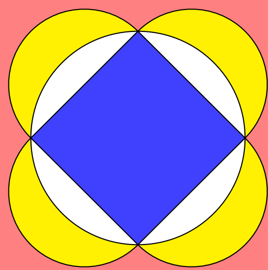
Knifflige Knobelaufgaben zur Mathematik

In vielen Ländern zählt die Zahl 7 als Glückszahl. Als überglücklich gilt eine natürliche Zahl $n \geq 2$, wenn ihre Quersumme mit 7 multipliziert wieder die Zahl n ergibt. Die berühmte 42 ist also überglücklich, denn die Quersumme von 42 ist 6 und $6 \cdot 7 = 42$.
Welche zweistelligen überglücklichen Zahlen gibt es noch?

Lösung: Sei $(xy)_{10}$ die (dezimale) Zifferdarstellung einer zweistelligen Zahl n (d.h. x ist die Zehnerziffer und y ist die Einerziffer). Dann ist also $n = 10x + y$. Die Quersumme von n ist $x + y$. Die Zahl n ist also überglücklich, wenn $7(x + y) = 10x + y$ gilt. Stellen wir diese Gleichung um, erhalten wir $x = 2y$. Da sowohl x eine Ziffer zwischen 1 und 9 sein muss, und y eine Ziffer zwischen 0 und 9 sein muss, ergeben sich nur die vier Lösungen 21, 42, 63 und 84.

Wir betrachten ein Quadrat der Seitenlänge 1 und setzen auf jede Seite des Quadrates einen Halbkreis auf. Nun zeichnen wir einen Kreis durch die vier Ecken des Quadrates und schraffieren die entstehenden Flächen wie in der Zeichnung.
Welchen Flächeninhalt haben die gelb schraffierten Mondsicheln?



Lösung: Die Aufgabe ist ein Spezialfall der sogenannten *Möndchen des Hippokrates*.
Um die Fläche der Mondsicheln zu bestimmen, stellen wir zuerst fest, dass wir die Gesamtfläche der Konstruktion auf zwei verschiedene Arten ausdrücken können: Entweder als Summe aus der Fläche der vier Halbkreise und des Quadrates, oder aus Summe der vier Mondsicheln und des Kreises. Damit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\text{Fläche der Mondsicheln} = \text{Fläche der Halbkreise} + \text{Fläche des Quadrates} - \text{Fläche des Kreises}.$$

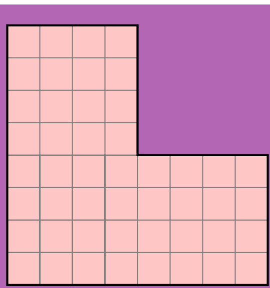
Die drei Flächen auf der rechten Seite der Gleichung können wir ausrechnen!
Zunächst ist die Fläche das Quadrates genau 1. Da sich die Fläche eines Kreises mit Radius r als $\pi \cdot r^2$ berechnet, und die vier Halbkreise Radius $1/2$ haben, haben die Halbkreise jeweils eine Fläche von $\frac{\pi \cdot (1/2)^2}{2} = \frac{\pi}{8}$. Zusammen haben die vier Halbkreise also eine Fläche von genau $\frac{\pi}{2}$.
Da die Diagonale des Quadrates eine Länge von $\sqrt{2}$ hat, hat der große Kreis einen Radius von $\sqrt{2}/2$ und damit einen Flächeninhalt von $\pi \cdot (\sqrt{2}/2)^2 = \frac{\pi}{2}$. Damit erhalten wir schließlich

$$\text{Fläche der Mondsicheln} = \underbrace{\text{Fläche der Halbkreise}}_{=\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\text{Fläche des Quadrates}}_{=1} - \underbrace{\text{Fläche des Kreises}}_{=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

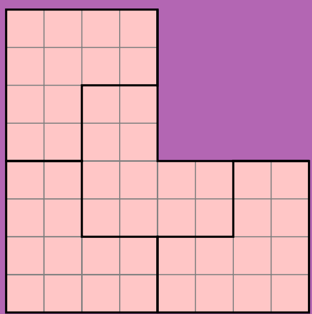
Trixi liebt mathematische Rätsel und Quadratzahlen haben es ihr momentan besonders angetan. Als sie eines Abends mit ihren Freundinnen Jordi und Gilfi am Feuer sitzt, stellt sie beiden folgende Frage:
„Könnt ihr mir sagen, an welche Zahl ich denke? Addiert man 10 zu meiner Zahl, erhält man eine Quadratzahl. Addiert man 79 zu meiner Zahl, erhält man wieder eine Quadratzahl.“ Jordi und Gilfi denken eine Weile nach und rufen dann gleichzeitig ihre Lösung laut aus. Allerdings nennen sie zwei unterschiedliche Zahlen. Trixi schaut die beiden an, überlegt kurz und meint dann: „Ihr habt recht! Es gibt tatsächlich zwei Zahlen, die zu meiner Beschreibung passen.“
Welche beiden Zahlen haben Jordi und Gilfi genannt?

Lösung: Sei n die Zahl, die Trixi genannt hat, und a^2 und b^2 die beiden Quadratzahlen. Wir nehmen an, dass $a^2 = n + 79$ und $b^2 = n + 10$, also $a > b$. Dann folfd $a^2 - b^2 = 69$, und nach der dritten binomischen Formel lässt sich dies faktorisieren zu $(a + b)(a - b) = 69$. Da 69 in die Primfaktoren 3 und 23 zerfällt, und $a + b$ auf jeden Fall größer als $a - b$ ist, kommen nur die beiden Möglichkeiten $a + b = 69$ und $a - b = 1$ sowie $a + b = 23$ und $a - b = 3$ infrage. Im ersten Fall ergibt sich $a = 35$ und $b = 34$, also $n = 1146$, im zweiten Fall ergibt sich $a = 13$ und $b = 10$, also $n = 90$. Jordi und Gilfi haben also die Zahlen 90 und 1146 genannt.

Vier Kinder möchten den Kuchen in der Abbildung gerecht unter sich aufteilen, sodass die vier Teile gleichgroß sind und die gleiche Form haben, also kongruent sind.
Wie ist das möglich?



Lösung: Eine mögliche Lösung ist die folgende:



Anna und Ella spielen ein Spiel. Sie sitzen vor einem kreisförmigen Tisch und legen abwechselnd 1-Euro-Münzen auf diesem ab. Dabei müssen alle Münzen flach auf dem Tisch liegen und dürfen nicht übereinander gestapelt werden. Es verliert diejenige Spielerin, die zuerst keinen Platz mehr für ihre Münze findet.
Wer gewinnt in diesem Spiel, wenn Anna die erste Münze legt und beide optimal spielen?

Lösung: Wenn Anna ihre erste Münze genau in die Tischmitte legt und ab ihrem zweiten Zug immer den Zug von Ella spiegelt, erhält sie die Eigenschaft, dass nach jedem ihrer Züge die Münzen auf dem Tisch punktsymmetrisch angeordnet sind. Wo immer Ella ihre nächste Münze noch platziert, findet Anna am Mittelpunkt gespiegelt also noch Platz für ihre eigene Münze.