_{0 \leq j \leq k} f(x_j) + (g^j)^T(x - x_j)$$

bestimmen wir die nächste Suchrichtung  $s^k$  und fügen der Approximation eine weitere Schnittebene im Punkt  $x^k + s^k$  hinzu. Dies führen wir iterativ solange durch, bis wir einen hinreichend guten Punkt  $x^{opt}$  gefunden haben.

Prinzipiell lösen wir dabei in jeder Iteration das nichtglatte Problem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{j \in \{0, \dots, k\}} f(x^j) + (g^j)^T(x - x^j) \\ \text{u. d. N.} \\ x \text{ ist zulässig für } (P), \text{ d. h. } x \in X. \end{aligned}$$

Nach [Ulbrich, 2009, Lemma 2.5.1] lässt sich dieses Problem jedoch äquivalent in ein glattes Problem umschreiben. Um die Lösbarkeit zu gewährleisten, führen wir ebenfalls einen Regularitätsparameter  $\gamma^k$  ein, welcher gerade bei wenigen Schnittebenen die Lösbarkeit des Problems garantiert. Das regularisierte, glatte Optimierungsproblem zur Bestimmung der Suchrichtung lautet damit:

$$\begin{aligned} \min_{s \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}} \xi + \frac{1}{2\gamma^k} \|s\|^2 \quad (P)^{se} \\ \text{u. d. N.} \\ (g^j)^T s - \alpha_j^k - \xi \leq 0 \quad j \in \{0, \dots, k\}, \\ x^k + s \in X. \end{aligned}$$

Die Schnittebenenmethode berechnet in jeder Iteration eine Schnittebene und erweitert sukzessiv das Schnittebenenmodell. Dies erfordert jedoch, gerade bei komplexen Optimierungsproblemen einen hohen Rechenaufwand, da die Anzahl der Nebenbedingungen stetig steigt. Um diesem Effizienznachteil zu begegnen, verwendet das Bundle-Verfahren so genannte Bündel (engl. Bundle). Hierbei werden nur solche Schnittebenen für spätere Iterationsschritte gespeichert, die für das Schnittebenenmodell aktuell von Relevanz sind. Ein Eintrag  $j$  im Bündel  $J_k$  enthält dabei folgende Informationen:

$$y^j \in X, \quad f^j = f(y^j), \quad g^j \in \partial f(y^j), \quad \lambda_j^k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j^k \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}.$$

Dabei steht  $y^j$  für den Stützpunkt der  $j$ -ten Schnittebene,  $g^j$  für einen Subgradienten der Zielfunktion an der Stelle  $y^j$  und  $\alpha_j^k$  beschreibt den Linearisierungsfehler der  $j$ -ten Schnittebene in der  $k$ -ten Iteration. Es ist  $\lambda_j^k$  der Lagrange-Multiplikator zur Schnittebene  $j$ , welchen wir durch die Lösung von  $(P)^{se}$  erhalten.

Der genau Aufbau des konvexen Bundle-Verfahrens ist in Algorithmus 1 beschrieben.

Um die Darstellung des Algorithmus möglichst allgemein zu belassen, wurde für den Regularitätsparameter  $\gamma^k$  lediglich eine Wahl aus einem definierten Intervall gefordert. Wie bereits in Ulbrich [2009] beschrieben, gibt es für die Wahl verschiedene Möglichkeiten. Zwei zueinander konträre Methoden sind:

### Algorithmus 1 : Konvexes Bundle-Verfahren

**Eingabe** :  $\gamma^+ \geq \gamma^- > 0$ ,  $\eta \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon > 0$ , Optimierungsproblem  $(P)$  und zulässigen Startpunkt  $x^0 \in \mathbb{R}^n$

**Ausgabe** : Optimale Lösung  $x^{opt} \in \mathbb{R}^n$

Bestimme einen Subgradienten  $g^0$  von  $f(x^0)$  und setze  $y^0 = x^0$ ,  $\alpha_0^0 = 0$  und  $J_0 = \{0\}$ .

**für**  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  **tue**

Wähle  $\gamma_k \in [\gamma^-, \gamma^+]$  geeignet und berechne ein KKT-Tupel  $(s^k, \xi^k, \lambda^k)$  des Problems  $(P)^{se}$ .

Berechne  $v^k = -\frac{1}{\gamma^k} s^k$  und  $\varepsilon_k = \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \alpha_j^k$ .

**wenn**  $\|v^k\| \leq \varepsilon$  und  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$  **dann** STOP mit  $x^{opt} = x^k$ ;

**wenn**  $f(x^k + s^k) - f(x^k) \leq \eta \xi^k$  **dann**

    Führe einen *wesentlichen Schritt* durch, d. h.:

    setze  $y^{k+1} = x^k + s^k$ ,  $x^{k+1} = y^{k+1}$ ,  $t_k = 1$

    und aktualisiere das Bündel:  $J_{k+1} = \{j \in J_k : \lambda_j^k > 0\} \cup \{k+1\}$ .

**Ende**

**sonst wenn**  $f(x^k + s^k) - f(x^k) > \eta \xi^k$  **dann**

    Führe einen *Nullschritt* durch, d. h.:

$y^{k+1} = x^k + s^k$ ,  $x^{k+1} = x^k$ ,  $t_k = 0$

    und aktualisiere das Bündel:  $J_{k+1} = \{j \in J_k : \lambda_j^k > 0 \text{ oder } y^j = x^k\} \cup \{k+1\}$ .

**Ende**

Bestimme  $f^{k+1} = f(y^{k+1})$  und wähle einen Subgradienten  $g^{k+1}$  von  $f(y^{k+1})$ .

Berechne  $\alpha_j^{k+1} = f(x^{k+1}) - f(y^j) - (g^j)^T (x^{k+1} - y^j)$ ,  $j \in J_{k+1}$ .

**Ende**

1.  $\gamma^k = 1 \forall k$ , diese Methode ist nicht sonderlich effizient, verringert jedoch den Implementierungsaufwand und die Komplexität des Algorithmus.
2. Adaptive Bestimmung von  $\gamma^k$  durch eine innere Iteration, hierbei kann es zu einer deutlichen Reduktion der notwendigen Iterationsschritte kommen.

Bei der adaptiven Bestimmung, ist eine Vorgehensweise ähnlich dem Trust-Region-Verfahren möglich. Man kann  $\gamma^k \in \mathbb{R}$  als Trust-Region-Radius auffassen und ähnlich wie in [Ulbrich u. Ulbrich, 2011, Algorithmus 14.4] agieren. Diese Analogie rührt daher, dass man auch das Problem  $(P)^{se}$  als Trust-Region-Problem auffassen kann, wie bereits in Ulbrich [2009] beschrieben.

Ein weiterer Parameter, welcher im Bundle-Verfahren Verwendung findet, ist  $\eta \in \mathbb{R}$ . Dieser Parameter beschreibt, welcher Anteil des ‚durch das Schnittebenenmodell, prognostizierten Abstiegs, mindestens durch einen wesentlichen Schritt realisiert werden muss. Es gilt:

$$\eta = \frac{\text{ared}_k(s^k)}{\text{pred}_k(s^k)} \quad (4.27)$$

$$\text{mit } \text{ared}_k(s^k) := f(x^k) - f(x^k + s^k) \quad (4.28)$$

$$\text{und } \text{pred}_k(s^k) := f_{J_k}^{se}(x^k) - f_{J_k}^{se}(x^k + s^k) = -\xi^k. \quad (4.29)$$

Dieses Konzept findet sich ebenfalls bei Trust-Region-Verfahren (siehe Conn u. a. [2000]) der nichtlinearen Optimierung.

Abschließend werden wir die Abbruchbedingung in Algorithmus 1 rechtfertigen und einen Verweis auf ein globales Konvergenzresultat geben.

**Satz 4.1 (Abbruchbedingung des konvexen Bundle-Verfahrens).** *Sei in Algorithmus 1 die Abbruchbedingung erfüllt, d. h. gelte*

$$\|v^k\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

Dann ist  $x^k$  im Folgenden Sinne  $\varepsilon$ -optimal:

$$f(x^k) \leq f(x) + \varepsilon(\|x - x^k\| + 1).$$

*Beweis.* Siehe [Ulbrich, 2009, Lemma 2.7.4]. □

Da der Konvergenzbeweis des Bundle-Verfahrens sehr aufwendig und auch eher technischer Natur ist, verweisen wir dazu auf [Ulbrich, 2009, Kapitel 2.7.3].

---

#### 4.5.2 Nicht-Konvexe-Erweiterung des Bundle-Verfahrens

---

Wie eingangs bereits erwähnt, ist das von uns betrachtete Formoptimierungsproblem von nicht-konvexer Natur. Darum müssen wir das in Algorithmus 1 vorgestellte Bundle-Verfahren entsprechend modifizieren. Aufgrund der Nicht-Konvexität können wir nicht mehr sicherstellen, dass die erzeugten Schnittebenen immer unterhalb der Zielfunktion liegen. Darum müssen wir einen neuen Linearisierungsfehler betrachten. Wir definieren, unter Verwendung des Linearisierungsfehlers  $\alpha_j^k \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha_j^k := f(u^k) - f(y^j) - (g^j)^T(u^k - y^j), \quad (4.30)$$

mit  $c > 0$  den neuen Linearisierungsfehler

$$\beta_j^k = \beta(x^k, y^j) := \max\{\alpha_j^k, c\|x^k - y^j\|^2\}. \quad (4.31)$$

Mit diesem neuen Linearisierungsfehler lässt sich jedoch die in Satz 4.1 postulierte  $\varepsilon$ -Optimalität nicht mehr erhalten. Allerdings garantiert uns (4.31) und  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$  eine gewisse Annäherung der Stützpunkte  $y^j$  an  $x^k$ . Es gilt

$$\sum_{j \in J_k} \lambda_j^k c \|x^k - y^j\|^2 \leq \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \beta_j^k \leq \varepsilon. \quad (4.32)$$

Die erste Abbruchbedingung  $\|v^k\| \leq \varepsilon$  sichert uns wiederum, dass  $0 \in \delta f(x^k)$  bis auf einen Fehler  $\varepsilon$  gilt. In diesem Fall sagen wir, dass  $x^k$  eine Art  $\varepsilon$ -Stationarität erfüllt.

Das nichtkonvexe Bundle-Verfahren verwendet, wie oben bereits erwähnt, eine adaptive Steuerung des Penaltyparameters. Der Algorithmus teilt sich dazu in zwei Bereiche auf.

Zum einen die äußere Iteration (Algorithmus 2), in der das Bündel aktualisiert wird und der Linearisierungsfehler berechnet wird und zum anderen die innere Iteration (Algorithmus 3), welche den nächsten Iterationsschritt bestimmt.

Die äußere Iteration basiert in wesentlichen Teilen auf Schramm u. Zowe [1992], jedoch wurde die Aktualisierung des Bündels aus [Ulbrich, 2009, Algorithmus 5] übernommen. Die innere Iteration ist ebenfalls an Schramm u. Zowe [1992] orientiert, wurde jedoch auch angepasst.

