Welche Form haben optimale Brückenbögen?

Martin Kiehl, AG Numerik und wissenschaftliches Rechnen
Fachbereich Mathematik, Technische Universität Darmstadt

Schülernachmittag,
Darmstadt, 18. September 2019

Was ist eine mathematische Anwendungsaufgabe?

Übertragung einer realen Anwendung in ein mathematisches Problem.

In manchen Schulbüchern findet man nach dem Kapitel Parabeln Aufgaben der Art:
Man beschreibe den vorgegebenen Brückenbogen durch eine passende Funktion

Ist das eine Anwendung?

Was ist eine Modellierungsaufgabe?

Darstellung als Parabel ist ohne erkennbaren Sinn.

Eine Parabel auch nicht die reale Lösung.

Sind Brückenbögen Parabeln?

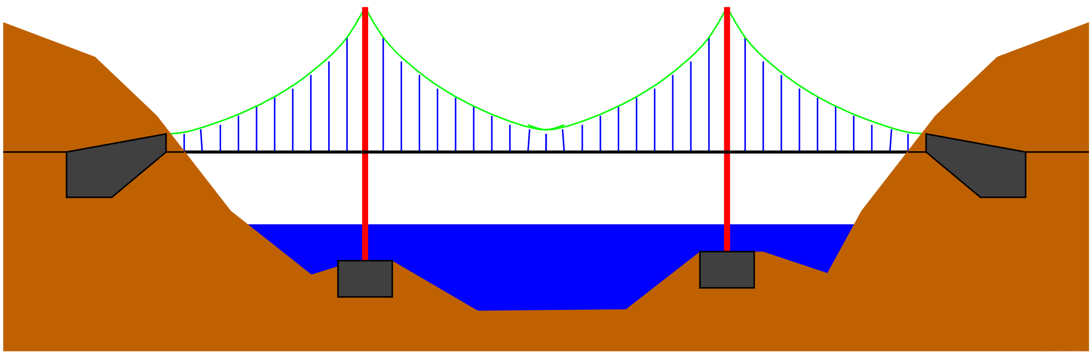
Dominiert das Gewicht der Tragkonstruktion, erhält man eine sogenannte Kettenlinie.

Dominiert das Gewicht der Fahrbahn, erhält man eine Parabel.

Im Allgemeinen erhält man etwas zwischen Parabel und Kettenlinie.

Aber welche Parabel, oder welche Kettenlinie, oder was sonst?

Realistische Aufgabenstellung



Wie stark müssen Trosse, Hänger, Pylonen, Anker und Fundamente sein?

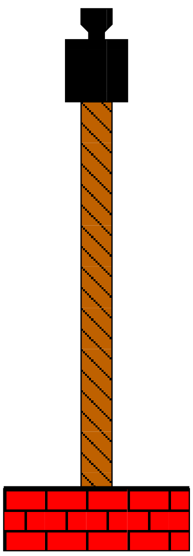
Was kostet das ganze?

Kenn ich die Form, kenn ich den Preis.

Die günstigste Form wird keine Parabel sein.

Physikalische Grundlagen des Brückenbaus

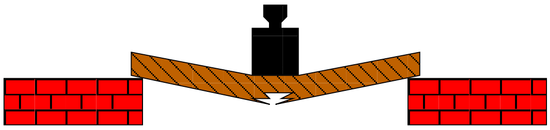
Die tragenden Strukturen einer Brücke müssen hohe Zug- und Druckkräfte aushalten.



billig.

Wie modelliert man einen Brückenbogen?

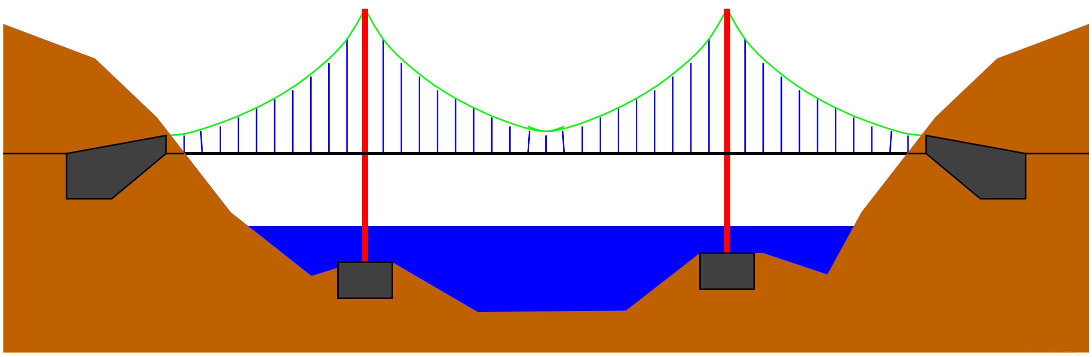
Scherkräfte und Biegemomente führen leicht zum Bruch,



daher vermeiden.

