Die Unendliche-Reihen-Reihe

Lange Nacht der Mathematik 2023

Reihen

Anschaulich ist eine Reihe eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Wenn man unendlich summiert, können sich kuriose Dinge ereignen. Summieren wir zum Beispiel endlich viele Zahlen, so hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Summation ab. Völlig anders stellt sich die Situation bei unendlichen Reihen dar! Durch Umordnen der Summanden ist es möglich, den Wert einer Reihe zu ändern.

Die Theorie der unendlichen Reihen ist ein Grundpfeiler der Analysis. Sie begann mit der Aufstellung der Logarithmusreihe durch Nicolaus Mercator (1620–1687) und der Binomial- und Exponentialreihe durch Isaac Newton (1642–1727). Viele der grundlegenden Sätze über Folgen und unendliche Reihen gehen auf Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), einen der bedeutendsten französischen Mathematiker seiner Zeit, zurück.

Die geometrische Reihe $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} + \ldots$

Die geometrische Reihe mit ${}^1/_2$ hat den Wert $\mathbf{2}$. Mit jedem Summanden kommt immer die Hälfte des Wertes hinzu, der noch zu 2 fehlt. So ist etwa $1 + {}^1/_2 = {}^3/_2$, also fehlt noch ${}^1/_2$ zu 2. Im nächsten Schritt addieren wir ${}^1/_4$ und $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 = {}^7/_4$. Zu 2 fehlt dann noch ${}^1/_4$ und der nächste Summand ist ${}^1/_8$. Wir kommen dem Wert 2 immer näher und erreichen ihn in der unendlichen Summe.

Die harmonische Reihe $1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + {}^1/_5 + \ldots$

Die harmonische Reihe hat keinen endlichen Wert. Die Summanden können etwa so gruppiert werden, dass sie zusammen mindestens ${}^1/_2$ ergeben, also

$$\begin{aligned} & 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \ldots \\ = {} & 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots \\ \geq {} & 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \ldots \\ \geq {} & 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots = +\infty. \end{aligned}$$

Damit summieren wir unendlich oft mindestens ${}^1/_2$ auf.

