# Knifflige Knobelaufgaben zur Mathematik – Lösung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

*Fachbereich* **Mathematik**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | G | 2 | 7 |

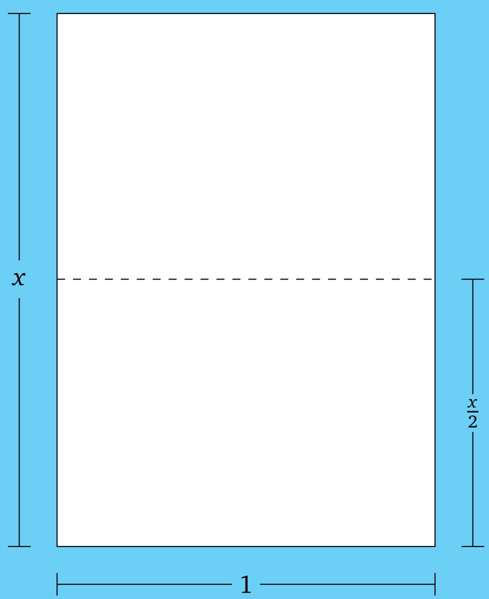
Auf dem Tisch liegen vier Karten. Bei jeder Karte steht auf der einen Seite ein Buchstabe und auf der anderen Seite eine Zahl. Wir wollen fordern, dass bei jeder Karte, bei der der Buchstabe ein Vokal ist, auf der anderen Seite eine gerade Zahl steht.
Welche Karten müssen Sie umdrehen, um zu prüfen, ob die Forderung eingehalten wurde?

**Lösungshinweise:**
Um die Lösung dieser Aufgabe ein wenig intuitiver zu gestalten, schreiben wir die Karten um.
Die Karten sollen nun eine Person beschreiben, die ein Getränk bestellt. Hierbei ersetzen wir die Buchstaben durch das entsprechende Getränk und interpretieren die Zahl als das Alter der Person. Nun fordern wir, dass jede Person, die ein alkoholisches Getränk bestellt, über 18 sein muss. Dazu legen wir folgende Karten auf den Tisch:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Vodka | Wasser | 21 | 12 |

Hierbei müssen die Karte mit dem Getränk „Vodka“ und die Karte mit dem Alter „12“ umgedreht werden. Erstere drehen wir um, weil wir prüfen wollen, dass die bestellende Person nicht minderjährig war. Zweitere drehen wir um, weil wir prüfen wollen, ob die minderjährige Person Alkohol bestellt hat. Die verbleibenden Karten brauchen wir nicht zu prüfen, da unabhängig der Rückseite die Forderung nicht verletzt werden kann.
Diese Aufgabe zeigt ein anschauliches Beispiel für eine Beweisform, die sich Kontraposition nennt. Um zu kontrollieren, ob eine Person mit alkoholischem Getränk über 18 ist, überprüfen wir ob die Umkehrung der Aussage nicht eingehalten wurde; in unserem Fall also, dass eine minderjährige Person keinen Alkohol trinkt.

Bei der Größe von Papier ist das Längenverhältnis der Seitenkanten von großer Relevanz. So ist beispielsweise das Seitenverhältnis von DIN A4-Papier (also auch so eines, wie das, auf dem diese Aufgabe steht) so ausgelegt, dass das Längenverhältnis zwischen der kürzeren und längeren Kante erhalten bleibt, wenn man das Papier der Länge nach in der Mitte faltet.




a) Angenommen, die kürzere Seite eines DIN A4-Blattes ist $1LE$ lang. Sei $x$ die Länge der längeren Seite. Wie muss $x$ gewählt werden, damit das Blatt ein DIN A4-Blatt ist?
(Zur Kontrolle: $x = \sqrt{2}$)