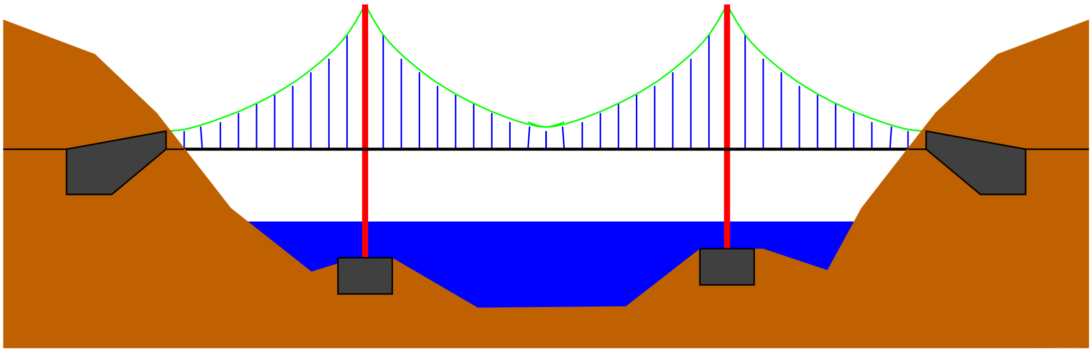
Realistische Aufgabenstellung

Gegeben ein Fluss, eine Schlucht, ein Hinderniss, über das eine Straße gebaut werden soll.



Frage: Wie stark müssen Trosse, Hänger, Pylonen, Anker und Fundamente sein?

Realistische Aufgabenstellung

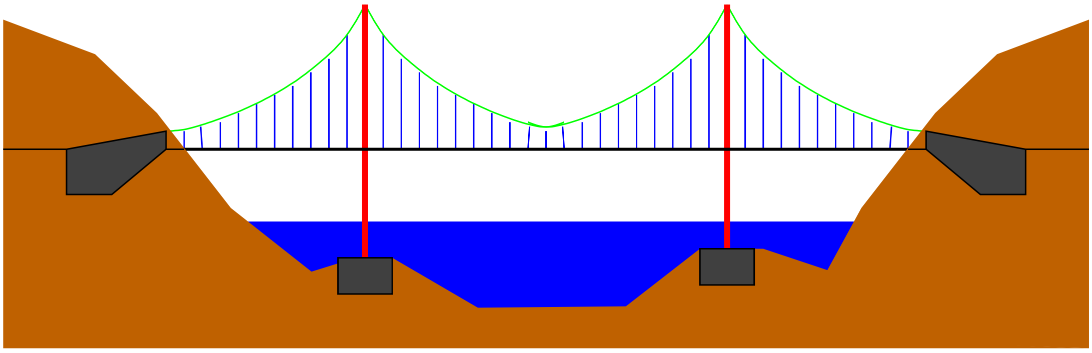


Vorgabe:
Wie schwer ist die Fahrbahn, wie breit und tief die Schlucht?
Parameter: Wie stark ist der Zug am Rand der Tragseilkurve?
zentrale Frage: Was ist die beste Form für die Tragseilkurve?

