Einfache Begriffsgraphen: Syntax und Semantik

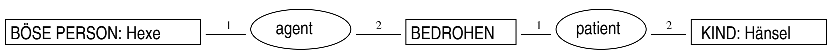
Susanne Prediger

Technische Universität Darmstadt, Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstraße 7, D-64289 Darmstadt
prediger@mathematik.tu-darmstadt.de

Inhalt

1 Einleitung

In vielen Bereichen der Wissensverarbeitung und der Künstlichen Intelligenz wurden in den letzten Jahren Wissensrepräsentationsformalismen gesucht, die zum einen logisch präzise und leicht algorithmisch zu handhaben sind, zum anderen aber auch nah an der natürlichen Sprache und somit für Menschen gut lesbar sind. Mit den begrifflichen Graphen hat J.F. Sowa in den siebziger Jahren einen einfachen und ausdrucksstarken Formalismus für die Wissensrepräsentation vorgeschlagen, mit dem er in seinem Buch "Conceptual Structures" [So84] die in der Künstlichen Intelligenz entwickelten Semantischen Netze mit den existentiellen Graphen von C.S. Peirce kombinierte. Mit ihrem direkten Bezug zur natürlichen Sprache und ihrer graphischen Repräsentation dienen die begrifflichen Graphen als Sprache für die Mensch-Maschine-Kommunikation, denn sie eignet sich gut als Zwischensprache zur Übersetzung computerorientierter Formalismen in natürliche Sprache und zurück. Ein Beispiel für einen begrifflichen Graphen ist der folgende:



Mit diesem begrifflichen Graphen wird der Satz "*Die böse Person Hexe bedroht das Kind Hänsel.*" formalisiert. Die Grundlage der Formalisierung ist ein gerichteter Multihypergraph, dessen mit Labels ausgestattete Kanten (hier markiert durch die Linien und Ellipsen) mit Relationen (agent und patient) und dessen Ecken (markiert durch die Rechtecke) mit Begriffen (BÖSE PERSON und KIND) und Referenzen (Hexe und Hänsel) versehen werden. In solchen begrifflichen Graphen werden Gegenständen Begriffe zugeordnet, und sie werden durch Relationen in Beziehungen gesetzt. Den so formalisierten Satz können wir daher lesen als *"Das Kind Hänsel ist das Objekt (Patient) des Bedrohens, dessen Subjekt (Agent) die böse Person Hexe ist."*. Auf diese Weise lassen sich viele Sätze der natürlichen Sprache durch die graphische Sprache formalisieren.

Die Sprache läßt sich vor allem auf zwei Weisen erweitern: Zum einen können durch Schachtelungen auch Teilsätze in Beziehung gesetzt werden, so daß etwa Sätze der Form *"Das Kind Hänsel glaubt, er könne die Geschwister retten."* formalisiert werden können, und zum anderen kann die Sprache durch Einführung von Variablen und Quantoren erweitert werden. Wir wollen uns jedoch zunächst auf die einfachen begrifflichen Graphen beschränken.

Für die Wissensverarbeitung ist nicht nur die geeignete Repräsentation des Wissens von großer Bedeutung, sondern insbesondere auch einfache und effiziente Inferenzmechanismen. Dazu wurden von J.F. Sowa (in Anlehnung an die Peirceschen Inferenzregeln für existentielle Graphen) Inferenzregeln entwickelt (vgl. [So84]), die in verschiedenen Anwendungen erfolgreich implementiert worden sind.

Gleichwohl, so formulierten es M. Chein und M.-L. Mugnier in ihrer Arbeit [CM92], bedurften viele Begriffe, Definitionen und Algorithmen einer Präzisierung. Sie mathematisierten daher die von J.F. Sowa eingeführte Theorie der begrifflichen Graphen mit Hilfe der graphentheoretischen Sprache, wobei sie sich zunächst auf die konjunktiv-existientielle Teilsprache der sogenannten einfachen, d. h. nicht geschachtelten begrifflichen Graphen ohne Allquantoren und Negationen, beschränkt haben. Geschachtelte begriffliche Graphen wurden in späteren Arbeiten mathematisiert (etwa [CM96]). Für die einfachen begrifflichen Graphen entwickelten sie eine Theorie, in der Inferenzen bestimmter begrifflicher Graphen durch Graphen-Homomorphismen, sogenannte Projektionen, beschrieben werden. Damit wurde ein bereits bei J.F. Sowa vorkommender Begriff zu einem effizienten Werkzeug für die Handhabung der Inferenzen entwickelt.

In all diesen Arbeiten wurde jedoch erstaunlicherweise eine genaue Trennung von Syntax und Semantik vernachlässigt. Zwar definierte J.F. Sowa in [So84] einen Übersetzungsmechanismus der begrifflichen Gaphen in die Prädikatenlogik erster Stufe, deren Semantik festgelegt ist, doch haben sich dort immer wieder Fehler eingeschlichen, so daß die Klarheit und Überschaubarkeit dieses Ansatzes zumindest in Zweifel gezogen werden muß (siehe etwa die Berichtigungen und Präzisierungen bei [CM92] und [We95]).

Auch wenn die Entsprechung der Sprache der begrifflichen Graphen mit der Prädikatenlogik erster Stufe in vieler Hinsicht eine gewinnbringende Absicherung der Theorie bietet, so erscheint es doch als Mangel, die Semantik der begrifflichen Graphen nicht expliziter formuliert zu haben. Hinzu kommt, daß mit der Übersetzung in die Prädikatenlogik der Bezug zur realen Welt geschwächt wird, der als ein wesentlicher Vorteil der modernen Wissensrepräsentationsformalismen gegenüber der Prädikatenlogik gilt.

Daher wäre es wünschenswert, die Semantik der begrifflichen Graphen in einem Bezugsrahmen definieren zu können, in dem die Anbindung an die reale Welt erhalten bleibt. In gewisser Hinsicht leistet dies die mengensprachliche Semantik, die von Chein/Mugnier in [CM96] definiert und in Teilen ihrer Beweise benutzt wird, doch ist sie naturgemäß rein extensional, so daß die intensionalen Aspekte verloren gehen. Eine solche, extensionale wie intensionale Komponenten berücksichtigende Semantik kann man definieren, wenn der Bezug zwischen der Theorie der begrifflichen Graphen und der Formalen Begriffsanalyse hergestellt wird. Ein solcher Bezug wird in dieser Arbeit hergestellt, indem die Theorie der begrifflichen Graphen in die Entwicklung einer Kontextuellen Logik eingebunden wird.

Unter Kontextueller Logik soll ein Ansatz verstanden werden, der auf der Grundlage formaler Kontexte die traditionelle philosophische Logik mathematisiert. Diese war bis zum Beginn dieses Jahrhunderts nach den Hauptfunktionen des Denkens gegliedert in die Lehre vom Begriff, die Lehre vom Urteil und die vom Schluß (vgl. [Ka88], [Wi97]). Schon 1981 wurde in der Formalen Begriffsanalyse das philosophische Verständnis von Begriffen als Einheiten des Denkens mit Extension und Intension auf der Grundlage von formalen Kontexten mathematisiert (vgl. [Wi82]). Daraus entstand eine reichhaltige mathematische Theorie, die wir als mathematisierte Lehre vom Begriff auffassen können (vgl. [GW96]).