---

### Algorithmus 2 : Äußere Iteration des nichtkonvexen Bundle-Verfahren

**Eingabe** : Startpunkt  $u^1$ , Konstanten  $m_1, m_2, m_3$  mit  $0 < m_1 < m_2 < 1, 0 < m_3 < 1, \varepsilon > 0$

**Ausgabe** :  $\varepsilon$ -optimaler Punkt  $u^k \in \mathbb{R}^n$

**Daten** :  $f(u^1), g^1 \in \partial f(u^1), \beta_1^1 = 0$  und  $J_1 = \{1\}, k = 1$

**für**  $k = 1, 2, \dots$  **tue**

1. Berechne  $u^{k+1}$  und  $g^{k+1}$  durch die innere Iteration. **STOP** mit  $u^k$ , falls  $u^k$   $\varepsilon$ -optimal ist.
2. Bestimme den Linearisierungsfehler  $\beta_j^{k+1}, \forall j \in J_k$ , wie in (4.31).
3. Aktualisiere das Bündel durch  $J_{k+1} = \{j \in J_k : \lambda_j^k > 0 \text{ oder } y^j = u^k\} \cup \{k+1\}$ .

**Ende**

### Algorithmus 3 : Innere Iteration des nichtkonvexen Bundle-Verfahren

**Daten** : Index  $k$  der äußeren Iteration, Konstanten  $m_1, m_2, m_3$ , Penaltyparameter  $t_1 = t > 0, \varepsilon > 0, j = 1$

**Ausgabe** : Neuer Iterationspunkt  $u^{k+1}$ , neuer Hilfspunkt  $y^{k+1}$ , Subgradient  $g^{k+1} \in \partial f(y^{k+1})$

**für**  $j = 1, 2, \dots$  **tue**

1. Berechne die Lösung  $(s_j, \xi_j)$  des Schnittebenenmodells.

**wenn**  $\|\sum_{j \in J_k} \lambda_j g^j\| \leq \varepsilon$  **und**  $\sum_{j \in J_k} \lambda_j \beta_j^k \leq \varepsilon$  **dann**

| **STOP** mit  $\varepsilon$ -optimalem Punkt  $u^k$

**sonst**

| Setze  $y^{k+1} = u^k + s_j$  und wähle  $g^{k+1} \in \partial f(y^{k+1})$ .

2. Gilt NS(i) nicht, **STOP** und führe einen wesentlichen Schritt durch, d. h.  $u^{k+1} = u^k + s_j$ .
3. Gelten NS(i), NS(ii) und NS(iii), **STOP** und führe einen Nullschritt durch, d. h.  $u^{k+1} = u^k$ .
4. Gelten NS(i) und NS(ii), aber nicht NS(iii)

**wenn** der zweite Teil von NS(ii) erfüllt ist **dann**

| führe Linesearch entlang  $u^k + ds_j$  für  $d \geq 0$  durch und **STOP** mit wesentlichem Schritt oder Nullschritt.

**sonst**

| Setze  $t_{j+1} = \frac{1}{2}t_j$  und gehe zu 1.

5. Gilt NS(i) aber nicht NS(ii), setze  $t_{j+1} = \frac{1}{2}t_j$  und gehe zu 1.

**Ende**

**Definition 4.2.** Wir definieren die Bedingungen  $NS(i)$ ,  $NS(ii)$ ,  $NS(iii)$  wie folgt:

$$NS(i) = \text{true, falls } f(y^{k+1}) - f(x^k) \geq m_1 \xi_j, \quad (4.33)$$

$$NS(ii) = \text{true, falls } \left( \beta_{k+1}^k \leq m_3 \sigma^{k-1} \text{ oder } \underbrace{\|f(x^k) - f(y^{k+1})\| \leq \|\zeta^{k-1}\| + \sigma^{k-1}}_{:=NS22} \right), \quad (4.34)$$

$$NS(iii) = \text{true, falls } (g^j)^T s_j \geq m_2 \xi_j. \quad (4.35)$$

In Algorithmus 3 wurde in Schritt 4 ein sogenannter Linesearch-Algorithmus genannt. Dieser Algorithmus wird verwendet, wenn die Suchrichtung an sich sinnvoll, aber eventuell die Schrittlänge noch zu lang ist.

**Algorithmus 4 :** Linesearch-Algorithmus

**Eingabe :** Aktueller Punkt  $u^k$ , Suchrichtung  $s_j$ , Abstiegsschätzer  $\xi_j$ , Konstanten  $m_1$ ,  $m_2$  mit  $0 < m_1 < m_2 < 1$

**Ausgabe :** Neuer Hilfspunkt  $y^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ , Neuer Punkt  $u^{k+1}$

**Daten :**  $J_k$ ,  $d_l = 0$   $d_r = 1$ ,  $c > 0$

**für**  $n = 1, 2, \dots$  **tue**

1. Setze  $d_n = \frac{d_l + d_r}{2}$  und  $u_n = u^k + d_n s_j$ .
2. Berechne  $f_n = f(u_n)$  und  $g_n \in \partial f(u_n)$ .
3. Gilt  $f_n - f(u^k) \leq m_1 d_n \xi_j$  und  $g_n^T s_j \geq m_2 \xi_j$  **STOP** mit wesentlichem Schritt.
4. Gilt  $-\max(f(u^k) - f_n - g_n^T(u^k - u_n), c \|u^k - u_n\|^2) + g_n^T s_j \geq m_2 \xi_j$  **STOP** mit Nullschritt.
5. Gilt  $g_n^T s_j \geq m_2 \xi_j$ , setze  $d_l = d_n$  und gehe zu 1.
6. Setze  $d_r = d_n$ .

**Ende**

Das in Algorithmus 3 verwendete Schnittebenenmodell wollen wir in folgendem Abschnitt herleiten.

### 4.5.3 Herleitung des Schnittebenenmodells

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{R}^n} f(y(u), u) \\ & \text{u. d. N.} \\ & Au \leq b, \\ & A_{eq} = b_{eq}, \\ & u_{lb} \leq u \leq u_{ub}, \\ & c(u) \leq 0, \\ & c_{eq}(u) = 0. \end{aligned}$$

Es gelte  $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$ ,  $A_{eq} \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$ ,  $u_{lb} \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_{ub} \in \mathbb{R}^n$ ,  $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $c_{eq} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_2}$  mit  $m_1, m_2, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ . Um im weiteren Verlauf die Notation möglichst einfach zu gestalten, schreiben wir für einen zulässigen Punkt kurz

$$u \in U,$$

wobei  $U$  durch die oben genannten Nebenbedingungen charakterisiert wird. Des Weiteren setzen wir

$$f(u) := f(y(u), u),$$

da in unserem Fall  $y(u)$  für ein festes  $u$  durch  $C^{\text{red}}(u, y) = 0$  eindeutig bestimmt ist. Das zugehörige Schnittebenenmodell lässt sich schreiben als

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} f_k^{se}(u).$$

Wir verwenden dafür die Notation

$$f_k^{se}(u) = \max_{0 \leq j \leq k} f(u^j) + (g^j)^T(u - u^j).$$

Zusammengefasst ergibt sich hierdurch das folgende, nichtglatte Schnittebenenmodell zur Bestimmung des nächsten Iterationspunktes  $u^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{0 \leq j \leq k} f(u^j) + (g^j)^T(u - u^j) \\ & \text{u. d. N.} \\ & u \in U. \end{aligned}$$

Wie wir in [Ulbrich, 2009, Lemma 2.5.1] gesehen haben, lässt sich dieses nichtglatte Optimierungsproblem in das folgende, glatte Problem umschreiben.

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}} \xi \\ & \text{u. d. N.} \\ & u \in U, \\ & f^j + (g^j)^T(u - u^j) - \xi \leq 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Das obige Modell beschreibt ein gewöhnliches Schnittebenenmodell, wie in [Ulbrich, 2009, Kapitel 2.5] zu lesen. Da wir zur Formoptimierung jedoch eine davon modifizierte Variante anwenden wollen, betrachten wir nun das Schnittebenenmodell, welches im Bundle-Verfahren Anwendung findet.

Im Bundle-Verfahren verwenden wir ein sogenanntes Bündel  $J$ , welches in jedem Iterationsschritt die folgenden Informationen enthält:

$$y^j, \quad f^j := f(y^j), \quad g^j \in \partial f(y^j).$$

Wir betrachten nun, das im Bundle-Verfahren angewendete, Schnittebenenmodell. Prinzipiell handelt es sich um das oben beschriebene glatte Schnittebenenmodell. Hinzugefügt wurde noch ein Regularisierungsterm, welcher dafür sorgt, dass das Optimierungsproblem nicht unbeschränkt ist. Dazu führen wir den Penaltyparameter  $\gamma_k$  ein.

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \bar{f}_{J_k}^{se}(u^k + s) + \frac{1}{2\gamma_k} \|s\|^2$$

u. d. N.

$$(u^k + s) \in U.$$

Unter der Annahme, dass  $f$  eine konvexe Funktion ist, ist der in (4.30) definierte Linearisierungsfehler  $\alpha_j^k$  immer größer oder gleich Null. Damit approximiert das Schnittebenenmodell die Zielfunktion von unten. Im Fall der Formoptimierung handelt es sich jedoch um ein nicht-konvexes, nichtglattes Problem, weshalb wir die Gültigkeit von  $\alpha_j^k \geq 0$  nicht mehr sicherstellen können. Darum bedienen wir uns des bereits in (4.31) definierten Linearisierungsfehlers  $\beta_j^k$ .

Zur Lösung des Formoptimierungsproblems verwenden wir nun zusammengefasst:

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}} \xi + \frac{1}{2\gamma_k} \|s\|^2$$

u. d. N.

$$(g^j)^T s - \beta_j^k - \xi \leq 0, \quad \forall j \in J_k,$$

$$(u^k + s) \in U.$$

Um eine analoge Darstellungsform zu verwenden, wie sie sich auch im implementierten Bundle-Verfahren wiederfindet, schreiben wir das eben genannte Schnittebenenmodell noch einmal in eine äquivalente Form um. Es gilt:

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}} \xi + \frac{1}{2\gamma_k} \|s\|^2$$

u. d. N.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ (g^{J_k})^T & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ \xi \end{pmatrix} \leq \begin{bmatrix} b - Au^k \\ \beta_j^k \end{bmatrix},$$

$$[A_{eq} \quad 0] \begin{pmatrix} s \\ \xi \end{pmatrix} = [b_{eq} - A_{eq}u^k],$$

$$u_{lb} - u^k \leq s \leq u_{ub} - u^k,$$

$$c(s, \xi) := c(u^k + s) \leq 0,$$

$$c_{eq}(s, \xi) := c_{eq}(u^k + s) = 0.$$

Um die KKT-Bedingungen für dieses Optimierungsproblem aufstellen zu können, definieren wir die Ableitungen der nichtlinearen Nebenbedingungen durch

$$\nabla_{(s, \xi)} c(s, \xi) := \begin{bmatrix} \nabla_u c(u^k + s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\nabla_{(s, \xi)} c_{eq}(s, \xi) := \begin{bmatrix} \nabla_u c_{eq}(u^k + s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Alle anderen notwendigen Ableitungen stellen wir wie gewohnt auf.