Realistische Aufgabenstellung

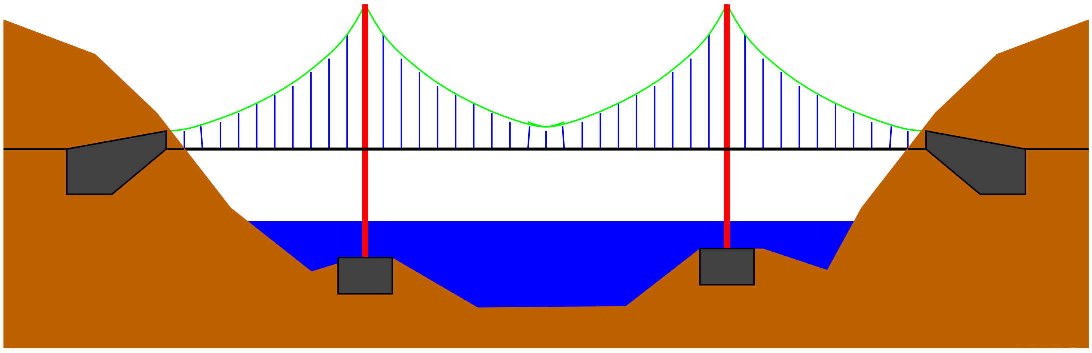
Antwort erfordert viele Daten und einfache Rechnungen.

Realistische Aufgabenstellung



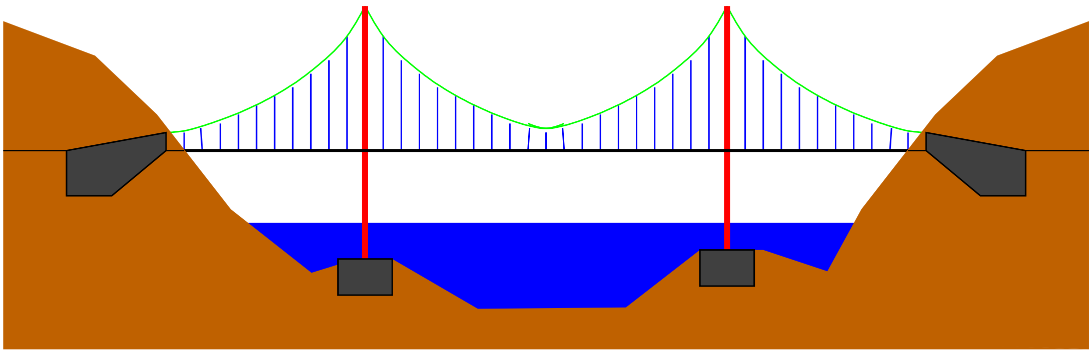
Welchen Querschnitt haben die Hänger, wie schwer sind sie, was kosten sie?
Wie hoch ist der maximale Zug der Tragseilkurve, welcher Querschnitt, wie lang ist sie, wie schwer sind sie, was kosten sie?

Realistische Aufgabenstellung



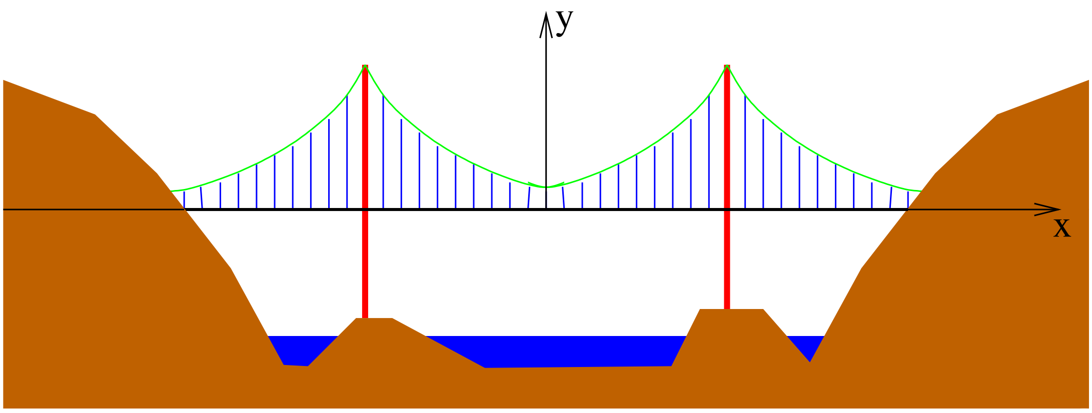
Wie schwer ist die Fahrbahn plus Seile?
Wie groß muss der Querschnitt der Pilone sein?
Wie hoch sind sie, wie schwer sind sie, was kostet das?
Welche Last müssen die Fundamente tragen, was kosten sie?

Realistische Aufgabenstellung



Wie stark müssen die Anker sein um dem Zug standzuhalten? Wie schwer ist Beton, was kostet er, wie leicht läßt er sich im Boden verankern, was kostet das?