Urteile im Sinne der traditionellen philosophischen Logik sind für wahr gehaltene Aussagen, mit denen Verbindungen von Begriffen hergestellt werden (vgl. [Wi96]). Verstehen wir die begrifflichen Graphen als solche Verbindungen von Begriffen eines formalen Kontextes (wir nennen sie dann Begriffsgraphen), so können wir die Theorie der Begriffsgraphen als mathematisierte Lehre vom Urteil entwickeln und uns dabei die bereits weit entwickelte mathematische Theorie der Begriffe, die Formale Begriffsanalyse, zu nutze machen (vgl. [Wi97]). Die Untersuchung der Inferenzen bildet den Anfang einer Lehre vom Schluß.

Im Rahmen der Kontextuellen Logik soll die Theorie der Begriffsgraphen formaler Kontexte auf zweifache Weise entwickelt werden: einmal als mathematische Strukturtheorie, bei der Begriffsgraphen formaler Kontexte Realisierungen von abstrakten Begriffsgraphen sind (dies hat R. Wille in [Wi97] begonnen), und zum anderen als Theorie mathematischer Modelle einer syntaktischen Sprache, bei der Begriffsgraphen formaler Kontexte semantische Interpretationen von syntaktischen Strukturgraphen sind, womit der Rahmen für diese Arbeit abgesteckt ist.

Zu diesem Zweck werden in dieser Arbeit zunächst Syntax und Semantik der Begriffsgraphen definiert sowie die von J.F. Sowa definierten Herleitungsregeln und der von M. Chein und M.-L. Mugnier entwickelte Begriff der Projektionen auf die Begriffsgraphen angepaßt. Um eine Vollständigkeit des Kalküls zu erreichen, müssen die Herleitungsregeln allerdings erweitert werden, so daß der Begriff der Projektionen für die Begriffsgraphen nicht mehr trägt. Statt dessen wird mit dem sogenannten Standardmodell eines Begriffsgraphen ein Werkzeug vorgestellt, mit dem Inferenzfragen durch begriffsanalytische Methoden leicht handhabbar werden.

Damit können nicht nur Syntax und Semantik der Begriffsgraphen getrennt und ein modelltheoretisch abgesicherter Folgerungsbegriff geprägt, sondern auch eine Semantik bereitgestellt werden, die die Einbindung in Begriffliche Wissenssysteme auf einfache Weise ermöglicht. Und so ist diese Arbeit ein erster Schritt für die Weiterentwicklung der mathematischen Grundlagen der Begrifflichen Wissensverarbeitung und einer Theorie Begrifflicher Wissenssysteme, indem sie die Ergebnisse und Methoden der Formalen Begriffsanalyse mit der in der Praxis der Wissensverarbeitung bereits erfolgreich angewandten Theorie der begrifflichen Graphen zu einer Kontextuellen Logik verknüpft, die zu der grundlegenden Sprache der Begrifflichen Wissensverarbeitung ausgebaut werden soll.

2 Syntax der Sprache der Begriffsgraphen

2.1 Definition der Syntax

In diesem Abschnitt sollen Begriffsgraphen als syntaktische Konstrukte eingeführt werden, deren Semantik in relationalen Kontexten im nächsten Abschnitt erklärt wird. Wir beginnen mit einem Alphabet von Namen, die durch Taxonomien geordnet sind.

Definition 1 *Das* ALPHABET *der Begriffsgraphen ist ein Tupel* $\mathcal{A} := (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$, *wobei* $(\mathcal{C}, \leq_{\mathcal{C}})$ *eine endliche geordnete Menge ist, deren Elemente* BEGRIFFSNAMEN *heißen,* $\mathcal{G}$ *eine endliche Menge ist, deren Elemente* GEGENSTANDSNAMEN *heißen und* $(\mathcal{R}, \leq_{\mathcal{R}})$ *eine Vereinigung von endlichen geordneten Mengen* $(\mathcal{R}_k, \leq_{\mathcal{R}_k})_{k=1,\ldots,n}$ *(für ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 1$*) ist, deren Elemente* RELATIONSNAMEN *heißen.*

Für die folgenden Kapitel wollen wir stets nur Begriffsgraphen über einem festen Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ betrachten.

Haben wir durch die Mengen $\mathcal{C}, \mathcal{G}$ und R das Alphabet einer formalen Sprache gegeben, so wollen wir nun erklären, was die "well-formed formulas" dieser Sprache sein sollen. Aus Sicht der philosophischen Logik geben diese well-formed formulas gerade die Syntax der hier betrachteten Urteile wieder. Diese Syntax der Urteile wird durch Begriffsgraphen gegeben, die auf der mathematischen Struktur eines gerichteten Multi-Hypergraphen basieren:

Definition 2 *Ein* GERICHTETER MULTI-HYPERGRAPH (VOM TYP n) *ist ein Tupel* (V, E, ν), *bei dem* V *und* E *endliche Mengen sind, deren Elemente Ecken bzw. Kanten genannt werden, und* $\nu : E \to \bigcup_{k=1}^{n} V^k$ *(mit* $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$*) eine Abbildung ist.*

Für eine Kante $e \in E$ *mit* $\nu(e) = (v_1, \ldots, v_k)$ *definieren wir* $|e| := k$ *und schreiben* $\nu(e)\big|_i := v_i$. *Außerdem sei für* $v \in V$ *die Teilmenge* $E_v \subseteq E$ *die Menge der mit* v *inzidenten Kanten, also* $E_v := \{e \in E \mid \exists i = 1, \ldots, n \colon \nu(e)\big|_i = v\}$.

Definition 3 *Ein* BEGRIFFSGRAPH (VOM TYP n) *über dem Alphabet* $\mathcal{A} := (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ *ist eine Struktur* $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$, *bei der*

- (V, E, ν) *ein endlicher gerichteter Multi-Hypergraph (vom Typ* n*) ist,*
- $\kappa : V \cup E \to \mathcal{C} \cup \mathcal{R}$ *eine Abbildung ist, für die* $\kappa(V) \subseteq \mathcal{C}$ *und* $\kappa(E) \subseteq \mathcal{R}$ *ist und für alle* $e \in E$ *gilt* $\kappa(e) \in \mathcal{R}_{|e|}$,
- $\rho \colon V \to \mathfrak{P}(\mathcal{G}) \backslash \{\emptyset\}$ *eine Abbildung ist,*
- θ *eine Äquivalenzrelation auf* V *ist, für die für alle* $v_1, v_2 \in V$ *mit* $v_1 \theta v_2$ *gilt* $\rho(v_1) = \rho(v_2)$.