Wir wollen jetzt analog zu Definition A.3 die KKT-Bedingungen für das Schnittebenenmodell aufstellen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_{(s,\xi)} f &:= \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_k} s \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)}, \\ \nabla_{(s,\xi)} g &:= \begin{bmatrix} g^{J_k} & A^T & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \nabla_{(s,\xi)} c(s, \xi) \\ -1 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{mit } \nabla_{(s,\xi)} g &\in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \\ \nabla_{(s,\xi)} h &:= \begin{bmatrix} A_{eq}^T & \nabla_{(s,\xi)} c_{eq}(s, \xi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times p}. \end{aligned}$$

Damit lassen sich die KKT-Bedingungen, wie gewohnt schreiben als

$$\nabla_{(s,\xi)} f + \nabla_{(s,\xi)} g \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} + \nabla_{(s,\xi)} h \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{Multiplikatorregel})$$

$$h(s, \xi) = 0, \quad (\text{Zulässigkeitsbedingung})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \geq 0, \quad g(s, \xi) \leq 0, \quad (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_m) g(s, \xi) = 0. \quad (\text{Komplementaritätsbedingung})$$

Da die Matrixschreibweise sich als eher unübersichtlich darstellt, schreiben wir die KKT-Bedingungen in einer kompakteren Form.

Für die Multiplikatorregel schreiben wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_k} s + \sum_{j \in J_k} \lambda_j g^j + \sum_{j \in I_A} \lambda_j (A)_j + \sum_{j \in I_{ub}} \lambda_j e_j - \sum_{j \in I_{lb}} \lambda_j e_j + \sum_{j \in I_c} \lambda_j (\nabla_{(s,\xi)} c)_j &= 0, \\ \sum_{j \in J_k} \lambda_j &= 1, \end{aligned}$$

wobei  $(\cdot)_j$  die  $j$ -te Zeile der jeweiligen Matrix darstellt. Die Indexmengen  $I_A$ ,  $I_{ub}$ ,  $I_{lb}$ ,  $I_c$  enthalten die jeweiligen Indizes der zugehörigen Lagrangemultiplikatoren. Man erkennt hier direkt, dass das übliche Abbruchkriterium so nicht verwendet werden kann, da  $\frac{1}{\gamma_k} s = \sum_{j \in J_k} \lambda_j g^j$  nicht gegeben ist. Aus diesem Grund verwenden wir als Abbruchkriterium  $\frac{1}{\gamma_k} \|s\|^2 < \varepsilon$ . Für die Zulässigkeitsbedingung ändert sich in der Schreibweise nicht viel:

$$\begin{aligned} [A_{eq} \quad 0] \begin{pmatrix} s \\ \xi \end{pmatrix} - [b_{eq} - A_{eq} u^k] &= 0, \\ c_{eq} \left( \begin{pmatrix} s \\ \xi \end{pmatrix} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Komplementaritätsbedingung wiederum lässt sich in ihre einzelnen Bestandteile aufgliedern, um eine übersichtlichere Form zu gewährleisten:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \geq 0, \\
 & (g^j)^T s - \beta_j^k - \xi \leq 0 \quad \forall j \in J_k, \\
 & \underbrace{s - ub - u^k}_{=: g_{ub}} \leq 0, \\
 & \underbrace{-s + lb - u^k}_{=: g_{lb}} \leq 0, \\
 & c(s, \xi) \leq 0, \\
 & \underbrace{[A \quad 0] \begin{pmatrix} s \\ \xi \end{pmatrix} - [b - Au^k]}_{=: g_A} \leq 0, \\
 & \lambda_j((g^j)^T s - \beta_j^k - \xi) = 0 \quad \forall j \in J_k, \\
 & \lambda_j(g_A)_j = 0 \quad \forall j \in I_A, \\
 & \lambda_j(g_{ub})_j = 0 \quad \forall j \in I_{ub}, \\
 & \lambda_j(g_{lb})_j = 0 \quad \forall j \in I_{lb}, \\
 & \lambda_j(c)_j = 0 \quad \forall j \in I_c.
 \end{aligned}$$

Abschließend wollen wir, der Vollständigkeit halber, die Lagrangefunktion zu dem gegebenen Schnittebenenmodell aufstellen. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 L(s, \xi, \lambda, \mu) = & \xi + \frac{1}{2\gamma_k} \|s\|^2 + \sum_{j \in J_k} \lambda_j((g^j)^T s - \beta_j^k - \xi) + \sum_{j \in I_A} \lambda_j((A)_j s - (b - Au^k)_j) \\
 & + \sum_{j \in I_{ub}} \lambda_j((s)_j - (ub - u^k)_j) + \sum_{j \in I_{lb}} \lambda_j(-(s)_j + (lb - u^k)_j) + \sum_{j \in I_c} \lambda_j(c)_j \\
 & + \sum_{j \in I_{Aeq}} \mu_j((A_{eq})_j s - (b_{eq} - A_{eq} u^k)_j) + \sum_{j \in I_{ceq}} \mu_j(c_{eq})_j.
 \end{aligned}$$

---

## 5 Implementierung

---

In diesem Kapitel möchten wir kurz die implementierten Funktionen vorstellen. Dazu beschreiben wir im ersten Abschnitt das implementierte Bundle-Verfahren. In Abschnitt 5.2 werden daraufhin noch einige Hilfsfunktionen dargestellt.

---

### 5.1 Aufbau des nichtkonvexen Bundle-Verfahrens

---

Die Implementierung des Bundle-Verfahrens ist, wie im theoretischen Teil bereits beschrieben, in zwei Teile aufgeteilt. Wir beginnen zunächst mit der äußeren Iteration, *outer\_iteration\_bundle.m*, (vgl. Algorithmus 2). In Abbildung 5.1 sehen wir dazu eine schematische Darstellung der Implementierung. Zur Erklärung, im Gegensatz zu Algorithmus 2, beschreibt das Bundle  $J_k$  keine reine Indexmenge, sondern wurde als sogenanntes Structured-Array realisiert, in welchem direkt die Informationen gespeichert sind. Da der Algorithmus insbesondere auch Nebenbedingungen berücksichtigt, wird jedes Mal, bevor die innere Iteration gestartet wird, die Funktion *constraints\_bundle.m* aufgerufen, welche sowohl die internen Nebenbedingungen des Bundle-Verfahrens, als auch die eigentlichen Restriktionen für das Schnittebenenmodell aufbereitet. Die Eingabe der linearen Restriktionen erfolgt wie bereits vorher schon über die Funktionen *lincon\_contact*, *bounds\_contact.m*, die nichtlinearen werden über *bundle\_nonlcon\_contact.m* eingespeist. Die zulässige Menge ist im Folgenden Schema mit  $X$  bezeichnet. Als Abbruchkriterien wurden, das bereits aus der Literatur (Ulbrich [2009]) bekannte und in Satz 4.1 beschriebene verwendet und noch zwei weitere Kriterien, welche ein ineffizientes Annähern an ein lokales Optimum vermeiden sollen. Diese beiden sind wie folgt definiert

$$rel_f := \frac{\|f^k - f^{k+1}\|}{\|f^1\|} < TOL_f, \quad rel_x := \frac{\|x^k - x^{k+1}\|}{\|x^1\|} < TOL_x,$$

wobei  $TOL_f = TOL_x = 10^{-8}$  gilt. Diese beiden Kriterien werden jedoch lediglich nach einem erfolgreichen Schritt geprüft, da einerseits aus Implementierungsgründen nur in diesem Fall  $f^{k+1} = f(x^{k+1})$  gilt und andererseits nur die Problematik von vielen wesentlichen Schritten, welche sich nur unwesentlich von einander unterscheiden, abgefangen werden soll.

Der zweite Teil des Verfahrens besteht aus der inneren Iteration, *inner\_iteration\_bundle.m*, (vgl. Algorithmus 3). Wie in der äußeren Iteration werden hier wesentliche Informationen (Optimalität, wesentliche Schritte, etc.) über Wahrheitswerte realisiert. Insbesondere wurden dabei die verschiedenen Bedingungen (NS(i)-NS(iii)) aus Definition 4.2 verwendet.

