



Was können wir mit Mathematik über Populationsdynamik lernen?



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

Räuber-Beute-Modelle - Warum sterben Beutetiere durch Fressfeinde nicht aus?

In der Natur beeinflussen sich verschiedene Spezies oft gegenseitig. Ein einfaches Modell beschreibt zwei Populationen, **Raub-** und **Beutetiere**, wie zum Beispiel Füchse und Hasen. Hier kann man interessante Dynamiken betrachten: Gibt es zu wenige **Beutetiere**, schrumpft die **Raubtierpopulation**. Gibt es viele **Räuber**, werden viele **Beutetiere** gefressen. Mit einfachen Modellen, wie den *Lotka-Volterra-Gleichungen*, lässt sich dies beschreiben.

- Sind die Populationsgrößen stabil?
- Welchen Einfluss hat die Startpopulation?
- Was verändert sich, wenn die Beutetierpopulation nur bis zu einer natürlichen Grenze wachsen kann?

Ein einfaches Modell

Die Parameter

- r Reproduktionsrate der **Beutetiere**.
- b Bildet eine natürliche Schwelle, die **Beutetierpopulation** wird $\frac{r}{b}$ nie überschreiten.
- k Jagdrate der **Raubtiere**, also wie oft ein **Raubtier** ein **Beutetier** erlegt.
- m Natürliche Sterberate der **Raubtiere**.
- e Effektivität, die angibt, wie stark der Verzehr von **Beutetieren** die Population der **Raubtiere** anwachsen lässt.

$$\begin{aligned} B' &= rB - bB^2 - kBR \\ R' &= -mR + keBR \end{aligned}$$

Der Term $rB - bB^2$ beschreibt also die ungestörte Dynamik der **Beutetierpopulation**, $-mR$ das Schrumpfen der **Raubtierpopulation**. Die Jagdterme $-kBR$ und $keBR$ beschreiben die Abhängigkeiten der beiden Populationsgrößen voneinander.

Jagd - Nachhaltige Gewinnmaximierung?

Das Modell lässt sich erweitern, zum Beispiel durch die Jagd durch den Menschen. Hier gehen wir nicht von einer Änderung der Populationsgröße des Menschen aus, aber man kann den **erwirtschafteten Gewinn** modellieren.

- Wie beeinflusst die Jagd die Populationsgröße von Raub- und Beutetieren?
- Ist nachhaltige und gewinnorientierte Jagd möglich?
- Macht es einen Unterschied, welche Spezies gejagt wird?

Ein erweitertes Modell

$$\begin{aligned} B' &= rB - bB^2 - kBR - fc_BB \\ R' &= -mR + keBR - fc_RR \\ G' &= pf c_B B + pf c_R R - c_B - c_R \end{aligned}$$

- f Jagdrate durch den Mensch.
- c_R Fangaktivität bei Jagd auf Raubtiere.
- c_B Fangaktivität bei Jagd auf Beutetiere.
- p Gewinn pro erlegtem Tier.

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen: Teil 2

Statt ein Anfangswertproblem (bei der die Funktion u gesucht wird)

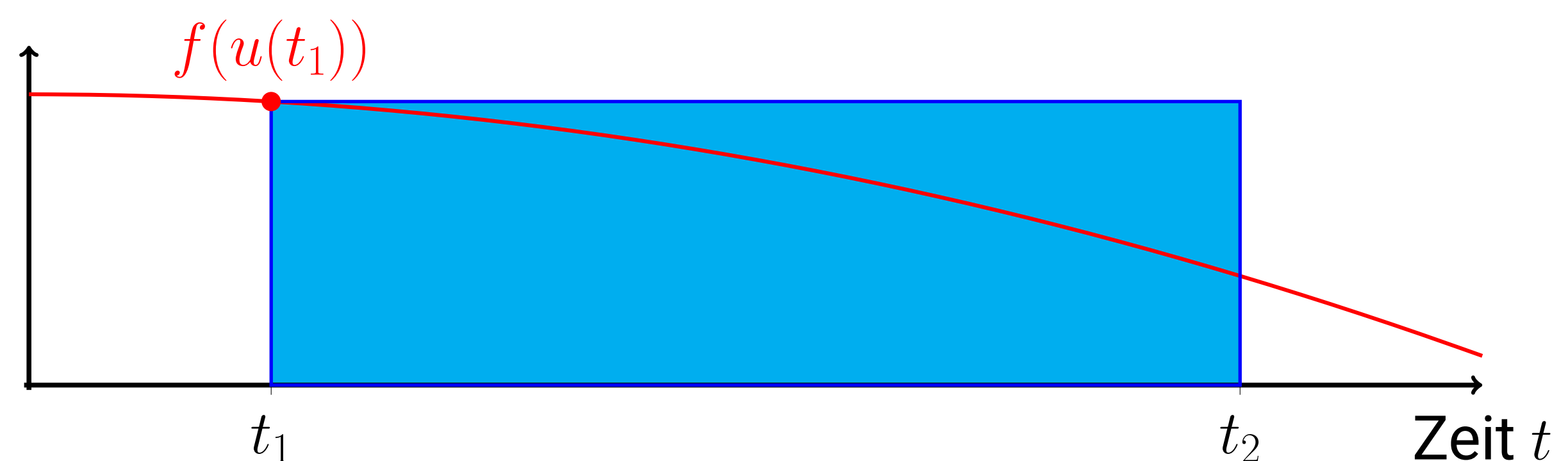
$$u'(t) = f(u(t))$$

direkt zu lösen, integriert man die Gleichung zunächst und erhält

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(u(s)) ds.$$

Wir wollen das Integral näherungsweise berechnen. Hier sind verschiedene Methoden bekannt, z.B. kann es mithilfe eines Rechtecks approximiert werden:

$$u(t_2) \approx u(t_1) + (t_2 - t_1) \cdot f(u(t_1)).$$



So können nacheinander Approximationen von $u(t_1)$, $u(t_2)$, $u(t_3)$, ... bestimmt werden. Dieses Verfahren wird *Eulersches Polygonzugverfahren* genannt und ist seit 1768 bekannt.



Die lange Nacht der Mathematik



Link zu diesem Poster