Realistische Aufgabenstellung



Lege Koordinatensystem in die Mitte der Brücke, **x**-Achse auf die Fahrbahn. (Symmetrie)

Realistische Aufgabenstellung

Wir überspringen die einfachen Berechnungen und Nachfragen bei Bauunternehmern und widmen uns der zentralen Frage, dem

Kräftegleichgewicht.

Realistische Aufgabenstellung

Die Fahrbahn:

Beton hat ein spezifisches Gewicht von etwa 2,6 Tonnen pro $\mathbf{m^3}$. Je nach Fahrbahnbreite kann man mit einem Gewicht von 10-100 Tonnen pro Meter rechnen. Eine mehrspurige Brücke , hat dann etwa ein Gewicht pro Meter von

$$\boxed{\mathbf{G_F = 100\frac{t}{m}}}$$

und wiegt insgesamt 40000 t.

Realistische Aufgabenstellung

Die Ankerblöcke:

Die Kosten hängen ab von der Zugkraft des Tragseils am Rand und ist in etwa proportional zu dieser Zugkraft, da sie ihr oft weitgehend durch ihr Gewicht entgegenwirken müssen. (Grubengröße, Betonmenge, Lieferumfang, Misch- und Verfüllzeit.)

Ein solcher Ankerblock wiegt also ein Mehrfaches der Zugkraft und kann bei großen Brücken dann durchaus eine Millionen Tonnen wiegen.

Allein beim Preis für den Beton rechnet man mit

$$\boxed{\mathbf{P_B = 110€/m^3}}$$

Realistische Aufgabenstellung

Für den Aushub der Grube fallen bei leichten Böden etwa **20**€/m^3 an, bei felsigen Böden bis zu 100 Euro. 2.6 Tonnen Ankerblock kosten damit 130-**210 €**

Eine Tonne Ankerblock hält einem Zug von etwa **5000 N** sicher stand, so dass bei einer Zugkraft **Z** für beide Anker zusammen mit einem Preis von bis zu

$$\boxed{\mathbf{P_{Arel} = 2\frac{210€}{2.6 \cdot 5000N} Z \approx 0.0323 \frac{€}{N} Z}}$$

gerechnet werden muss.

Realistische Aufgabenstellung

Das Tragseil:

Es wird in einem Stück durchgehend gewickelt und hat daher durchgängig die gleiche Bruchkraft. Die Dicke muss die maximal auftretende Zugspannung $\mathbf{Z_{max}}$ aushalten können. Die Anzahl der Normdrähte hängt damit linear von $\mathbf{Z_{max}}$ ab.

Realistische Aufgabenstellung

Typisches Stahlseil verzinkt 10 mm:
Material: Stahl C7 Feuerverzinkt
Normen: EN 12385-4
Konstruktion: 6x37+FC RHRL
Zugfestigkeit: 1770 [N/mm][Mpa]
Gewicht: $\mathbf{0,346}$kg/m
Mindestbruchkraft: $\mathbf{52,2}$kN
Preis 2,30 €/Meter

Gewicht pro Last und Meter
$\mathbf{G_S = 0,346/52200}\mathrm{kg/Nm} = \mathbf{6,62810^{-6}}\mathrm{kg/Nm}$

Preis pro Last und Meter

$$\boxed{\mathbf{P_S = \frac{2,30€}{52,2\mathrm{kNm}} = 0.000044\frac{€}{\mathrm{Nm}}}}$$

Realistische Aufgabenstellung

Preis für ein Tragseils der Länge $\mathbf{L_T}$

$$\boxed{\mathbf{P_T = P_S Z_{max} L_T}}$$

Gewicht eines Tragseils pro Meter

$$\boxed{\mathbf{G_T = G_S Z_{max}}}$$

Realistische Aufgabenstellung

Die Hänger:

Hänger, die in einem Abstand $\mathbf{d}$ an der Fahrbahn befestigt werden, tragen die Last $\mathbf{gG_F d}$ und haben pro vertikalem Meter ein Gewicht von etwa

$$\boxed{\mathbf{G_H = G_S(gG_F d)}}$$

bei einer mittleren Hängerlänge von $\mathbf{l_H}$ insgesamt eine Last von

$$\boxed{\mathbf{L_H = gG_S(gG_F l) l_H}}$$

und kosten insgesamt

$$\boxed{\mathbf{P_H = P_S(gG_F l) l_H}\ .}$$

Realistische Aufgabenstellung

Die Pylonen:

Bei den senkrechten Trägern, kommt es auf die Druckbelastbarkeit an. Sie bestehen aus Stahlbeton. Typische Werte sind etwa

Druckfestigkeit $\boxed{\mathbf{B_B = 120 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}}$

spezifisches Gewicht $\boxed{\boldsymbol{\rho_B} \mathbf{= 2.7 \cdot 10^6 \frac{kg}{m^3}}}$

Realistische Aufgabenstellung

Der Querschnitt $\mathbf{Q(h)}$ des Pylons trägt oben die ganze Last $\mathbf{L_F + L_T + L_H}$ und mit abnehmender **Höhe** zusätzlich den oberen Teil des Pylons.

Daher gilt:

$$\dot{Q}(h) = -Q(h) g \rho_B / B_B$$

$$\boxed{\Rightarrow Q(h) = \frac{L_F + L_T + L_H}{B_B} e^{\frac{g\rho_B}{B_B}(h_P - h)}}$$

Realistische Aufgabenstellung

Das Pylonenvolumen ergibt damit

$$
\begin{aligned}
V_P &= \int_0^{h_P} \frac{L_F + L_T + L_H}{B_B} e^{\frac{g\rho_B}{B_B}(h_P - h)} dh \\
&= -\frac{L_F + L_T + L_H}{B_B} \frac{B_B}{g\rho_B} e^{\frac{g\rho_B}{B_B}(h_P - h)} |_0^{h_P} \\
&= \frac{L_F + L_T + L_H}{g\rho_B} [e^{\frac{g\rho_B}{B_B}(h_P)} - 1] \\
&\approx (L_F + L_T + L_H) \frac{h_P}{B_B}
\end{aligned}
$$

Realistische Aufgabenstellung

Damit erhält man das Gewicht $\boxed{G_P = \rho_B V_P,}$

die Gesamtlast der Pilonen $\boxed{L_P = g G_P}$

und der Materialpreis $\boxed{MP_P = 110€/m^3 V_P.}$

Die Baukosten kann man gut verdoppeln und da der Bau mit der Höhe der Pylonen schwieriger wird, kann man für die Pilonen mit Kosten von

$$\boxed{P_P = 2MP_P \frac{h_P}{10m}}$$

rechnen.

Realistische Aufgabenstellung

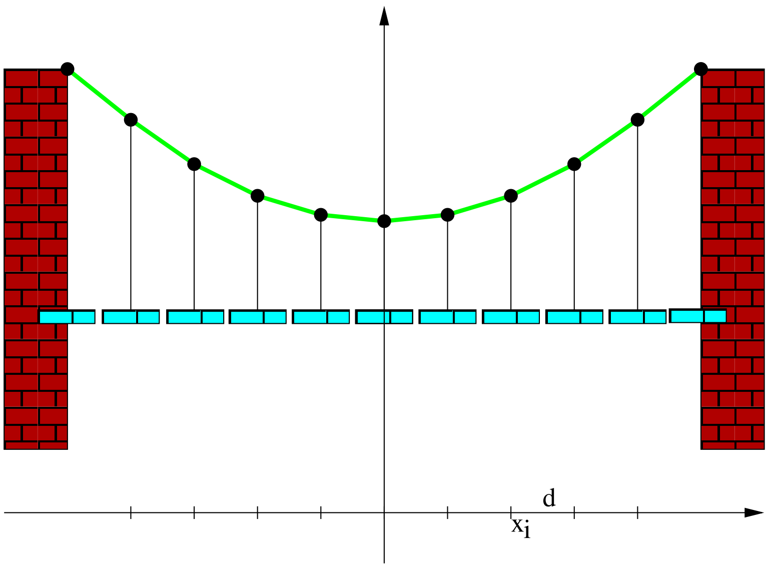
Das Fundament:

Die Kosten des Fundamentes hängen linear vom Gesamtgewicht ab.

Es ist deutlich billiger, als ein Anker, da der Boden gegen Druck meist stabiler ist, als auf Zug.

