

Treffpunkt Mathematik

Beispielaufgaben

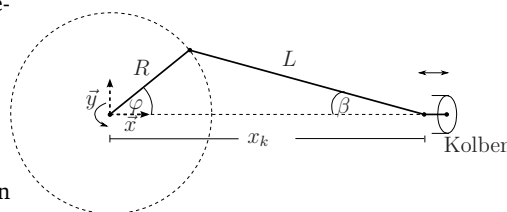


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Aufgabe T1 (Kurbeltrieb)

Gegeben sei der skizzierte Kurbeltrieb, dessen Kurbel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ umläuft, d.h. $\varphi(t) = \omega t$. Berechnen Sie

- die Position $x_k(t)$ des Kolbens zum Zeitpunkt $t > 0$,
- die Geschwindigkeit $x'_k(t)$,
- das Drehmoment M in der Welle in Abhängigkeit von der am Kolben auftretenden Kraft F_k und dem Winkel φ .



Aufgabe T2 (Hüpfender Ball)

Ein Ball wird in der Höhe h_0 mit Geschwindigkeit null losgelassen. Er prallt auf dem Boden auf und verliert dabei 20% seiner Energie. Dann springt dann wieder nach oben, fällt erneut herab, usw.

- Wie lange dauert es, bis der Ball liegenbleibt?
- Welche Strecke legt er bis zu diesem Zeitpunkt zurück?

Aufgabe T3 (Schrittweise Entladung eines Kondensators)

Gegeben ist die folgende elektrische Schaltung:

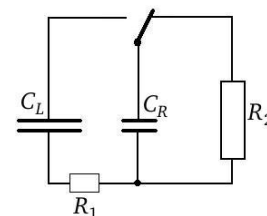
Der große Kondensator C_L ist zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgeladen mit einer Ladung $Q_L(0) > 0$. Der kleine Kondensator C_R ist zum Zeitpunkt 0 leer ($Q_R(0) = 0$). Es fließt kein Strom.

Nun wird der Schalter umgelegt. Sofort fließt nun Ladung vom großen Kondensator zum kleinen. Wir warten solange, bis kein Strom mehr fließt und legen den Schalter wieder um. Nun entlädt sich der kleine Kondensator über den Widerstand R_2 . Die Ladung, die nun noch in Kondensator C_L verbleibt, nennen wir $Q_L(1)$.

Wir warten, bis kein Strom mehr fließt und legen wieder den Schalter um. Dieser Vorgang wird nun immer weiter wiederholt.

Geben Sie eine Formel für $Q_L(n + 1)$ in Abhängigkeit von $Q_L(n)$ an.

Finden Sie eine nicht-rekursive Formel für die Folge $(Q_L(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Ist sie konvergent?



Aufgabe T4 (AND, OR, XOR)

In der Digitaltechnik kennt man hauptsächlich zwei Zustände „1“ (an) oder „0“ (aus). Sämtliche Berechnungen im Computer lassen sich (vereinfacht gesprochen) zurückführen auf elementare „Logikgatter“, wie AND, OR, NOT oder XOR. Diese Operationen lassen sich über die nebenstehende Tabelle definieren.

Zeigen Sie, dass die Menge $\{0, 1\}$, zusammen mit den Operationen \oplus (als Addition) und \wedge (als Multiplikation) einen Körper (im Sinne der Vorlesung) bildet.

x	y	NOT $\neg x$	AND $x \wedge y$	OR $x \vee y$	XOR $x \oplus y$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0