



Was können wir mit Mathematik über Pandemien lernen?



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

Das SIR Modell - Senkung der Infektionskurve

Mithilfe von Differentialgleichungen lassen sich verschiedenste Vorgänge modellieren. Wir betrachten ein System, mit dem der Verlauf von Pandemien qualitativ beschrieben werden kann: Das SIR-Modell, auch Kermack-McKendrick-Modell genannt.

Die Bevölkerung wird dazu in drei Gruppen eingeteilt: **Anfällige (Susceptible)**, **Infizierte (Infected)** und **Entfernte (Removed)**. Wir betrachten die Anzahl an Individuen in jeder Gruppe (S , I und R) und beschreiben mit Gleichungen, wie sich deren Größe im Laufe der Zeit ändert.

Können Sie Eindämmungsmaßnahmen finden, um die Infektionskurve möglichst flach zu halten?

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\beta}{N}SI \\ I' &= \frac{\beta}{N}SI - \frac{1}{\delta}I \\ R' &= \frac{1}{\delta}I \end{aligned}$$

Die Parameter

- Die **Gesamtbevölkerung** $N = S + I + R$ ist konstant.
- Die **Ansteckungsrate** β gibt die Anzahl der Kontakte einer **infizierten Person** pro Zeiteinheit an, die zu einer Infektion führen.
- Die **Genesungsdauer** δ gibt an, wie lange ein Individuum in der **Gruppe der Infizierten** I bleibt.

Die Gleichungen beschreiben, wie sich **anfällige Personen** anstecken und zur **Gruppe der Infizierten** wechseln, und wie **infizierte Personen** zur Gruppe der **Entfernten** wechseln.

Modellierung von Eindämmungsmaßnahmen

Wir können Eindämmungsmaßnahmen in das Modell einbauen, z.B. indem wir die Ansteckungsrate β verändern. Zum Beispiel kann β als Funktion von der Zeit aufgefasst werden, deren Wert in einem gewissen Zeitintervall niedriger ist:



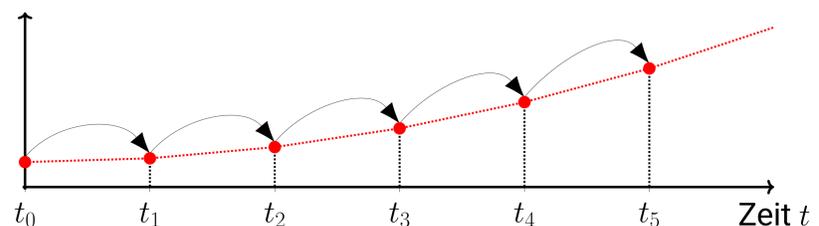
Einschränkungen des Modells

Das Modell macht viele Vereinfachungen: Es wird unter anderem angenommen, dass alle Individuen sich gleich verhalten, es keine Immunitäten und Impfungen gibt und man nur einmal erkranken kann. Auch die gesellschaftlichen Kosten der Maßnahmen werden nicht betrachtet.

Allgemein können Modelle nur solche Effekte beschreiben, deren wichtigste Ursachen Bestandteil des Modells sind. Experten arbeiten mit komplexeren Modellen, die genauere Aussagen erlauben und zum Beispiel verschiedene Bevölkerungsgruppen mit einbeziehen. Das Grundprinzip ist aber ähnlich.

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen: Teil 1

Es ist oft schwer oder sogar unmöglich, Lösungen einer Differentialgleichung explizit zu bestimmen. Stattdessen kann man mithilfe numerischer Verfahren Näherungslösungen erhalten. Zunächst wählt man gewisse Zeitpunkte t_0, t_1, t_2, \dots : Man möchte nur zu diesen Zeitpunkten eine angenäherte Lösung erhalten.



Ausgehend von einem Startwert werden an den Zeitpunkten nacheinander neue Lösungsnäherungen berechnet.

