

# Die Mandelbrot-Menge und das fraktale Instrument



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2023

## Die Mandelbrot-Menge (Geschichte)

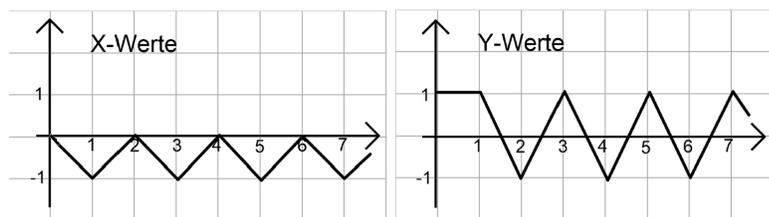
Die Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$  ist benannt nach dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924-2010) und besteht aus allen Punkten  $(x_0, y_0)$  in der Ebene, für welche die unten definierte Iterationsvorschrift beschränkt bleibt. In der Mandelbrot-Menge lassen sich allerhand interessante geometrische Objekte erkennen, wie z.B. Spiralen, „Seepferdchen“ oder Satelliten mit Antennen, die sich beim Hereinzoomen wiederholen. Man nennt Mengen mit dieser Eigenschaft fraktale Mengen. Diese kommen auch nicht selten in der Natur vor, z.B. beim Blumenkohl.

### Umwandlung in Töne

Die Software spielt zu jedem Punkt der Mandelbrot-Menge einen Klang ab. Das funktioniert so: Für einen Punkt  $(x_0, y_0)$  aus  $\mathbb{M}$  betrachten wir die im rechten Kasten beschriebenen Folgen  $x_0, x_1, x_2, \dots$  und  $y_0, y_1, y_2, \dots$ . Wir interpretieren die Werte als Amplituden zweier Schallwellen und spielen sie auf je einem der beiden Lautsprecher ab. Nehmen wir zum Beispiel den Punkt  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ , so erhalten wir die Folgen

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots),$$
$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).$$

Dies ergibt also die folgenden Schallwellen:



### Aufgaben an euch:

- 1) An welchen Stellen entstehen klare Töne, wo stoßt ihr auf bizarre Geräusche? Habt ihr eine Idee, woran das liegt? Versucht, vor dem Erzeugen des nächsten Tons vorherzusagen, wie er klingt.
- 2) Sucht euch weitere Startwerte aus und berechnet die Werte für die ersten paar Iterationen. Liegen diese Startwerte innerhalb der Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$  oder nicht?

### Iterationsvorschrift

Wir geben ein  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  vor. Das nächste Folgenglied ist dann rekursiv definiert durch

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - y_n^2, 2x_n y_n) + (x_0, y_0).$$

Ein Start mit dem Beispiel von links,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ , liefert  $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ ,  $(x_2, y_2) = (0, -1)$ ,  $(x_3, y_3) = (-1, 1), \dots$

Starten wir dagegen mit  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , so ergibt sich

$$(x_1, y_1) = (2, 0), (x_2, y_2) = (5, 0), (x_3, y_3) = (26, 0), \dots$$

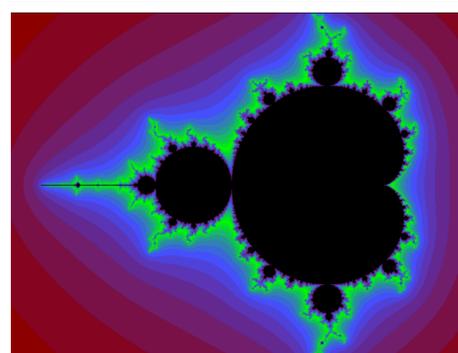


Abb. 1: Bild der Mandelbrot-Menge

### Außerhalb der Menge $\mathbb{M}$

Für Punkte, die nicht in der Mandelbrot-Menge liegen, bleibt die Iteration nicht beschränkt, d. h. die  $x$ - oder  $y$ -Koordinate des Punktes in der Iterationsvorschrift wird beliebig groß.

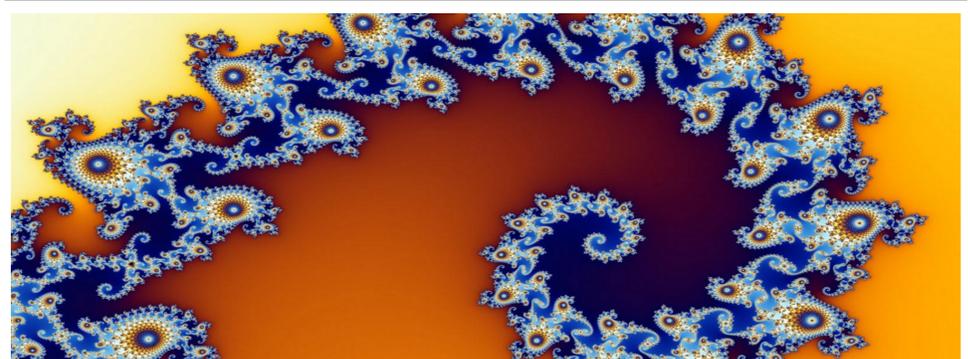


Abb. 2: Zoom in das „Tal der Seepferdchen“ in der Mandelbrot-Menge