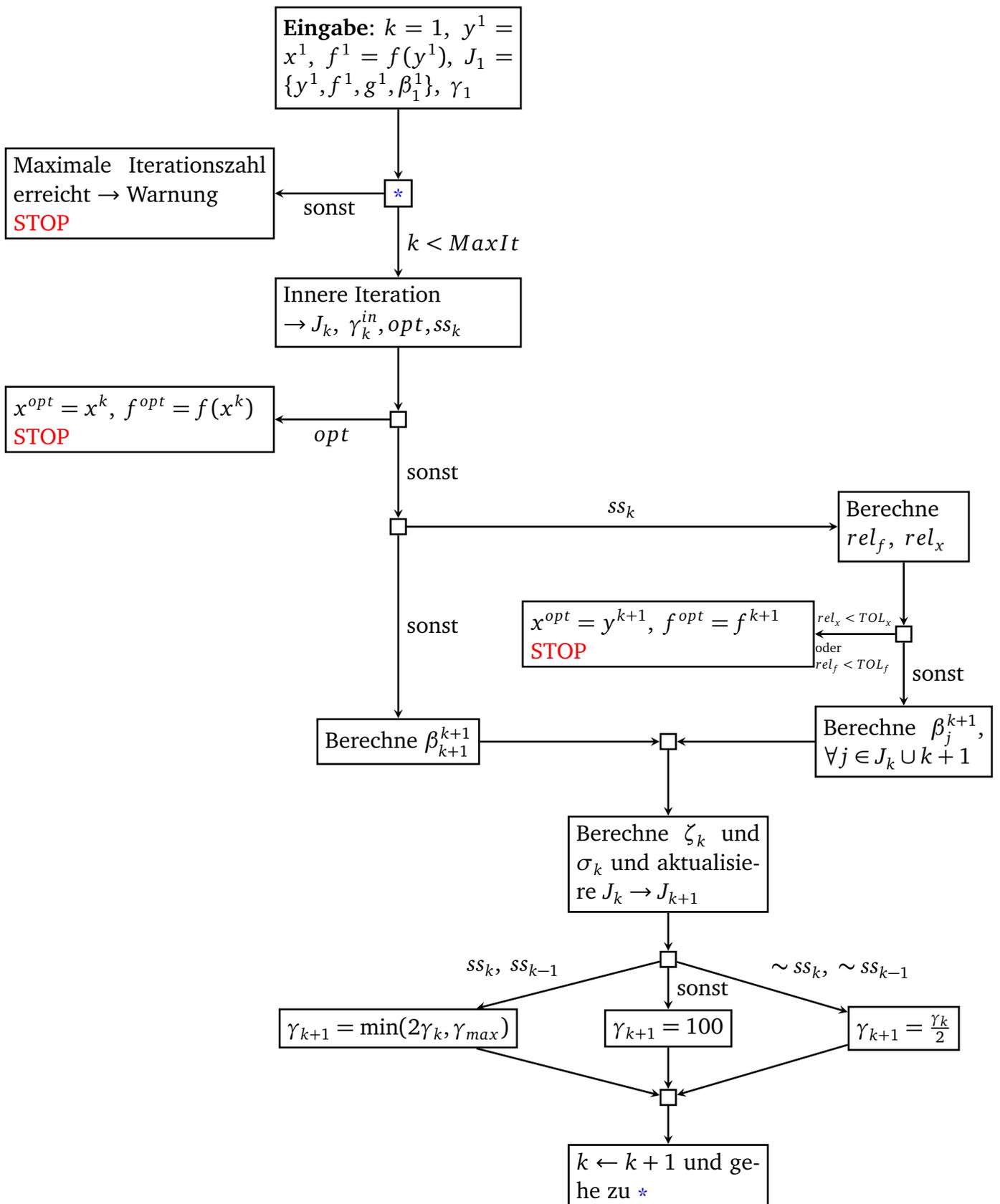


Abbildung 5.1.: Schematischer Aufbau der äußeren Iteration

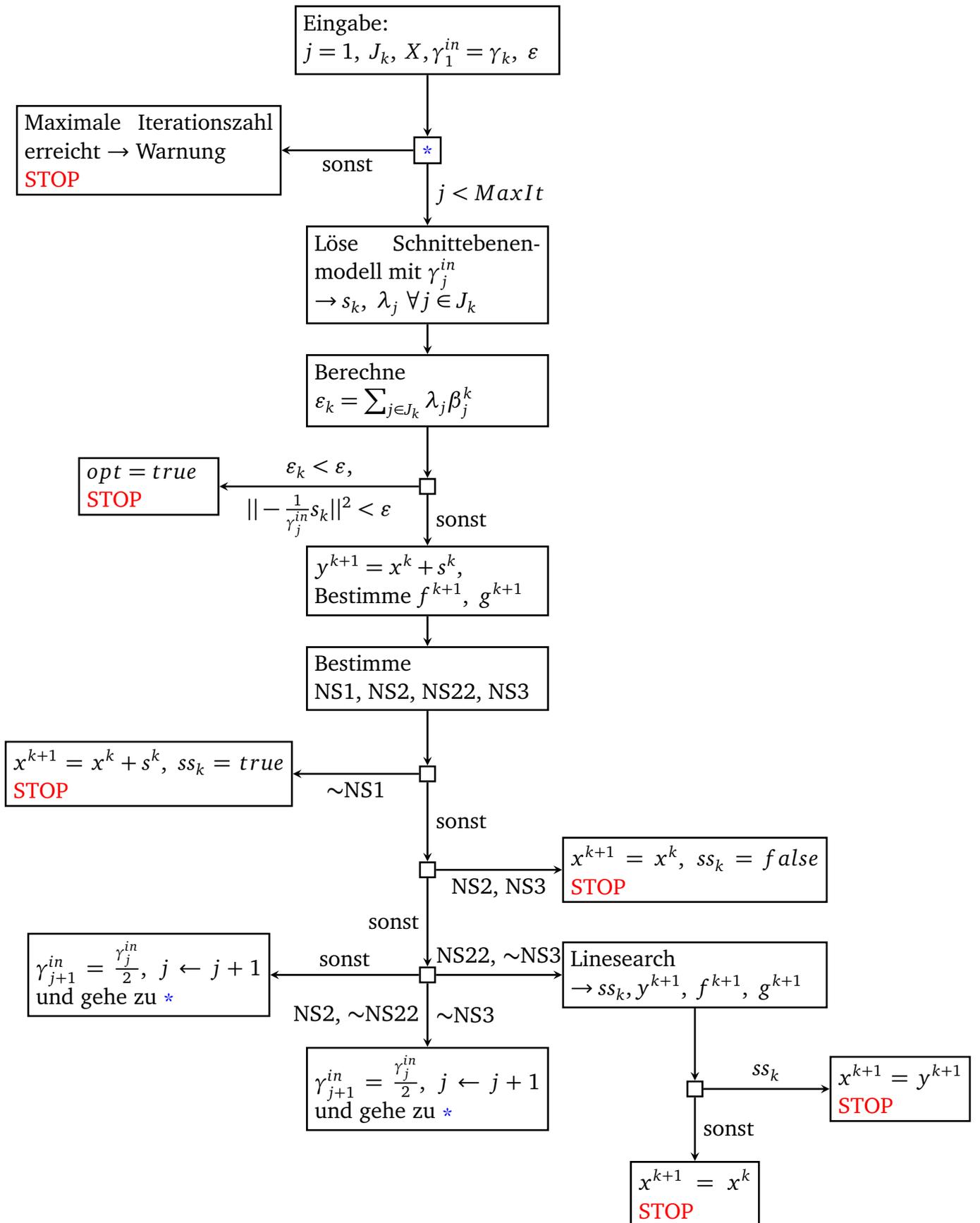


Abbildung 5.2.: Schematischer Aufbau der inneren Iteration

---

## 5.2 Hilfsfunktionen

---

Nachdem im vorherigen Abschnitt die beiden Hauptfunktionen des Bundle-Verfahrens präsentiert wurden, folgt in diesem Abschnitt eine Beschreibung der verwendeten Hilfsfunktionen.

---

### update\_bundle.m

---

Diese Funktion führt die Aktualisierung des Bündels nach Ulbrich [2009] durch:

$$J_{k+1} = \{j \in J_k : \lambda_j^k > 0 \text{ oder } y^j = x^k\} \cup \{k+1\}.$$

Da auch andere Möglichkeiten der Aktualisierung bestehen, wird, durch die Auslagerung in eine externe Funktion, ein einfacher Wechsel der Methodik gewährleistet.

---

### constraints\_bundle.m

---

Die Funktion *constraints\_bundle.m* zeigt, wie bereits im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Nebenbedingungen für das Schnittebenenproblem auf. Dazu gehört einerseits das Aufstellen der Schnittebenen und andererseits die Umformung der Optimierungsrestriktionen in die Form

$$s^k \in (X - x^k),$$

um zu gewährleisten, dass

$$x^k + s^k \in X$$

gilt.

---

### D\_assembleMortarMatrix\_grid.m

---

Die bereits in Abschnitt 4.4 beschriebene Formableitung der Verbindungsmatrix  $D$  wird in *D\_assembleMortarMatrix\_grid.m* teilweise durchgeführt. Teilweise aus dem Grund, dass hier nur die Ableitung nach den Gitterpunkten bestimmt wird und, wie auch schon in Abschnitt 4.4 beschrieben, zur Berechnung der Formableitung noch nachdifferenziert werden muss. Die eigentliche Berechnung folgt analog zu den Überlegungen aus dem theoretischen Teil.

---

### solveAdjoint\_compliance.m

---

In Abschnitt 4.2 wurde beschrieben, dass der Ansatz mit einer Adjungiertgleichung nur für den Fall anwendbar ist, dass die Zustandsableitung invertierbar ist. Dazu wurde in diesem Kapitel bereits eine reduzierte Form der physikalischen Nebenbedingung  $C^{red}(u, y)$  hergeleitet. Die Funktion *solveAdjoint\_compliance.m* stellt genau diese Zustandsableitung der reduzierten Form auf und löst die, sich daraus ergebende, Adjungiertengleichung.

---

## D\_solveLinConLinElastC2D6\_red\_grid.m

---

Wie bereits in *solveAdjoint\_compliance.m* wird auch in *D\_solveLinConLinElastC2D6\_red\_grid.m* der in Abschnitt 4.2 entwickelte Ansatz der reduzierten Form verwendet. Jedoch muss auch hier, wie in *D\_assembleMortarMatrix\_grid.m*, beachtet werden, dass lediglich die Ableitung nach den Gitterpunkten bestimmt wird und darum noch eine Nachdifferenzierung notwendig ist.

---

## 6 Numerische Ergebnisse

---

Zum Abschluss stellen wir nun noch zwei verschiedene Anwendungen des Bundle-Verfahrens auf das Kontaktproblem vor. Im ersten Abschnitt präsentieren wir dazu eine T-Steckverbindung, welche z. B. als Teil eines vertikalen Schienensystems zur Befestigung von Bauteilgruppen Anwendung finden könnte.

Die E-Verbindung, welche im darauf folgenden Abschnitt präsentiert wird, könnte z. B. bei einem horizontalen Schienensystem verwendet werden, um Bauteile über Kopf zu befestigen.

Zur Modellierung wurde der bereits vorhandene Programmcode aus der Projektvorlesung „Innovative Produkte aus Blech - Von der Konzeption zum geprüften Bauteil“ verwendet und entsprechend erweitert. Um die in Annahme 4.1 getroffenen Vereinfachungen zu berücksichtigen, wurden ausschließlich Rechtecke zur Modellierung verwendet. Als Materialparameter wurde in beiden Fällen

$$E = 210000,$$
$$\nu = 0,3$$

verwendet.

---

### 6.1 T-Steckverbindung

---

Zuerst möchten wir die Modellierung des Bauteils beschreiben. Danach folgt das betrachtete Lastszenario und die vorgegebenen Restriktionen. Abschließend präsentieren wir die Ergebnisse und vergleichen diese mit den Startwerten.

---

#### 6.1.1 Modellierung

---

Die T-Steckverbindung ist durch insgesamt sieben Rechtecke (auch Domains genannt) im Modell dargestellt. Sie werden durch P1 bis P7 bezeichnet. Für deren genaue Anordnung siehe Abbildung 6.1. Die Anforderungen aus Abschnitt 4.1 an die Parametrisierung lassen sich hierbei gut nachvollziehen. Aufgrund dieser Aufteilung wurde, in der durch MATLAB bereitgestellten PDE-Toolbox, ein Gitter erzeugt. Das in der Optimierung verwendete Gitter ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Es besteht aus 641 Knoten und wird für den Optimierungsprozess als fix angesehen. Es findet folglich im Laufe des Prozesses keine Verfeinerung des Gitters statt. Die verwendeten Designvariablen sind nach folgendem Schema zugeteilt:

$$P1 \rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_2, u_3, u_4, u_1, u_4\}$$

$$P2 \rightarrow \{u_1, u_4, u_3, u_4, u_3, u_5, u_1, u_5\}$$

$$P3 \rightarrow \{u_1, u_5, u_3, u_5, u_3, u_6, u_1, u_6\}$$

$$P4 \rightarrow \{u_1, u_6, u_3, u_6, u_3, u_7, u_1, u_7\}$$

$$P5 \rightarrow \{u_1, u_7, u_3, u_7, u_3, u_8, u_1, u_8\}$$

$$P6 \rightarrow \{u_3, u_5, u_9, u_5, u_9, u_6, u_3, u_6\}$$

$$P7 \rightarrow \{u_9, u_5, u_{10}, u_5, u_{10}, u_6, u_9, u_6\}$$

Die Notation ist dabei alternierend, wodurch sich

$$\left\{ \underbrace{\quad}_{\text{x-Koordinate des ersten Knotens}}, \underbrace{\quad}_{\text{y-Koordinate des ersten Knotens}}, \dots \right\}$$

ergibt. Die Knoten sind dabei jeweils gegen den Uhrzeigersinn, beginnend mit dem Knoten der linken unteren Ecke, angeordnet.