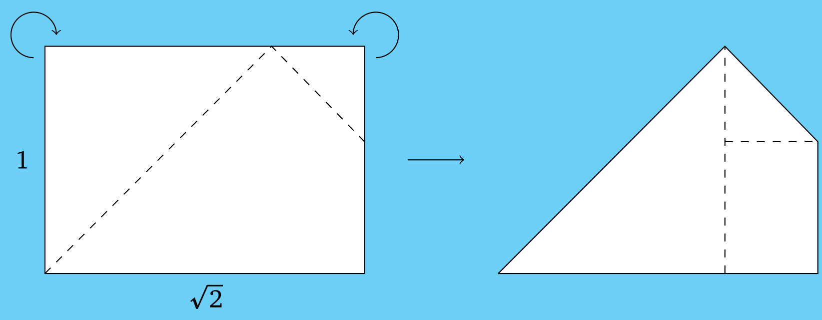
**Lösungshinweise:**

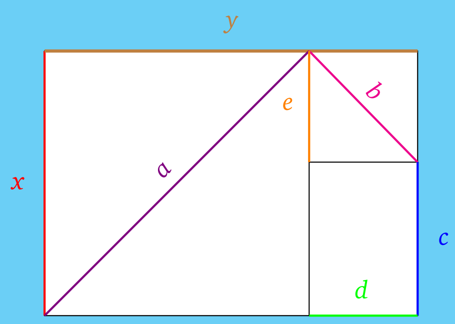
Wir setzen die Längenverhältnisse des ganzen und des halben Blattes gleich:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{1}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$. Da es keine negativen Längen gibt, lautet die Lösung $x = \sqrt{2}$.

b) Bei einem DIN A4-Papier wurden zwei Ecken um 45° wie im Bild abgeknickt. Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur, wenn die kürzere Seite des A4-Papiers $1LE$ lang ist?



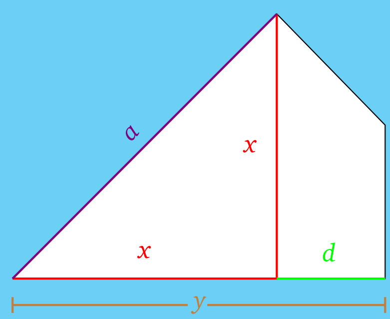




**Lösungshinweise**
Zuerst beschriften wir wichtige Seiten und Längen, damit wir sie verständlicher beschreiben können. Wir ermitteln nun die Längen in mehreren Schritten.

1. Mit der Beschriftung in der Aufgabenstellung können wir direkt schließen, dass $x = 1$ und $y = \sqrt{2}$ ist.

2. Da wir um 45° abgeknickt haben, erhalten wir ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge $x$ und Hypotenuse der Länge $a$. Nach dem Satz des Pythagoras ist
$$a = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^21} = \sqrt{2}$$
.

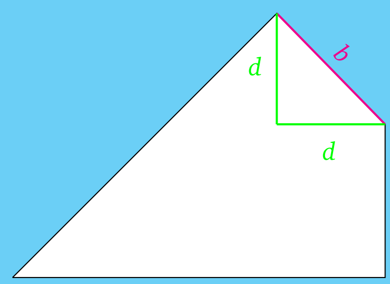
2. & 3. Schritt:




3. Wie wir im 2. Schritt gesehen haben, ist $x$ die Länge von der unteren linken Ecke bis zur umgeschlagenen Kante. Entsprechend ergibt sich $x + d = y$, also $d = \sqrt{2} - 1$.

4. Wie auch in Schritt 2 erhalten wir beim Abknicken der kleineren Ecke ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck, also ist $e = d$ und das Dreieck hat Katheten der Länge $d$ und Hypotenuse der Länge $b$. Wir erhalten also
$$b = \sqrt{d^2 + d^2} = \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}d = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$
.

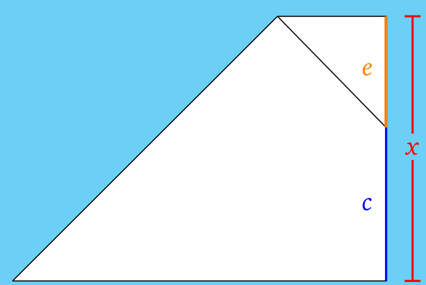
4. Schritt:

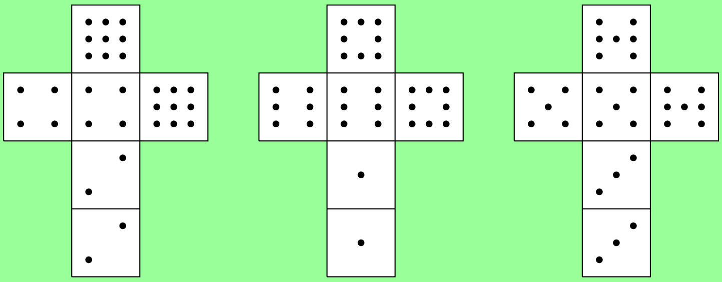



5. Zuletzt wollen wir die Länge $c$ bestimmen. Es gilt $c + e = x$, also ist
$$c = x - e = x - d = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$
.

Für den Umfang erhalten wir also
$$\begin{aligned} u &= a + b + c + y \\ &= \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

5. Schritt:

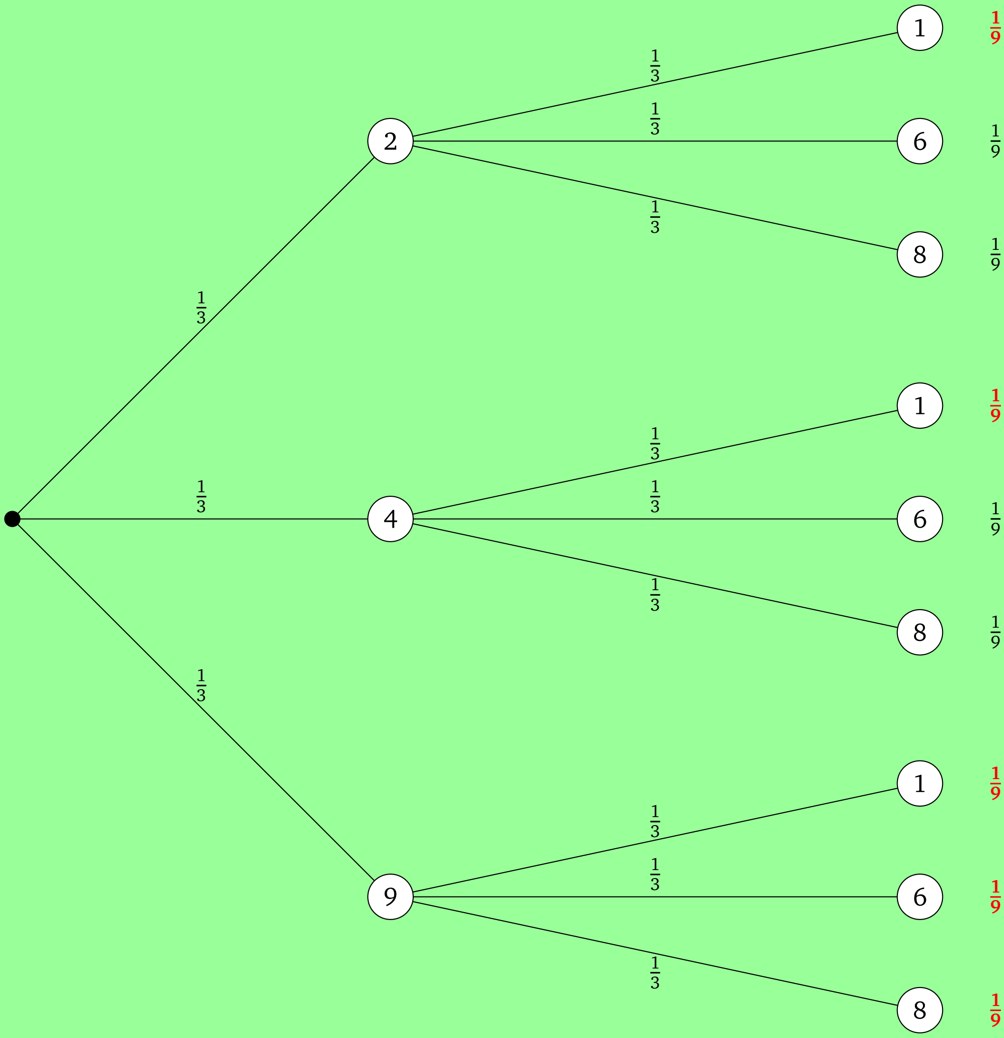




$W_1$ $W_2$ $W_3$

Links sind die Abwicklungen von drei Würfeln dargestellt. Zwei Spieler wählen je einen Würfel und werfen die beiden gegeneinander. Der Spieler, bei dessen Würfel die Augenzahl der nach oben zeigenden Seite höher ist, gewinnt.

