Wie viel Information steckt in einem zufälligen Bild?

Frank Aurzada
Technische Universität Darmstadt

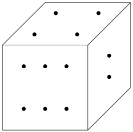
18. September 2019

Überblick

Überblick

Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, n\}$

Erinnerung: $W^{(6)}$ sei das Ergebnis eines Würfelwurfes, $W^{(6)} \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.



$$\mathbb{P}(W^{(6)} = 1) = \mathbb{P}(W^{(6)} = 2) = \ldots = \mathbb{P}(W^{(6)} = 6) = \frac{1}{6}.$$

Verallgemeinerung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sei $W^{(n)}$ so, dass

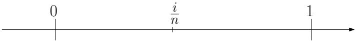
$$\mathbb{P}(W^{(n)} = 1) = \mathbb{P}(W^{(n)} = 2) = \ldots = \mathbb{P}(W^{(n)} = n) = \frac{1}{n}.$$

Wir nennen dies die (diskrete) Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, n\}$.

Gleichverteilung auf $[0, 1]$

<u>Gesucht:</u> zufällige gleichverteilte Zahl in $[0, 1]$.

<u>Idee:</u> Approximiere dieses Experiment mit Hilfe von diskreten Gleichverteilungen



$$n \in \mathbb{N} \qquad\qquad W^{(n)} = i \quad \leftrightarrow \quad X^{(n)} = \frac{i}{n}$$

- Damit bekommen wir eine Gleichverteilung auf $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$.
- Man kann zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} X^{(n)} = X$ in einem gewissen Sinne. Wir nennen X die Gleichverteilung auf $[0, 1]$.
- Es gilt

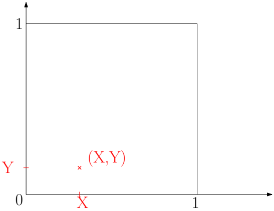
$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \frac{b-a}{1-0} = b - a, \qquad 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1.$$

Überblick

1. Zufällige Punkte im Intervall $[0, 1]$
2. Zufällige Bilder
3. Informationsmaße

Zufällige Punkte in $[0,1]^2$

Was ist ein zufälliger Punkt in $[0,1]^2$?



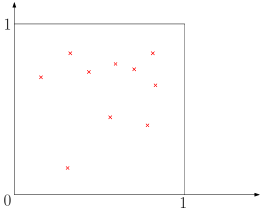
- X, Y seien zwei zufällige gleichverteilte Zahlen im Intervall $[0,1]$
- Dann ist (X, Y) ein zufälliger gleichverteilter Punkt in $[0,1]^2$.
- Wir fordern zusätzlich, dass X und Y unabhängig sind, d.h.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B),$$

für Teilmengen $A, B \subseteq [0,1]$.

Zufällige Punkte in $[0, 1]^2$

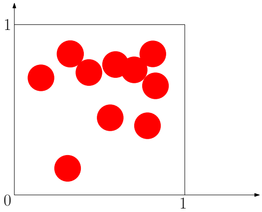
Für unser Bild nehmen wir viele (unabhängige) zufällige Punkte:



- X_i, Y_i seien (unabhängige) zufällige gleichverteilte Zahlen im Intervall $[0, 1]$
- Dann sind (X_i, Y_i) zufällige gleichverteilte Punkte in $[0, 1]^2$.
- Wie viele Punkte nehmen wir? Anzahl $= N$, auch zufällig vorgegeben:

$$\mathbb{P}(N = 0), \mathbb{P}(N = 1), \mathbb{P}(N = 2), \dots$$

Zufälliges Bild



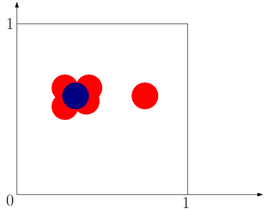
- (X_i, Y_i) zufällige gleichverteilte Punkte in $[0, 1]^2$, $i = 1, \dots, N$.
- Wir legen Kreisscheiben um diese Punkte, Radius r $(0 < r < 1)$.
- **Fertig ist unser zufälliges Bild!**
- „Rote Kreise auf weißem Quadrat“, VB 10.000 Euro

Überblick

Informationsmaße

- Es gibt verschiedene Maße dafür, wie viel Information in einer Struktur steckt.
- Begriff der Entropie: Maß für die Unordnung
  (vgl. evtl. Physik-Unterricht)
- Entropie (deterministisches Ereignis) $= 0$
- Entropie (Münzwurf(p)) $= p \log p^{-1} + (1-p)\log(1-p)^{-1}$
  (ist $0 =$ bei $p = 0$ oder $p = 1$; maximal bei $p = 1/2$)
- Entropie (zufälliges Bild) $= ?$

Ein einfaches Maß für die Komplexität

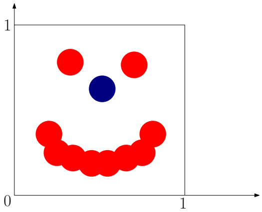


- Es gibt hier $N = 6$ Kreisscheiben.
- Nur $K = 5$ davon sind wirklich „nötig“ für das Bild.
- Sei allgemein: K die minimale Anzahl an Kreisscheiben, die man braucht, um das Bild zu reproduzieren.
- Man studiert nun das Verhältnis zwischen K (zufällig) und N (zufällig), $K \leqslant N$.

Unter gewissen Voraussetzungen gilt für große N mit hoher Wahrscheinlichkeit

$$\frac{N}{3} = \frac{d-1}{d+1} \cdot N \lesssim K \lesssim \frac{d-1}{d} \cdot N = \frac{N}{2}.$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Referenz:

F. Aurzada, M. Lifshits.

How much information is contained in a random picture?

Journal of Complexity 53 (2019), 133–161.