Für $e \in E$ mit $\nu(e) = (v_1, \ldots, v_k)$ wollen wir folgende Schreibweise einführen:

$$\rho(e) := \rho(v_1) \times \ldots \times \rho(v_k).$$

Mit Begriffsgraphen erfassen wir die Struktur der einfachen begrifflichen Graphen von J.F. Sowa: Die Abbildung ν gibt an, welche Ecken aus V durch eine Kante aus E in welcher Reihenfolge verbunden werden. Die Abbildung κ ordnet jedem der Kästen einen Begriffsnamen (in Großbuchstaben geschrieben) und jedem Kreis einen Relationsnamen zu, entspricht also der Abbildung *type* bei J.F. Sowa [So84]. Durch die Abbildung ρ werden den Begriffsnamen Referenzen, also Mengen von Gegenstandsnamen zugewiesen, sie entspricht Sowas Abbildung *referent*. Allerdings erlauben wir hier als Referenzen eines Begriffsnamens beliebige Gegenstandsmengen (statt nur einelementige Mengen, wie Chein/Mugnier), nicht jedoch *generic markers*. Durch die Äquivalenzrelation θ werden die *coreference links* formalisiert, die nur zwischen gleich instanzierten Begriffen gesetzt werden dürfen.

Zwei Begriffsgraphen, die bis auf Umbenennung der Ecken und Kanten gleich sind, wollen wir isomorph nennen:

Definition 4 *Zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_1, \rho_1, \theta_1)$ und $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_2, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ heißen* ISOMORPH, *wenn es bijektive Abbildungen $\pi_V\colon V_2 \to V_1$ und $\pi_E\colon E_2 \to E_1$ gibt mit*

- *für alle $e \in E_2$ ist $|e| = |\pi_E(e)|$ und für alle $i = 1, \ldots, |e|$ gilt* $\pi_V(\nu_2(e)\big|_i) = \nu_1(\pi_E(e))\big|_i$,
- *für alle $v \in V_2$ ist $\kappa_2(v) = \kappa_1(\pi_V(v))$,*
- *für alle $e \in E_2$ ist $\kappa_2(e) = \kappa_1(\pi_E(e))$ und*
- *für alle $v \in V_2$ ist $\rho_2(v) = \rho_1(\pi_V(v))$.*
- *für alle $v, w \in V_2$ gilt $(v, w) \in \theta_2 \iff (\pi_V(v), \pi_V(w)) \in \theta_1$.*

2.2 Inferenzen von Begriffsgraphen

Bei Sowa und Chein/Mugnier werden Inferenzen von begrifflichen Graphen auf zwei Weisen beschrieben: Zum einen werden Herleitungsregeln für begriffliche Graphen angegeben, die im wesentlichen den Peirceschen Regeln für Existentielle Graphen entsprechen, und zum anderen werden diese Herleitungsregeln durch sogenannte Projektionen, also Graphenhomomorphismen, charakterisiert. Wir wollen hier in weitgehender Analogie die Definitionen für unsere Begriffsgraphen vorstellen. Wir beginnen mit der Definition von Unterbegriffsgraphen und der Projektion zwischen Begriffsgraphen:

Definition 5 *Einen Begriffsgraph $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ nennt man* UNTERBEGRIFFSGRAPH *eines Begriffsgraphen $\mathfrak{G}' := (V', E', \nu', \kappa', \rho', \theta')$ wenn $V \subseteq V'$ und $E \subseteq E'$ gilt, und die Abbildungen ν', κ' und ρ' Fortsetzungen von ν, κ und ρ sind.*

Den Begriff der Projektion von Begriffsgraphen definieren wir in Anlehnung an Sowas Projektionen (vgl. [So84]). Da diese allerdings (im Unterschied zum allgemein üblichen Gebrauch des Wortes) nicht surjektiv sind, benutzen wir dafür den Begriff der Quasiprojektionen und binden den Begriff der Projektion hier im üblichen Sinne an die Surjektivität:

Definition 6 *Für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_1, \rho_1, \theta_1)$ und $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_2, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ ist eine* PROJEKTION *von $\mathfrak{G}_2$ auf $\mathfrak{G}_1$ eine Vereinigung $\pi_V \dot\cup \pi_E$ von surjektiven Abbildungen $\pi_V\colon V_2 \to V_1$ und $\pi_E\colon E_2 \to E_1$, für die gilt*

- *für alle $e \in E_2$ ist $|e| = |\pi_E(e)|$ und für alle $i = 1, \ldots, |e|$ gilt* $\pi_V(\nu_2(e)\big|_i) = \nu_1(\pi_E(e))\big|_i$,

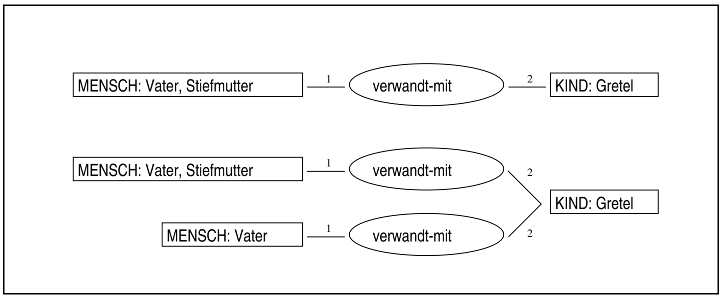


Abbildung 1: Gegenbeispiel zur Antisymmetrie der Projektion

- *für alle* $v \in V_2$ *ist* $\kappa_1(\pi_V(v)) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(v)$,
- *für alle* $e \in E_2$ *ist* $\kappa_1(\pi_E(e)) \leq_{\mathcal{R}} \kappa_2(e)$ *und*
- *für alle* $v \in V_2$ *ist* $\rho_1(\pi_V(v)) \supseteq \rho_2(v)$.

Eine Projektion von $\mathfrak{G}_2$ *auf einen Unterbegriffsgraphen von* $\mathfrak{G}_1$ *wird* QUASIPROJEKTION *von* $\mathfrak{G}_2$ *nach* $\mathfrak{G}_1$ *genannt.*

Mit diesen Begriffen können wir nun eine Quasiordnung festlegen:

Definition 7 *Für zwei Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}_2$ *und* $\mathfrak{G}_1$ *schreiben wir* $\mathfrak{G}_1 \lesssim \mathfrak{G}_2$, *wenn es eine Quasiprojektion von* $\mathfrak{G}_2$ *nach* $\mathfrak{G}_1$ *gibt.*

Lemma 8 *Die Relation* $\lesssim$ *bildet eine Quasiordnung auf der Klasse aller Begriffsgraphen über dem Alphabet* $(\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{G})$, *d. h. sie ist reflexiv und transitiv.*

Beweis: Offensichtlich ist die Relation $\lesssim$ reflexiv. Zu zeigen ist die Transitivität. Gilt $\mathfrak{G}_1 \lesssim \mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_2 \lesssim \mathfrak{G}_3$, so existieren für $(i,j) \in \{(2,1),(3,2)\}$ Quasiprojektionen $\pi_{V_{ij}} \dot\cup \pi_{E_{ij}}$ mit $\pi_{V_{ij}}\colon V_i \to V_j$ und $\pi_{E_{ij}}\colon E_i \to E_j$. Dann definieren wir $\pi_{V_{31}}\colon V_3 \to V_1$ durch $\pi_{V_{31}} := \pi_{V_{21}} \circ \pi_{V_{32}}$ und analog $\pi_{E_{31}} := \pi_{E_{21}} \circ \pi_{E_{32}}$.

