



# Gemeinsam schnell: Gleichungssysteme lösen mit dem Jacobi-Verfahren



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

## Lange Nacht der Mathematik 2025

### Landvermessung von Gauß

Als Carl Friedrich Gauß 1820 vom König Hannovers mit der Landesvermessung beauftragt wurde, hatte er einige Herausforderungen zu bewältigen.

Zur Bestimmung des Flächeninhalts unterteilte er das Königreich in Dreiecke, deren Flächeninhalte er addierte (siehe Abb. 1). Um die Auswirkungen von Messfehlern zu verringern, erhob er mehr Datenpunkte als nötig und führte eine Ausgleichsrechnung durch. Dabei traten sehr große lineare Gleichungssysteme auf, die er kaum mit dem Eliminationsverfahren lösen konnte.

- Die Rechenschritte des Eliminationsverfahrens lassen sich nicht verteilen und unabhängig ausführen.
- Rechenfehler machten das Ergebnis hinfällig.

Dabei genügte ihm eine hinreichend genaue Näherungslösung.

Abstrakt gesehen brauchte Gauß ein Verfahren, das näherungsweise die Lösung  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eines linearen Gleichungssystems (LGS) mit  $n$  Gleichungen

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \quad (1)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \quad (2)$$

⋮

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \quad (n)$$

bestimmt. Dabei war  $n$  sehr groß und abhängig von der Anzahl der Messpunkte.

### Ein Beispiel für die Durchführung

Gesucht sind  $x_1, x_2$  und  $x_3$  derart, dass

$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 1,$$

$$1x_1 - 4x_2 + 1x_3 = 4,$$

$$0x_1 - 1x_2 + 2x_3 = -1.$$

Die Rechnungen werden an die Personen A, B und C verteilt. Siehe Abbildung 2 für den zeitlichen Verlauf.

### Das Jacobi-Verfahren

Als Ausweg verwendete Gauß das Jacobi-Verfahren: Ein Iterationsverfahren. Anstatt der exakten Lösung werden Näherungslösungen berechnet, die schrittweise verbessert werden. Außerdem teilte Gauß die Rechnungen unter seinen Studierenden auf.

Insgesamt ging Gauß wie folgt vor:

1. Jeder Studierende bekam genau *eine* Gleichung und *eine* Variable zugewiesen. Sie stellten ihre Gleichung nach ihrer Variable um.
2. Die erste Näherungslösung stand an der Tafel.
3. Die Studierenden führten nun gleichzeitig und unabhängig voneinander die folgenden Schritte aus:
  - a) Sie schrieben die aktuellen Variablenwerte von der Tafel ab.
  - b) Sie setzten die Variablenwerte in ihre umgestellte Gleichung ein und erhielten eine neue Näherung ihrer Variable.
  - c) Sie ersetzten den Wert ihrer Variable an der Tafel mit der neuen Näherung.

### Funktioniert das für jedes LGS?

Kurze Antwort: Nein. Es funktioniert beispielsweise für strikt *diagonal dominante* lineare Gleichungssysteme. Das sind Systeme, für die in jeder Zeile der Betrag des Diagonaleintrags  $a_{i,i}$  größer ist, als die Summe der Beträge der restlichen Einträge.

### Was passiert bei Rechenfehlern?

Das ist nicht schlimm. Das Jacobi-Verfahren ist als Iterationsverfahren unempfindlich gegenüber Rechenfehlern. Spätere Iterationsschritte gleichen diese wieder aus. Dies trifft auf das Eliminationsverfahren nicht zu.



Abb. 1: Zehnmarkschein mit der Aufteilung des Königreichs Hannover in Dreiecke durch Gauß.

### Jacobi-Verfahren heute

Damals wie heute werden Iterationsverfahren aus ähnlichen Gründen verwendet, um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Diese treten unter anderem in der angewandten Statistik oder bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen auf. In diesen Fällen sind mehr als  $10^6$  Gleichungen keine Seltenheit.

Heute rechnen keine Studierenden mehr, sondern Computer. Das Verfahren wird vom Smartphone bis zum Hochleistungsrechner eingesetzt und die Rechnungen werden über Prozessorkerne, Prozessoren oder sogar Rechner verteilt. Dabei werden nicht nur die Rechnungen parallelisiert, sondern auch die benötigten Daten verteilt. Das Jacobi-Verfahren ist dafür ein Musterbeispiel.

“Ich empfehle Ihnen diesen Modus zur Nachahmung. Schwerlich werden Sie je wieder direct eliminieren, wenigstens nicht, wenn Sie mehr als zwei Unbekannte haben. Das indirecte Verfahren lässt sich halb im Schlafe ausführen, oder man kann während desselben an andere Dinge denken.”

Zitat 1: Resümee von Gauß in einem Brief von 1823.

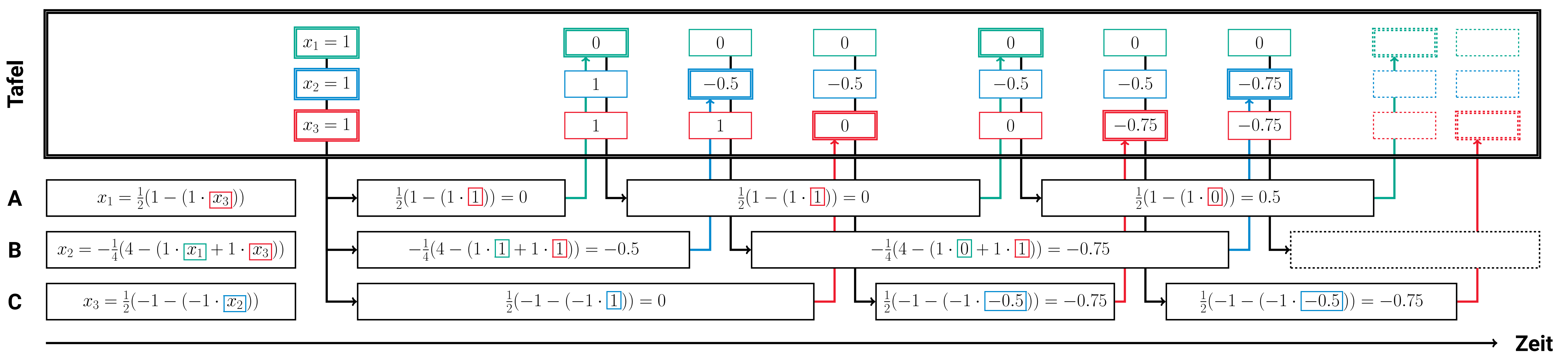


Abb. 2: Zeitlicher Verlauf der ersten Schritte des Jacobi-Verfahrens für das oben genannte Beispiel mit folgender Zuweisung: Person A bekommt Gleichung 1 und Variable  $x_1$  zugewiesen, Person B Gleichung 2 und Variable  $x_2$  und Person C Gleichung 3 und Variable  $x_3$ .



Die lange Nacht  
der Mathematik



Link zu diesem  
Poster