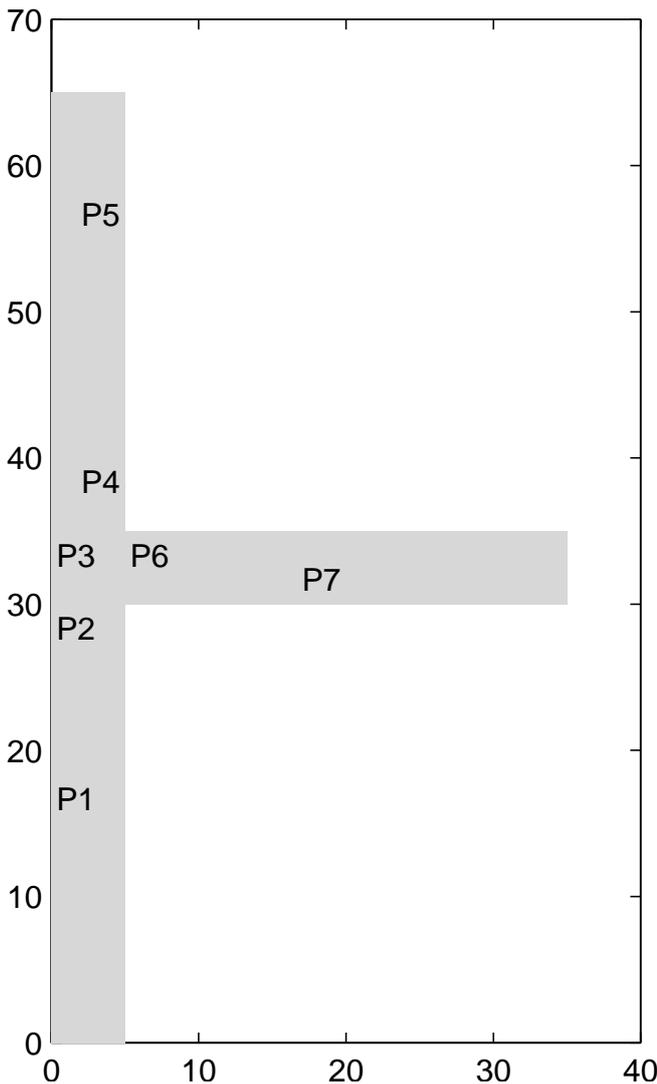


Abbildung 6.1.: Domains T-Steckverbindung

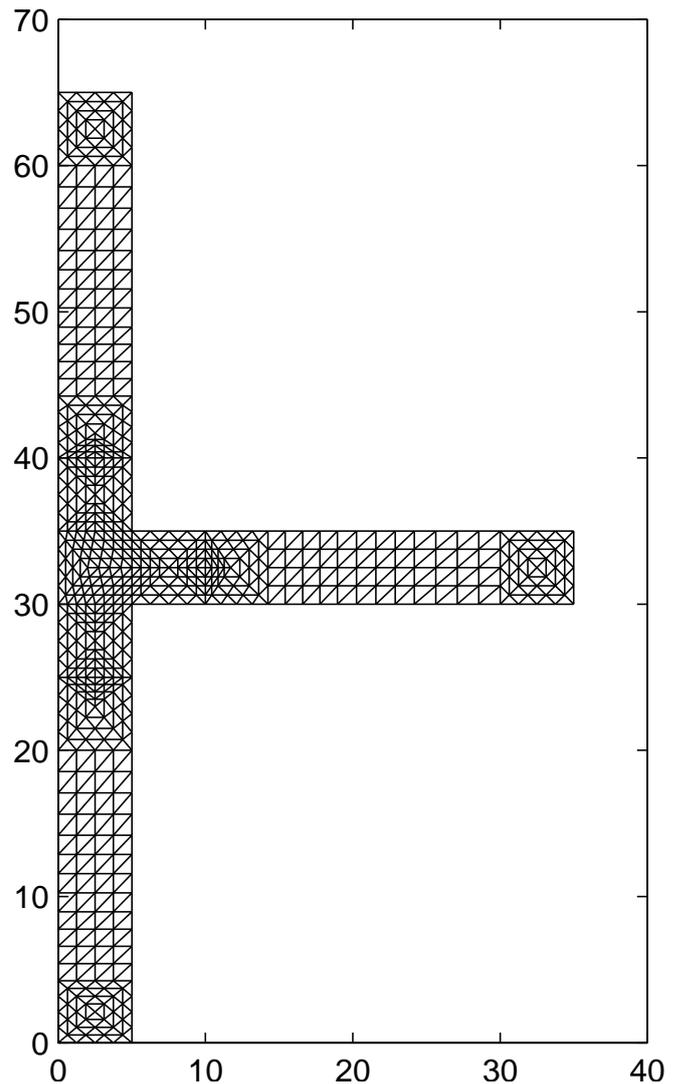
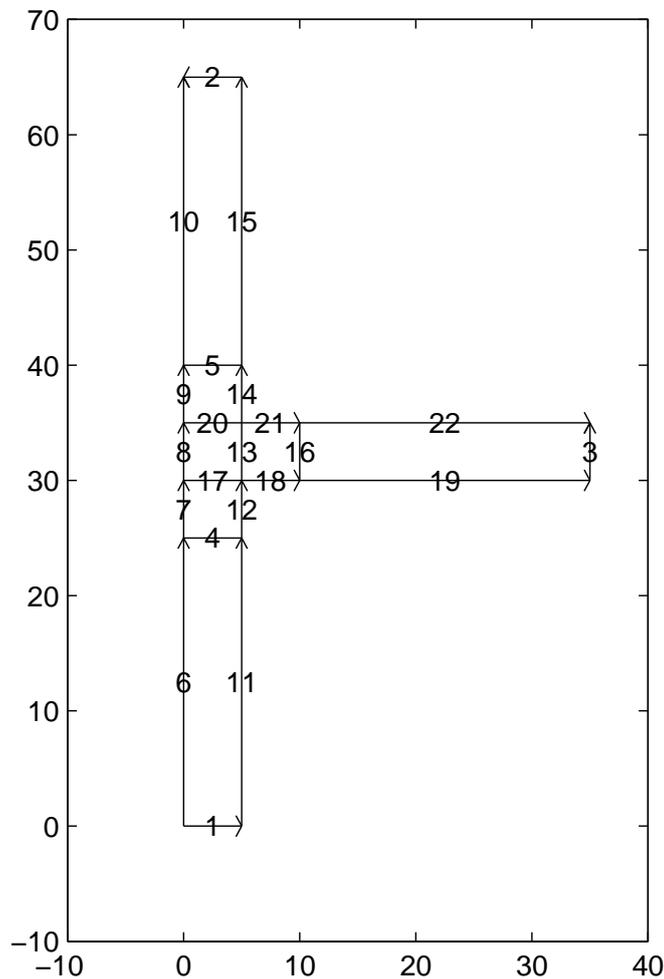


Abbildung 6.2.: Gitter T-Steckverbindung

### 6.1.2 Szenariobeschreibung und Bauteilanforderungen

Der in Abbildung 6.3 dargestellte Rand des Bauteils ist, wie im theoretischen Teil beschrieben, in verschiedene Teilränder aufgeteilt, einerseits dem Neumannrand, in diesem Fall nur Kante 3, und andererseits den Kontaktrand, bestehend aus den Kanten 1,2,6,7,8,9,10,11,15. Ein

Dirichletrand ist in diesem Szenario nicht vorgegeben, wäre jedoch auch möglich. Die äußere Krafteinwirkung findet parallel zur y-Achse, in negative Richtung statt, d. h. der Kraftvektor ist gegeben durch  $(0 \ -1)^T$ .



**Abbildung 6.3.:** Kantennummerierung T-Steckverbindung

Kommen wir zu den aufgestellten Restriktionen. Wir beginnen mit den allgemeinen Schranken, welche sicherstellen, dass ein festes Bauraumfenster eingehalten wird.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leq u \leq \begin{pmatrix} 70 \\ \vdots \\ 70 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Als einzige weitere lineare Restriktion an das Bauteil fordern wir eine Mindestblechdicke von einem Millimeter. Realisiert wird dies durch ein System linearer Ungleichungen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Als nichtlineare Nebenbedingungen wurde einerseits die Forderung gestellt, dass die einzelnen Domains ein Mindestvolumen haben, und andererseits, dass das gesamte Bauteil seine Volumen durch die Optimierung nicht vergrößern darf. Die erste Forderung, soll sicherstellen, dass

ein Umklappen der Domains verhindert wird, welches den Optimierungsprozess ad absurdum führen würde. Die Berechnung der Volumina hängt von der Orientierung der Domains. Ein Umklappen der Domains würde zu negativen Volumina führen was eine sinnvolle FE-Berechnung verhindert. Als untere Schranke ist hierbei ein Volumen von Eins gewählt. Die jeweilige Einheit der Berechnung ist dabei zu berücksichtigen. Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnung  $(x_k^i, y_k^i)$  für die  $k$ -te Ecken des  $i$ -ten Gebiets. Dabei bezeichnen wir die im Koordinatensystem südwestliche Ecke des Gebiets mit  $k = 1$ . Wir verwenden die Bezeichnung  $A_0 \in \mathbb{R}$  für das Volumen des Ausgangsdesigns. Für das Volumen des Gebietes  $i$  gilt damit

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{l=k}^4 (y_k^i + y_{k+1}^i)(x_k^i - x_{k+1}^i).$$

Wir definieren nun die verwendeten nichtlinearen Nebenbedingungen.

$$A_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq 7,$$

$$\sum_{i=1}^7 A_i \leq A_0.$$

In der Implementierung wurden direkt für  $(x_i^k, y_i^k)$  die entsprechenden, die Gebietsecken beschreibenden Designvariablen  $(u_j, u_l)$  verwendet. Der Zwischenschritt über die Eckkoordinaten diente hier nur der besseren Übersicht.