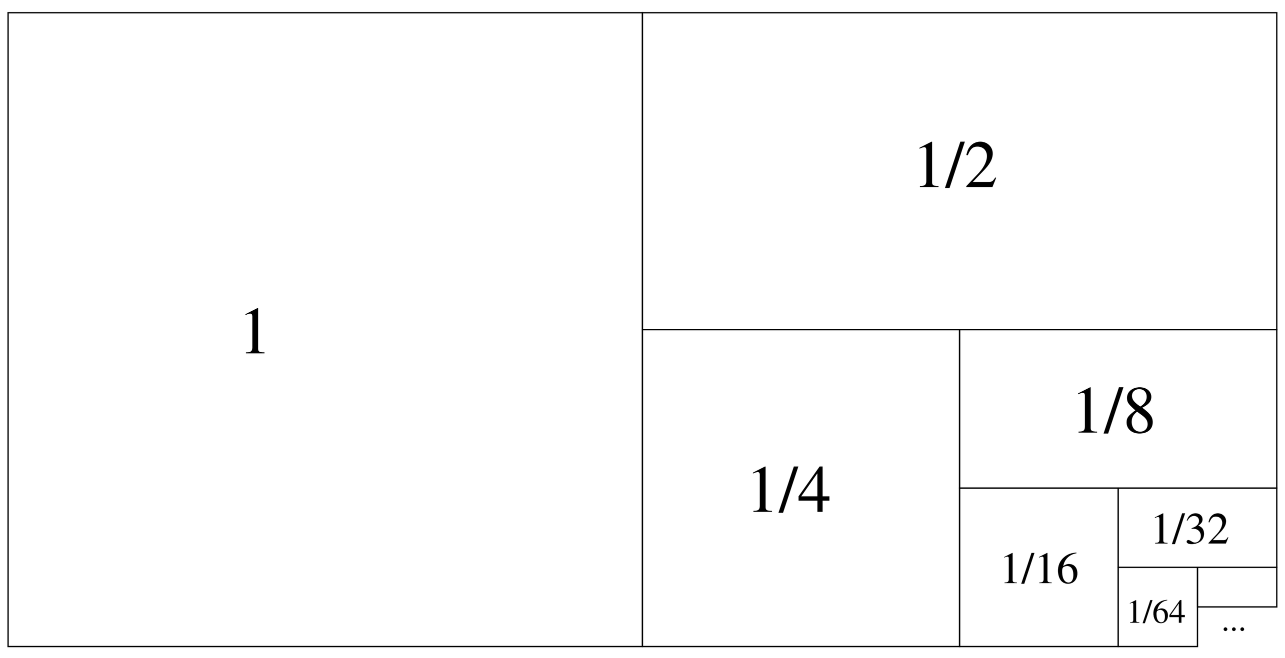

Abb. 1: Veranschaulichung der geometrischen Reihe

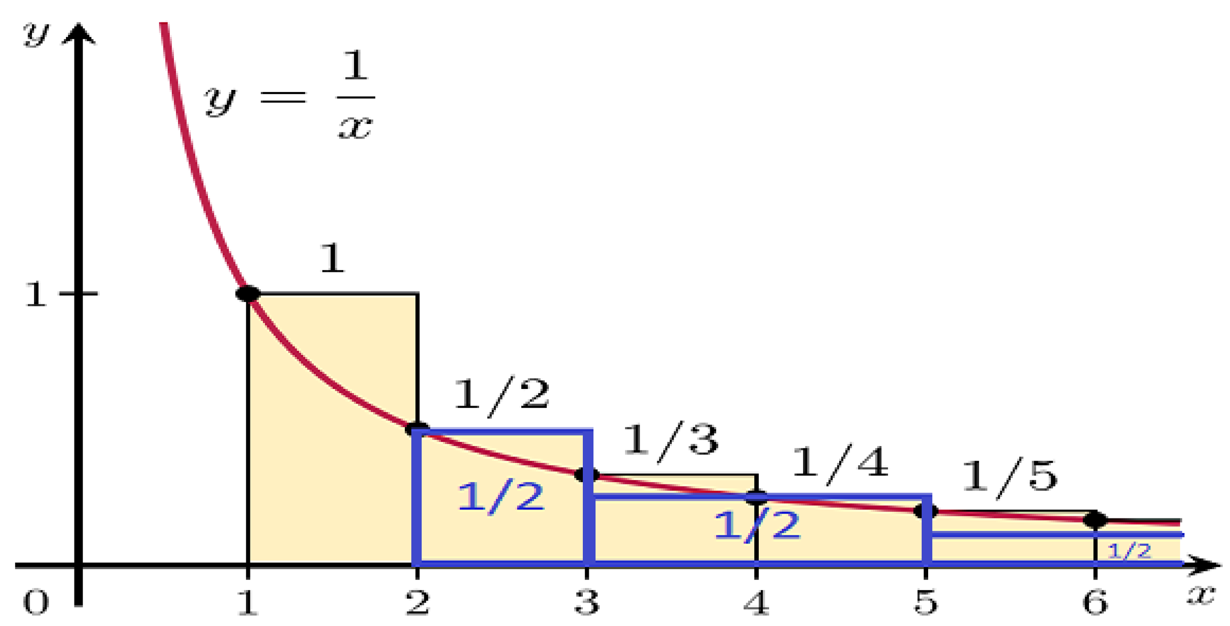

Abb. 2: Illustration der harmonischen Reihe

Aufgabe

Ihr findet insgesamt 20 Karten. Die Vorderseite nennt eine unendliche Summe, die Rückseite nennt ihren Wert (falls existent). Ihr beginnt mit der obersten Karte vom Stapel. Die Karte wird für alle sichtbar hingelegt, die Rückseite bleibt geheim. Wählt eine eurer Karten aus und legt sie oberhalb der Karte hin, wenn ihr glaubt, euer Wert sei größer und unterhalb, wenn ihr glaubt, euer Wert sei kleiner als der Wert von Karte 1. Ihr könnt eure Karten auch zwischen zwei Karten legen. Rundherum fügen die Spieler so Karten in die Reihe ein. Wer am Zug ist und der Meinung ist, dass die Reihe nicht korrekt ist, fügt keine Karte hinzu und zweifelt stattdessen an. Alle Karten werden umgedreht. Ist die Reihe korrekt, muss der Zweifelnde eine Karte vom Stapel ziehen und setzt aus. Ist sie dagegen falsch, so muss stets der vorherige Spieler zwei Karten ziehen. Gewonnen hat der Spieler, der zuerst keine Karte mehr hat.