Auch $\pi_{V_{31}} \dot\cup \pi_{E_{31}}$ ist eine Quasiprojektion, denn es gilt für alle $e \in E_3$ für alle $i = 1, \ldots, |e|$

$$\begin{aligned} \pi_{V_{31}}(\nu_3(e)\big|_i) &= \pi_{V_{21}}\pi_{V_{32}}(\nu_3(e)\big|_i) &&= \pi_{V_{21}}(\nu_2(\pi_{E_{32}}(e))\big|_i) \\ &= \nu_1\left((\pi_{E_{21}}\,\pi_{E_{32}}(e))\right)\big|_i &&= \nu_1(\pi_{E_{31}}(e))\big|_i \end{aligned}$$

und $\kappa_1(\pi_{E_{31}}(e)) = \kappa_1(\pi_{E_{21}}\pi_{E_{32}}(e)) \leq_{\mathcal{R}} \kappa_2(\pi_{E_{32}}(e)) \leq_{\mathcal{R}} \kappa_3(e)$. Ähnlich lassen sich die anderen Bedingungen für $\pi_{V_{31}}$ und $\pi_{E_{31}}$ nachrechnen. $\square$

Daß die Relation $\lesssim$ keine Ordnung, das heißt nicht auch antisymmetrisch ist, kann man z. B. an den Begriffsgraphen aus Abbildung 1 sehen, denn es gibt jeweils Quasiprojektionen von einem Begriffsgraphen zum anderen, sie sind aber nicht gleich.

Chein/Mugnier zeigen in [CM92], daß diese Quasiordnung $\lesssim$ einen Kalkül charakterisiert, den wir auch auf unsere Modifikation übertragen wollen. Daß diese Herleitungsregeln für unsere Begriffsgraphen allerdings nicht vollständig sind, werden wir im nächsten Kapitel mit Hilfe der Semantik zeigen.

Definition 9 *Gegeben seien zwei Begriffsgraphen* $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ *und* $\mathfrak{G}'$. *Wir definieren folgende Herleitungsregeln:*

1. *Gilt für* $\mathfrak{G}' := (V', E', \nu', \kappa', \rho', \theta')$ *die Bedingungen*
   - $V' = V\backslash\{v\} \,\dot\cup\, \{(v,1),(v,2)\}$ *für ein* $v \in V$,
   - $E' = E\backslash E_v \,\dot\cup\, E^v$ *mit*
     $E^v := \{(e,\delta) \mid e \in E_v,\ \delta \in \{1,2\}^{[e,v]}\}$ *wobei* $[e,v] := \{i \mid \nu(e)\big|_i = v\}$,
   - $\nu'\big|_{E\backslash E_v} = \nu\big|_{E\backslash E_v}$ *und*
     $$\nu'(e,\delta)\big|_i = \begin{cases} \nu(e)\big|_i & \textit{falls} \quad i \notin [e,v] \\ (v,\delta(i)) & \textit{falls} \quad i \in [e,v] \end{cases} \qquad \textit{für alle } (e,\delta) \in E^v,$$
   - $$\begin{array}{llll} \kappa'\colon & V' \cup E' & \to & \mathcal{C} \cup \mathcal{R} \\ & x & \mapsto & \kappa(x) \quad \textit{für alle } x \in V\backslash\{v\} \cup E\backslash E_v \\ & (v,j) & \mapsto & \kappa(v) \quad \textit{für } j = 1,2 \\ & (e,\delta) & \mapsto & \kappa(e) \quad \textit{für alle } (e,\delta) \in E^v, \end{array}$$
   - $\rho'\big|_{V\backslash\{v\}} = \rho\big|_{V\backslash\{v\}}$ *und* $\rho'(v,j) = \rho(v)$ *für* $j = 1,2$ *und*
   - $$\begin{array}{rcl} \theta' = (\theta \cap (V' \times V')) & \cup & \{((v,j),(v,j)) \mid j = 1,2\} \\ & \cup & \{((v,j),w) \mid j = 1,2 \textit{ und } (v,w) \in \theta\} \\ & \cup & \{(w,(v,j)) \mid j = 1,2 \textit{ und } (w,v) \in \theta\}, \end{array}$$

   dann sagen wir, daß $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* VERDOPPELN DER ECKE $v \in V$ *hervorgeht.*

2. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V', E, \nu, \kappa\big|_{V' \cup E}, \rho\big|_{V'}, \theta')$ *mit* $V' = V\backslash\{v\}$ *für ein* $v \in V$ *mit* $E_v = \emptyset$ *und* $\theta' = \theta \cap V' \times V'$, *so geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* WEGNEHMEN DER ISOLIERTEN ECKE $v \in V$ *hervor.*

3. *Gelten für den Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}' = (V, E', \nu', \kappa', \rho, \theta)$ *die Beziehungen* $E' = E\backslash\{e\} \,\dot\cup\, \{(e,1),(e,2)\}$ *für ein* $e \in E$, $\nu'\big|_{E\backslash\{e\}} = \nu\big|_{E\backslash\{e\}}$ *und* $\nu'(e,j) = \nu(e)$ *für* $j = 1,2$, $\kappa'\big|_{V\cup(E\backslash\{e\})} = \kappa\big|_{V\cup(E\backslash\{e\})}$ *und* $\kappa'(e,j) = \kappa(e)$ *für* $j = 1,2$, *so geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* VERDOPPELN DER KANTE $e \in E$ *hervor.*

4. *Gilt* $\mathfrak{G}' = (V, E\backslash\{e\}, \nu\big|_{E'}, \kappa\big|_{V\cup E'}, \rho, \theta)$ *für ein* $e \in E$, *dann sagen wir,* $\mathfrak{G}'$ *geht aus* $\mathfrak{G}$ *durch* WEGNEHMEN DER KANTE $e \in E$ *hervor.*

5. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa', \rho, \theta)$ *sowie* $\kappa'\big|_{(V\backslash\{v\})\cup E} = \kappa\big|_{(V\backslash\{v\})\cup E}$ *und* $\kappa'(v) = c$ *mit* $c \in \mathcal{C}$ *und* $\kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c$ *für eine Ecke* $v \in V$, *dann geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* VERALLGEMEINERN DES BEGRIFFSNAMENS $\kappa(v)$ *hervor.*

6. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa', \rho, \theta')$ *mit* $\kappa'\big|_{V\cup(E\backslash\{e\})} = \kappa\big|_{V\cup(E\backslash\{e\})}$ *und* $\kappa'(e) = R$ *mit* $\kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} R$ *für eine Kante* $e \in E$, *dann geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* VERALLGEMEINERN DES RELATIONSNAMENS $\kappa(e)$ *hervor.*

7. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa, \rho', \theta')$ *mit* $\rho'\big|_{V\backslash\{v\}} = \rho\big|_{V\backslash\{v\}}$ *und* $\rho'(v) = A$ *mit* $\emptyset \neq A \subseteq \rho(v)$ *für eine Ecke* $v \in V$ *sowie* $\theta' = \theta \cap (V\backslash\{v\} \times V\backslash\{v\}) \cup \{(v,v)\}$, *dann geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* EINSCHRÄNKEN DER REFERENZ $\rho(v)$ *hervor.*

8. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta')$ *und (folgt aus* $(v_1, v_2) \in \theta'$ *für alle* $v_1, v_2 \in V$ *auch* $\rho(v_1) = \rho(v_2)$*), dann geht* $\mathfrak{G}'$ *aus* $\mathfrak{G}$ *durch* VERÄNDERN DER ÄQUIVALENZRELATION *hervor.*

9. *Ist* $\mathfrak{G}'$ *isomorph zu* $\mathfrak{G}$, *dann geht er durch* ERSTELLEN EINES ISOMORPHEN BEGRIFFSGRAPHEN *aus ihm hervor.*

Der Begriffsgraph $\mathfrak{G}_2$ heißt aus $\mathfrak{G}_1$ $\Vdash$-HERLEITBAR, wenn $\mathfrak{G}_2$ in endlich vielen Schritten durch die Herleitungsregeln $1-9$ aus $\mathfrak{G}_1$ hervorgeht. Wir schreiben dann $\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_2$.

Auch diese Relation $\Vdash$ ist reflexiv, transitiv, aber nicht antisymmetrisch, bildet also eine Quasiordnung auf der Klasse der Begriffsgraphen über dem Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{G})$. Wir zeigen, daß sie genau der Relation $\lesssim$ entspricht:

Satz 10 *Für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ über dem Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \lesssim \mathfrak{G}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_2.$$

Beweis:
"$\Leftarrow$": Aufgrund der Transitivität von $\lesssim$ müssen wir nur zeigen, daß für jeden Begriffsgraphen $\mathfrak{G}'$, der durch einmalige Anwendung einer Herleitungsregeln aus einem Begriffsgraphen $\mathfrak{G}$ hervorgeht, gilt $\mathfrak{G} \lesssim \mathfrak{G}'$. Dazu geben wir für jede nicht völlig offensichtliche Herleitungsregel die Quasiprojektion $\pi_V \dot\cup \pi_E$ von $\mathfrak{G}'$ nach $\mathfrak{G}$ an.

1. *Verdoppeln einer Ecke.*

$$\begin{array}{llcll} \pi_V\colon & V\backslash\{v\} \cup \{(v,1),(v,2)\} & \to & V & \\ & \quad\quad \tilde{v} & \mapsto & \tilde{v} & \text{für } \tilde{v} \in V\backslash\{v\} \\ & \quad\quad (v,j) & \mapsto & v & \text{für } j = 1,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \pi_E\colon & E\backslash E_v \cup E^v & \to & E & \\ & \quad e & \mapsto & e & \text{für } e \in E\backslash E_v \\ & \quad (e,\delta) & \mapsto & e & \text{für } (e,\delta) \in E^v \end{array}$$

3. *Verdoppeln einer Kante.*

$$\pi_V = id_V \text{ und } \begin{array}{llcll} \pi_E\colon & E\backslash\{e\} \cup \{(e,1),(e,2)\} & \to & E & \\ & \quad\quad \tilde{e} & \mapsto & \tilde{e} & \text{für } \tilde{e} \in E\backslash\{e\} \\ & \quad\quad (e,j) & \mapsto & e & \text{für } j = 1,2 \end{array}$$

5. *Verallgemeinern des Begriffsnamen $\kappa(v)$.*

   Wegen $\kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c$ ist $id_V \dot\cup id_E$ eine Quasiprojektion.

6. *Verallgemeinern des Relationsnamen $\kappa(e)$.*

   Wegen $\kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} R$ ist $id_V \dot\cup id_E$ eine Quasiprojektion.

7. *Referenzen $\rho(v)$ einschränken.*

   Wegen $A \subseteq \rho(v)$ ist $id_V \dot\cup id_E$ eine Quasiprojektion.

"$\Rightarrow$": Es seien $\mathfrak{G}_1 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_1, \rho_1, \theta_1)$ und $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_2, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ zwei Begriffsgraphen mit $\mathfrak{G}_1 \lesssim \mathfrak{G}_2$, d. h. es gibt eine Quasiprojektion $\pi_{V_{21}} \dot\cup \pi_{E_{21}}$ von $\mathfrak{G}_2$ auf einen Unterbegriffsgraphen von $\mathfrak{G}_1$. Zu zeigen ist, daß man $\mathfrak{G}_2$ aus $\mathfrak{G}_1$ herleiten kann. Dazu bilden wir eine Kette $\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_3 \Vdash \ldots \Vdash \mathfrak{G}_{10} \Vdash \mathfrak{G}_2$ derart, daß wir sukzessive Projektionen $\pi_{V_{21}} \dot\cup \pi_{E_{21}}, \pi_{V_{23}} \dot\cup \pi_{E_{23}}, \ldots, \pi_{V_{2\,10}} \dot\cup \pi_{E_{2\,10}}$ angeben können, so daß $\pi_{V_{2\,10}} \dot\cup \pi_{E_{2\,10}}$ ein Isomorphismus ist.

“$\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_3$”:

Durch wiederholtes Anwenden von Regel 1 (*Ecken verdoppeln*) und Regel 9 (*isomorphen Begriffsgraphen erstellen*, d. h. Umbenennen der Ecken und Kanten) kann man aus $\mathfrak{G}_1$ den Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_3 := (V_3, E_3, \nu_3, \kappa_3, \rho_3, \theta_3)$ mit genügend vielen Ecken erhalten, so daß $\pi_{V_{23}}$ injektiv ist. Für diesen Begriffsgraphen gilt:

- $V_3 = \{(v,w) \mid \pi_{V_{21}}(w) = v,\ w \in V_2\} \dot\cup \{(v,\infty) \mid v \in V_1 \backslash \pi_{V_{21}}(V_2)\}$,
- $E_3 = \{(e,(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)) \mid e \in E_1 \text{ mit } \nu_1(e) = (v_1,\dots,v_k)$
  $\text{und } (v_i,w_i) \in V_3 \text{ für } i = 1,\dots,k\}$,
- $\nu_3(e,(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)) = ((v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k))$
  für alle $(e,(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)) \in E_3$,
- $\kappa_3(v,w) = \kappa_1(v)$ für alle $(v,w) \in V_3$,
- $\kappa_3(e,(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)) = \kappa_1(e)$
  für alle $(e,(v_1,w_1),\dots,(v_k,w_k)) \in E_3$,
- $\rho_3(v,w) = \rho_1(v)$ für alle $(v,w) \in V_3$,
- $\theta_3 = \{((v,w),(u,y)) \in V_3 \times V_3 \mid (v,u) \in \theta_1\}$.

