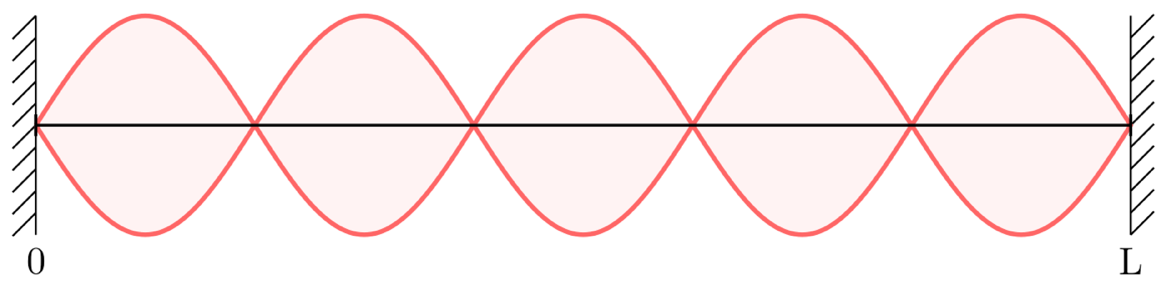
Klänge sichtbar machen: Experimentell & Simuliert

Die lange Nacht der Mathematik 2023

AG Numerik und Wissenschaftliches Rechnen
Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt

Stehende Wellen in 1D

Auf einem schwingenden Seil oder einer Gitarrensaite können Bereiche entstehen, in denen keine Auslenkung auftritt, die sogenannten Schwingungsknoten, und Bereiche, in denen eine starke Auslenkung auftritt. Dies entsteht durch die Überlagerung von nach links und nach rechts laufenden Wellen. Man spricht von einer stehenden Welle.



Mathematisch kann dies wie folgt beschrieben werden: Auf einem Intervall $[0, L]$ beschreibe die Funktion $u(x)$ die schwingende Saite. Wir nehmen an, dass sie eingespannt ist und wählen daher die Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(L) = 0$. Damit u eine stehende Welle modelliert, muss u die folgende Differentialgleichung für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen

$$u''(x) = \lambda u(x).$$

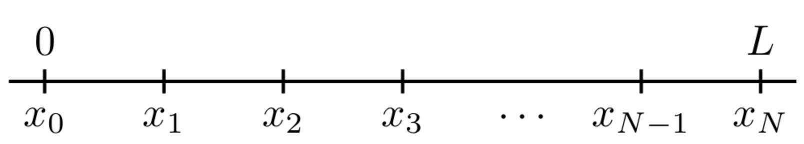
Die Lösung besteht aus der Funktion u und einem zugehörigen Parameter λ, dem sogenannten Eigenwert.

Können wir eine Lösung dieser Gleichung finden?

Idee: Verwende den Ansatz $u(x) = C \sin(kx)$ für ein $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$. Durch Ableiten und Einsetzen in die Gleichung sowie Verwenden der Randbedingungen folgt, dass für solche Lösungen $\lambda = -k^2$ und $k = \frac{\pi n}{L}$ für eine beliebige ganze Zahl n gelten muss.

Numerische Approximation

Viele Gleichungen von der Art wie $u''(x) = \lambda u(x)$ können nicht exakt gelöst werden. Daher wollen wir eine Lösung numerisch, d.h. mit dem Computer annähern. Dazu wird das Intervall $[0, L]$ in N gleich große Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge $h = \frac{L}{N}$ unterteilt. Dann suchen wir eine Näherung $u_i \approx u(x_i)$, die eine Approximation der obigen Gleichung löst.



Wir ersetzen die Ableitung $u''(x_i)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$, d.h., durch die Ableitung des quadratischen Polynoms durch die Punkte $(x_{i-1}, u(x_{i-1}))$, $(x_i, u(x_i))$, $(x_{i+1}, u(x_{i+1}))$. Damit erhalten wir folgende Gleichungen