**Lösungshinweise:** Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten, indem wir einen Wahrscheinlichkeitsbaum zeichnen. Als Beispiel ist hier der Baum für $W_1$ gegen $W_2$ aufgeführt. Rote Zahlen gehören zu den Pfaden, in denen $W_1$ gewinnt.




Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(„W_1 \text{ gewinnt gegen } W_2“) = \mathbb{P}(„W_2 \text{ gewinnt gegen } W_3“) = \mathbb{P}(„W_3 \text{ gewinnt gegen } W_1“) = \frac{5}{9}.$$

Bei diesen Würfeln handelt es sich um sogenannte „Intransitive Würfel“. Ihre besondere Eigenschaft ist, dass jeder Würfel im Schnitt gegen einen Würfel verliert und einen Anderen schlägt. Dieses Verhalten zeigt, dass nicht alle Dinge sortiertbar sind. Ein weiteres Beispiel dafür ist das Spiel „Schnick-Schnack-Schnuck“ (auch bekannt unter dem Titel „Schere-Stein-Papier“).

Ein Witz unter Mathematikern lautet:

> Drei Mathematiker gehen in eine Bar. Der Wirt fragt: „Für jeden ein Bier?“ Der erste Mathematiker entgegnet: „Weiß nicht.“ Der zweite Mathematiker sagt ebenfalls: „Weiß nicht.“ Darauf antwortet der dritte Mathematiker: „Ja, bitte!“

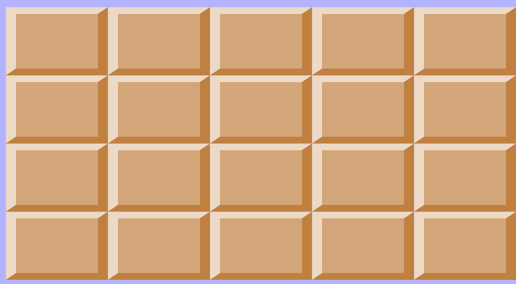
Wie kommen diese Antworten zustande?
**Lösungshinweise:**
Bei diesem Witz handelt es sich um eine logische Fragestellung. Aus der Aussage des dritten Mathematikers können wir schließen, dass jeder ein Bier möchte.
Betrachten wir den Zeitpunkt der ersten Antwort, so weiß der erste Mathematiker, dass er zwar selbst ein Bier bestellen möchte, jedoch weiß er (noch) nicht, wie es um seine Kollegen steht. Mit einem „Ja“ würde er nämlich behaupten, dass seine Kollegen ebenfalls ein Bier wollen. Deswegen sagt er: „Weiß nicht.“
Nun betrachten wir den Zeitpunkt der zweiten Antwort. Durch die Antwort des ersten Mathematikers weiß der Zweite, dass dieser ein Bier bestellen möchte. Hätte der erste Mathematiker nämlich keines gewollt, so hätte er mit „Nein“ geantwortet. Da der zweite Mathematiker ebenfalls ein Bier bestellen möchte aber selbst auch (noch) nicht weiß, wie es um den dritten Mathematiker steht, antwortet er ebenfalls mit „Weiß nicht.“
Zum Zeitpunkt der letzten Antwort versetzen wir uns in die Lage des dritten Mathematikers. Da keiner seiner beiden Kollegen mit „Nein“ geantwortet hat, kann er daraus schließen, dass beide ein Bier bestellen möchten. Da er ebenfalls gerne ein Bier hätte und nun auch die Bestellwünsche aller Beteiligten kennt, kann er korrekterweise mit „Ja, bitte!“ antworten.