Da $\pi_{V_{21}} \dot\cup \pi_{E_{21}}$ eine Quasiprojektion ist, ist auch die Abbildung $\pi_{V_{23}} \dot\cup \pi_{E_{23}}$ mit

$$\begin{array}{rccl} \pi_{V_{23}}: & V_2 & \to & V_3 \\ & w & \mapsto & (\pi_{V_{21}}(w), w) \text{ und} \\ \pi_{E_{23}}: & E_2 & \to & E_3 \\ & f & \mapsto & \big(\pi_{E_{21}}(f), (\pi_{V_{21}}(w_1), w_1), \dots, (\pi_{V_{21}}(w_k), w_k)\big), \\ & & & \text{falls } \nu_2(f) = (w_1,\dots,w_k) \end{array}$$

eine Quasiprojektion, und $\pi_{V_{23}}$ ist injektiv.

“$\mathfrak{G}_3 \Vdash \mathfrak{G}_4$”:

Durch wiederholtes Anwenden von Regel 3 (*Kanten verdoppeln*) und Regel 9 (*Kanten umbenennen*) kann man aus $\mathfrak{G}_3$ den Graphen $\mathfrak{G}_4 := (V_4, E_4, \nu_4, \kappa_4, \rho_4, \theta_4)$ mit genügend vielen Kanten herleiten, so daß $\pi_{E_{24}}$ injektiv ist, d. h., für den folgendes gilt:

- $V_4 = V_3$,
- $E_4 = \{(g,f) \mid f \in E_2, \pi_{E_{23}}(f) = g\} \dot\cup \{(g,\infty) \mid g \in E_3 \backslash \pi_{E_{23}}(E_2)\}$,
- $\nu_4(g,f) = \nu_3(g)$ für alle $(g,f) \in E_4$,
- $\kappa_4\big|_{V_4} = \kappa_3\big|_{V_4}$ und $\kappa_4(g,f) = \kappa_3(g)$ für alle $(g,f) \in E_4$,
- $\rho_4 = \rho_3$ und
- $\theta_4 = \theta_3$.

So erhält man die injektiven Abbildungen $\pi_{V_{24}}: V_2 \to V_4$ mit $\pi_{V_{24}} := \pi_{V_{23}}$ und $\pi_{E_{24}}: E_2 \to E_4$ mit $\pi_{E_{24}}(f) = (\pi_{E_{23}}(f), f)$. Sie bilden eine Quasiprojektion von $\mathfrak{G}_2$ nach $\mathfrak{G}_4$, denn es gelten für alle $f \in E_2$ mit $\nu_2(f) = (w_1,\dots,w_k)$ die Gleichungsketten

$$\begin{aligned} \pi_{V_{24}}(\nu_2(f)\big|_i) = \pi_{V_{24}}(w_i) &= (\pi_{V_{21}}(w_i), w_i) \\ &= \nu_3(\pi_{E_{23}}(f))\big|_i = \nu_4(\pi_{E_{23}}(f), f)\big|_i = \nu_4(\pi_{E_{24}}(f))\big|_i \end{aligned}$$

und

$$\kappa_4(\pi_{E_{24}}(f)) = \kappa_3(\pi_{E_{23}}(f)) = \kappa_1(\pi_{E_{21}}(f)) \leq_{\mathcal{R}} \kappa_2(f),$$

denn $\pi_{V_{21}} \dot\cup \pi_{E_{21}}$ ist eine Quasiprojektion. Außerdem gelten für alle $w \in V_2$ die Beziehungen

$$\kappa_4(\pi_{V_{24}}(w)) = \kappa_3(\pi_{V_{23}}(w)) = \kappa_1(\pi_{V_{21}}(w)) \leq_C \kappa_2(w)$$

und

$$\rho_4(\pi_{V_{24}}(w)) = \rho_3(\pi_{V_{23}}(w)) = \rho_1(\pi_{V_{21}}(w)) \supseteq \rho_2(w).$$

Den zu $\mathfrak{G}_2$ isomorphen Unterbegriffsgraphen $\pi_{24}(\mathfrak{G}_2)$ von $\mathfrak{G}_4$ nennen wir im folgenden $\mathfrak{G}_2{}' = (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_2', \rho_2', \theta_2')$. Es gilt $V_2' \subseteq V_4$ und $E_2' \subseteq E_4$, sowie $\nu_2' = \nu_4\big|_{E_2'}$.

"$\mathfrak{G}_4 \Vdash \mathfrak{G}_5$":
Man erhält den Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_5 := (V_4, E_2', \nu_2', \kappa_4\big|_{V_4 \,\cup\, E_2'}, \rho_4, \theta_4)$ durch mehrfaches Anwenden von Regel 4, wenn man alle Kanten aus $E_4 \backslash E_2'$ wegnimmt.

"$\mathfrak{G}_5 \Vdash \mathfrak{G}_6$":
Mehrfaches Anwenden von Regel 2 ergibt den Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_6 := (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_4\big|_{V_2' \,\cup\, E_2'}, \rho_4\big|_{V_2'}, \theta_4 \cap V_2' \times V_2')$, wenn man alle Ecken aus $V_4 \backslash V_2'$ wegnimmt.

"$\mathfrak{G}_6 \Vdash \mathfrak{G}_7$":
Durch Regel 5 kann man die Begriffe entsprechend verallgemeinern und erhält $\mathfrak{G}_7 := (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_2'\big|_{V_2'} \cup \kappa_4\big|_{E_2'}, \rho_4\big|_{V_2'}, \theta_4 \cap V_2' \times V_2')$.

"$\mathfrak{G}_7 \Vdash \mathfrak{G}_8$":
Durch Regel 6 werden die Relationen entsprechend verallgemeinert, und man erhält $\mathfrak{G}_8 := (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_2', \rho_4\big|_{V_2'}, \theta_4 \cap V_2' \times V_2')$.

"$\mathfrak{G}_8 \Vdash \mathfrak{G}_9$":
Äquivalenzrelation θ_4 einschränken (Regel 8) ergibt den Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_9 := (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_2', \rho_4\big|_{V_2'}, \theta_2')$.

"$\mathfrak{G}_9 \Vdash \mathfrak{G}_{10}$":
Durch Einschränken der Referenzen (Regel 7) erhält man $\mathfrak{G}_{10} := (V_2', E_2', \nu_2', \kappa_2', \rho_2', \theta_2') = \mathfrak{G}_2{}'$.

"$\mathfrak{G}_{10} \Vdash \mathfrak{G}_2$":
Durch Anwenden von Regel 9 übergehen auf den zu $\mathfrak{G}_{10}$ isomorphen Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_2$.

Folglich gilt $\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_2$. $\square$

Mit diesem Satz haben wir eine vollständige Entsprechung der Quasiordnung $\lesssim$ mit der $\Vdash$-Herleitbarkeit. Eine solche Charakterisierung der $\Vdash$-Herleitungsregeln durch Projektionen hat sich in der Praxis als sehr brauchbar erwiesen, denn durch sie können graphentheoretische Algorithmen für die Inferenzfrage aktiviert werden. Zwar ist das Problem, ob es für zwei begriffliche Graphen eine Projektion gibt, im allgemeinen Fall NP-vollständig (cf. [CM92]), doch für bestimmte Klassen (z.B. Baumstrukturen) nur polynomial. Für diese Klasse sind die Projektionen auch für eine effiziente Implementation fruchtbar gemacht worden, etwa in dem CORALI-Systems des LIRMM in Montpellier (vgl. dazu [Ch97]).