$$\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

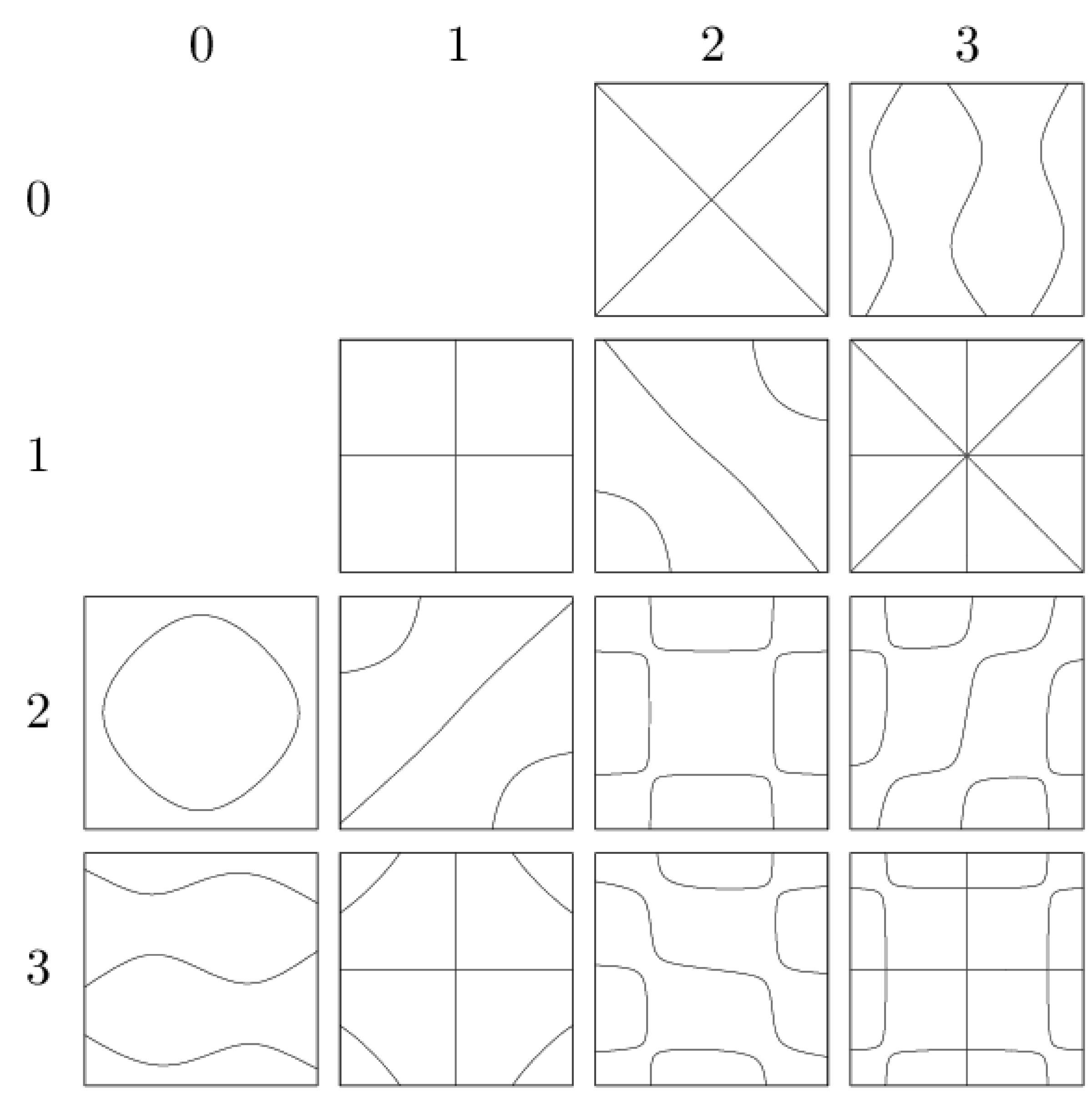
Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der u_i. Je mehr Teilintervalle gewählt werden, desto besser wird die Approximation und desto größer wird das Gleichungssystem.

Welche Muster entstehen in 2D?

Stehende Wellen können auch in zwei Dimensionen auftreten. Ein eindrucksvolles Beispiel sind die *Chladnischen Klangfiguren*, die 1787 von Ernst Chladni entdeckt wurden: Wird eine mit Sand bestreute dünne Platte in Schwingung versetzt, können verschiedene Muster entstehen (siehe Abbildung unten). Der Sand prallt von den stark schwingenden Bereichen ab und sammelt sich in schwach oder nicht schwingenden Bereichen. Im Gegensatz zur stehenden Welle in 1D sind dies keine einzelnen Punkte, sondern Knotenlinien, die im Experiment als Muster zu sehen sind.

Könnt ihr die beiden Muster $(0, 2)$ und $(3, 3)$ in der Abbildung auch im Experiment auf der Platte erkennen?

Hinweis: Eine Lösung u ist immer einem passendem Eigenwert λ zugeordnet, d.h., die untenstehenden Muster können nur dann auftreten, wenn die passende Frequenz, d.h., die richtige Tonhöhe, eingestellt ist.



Mathematische Modellierung in 2D

Die Schwingung einer quadratischen Platte $(-1, 1) \times (-1, 1)$ kann vereinfacht durch die folgende Gleichung für die Auslenkung $u(x, y)$ beschrieben werden

$$\Delta^2 u := u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = \lambda u.$$

Hierbei ist u_x die Ableitung von u nach x, d.h., y wird als fester Parameter behandelt und nicht verändert. Die Gleichung wird durch passende Randbedingungen ergänzt und es sind wieder Lösungspaare (u, λ) bestehend aus einer Funktion u und dem zugehörigen Eigenwert λ gesucht. Die numerische Approximation kann nach einem ähnlichen Prinzip wie in 1D bestimmt werden.

W. Demtröder. "Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme" (2021), Kap. 11.
M. J. Gander and F. Kwok. "Chladni Figures and the Tacoma Bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates" (2012).
M. J. Gander and G. Wanner. "From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing" (2012).

Die lange Nacht der Mathematik

Link zu diesem Poster