Eine Mathematikerin ist bei einem alten Bekannten aus ihrer Schulzeit zu Besuch. Irgendwann kommen sie auf das Gesprächsthema Familie und als die Mathematikerin fragt, wie alt denn die drei Töchter des Bekannten seien, meint dieser, dass die Summe ihrer Alter seine Hausnummer ergeben und dass das Produkt ihrer Alter 72 betrage.
Die Mathematikerin überlegt und meint, dass diese Informationen nicht ausreichen. Darauf sagt der Bekannte: „Die Älteste von ihnen will auch mal Mathematik studieren.“ Das scheint Information genug zu sein, da die Mathematikerin sofort alle drei Alter ohne Fehler angeben kann.
Wie alt sind die Töchter des Bekannten?
**Lösungshinweise:**
Hierbei handelt es sich mehr um eine Knobelaufgabe. Wir ermitteln zuerst alle Zerlegungen von 72 in drei (positive, ganzzahlige) Faktoren:

$$\begin{array}{lll|ll}
72 & = 1\cdot 1\cdot 72 & (74) & = 2\cdot 2\cdot 18 & (22)\\
 & = 1\cdot 2\cdot 36 & (39) & = 2\cdot 3\cdot 12 & (17)\\
 & = 1\cdot 3\cdot 24 & (28) & = 2\cdot 4\cdot 9 & (15)\\
 & = 1\cdot 4\cdot 18 & (23) & = 2\cdot 6\cdot 6 & (14)\\
 & = 1\cdot 6\cdot 12 & (19) & = 3\cdot 3\cdot 8 & (14)\\
 & = 1\cdot 8\cdot 9 & (18) & = 3\cdot 4\cdot 6 & (13)
\end{array}$$

Als nächstes befassen wir uns mit der Hausnummer. Die Klammern hinter der Zerlegung beschreiben die Hausnummer, die der Bekannte haben müsste, wenn seine Kinder entsprechend alt wären. Da die Mathematikerin bei ihrem Kollegen zu Besuch ist, müsste ihr die Hausnummer bekannt sein. Durch den Umstand, dass sie meint, dass die Informationen nicht ausreichen, können wir schließen, dass die zugeordnete Altersverteilung nicht eindeutig sein kann. Es verbleiben also nur die zwei Möglichkeiten, in denen die Töchter entweder 2, 6 und 6 oder 3, 3 und 8 Jahre alt sind.
Durch die weitere Bemerkung können wir jedoch die genaue Verteilung bestimmen. Dadurch, dass es eine „älteste“ Tochter gibt, kann der erste Fall (2,6,6) nicht möglich sein (da es sonst „Eine meiner ältesten Töchter“ oder „Meine ältesten Töchter“ heißen müsste).
Die Lösung lautet also, dass die Töchter 3, 3 und 8 Jahre alt sind.

Auf dem Tisch befindet sich eine Tafel Schokolade, die aus $5 \times 4$ Kammern besteht. Die Tafel kann zwischen den Kammern horizontal oder vertikal entzwei gebrochen werden, wobei dadurch zwei Teilstücke entstehen.
Was ist die minimale Anzahl an Brüchen, die durchgeführt werden müssen, um die Schokolade in ihre 20 Kammern zu zerlegen?
Dabei dürfen bei einem Brechvorgang nicht mehrere Teilstücke auf einmal entzweigebrochen werden.



**Lösungshinweise:**
Die Anzahl der Brüche, die durchgeführt werden müssen, wird – unabhängig der Strategie – immer 19 sein.
Sobald ein Teilstück entzweigebrochen wird, entstehen daraus immer 2 Teilstücke, wodurch sich die Gesamtzahl der Teilstücke immer um 1 erhöht. Da durch das Brechen eine Anzahl von 20 Teilstücken erreicht werden soll, muss es also 19-mal erfolgen.
Dies lässt sich übrigens auch allgemeiner für eine beliebige Kammerzahl ausdrücken: Wenn die (intakte) Tafel $n$ Kammern hat, werden immer $n-1$ Brüche notwendig sein, um sie in ihre Einzelkammern zu zerlegen.