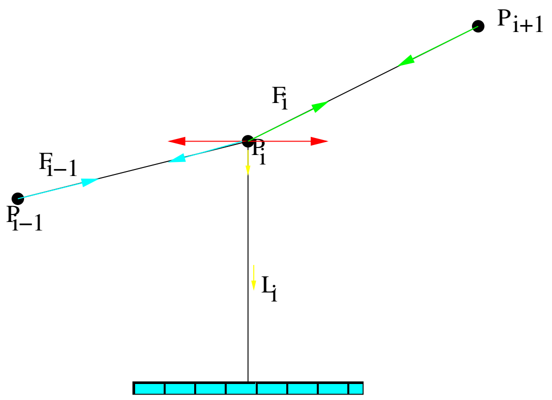
$$\boxed{\mathbf{P_F \approx 0.3 P_{Arel} \frac{€}{N} (L_F + L_T + L_H + L_P)}}$$

Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke



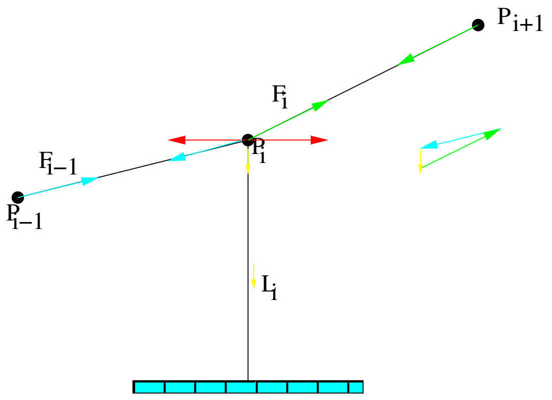
Die Hänger hängen im gleichen Abstand **d**
und tragen jeweils ein gleichschweres Stück Fahrbahn.
Aufhängepunkte $\mathbf{P_i = (x_i, y_i) = (id, y_i)}$.

Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke



An den Aufhängepunkten wirken 3 Kräfte:
Die Zugkraft $\mathbf{F_i}$ zwischen Punkt $\mathbf{P_i}$ und $\mathbf{P_{i+1}}$
Die Zugkraft $-\mathbf{F_{i-1}}$ zwischen Punkt $\mathbf{P_i}$ und $\mathbf{P_{i-1}}$
Die Gewichtskraft der Lasten $\mathbf{L_i}$.
Diese Kräfte sind im Gleichgewicht.

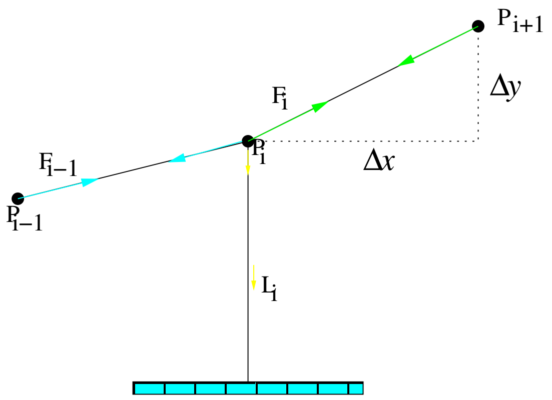
Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke



Die Last $\mathbf{L_i}$ setzt sich zusammen aus der Last der Fahrbahn, der Last des Hängetragseils und der Last des Trossenstückes.

Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke

Dabei gilt: für die Länge $\mathbf{l_i}$ des Trossenstückes



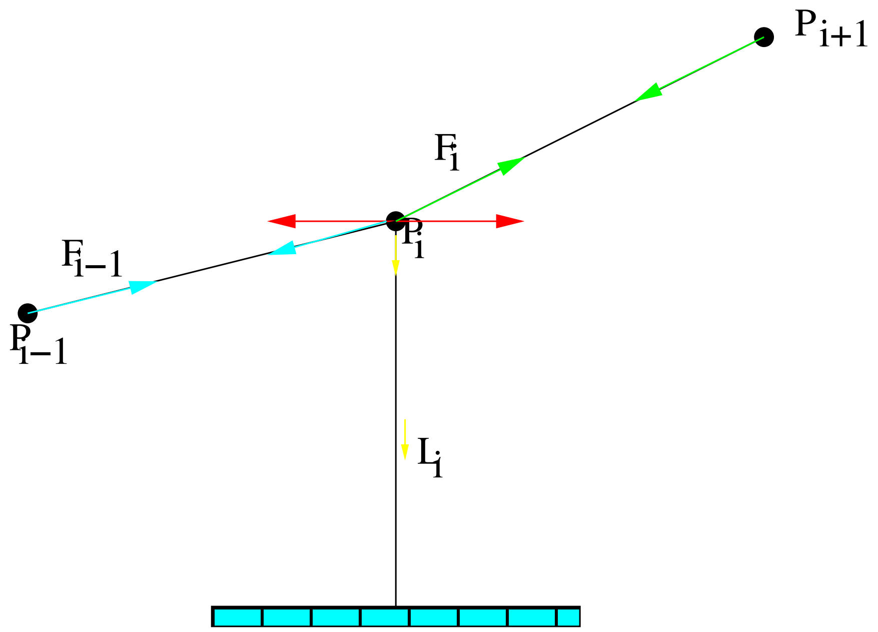
$$\mathbf{l_i = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = \Delta x\sqrt{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + 1} = d\sqrt{y'(x_i)^2 + 1}}$$

Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke

und somit:

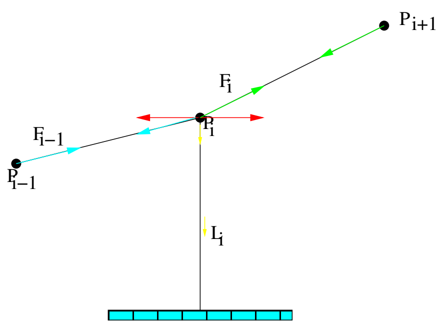
$$\begin{aligned}\mathbf{L_i} &\mathbf{= G_F dg \;+\; G_S Z\sqrt{y'(x_i)^2 + 1}dg \;+\; G_S(G_F dg)y(x_i)g} \\ &\mathbf{= [G_F + G_S Z\sqrt{y'(x_i)^2 + 1} + G_S G_F g y(x_i)]dg}\end{aligned}$$

Horizontalkomponente der Kräfte:



$\mathbf{L_i}$ trägt nichts zur Horizontalkomponente beiträgt.

Horizontalkomponente der Kräfte:



$$\mathbf{F_i} = \alpha_i \frac{\mathbf{P_{i+1}} - \mathbf{P_i}}{\|\mathbf{P_{i+1}} - \mathbf{P_i}\|} \quad \text{mit } \alpha_i \text{ Seilspannung}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F_{i,1}} &= \alpha_i \frac{\mathbf{P_{i+1,1}} - \mathbf{P_{i,1}}}{\|\mathbf{P_{i+1}} - \mathbf{P_i}\|} = \alpha_i \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{P_{i+1}} - \mathbf{P_i}\|} \\
\mathbf{F_{i-1,1}} &= \alpha_{i-1} \frac{\mathbf{P_{i,1}} - \mathbf{P_{i-1,1}}}{\|\mathbf{P_i} - \mathbf{P_{i-1}}\|} = \alpha_{i-1} \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{P_i} - \mathbf{P_{i-1}}\|} \\
&= \mathbf{H} \text{ konstante horizontale Spannung} \\
\alpha_i &= \mathbf{H}\|\mathbf{P_{i+1}} - \mathbf{P_i}\|/\mathbf{d}
\end{aligned}$$

Beispiel Hängebrücke – Vertikalkomponente:

$$\begin{aligned}
F_{i,2} &= \alpha_i \frac{y_{i+1} - y_i}{\|P_{i+1} - P_i\|} = H \frac{\|P_{i+1} - P_i\|}{d} \frac{y_{i+1} - y_i}{\|P_{i+1} - P_i\|} \\
&= H \frac{y_{i+1} - y_i}{d} \approx Hy'(x_i + d/2) \\
F_{i-1,2} &= H \frac{y_i - y_{i-1}}{d} \approx Hy'(x_i - d/2) \\
L_i &= F_{i,2} - F_{i-1,2} = H \frac{y_{i+1} - y_i}{d} - H \frac{y_i - y_{i-1}}{d} \\
&\approx Hy'(x_i + d/2) - Hy'(x_i - d/2) \\
&= Hd \frac{y'(x_i + d/2) - y'(x_i - d/2)}{d} \approx Hdy''(x_i)
\end{aligned}$$

Wann hat ein Brückenbogen Parabelform?

$$\begin{aligned}
y''(x_i) &= \frac{L_i/d}{H} \\
L_i &= [G_F + G_S Z \sqrt{y'(x_i)^2 + 1} + G_S G_F g y(x_i)] dg \\
y''(x) &= [G_F + G_S Z \sqrt{y'(x)^2 + 1} + G_S G_F y(x)] g/H
\end{aligned}$$

G_F Fahrbahngewicht pro Meter

G_S Gewicht von Seiltrossen pro Meter und maximaler Bruchlast.