Um zu klären, ob diese Herleitungsregeln allerdings für Begriffsgraphenüberhaupt einen geeigneten Folgerungsbegriff beschreiben, müssen wir eine Semantik der Begriffsgraphen einführen und überprüfen, ob sie einen vollständigen Kalkül liefern.

3 Semantik der Begriffsgraphen

3.1 Definition der Semantik

Meist wird die Semantik der begrifflichen Graphen durch eine Übersetzung in die Prädikatenlogik erklärt (so etwa [So84] oder [CM92]). In [CM96] haben Chein/Mugnier auch direkt eine (extensionale) mengensprachliche Semantik definiert, die sie für einige Beweise und Begriffe auch aktivieren. Wir werden dies in einer kontextuellen Semantik kombinieren. Das bedeutet, wir werden die formalen Elemente (die Begriffs-, Gegenstands- und Relationsnamen) durch Begriffe, Gegenstände und Relationen eines formalen Kontextes erklären. Eine solche Semantik ist zwar formal aufwendiger und somit "umständlicher" als eine rein extensionale, hat aber durch ihre größere Reichhaltigkeit für die Wissensverarbeitung und -kommunikation aus verschiedenen Gründen gewichtige Vorteile: Da die zentralen Bestandteile der Begriffsgraphen Begriffe sind, sollten diese in der Semantik in einer zwar formalen, aber auch reichhaltigen Weise beschrieben werden. Daher bietet es sich an, sie im Sinne der Formalen Begriffsanalyse zu verstehen, denn diese Theorie stellt eine fruchtbare Mathematisierung des philosophischen Verständnisses von Begriffen als Einheiten des Denkens mit Extension und Intension dar (vgl. [Wi96]). Für die Formale Begriffsanalyse zentral, daß diese beiden Komponenten Extension und Intension auf der Basis eines gegebenen formalen Kontextes spezifiziert werden. Eine solche kontextuelle Sicht von Begriffen wird durch den Peirceschen Pragmatismus nahegelegt, demgemäß wir nur in beschränkten Kontexten denken und argumentieren können, in denen wir immer auf Vorverständnis und Konventionen angewiesen sind (vgl. [Wi97]). In zahlreichen Anwendungsprojekten haben sich die formalen Kontexte als nützliche Ausgangsformalisierung für die Repräsentation und Kommuniaktion anspruchsvollen Wissens erwiesen, weil sie auf zum einen nahe genug an der Realität sind, zum anderen durch ihre Formalisierung eine effiziente formale Verarbeitung des Wissens erlauben.

Da in herkömmlichen formalen Kontexten keine Relationen zwischen Gegenständen formalisiert werden können, müssen sie durch relationale Strukturen angereichert werden. Für diesen Zweck definierte R. Wille in [Wi97] Potenzkontextfamilien, in denen Relationen als Begriffe von Kontexten beschrieben werden, deren Extensionen Tupel von Gegenständen sind. Wir werden hier zunächst mit relationalen Kontexten einen etwas einfachereren Formalismus wählen. Der Zusammenhang mit den Potenzkontextfamilienwird in Kapitel 6 ausführlich dargestellt. Wir beginnen mit der Definition von relationalen Kontexten, wie sie in [Pri96] erstmals vorgeschlagen wurde:

Definition 11 *Ein formaler Kontext* (G, M, I)*, zusammen mit einer Vereinigung* $\mathfrak{R} := \bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{R}_k$ *von Mengen k-stelliger Relationen auf der Gegenstandsmenge, wird* RELATIONALER KONTEXT (VOM TYP n) *genannt und mit* $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$ *bezeichnet. Der Begriffsverband* $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ *heißt auch* BEGRIFFSVERBAND VON $\mathbb{K}$ *und wird mit* $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ *bezeichnet.*

Wenn wir nun Begriffsgraphen (vom Typ n) über einem relationalen Kontext (vom Typ n) interpretieren, wollen wir als Ordnung auf den Mengen $\mathfrak{R}_k$ die Mengeninklusion betrachten und die Definiton so anlegen, daß über die Entsprechung der Typen nichts explizit gesagt werden muß.

In der folgenden Definition stellen wir nun durch die Kontextinterpretation das verbindende Glied zwischen den Begriffsgraphen als syntaktischen Konstruktuen und den relationalen Kontexten her:

Definition 12 *Für ein Alphabet $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ und einen relationalen Kontext $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$ heißt die Vereinigung $\iota := \iota_{\mathcal{C}} \dot\cup \iota_{\mathcal{G}} \dot\cup \iota_{\mathcal{R}}$ der Abbildungen $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, $\iota_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \to G$ und $\iota_{\mathcal{R}}: \mathcal{R} \to \mathfrak{R}$ eine* $\mathbb{K}$-INTERPETATION *von $\mathcal{A}$, wenn $\iota_{\mathcal{C}}$ und $\iota_{\mathcal{R}}$ ordnungserhaltend sind und für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $\iota_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_k) \subseteq \mathfrak{R}_k$. Das Tupel $(\mathbb{K}, \iota)$ heißt dann* KONTEXTINTERPRETATION *von $\mathcal{A}$.*

Für einen Begriffsgraphen $\mathfrak{G}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}$ heißt das Tupel $(\mathbb{K}, \iota)$ auch KONTEXTINTERPRETATION VON $\mathcal{A}$ FÜR $\mathfrak{G}$.

Durch die Interpretation ι wird den syntaktischen Elementen (Begriffs-, Gegenstands- und Relationsnamen) des Begriffsgraphen Begriffe, Gegenstände und Relationen eines relationalen Kontextes zugeordnet. Interpretierte Begriffsgraphen können wir somit als Urteile in einem relationalen Kontext auffassen. Daß eine solche Zuordnung notwendig ist, betont auch Sowa in einer allgemeinen Einführung über die Komponenten der Logik, wo er schreibt:

> *"To make meaningful statements, the logic must have a theory of reference that determines how the constants and variables are associated with things in the universe of discourse."* [So98, S. 27]

Dabei suchen wir die Entsprechungen nicht, wie man Sowa interpretieren könnte, in der "realen Welt", sondern betrachten den relationalen Kontext als Formalisierung des *universe of discourse*. Nur über einen solchen explizit angegebenen formalisierten Ausschnitt der Welt wollen wir Aussagen machen, nicht über ein nicht greifbares Ganzes. Diese Beschränkung auf formale Kontexte hat sich in der Formalen Begriffsanalyse als hilfreich erwiesen, da die Reduktionen und auch Interpretationen, die bei jeder Formalisierung vollzogen werden müssen, auf diese Weise explizit ausgewiesen und somit diskutierbar werden.

Durch die Zuordnung der Namen zu Elementen eines relationalen Kontextes können wir nun festlegen, wann wir ein solches Urteil gültig nennen wollen. Daß der Gültigkeitsbegriff dabei nur kontextgebunden definiert werden kann, ergibt sich aus der generellen Kontextbezogenheit des Ansatzes.

