Das Doppelpendel: Simulation von Chaos

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Berechenbar und trotzdem nicht vorherzusagen

In der Umgangssprache bedeutet „Chaos“ Unordnung oder Regellosigkeit. In der Mathematik untersucht die Chaostheorie, wie manche Systeme mit deterministischen Regeln scheinbar zufälliges oder eben „chaotisches“ Verhalten zeigen: Wir können zwar genau berechnen, wie sich ein bestimmter Zustand in der Zukunft entwickeln wird. Jedoch kann die kleinste Abweichung von diesem Startzustand zu Veränderungen führen, die nicht vorherzusagen sind, ohne alle Berechnungen nochmals durchzuführen. Der Mathematiker und Meteorologe Edward Lorenz, einer der Begründer der Chaostheorie, drückte das so aus:

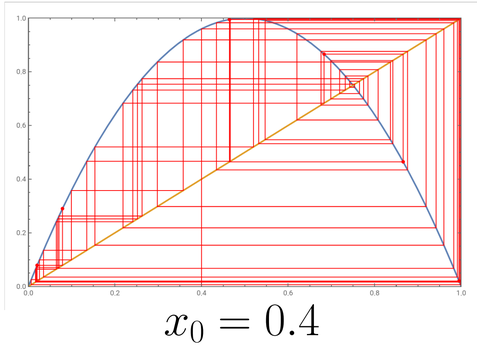
> “Chaos: When the present determines the future
> but the approximate present does not approximately determine the future.” [1]

Die logistische Abbildung

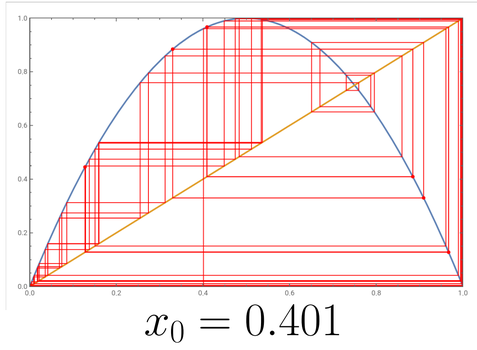
Ein Beispiel für chaotisches Verhalten ist die simpel anmutende logistische Abbildung

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

In den Spinnwebdiagrammen sind 50 Iterationen dieser Abbildungsvorschrift visualisiert. Ein kleiner Unterschied im Startwert führt zu substantiell unterschiedlichen Bildern. Bei noch mehr Iterationen wären die Diagramme bald mit roten Linien ausgefüllt, denn von fast allen Startwerten im Intervall $[0, 1]$ kommt man jedem anderen Wert darin irgendwann beliebig nahe.



$x_0 = 0.4$



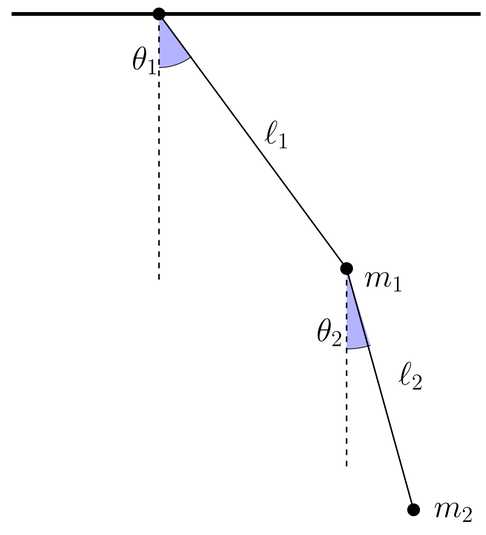
$x_0 = 0.401$

Das Doppelpendel - ein chaotisches Experiment

Wir modellieren das Doppelpendel als zwei masselose Stäbe mit Punktmassen an ihren Enden, die sich ohne Reibung in einer vertikalen Ebene bewegen. Mit jeweils gleichen Längen und Massen und geeignet gewählten Zeiteinheiten erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die Winkel und ihre Zeitableitungen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\theta_2 - \theta_1) \\ -\cos(\theta_2 - \theta_1) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ -\sin\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix}$$

Wir können keine exakte Lösung dieser Gleichungen bestimmen. Daher wird das System in unserer Simulation näherungsweise, also numerisch, gelöst. Abhängig von den Startbedingungen zeigt sich dabei unterschiedliches Verhalten:
Startet man mit geringer Energie (kleine Winkel und Winkelgeschwindigkeiten), dann ergibt sich eine gleichmäßige, periodische Pendelbewegung. Bei großer Energie (große Winkelgeschwindigkeiten) rotieren die Pendel; ebenfalls in einer periodischen Bewegung.
Dazwischen ist die Bewegung chaotisch: Es gibt kein sich periodisch wiederholendes Verhalten. Die Pendel nehmen im Laufe der Zeit alle mit ihrer Energie möglichen Positionen und Geschwindigkeiten an, und kleine Veränderungen der Startposition führen zu völlig verschiedenen Trajektorien!



Modellierung des Doppelpendels

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Statt ein Anfangswertproblem (bei dem die Funktion u gesucht wird)

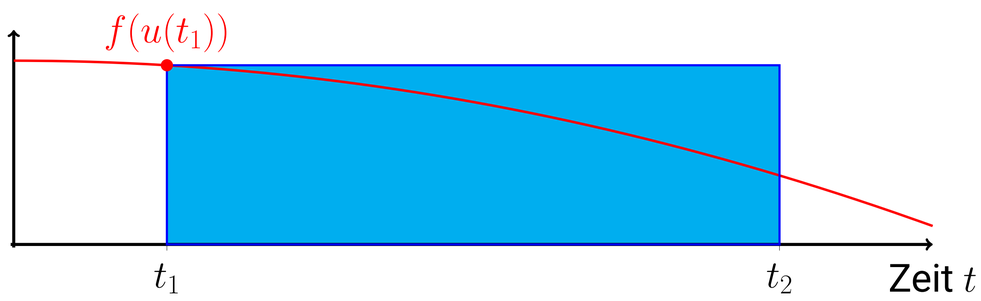
$$\dot{u}(t) = f(u(t))$$

direkt zu lösen, integriert man die Gleichung zunächst und erhält

$$u(t_2) - u(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(u(s))\, ds.$$

Wir wollen das Integral näherungsweise berechnen. Hier sind verschiedene Methoden bekannt, z.B. kann es mithilfe eines Rechtecks approximiert werden:

$$u(t_2) \approx u(t_1) + (t_2 - t_1) \cdot f(u(t_1)).$$



So können nacheinander Approximationen von $u(t_1),\ u(t_2),\ u(t_3),\ \ldots$ bestimmt werden. Dieses Verfahren wird *Eulersches Polygonzugverfahren* genannt und ist seit 1768 bekannt. Moderne Verfahren sind viel komplizierter, um die Genauigkeit zu verbessern und Probleme wie wachsende Energie zu vermeiden.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

[1] C.M. Danforth. “Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall” Mathematics of Planet Earth (2013)
[2] M. Kiehl. “Einführung in die Mathematische Modellierung” Skript, TU Darmstadt (2021)
[3] A. Ohlhoff, P. H. Richter. “Forces in the Double Pendulum” Z. angew. Math. Mech. (2006)
[4] K. Reiss. “Cobweb Diagram of the Logistic Map” Wolfram Demonstrations Project (2021)

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster

Demonstration der log. Abb.