Spezialfall $G_S \approx 0$:

$y''(x) = \frac{G_F g}{H}$ ¡8-¿ konstant, also ist $y(x)$ eine Parabel.

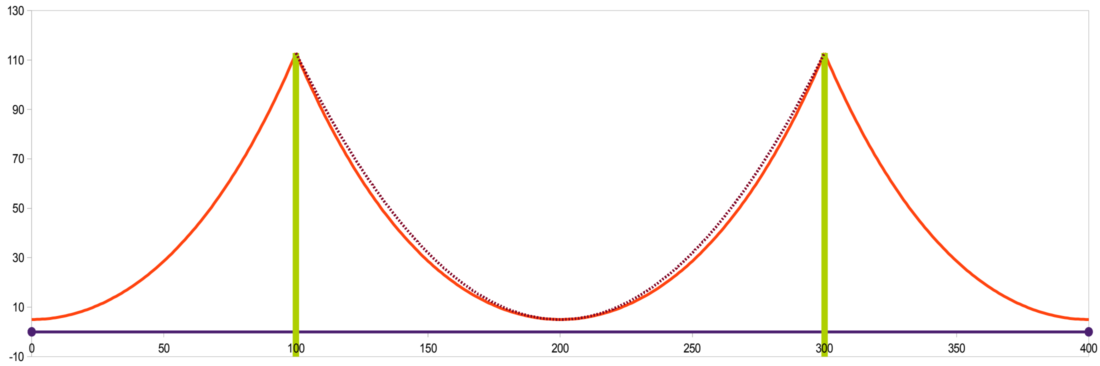
Die Krümmung der Parabel korrespondiert mit der horizontalen Seilspannung H des Tragseils.

Das Kräftegleichgewicht der Hängebrücke:

Je höher das Seil aufgehängt werden kann und je stärker es durchhängen darf, desto höher die Krümmung und desto geringer die benötigte Seilspannung.

Ein weniger zugfestes Tauwerk muss mehr durchhängen.

Die Form weicht dann von einer Parabel erkennbar ab.



Optimale Hängebrücke:

Bei vorgegebenen Baukostendaten und Materialeigenschaften

kann für verschiedene fiktive Horizontalspannungen **H** die Brückenausführung und deren Kosten berechnet werden.

Optimale Hängebrücke:

Dazu verwendet man die Beziehung

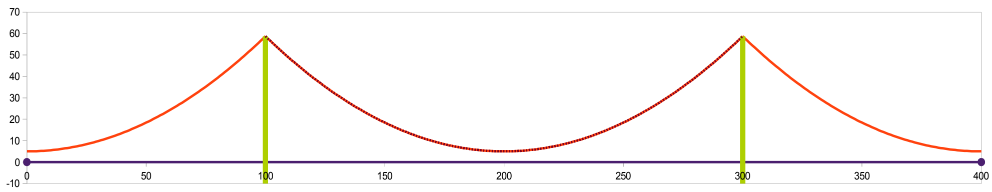
$$
\begin{aligned}
L_i &= [G_F + G_S Z\sqrt{y'(x_i)^2 + 1} + G_S G_F g y(x_i)]dg \\
&= [G_F + G_S Z\sqrt{\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{d}\right)^2 + 1} + G_S G_F g y(x_i)]dg
\end{aligned}
$$

zusammen mit

$$
\begin{aligned}
L_i &= H\frac{y_{i+1} - y_i}{d} - H\frac{y_i - y_{i-1}}{d} \\
\Rightarrow y_{i+1} &= \frac{d}{H}L_i + 2y_i - y_{i-1}
\end{aligned}
$$

So erhält man für jede Horizontalspannung die zugehörige Tragseilfunktion und alle weiten Auslegungsdetails.

Optimale Hängebrücke:



Es ist tatsächlich fast eine Parabel,
aber wir kennen: Trossenspannung, Trossenquerschnitt, Trossenlänge, Hängerquerschnitt, Ankergewicht, Pilonenhöhe, Pilonentraglast, Fundamentbelastung
und die Gesamtbaukosten. 11.364 Mio €