---

### 6.1.3 Ergebnis

---

In Abbildung 6.4 können wir die Spannungsverläufe des nicht optimierten Bauteils betrachten. Man erkennt anhand der Legende, dass es zu relativ starken Spannungsspitzen im Bereich der beiden innen liegenden Ecken gibt. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da hier die gesamte Spannung auf einen einzelnen Punkt übertragen wird. Die Gesamtnachgiebigkeit des Bauteils beträgt in dieser Konfiguration

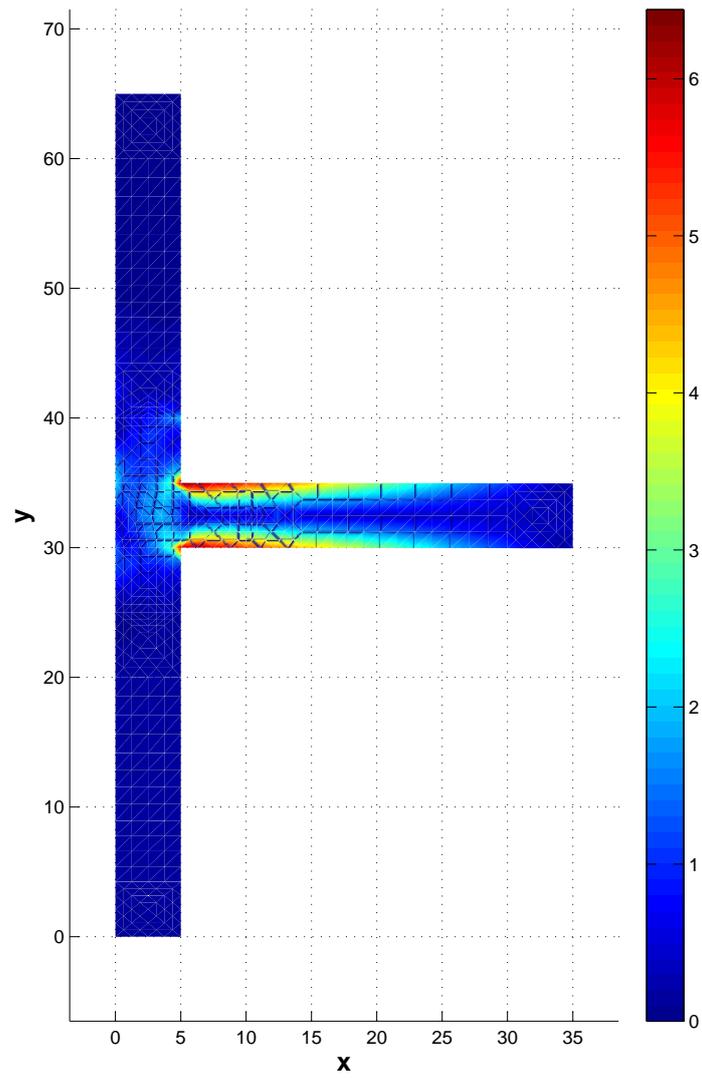
$$f_0 = 4,7 \cdot 10^{-3}.$$

Auf dieses Szenario wurde das bereits vorgestellte, nichtkonvexe Bundle-Verfahren angewendet, welches nach elf Iterationen zu einer Konfiguration kam, welche die Gesamtnachgiebigkeit um 95,33% reduziert. Es gilt für die neue Konfiguration

$$f_{opt} = 2,2106 \cdot 10^{-4}.$$

Abbildung 6.5 zeigt das Ergebnis des Optimierungsprozesses unter dem gegebenen Lastfall. Beim Vergleich der beiden Abbildungen 6.4 und 6.5 gilt es zu berücksichtigen, dass die Farbskalen nicht identisch sind. Der gesamte Optimierungsprozess wurde mit einem Intel Core 2 Duo mit 2,26Ghz und 4GB RAM gerechnet. Die Dauer des gesamten Optimierungsvorganges betrug dabei 66,17 Sekunden.

Tabelle 6.1 zeigt die Schrittlänge  $\|s^{k-1}\|$ , den aktuellen Funktionswert  $f(u^k)$ , ob ein wesentlicher Schritt ausgeführt wurde  $ss_{k-1}$  und den Penaltyparameter  $\gamma_{k-1}$  in der jeweiligen Iteration  $k$  auf.



**Abbildung 6.4.:** Nicht-optimierte T-Steckverbindung

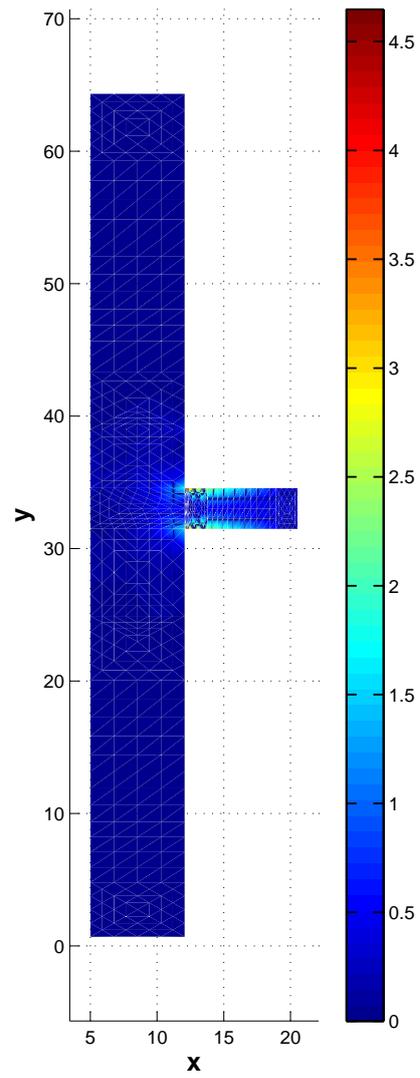


Abbildung 6.5.: Optimierte T-Steckverbindung

**Tabelle 6.1.:** Ergebnissen der einzelnen Iterationsschritte (T-Steckverbindung)

$k$	$\ s^{k-1}\ $	$f(u^k)$	$ss_{k-1}$	$\gamma_{k-1}$
0	-	$4,7 \cdot 10^{-3}$	-	-
1	$2,845191 \cdot 10^{-2}$	$4,727324 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	100
2	$5,679851 \cdot 10^{-2}$	$4,706482 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	200
3	$1,131743 \cdot 10^{-1}$	$4,665034 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	400
4	$2,245763 \cdot 10^{-1}$	$4,583092 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	800
5	$4,420990 \cdot 10^{-1}$	$4,422930 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	1600
6	$8,663346 \cdot 10^{-1}$	$4,113577 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	3200
7	1,661039	$3,539467 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	6400
8	3,075675	$2,485576 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	12800
9	5,094597	$1,079468 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	25600
10	5,807991	$2,210620 \cdot 10^{-4}$	<i>true</i>	51200
11	-	$2,210620 \cdot 10^{-4}$	-	-

---

## 6.2 E-Verbindung

---

Wie bereits im vorherigen wollen wir auch in diesem Abschnitt zu Beginn kurz auf die Modellierung und die Lasten und Restriktionen eingehen, um im Anschluss die Ergebnisse mit der Startkonfiguration zu vergleichen.

---

### 6.2.1 Modellierung

---

Die E-Verbindung wird ebenfalls wie die T-Steckverbindung ausschließlich aus Rechtecken modelliert. In Abbildung 6.6 ist diese Modellierung graphisch veranschaulicht. Im Gegensatz zum T-Verbindungsstück wurde für dieses Bauteil jedoch ein gröberes Gitter gewählt, was den Rechenaufwand erheblich verringert hat. Insgesamt besteht das Gitter in Abbildung 6.7 aus 337 Knoten. Auch hier gab es im Laufe des Optimierungsprozesses keine nachträgliche, lokale Verfeinerung des Gitters. Mit der gleichen Notation, wie im vorherigen Abschnitt, lassen sich die Designvariablen den einzelnen Domains P1 bis P11 zuordnen.

$$P1 \rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_2, u_3, u_4, u_4, u_1\}$$

$$P2 \rightarrow \{u_3, u_2, u_5, u_2, u_5, u_4, u_3, u_4\}$$

$$P3 \rightarrow \{u_5, u_2, u_6, u_2, u_6, u_4, u_5, u_4\}$$

$$P4 \rightarrow \{u_3, u_4, u_5, u_4, u_5, u_7, u_3, u_7\}$$

$$P5 \rightarrow \{u_3, u_7, u_5, u_7, u_5, u_8, u_3, u_8\}$$

$$P6 \rightarrow \{u_5, u_7, u_9, u_7, u_9, u_8, u_5, u_8\}$$

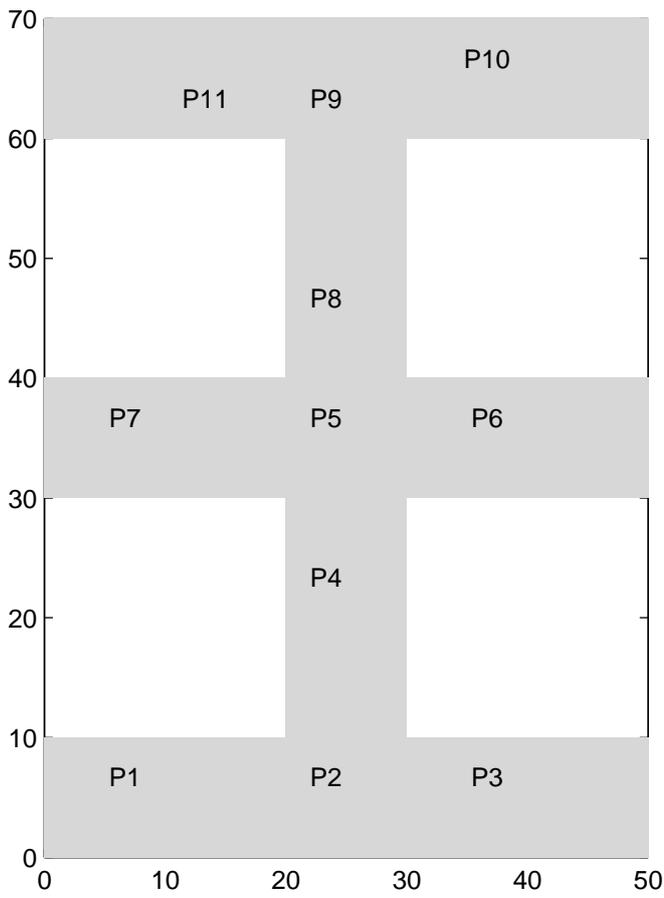
$$P7 \rightarrow \{u_{10}, u_7, u_3, u_7, u_3, u_8, u_{10}, u_8\}$$

$$P8 \rightarrow \{u_3, u_8, u_5, u_8, u_5, u_{11}, u_3, u_{11}\}$$

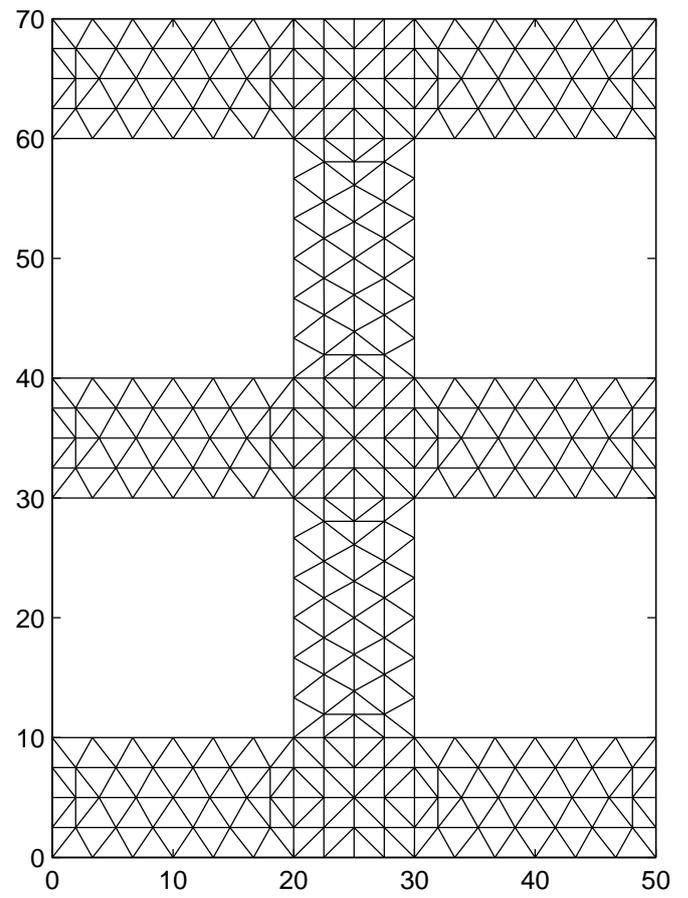
$$P9 \rightarrow \{u_3, u_{11}, u_5, u_{11}, u_5, u_{12}, u_3, u_{12}\}$$

$$P10 \rightarrow \{u_5, u_{11}, u_{13}, u_{11}, u_{13}, u_{12}, u_5, u_{12}\}$$

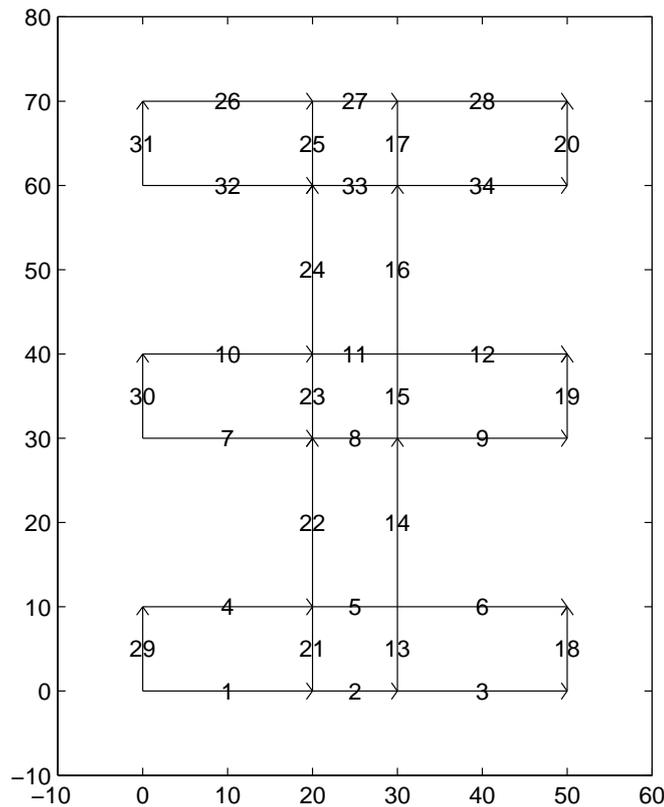
$$P11 \rightarrow \{u_{14}, u_{11}, u_3, u_{11}, u_3, u_{12}, u_{14}, u_{12}\}$$



**Abbildung 6.6.:** Domains E-Verbindung



**Abbildung 6.7.:** Gitter E-Verbindung

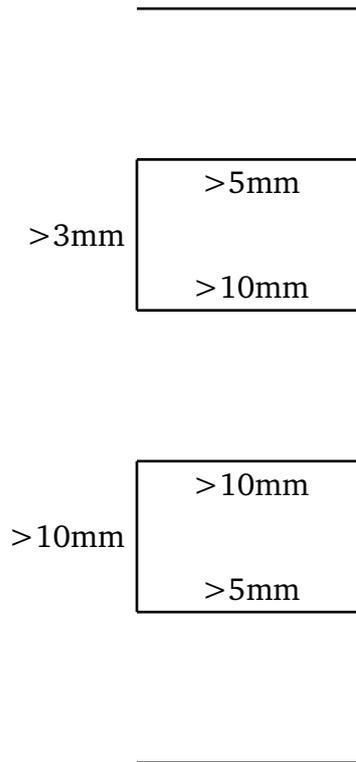


**Abbildung 6.8.:** Kantenummerierung E-Verbindung

## 6.2.2 Szenariobeschreibung und Bauteilanforderungen

Wir wollen nun wie im vorherigen Abschnitt kurz das grundlegende Setting beschreiben. Der Neumannrand des Bauteils besteht in diesem Fall aus den beiden Kanten 6 und 18. Der Kontaktrand ist auf die Kanten 10, 12, 16, 20, 24, 26, 27, 28, 31, 32, 34 festgelegt und beschreibt damit die Einfassung des Bauteils in z. B. ein Schienensystem. Auch bei diesem Bauteil ist kein Dirichletrand fest vorgegeben. Da der Neumannrand sich über zwei Kanten erstreckt, haben wir auch zwei Kraftvektoren. Auf Kante 6 wirkt die äußere Kraft parallel zu der y-Achse in negative Richtung, mit dem Kraftvektor  $(0 \ -1)^T$ . Auf Kante 18 kommt zusätzlich eine Kraft parallel zur x-Achse, ebenfalls in negativer Richtung, zum Tragen, deren Kraftvektor durch  $(-1 \ 0)^T$  gegeben ist. Die Kantenbezeichnung bezieht sich auf die Nummerierung in Abbildung 6.8.

Auch bei diesem Bauteil, wurden einige Beschränkungen für die Optimierung getroffen. Als erste Beschränkung gilt auch hier, dass das Bauteil eine festgelegtes Baufenster der Größe  $70\text{mm} \times 70\text{mm}$  nicht überschreiten darf. Diese allgemeinen Schranken stimmen exakt mit denen aus dem vorherigen Abschnitt überein. Weiterhin gibt es eine Mindestblechdicke, welche eingehalten werden muss, sowie Mindestanforderungen an die Größe der seitlichen Aussparungen. Für die Mindestblechdicke wird ein Millimeter gewählt. Da in die beiden Aussparungen sich andere Bauteile einhängen lassen sollen, werden weiteren Einschränkungen verwendet welche in Abbildung 6.9 dargestellt sind. Für die linken Aussparungen gelten die Restriktionen analog. Die verwendeten nichtlinearen Nebenbedingungen entsprechen sinngemäß denen aus den Bauteilanforderungen der T-Steckverbindung.



**Abbildung 6.9.:** Skizze der E-Verbindung

### 6.2.3 Ergebnis

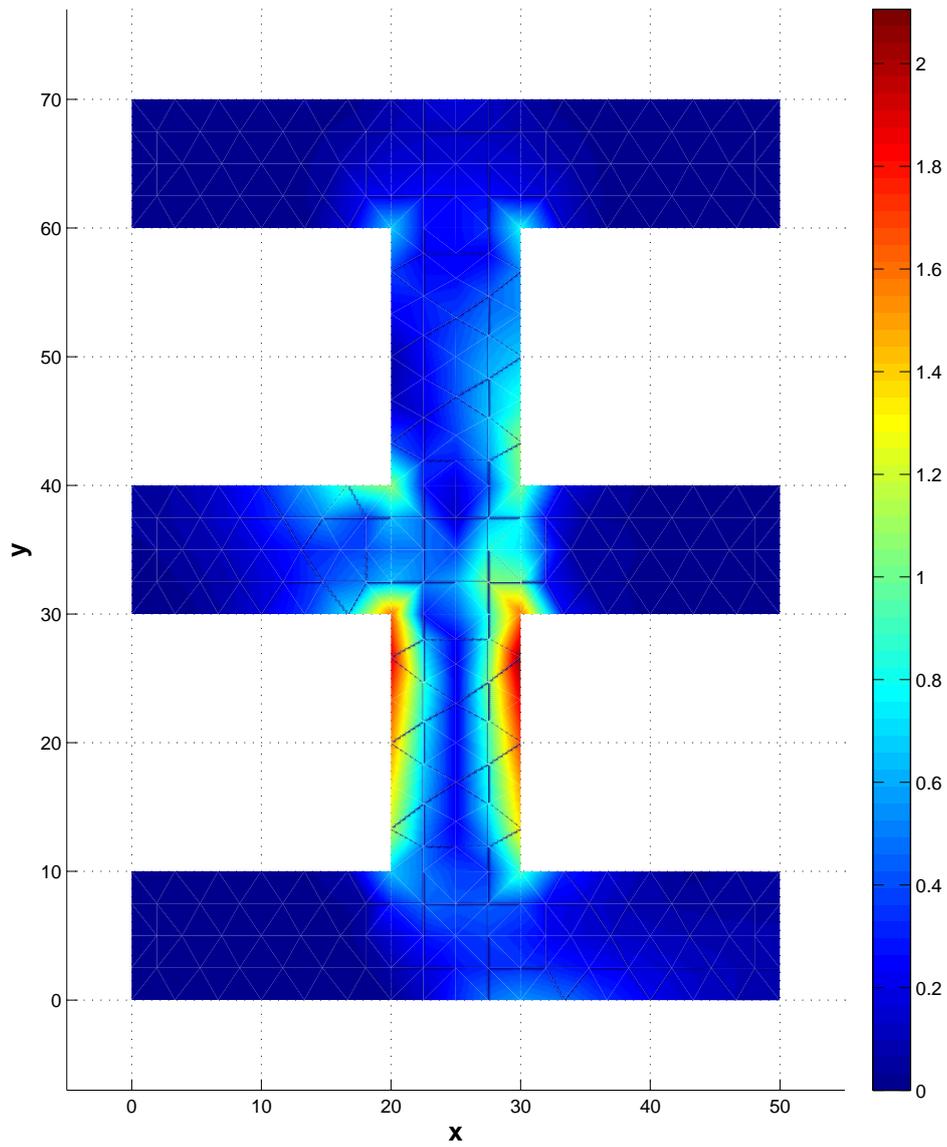
Wie im vorherigen Abschnitt betrachten wir zunächst die Spannungsverläufe des nicht-optimierten Bauteils. Auch hier erkennt man die Spannungsspitzen in den innen liegenden Ecken. Die asymmetrische Kräfteeinwirkung lässt sich ebenfalls gut erkennen. Die Gesamtnachgiebigkeit des Bauteils beträgt in der Grundkonfiguration

$$f_0 = 1,9 \cdot 10^{-3}.$$

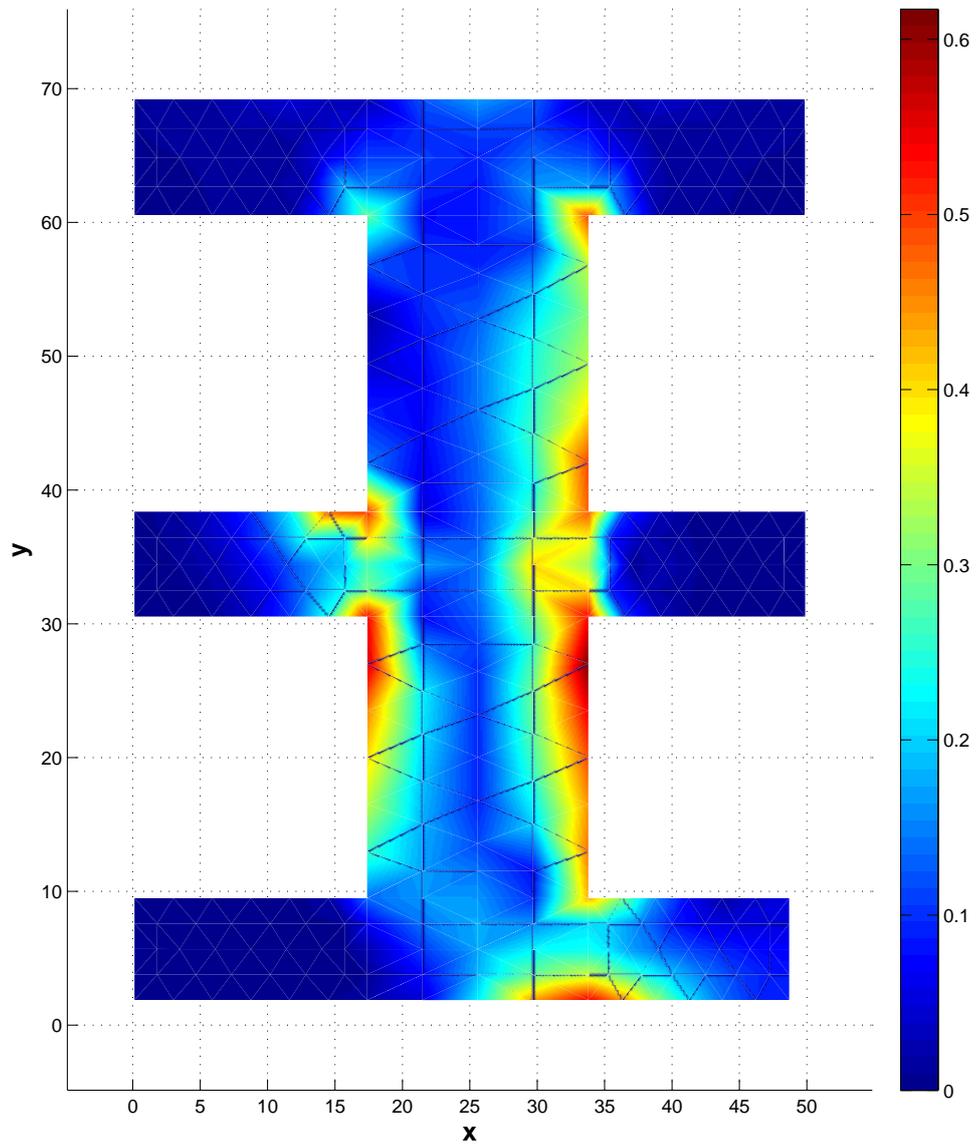
Nach Anwendung des nichtkonvexen Bundle-Verfahrens, welches nach neun Iterationen zu einer Konfiguration kommt, welche die Gesamtnachgiebigkeit um 79,73% reduzierte, ergab sich eine Bauteilform wie in Abbildung 6.4. Für die neue Konfiguration gilt

$$f_{opt} = 3,7955 \cdot 10^{-4}.$$

Abbildung 6.11 zeigt das Ergebnis des Optimierungsprozesses unter dem gegebenen Lastfall. Wie auch bei der Betrachtung der T-Steckverbindung gilt es zu berücksichtigen, dass die Farbskalen nicht identisch sind. Der gesamte Optimierungsprozess wurde auf dem selben PC gerechnet wie die Berechnungen davor. Die Dauer des gesamten Optimierungsvorganges beträgt dabei 22,78 Sekunden. Die deutlich niedrigere Berechnungsdauer lässt sich auf das wesentlich gröbere Gitter zurückführen.



**Abbildung 6.10.:** Nicht-optimierte E-Verbindung



**Abbildung 6.11.:** Optimierte E-Verbindung

**Tabelle 6.2.:** Ergebnissen der einzelnen Iterationsschritte (E-Verbindung)

$k$	$\ s_{k-1}\ $	$f(u^k)$	$ss_{k-1}$	$\gamma_{k-1}$
0	-	$1,9 \cdot 10^{-3}$	-	-
1	$6,057571 \cdot 10^{-2}$	$1,84120 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	100
2	$1,177045 \cdot 10^{-1}$	$1,762020 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	200
3	$2,224631 \cdot 10^{-1}$	$1,635414 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	400
4	$4,024376 \cdot 10^{-1}$	$1.434435 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	800
5	$6,734287 \cdot 10^{-1}$	$1,162708 \cdot 10^{-3}$	<i>true</i>	1600
6	1,015472	$8.623073 \cdot 10^{-4}$	<i>true</i>	3200
7	1,368262	$5,906421 \cdot 10^{-4}$	<i>true</i>	6400
8	1,682124	$3,795485 \cdot 10^{-4}$	<i>true</i>	12800
9	-	$3,795485 \cdot 10^{-4}$	-	-

---

## A Anhang

---

**Satz A.1** (Umrechnung der Materialkonstanten). Seien  $\lambda, \mu$  die Lamé-Parameter eines Materials und dazu gehörend  $E$  das E-Modul und  $\nu$  die Poissonzahl. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.\end{aligned}$$

Siehe [Hess, 2010, (2.43)].

**Definition A.1.** Sei  $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine vektorwertige Funktion mit  $w = (w_1, \dots, w_d)$ , die Divergenz  $\operatorname{div}(\cdot)$  ist definiert durch

$$\operatorname{div}(w) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} w_i.$$

Siehe [Larsson u. Thomée, 2005, Abschnitt 1.2].

**Satz A.2** (2. Kornsche Ungleichung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  eine offene beschränkte Menge mit stückweise glattem Rand. Ferner habe  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$  ein positives zweidimensionales Maß. Dann gibt es eine positive Zahl  $c' = c'(\Omega, \Gamma_0)$ , so dass

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v) : \varepsilon(v) \, dx \geq c' \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$$

gilt. Dabei ist  $H_{\Gamma}^1(\Omega)$  der Abschluss von  $\{v \in C^\infty(\Omega)^3 : v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_0\}$ . bzgl. der  $\|\cdot\|_{H^1}$ -Norm.

*Beweis.* Siehe [Braess, 2007, Satz 3.3]. □

**Satz A.3** (Charakterisierungssatz). Sei  $V$  ein linearer Raum und  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische, positive Bilinearform, d. h. es sei  $a(u, u) > 0$  für alle  $u \in V, u \neq 0$ . Ferner sei  $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional. Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \ell, v \rangle$$

nimmt in  $V$  ihr Minimum genau dann bei  $u$  an, wenn

$$a(u, v) = \langle \ell, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

*Beweis.* Siehe [Braess, 2007, Satz 2.2]. □

**Definition A.2.** [Werner, 2007, Abschnitt III.5] Seien  $X, Y$  normierte Räume,  $U \subset X$  offen und  $f : U \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Die Funktion  $f$  heißt Fréchet-differenzierbar bei  $x_0 \in U$ , falls ein stetiger linearer Operator  $T \in L(X, Y)$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = Tv \quad \forall v \in X \quad (\text{A.1})$$

existiert, so dass (A.1) gleichmäßig konvergiert bzgl.  $v \in B_X$ .

**Satz A.4** (Satz von Lax-Milgram). Sei  $V$  eine abgeschlossene, konvexe Menge in einem Hilbertraum  $H$  und  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} \exists C > 0 \text{ mit } |a(u, v)| &\leq C \|u\|_H \|v\|_H & \forall u, v \in H, \\ a(u, v) &= a(v, u) & \forall u, v \in H, \\ \exists \alpha > 0 \text{ mit } |a(v, v)| &\geq \alpha \|v\|_H^2 & \forall v \in H. \end{aligned}$$

Für jedes  $\ell \in H'$  hat das Variationsproblem

$$\min_{v \in V} J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \ell, v \rangle$$

genau eine Lösung.

*Beweis.* Siehe [Braess, 2007, Satz 2.5]. □

**Satz A.5** (Gaußscher Integralsatz). Es sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand  $\Gamma = \partial V$ , der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normaleneinheitsfeld  $n$ . Ferner sei das Vektorfeld  $F$  stetig differenzierbar auf einer offenen Menge  $U$  mit  $V \subseteq U$ . Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} F \, d^{(n)}V = \int_S F \cdot n \, d^{(n-1)}\Gamma.$$

*Beweis.* Siehe [Forster, 2012, §15, Satz 3]. □

**Definition A.3** (KKT-Bedingungen). Sei  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Es existieren Lagrange-Multiplikatoren  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$  mit

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\bar{\lambda} + \nabla h(\bar{x})\bar{\mu} = 0 \quad (\text{Multiplikatorregel}) \quad (\text{A.2})$$

$$h(\bar{x}) = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\lambda} \geq 0, \quad g(\bar{x}) \leq 0, \quad \bar{\lambda}^T g(\bar{x}) = 0 \quad (\text{Komplementaritätsbedingung}) \quad (\text{A.4})$$

Nach [Ulbrich u. Ulbrich, 2011, Satz 16.14].

---

## Literaturverzeichnis

---

- [Alberty u. a. 2002] ALBERTY, Jochen ; CARSTENSEN, Carsten ; FUNKEN, Stefan A. ; KLOSE, Roland: Matlab Implementation of Finite Element Method in Elasticity. (2002)
- [Braess 2007] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer Verlag, 2007
- [Brenner u. Scott 2007] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer Verlag, 2007
- [Conn u. a. 2000] CONN, Andrew ; GOULD, Nicholas ; TOINT, Philippe: *Trust-region-methods*. Siam, 2000
- [Forster 2008a] FORSTER, Otto: *Analysis 1*. Vieweg+Teubner, 2008
- [Forster 2008b] FORSTER, Otto: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner, 2008
- [Forster 2012] FORSTER, Otto: *Analysis 3*. Vieweg+Teubner, 2012
- [Haslinger u. Mäkinen 2003] HASLINGER, Jaroslav ; MÄKINEN, Raino A. E.: *Introduction to Shape Optimization*. SIAM, 2003
- [Hess 2010] HESS, Wolfgang: *Geometry Optimization with PDE Constraints and Applications to the Design of Branched Sheet Metal Products*. Verlag Dr. Hut, 2010
- [Hinze u. a. 2009] HINZE, Michael ; PINNAU, Rene ; ULBRICH, Michael ; ULBRICH, Stefan: *Optimization with PDE Constraints*. Springer Verlag, 2009
- [Larsson u. Thomée 2005] LARSSON, Stig ; THOMÉE, Vida: *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden*. Springer Verlag, 2005
- [Schramm u. Zowe 1992] SCHRAMM, Helga ; ZOWE, Jochem: A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results. (1992)
- [Schwarz 1991] SCHWARZ, Hans R.: *Methode der finiten Elemente*. B.G. Teubner, 1991
- [Ulbrich u. Ulbrich 2011] ULBRICH, Michael ; ULBRICH, Stefan: *Nichtlineare Optimierung*. Birkhäuser Verlag, 2011
- [Ulbrich u. a. 2013] ULBRICH, Michael ; ULBRICH, Stefan ; KOLLER, Daniela: *A Multigrid Semismooth Newton Method for Contact Problems in Linear Elasticity*. 2013
- [Ulbrich 2009] ULBRICH, Stefan: *Vorlesungsskript WS: Nichtglatte Optimierung und Anwendungen*. 2009
- [Werner 2007] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 2007
- [Wohlmuth u. Krause 2003] WOHLMUTH, Barbara I. ; KRAUSE, Rolf H.: Monotone Multigrid Methods on nonmatching Grids for nonlinear Multibody Contact Problems. (2003)