Definition 13 *Der Begriffsgraph $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ heißt* GÜLTIGER BEGRIFFSGRAPH *von $(\mathbb{K}, \iota)$, wenn*

- *für alle $v \in V$ gilt $\iota_{\mathcal{G}}\rho(v) \subseteq Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa(v))$* (Eckenbedingung)
- *für alle $e \in E$ gilt $\iota_{\mathcal{G}}\rho(e) \subseteq \iota_{\mathcal{R}}\kappa(e)$* (Kantenbedingung).

Wir sagen dann auch, $\mathfrak{G}$ GILT *in $(\mathbb{K}, \iota)$, und $(\mathbb{K}, \iota)$ heißt ein* MODELL FÜR $\mathfrak{G}$.

(Dabei meint die Schreibweise $\iota_{\mathcal{G}}\rho(e)$ für $\nu(e) = (v_1, \ldots, v_k)$ das direkte Produkt $\iota_{\mathcal{G}}\rho(v_1) \times \ldots \times \iota_{\mathcal{G}}\rho(v_k)$.)

Die gültigen Begriffsgraphen eines Kontextes $\mathbb{K}$ nennen wir zuweilen auch die Begriffsgraphen eines Kontextes. In diesem Zusammenhang haben Begriffsgraphen eine eher semantische Rolle, d.h. sie werden nicht als syntaktische Konstrukte, sondern eher im Sinne der philosophischen Logik als gültige Urteile gedacht, bei denen Trennung von Syntax und Semantik nicht im Vordergrund steht.

Es sei angemerkt, daß jeder formale Kontext bei geeigneter Wahl der Relationen und der Interpretation zu einem Modell eines Begriffsgraphen ergänzt werden kann: Für einen gegebenen Begriffsgraphen $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ und einen formalen Kontext $\mathbb{K} := (G, M, I)$ können wir nämlich zu jeder Abbildung $\iota_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \to G$ eine ordnungserhaltende Abbildung $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit

$$\iota_{\mathcal{C}}(c) := \bigvee \left\{ \left(\iota_{\mathcal{G}}\rho(v)^{II}, \iota_{\mathcal{G}}\rho(v)^{I}\right) \mid v \in V,\ \kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c \right\}$$

konstruieren, die die Eckenbedingung erfüllt. Im Extremfall werden alle Begriffsnamen durch den Allbegriff interpretiert. Wenn man nun die Relationen entsprechend wählt und richtig zuordnet, erhält man ein Modell für $\mathfrak{G}$. Dies zeigt, daß die Suche nach einem geeigneten Modell keine allein formale Frage, sondern auch eine inhaltliche ist.

3.2 Standardmodell eines Begriffsgraphen

Interessant ist für jeden Begriffsgraphen das Modell, in dem genau die Informationen des Begriffsgraphen codiert werden, sein Standardmodell:

Definition 14 *Für den Begriffsgraphen $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ über dem Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ sei das* Standardmodell *von $\mathfrak{G}$ definiert als der relationale Kontext $\mathbb{K}^{\mathfrak{G}} := ((\mathcal{G}, \mathfrak{R}^{\mathfrak{G}}), \mathcal{C}, I)$ zusammen mit der Interpretation $\iota^{\mathfrak{G}} := \iota_{\mathcal{C}} \dot\cup \iota_{\mathcal{G}} \dot\cup \iota_{\mathcal{R}}$. Dabei ist $\iota_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ mit $\iota_{\mathcal{C}}(c) := (c^I, c^{II})$, $\iota_{\mathcal{G}} := id_{\mathcal{G}}$, $\mathfrak{R}^{\mathfrak{G}} := \iota_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$, die Inzidenzrelation $I \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{C}$ und die Abbildung $\iota_{\mathcal{R}}$ so definiert, daß für alle $g \in \mathcal{G}$, $(g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{G}^k$, $c \in \mathcal{C}$ und $R \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\begin{array}{rcll} (g, c) \in I & :\Longleftrightarrow & \exists\, v \in V: & \kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c \quad \textit{und}\ \ g \in \rho(v) \\ (g_1, \ldots, g_k) \in \iota_{\mathcal{R}}(R) & :\Longleftrightarrow & \exists\, e \in E: & \kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} R \ \ \textit{und}\ (g_1, \ldots, g_k) \in \rho(e). \end{array}$$

Daß dieses Standardmodell tatsächlich ein Modell für $\mathfrak{G}$ ist, läßt sich leicht nachweisen:

Lemma 15 *Das Standardmodell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}, \iota^{\mathfrak{G}})$ ist ein Modell für $\mathfrak{G}$.*

Beweis: Die Abbildung $\iota_{\mathcal{C}}$ ist ordnungserhaltend, denn es gilt

$$c \leq_{\mathcal{C}} c' \iff c^I \subseteq c'^I \iff (c^I, c^{II}) \leq (c'^I, c'^{II}) \iff \iota_{\mathcal{C}}(c) \leq \iota_{\mathcal{C}}(c').$$

Ebenso ist $\iota_{\mathcal{R}}$ ordnungserhaltend, und es gilt für alle $k = 1, \ldots, n$ die Beziehung $\iota_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_k) \subseteq \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{G}}$. Weiterhin erfüllt $\iota^{\mathfrak{G}}$ die Eckenbedingung, denn für alle $v \in V$ gilt stets $\iota_{\mathcal{G}}\rho(v) = \rho(v) \subseteq \kappa(v)^I = Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa(v))$. Ebenso für die Kantenbedingung: Für alle Kanten $e \in E$ gilt $\iota_{\mathcal{G}}\rho(e) = \rho(e) \subseteq \iota_{\mathcal{R}}\kappa(e)$. □

Neben diesem Standardmodell ist zuweilen auch ein erweitertes Standardmodell von Interesse, in dem die Begriffsnamen auch als Gegenstände aufgeführt werden und die Inzidenzrelation auf $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ durch $\leq_{\mathcal{C}}$ definiert wird. Die Ordnung der Begriffe spiegelt dann auch die Ordnung $\leq_{\mathcal{C}}$ der Begriffsnamen wieder. Wir wollen hier jedoch nur das eingeführte Standardmodell näher betrachten.

Im folgenden werden wir zeigen, daß sich die semantische Folgerung auf einfache Weise durch das Standardmodell beschreiben läßt:

3.3 Semantische Folgerbarkeit und Standardmodell

Definition 16 *Für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ definieren wir, $\mathfrak{G}_2$* FOLGT SEMANTISCH *aus $\mathfrak{G}_1$, wenn $\mathfrak{G}_2$ in allen Modellen für $\mathfrak{G}_1$ gilt. Wir schreiben dann $\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2$.*

Satz 17 *Der Begriffsgraph $\mathfrak{G}_2$ folgt genau dann semantisch aus dem Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$, wenn $\mathfrak{G}_2$ im Standardmodell von $\mathfrak{G}_1$ gilt.*

Beweis: Beweisbedürftig ist lediglich die Aussage, daß der gültige Begriffsgraph $\mathfrak{G}_2$ des Standardmodells $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ von $\mathfrak{G}_1$ mit $\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1} = ((\mathcal{G}, \mathfrak{R}^{\mathfrak{G}_1}), \mathcal{C}, I^{\mathfrak{G}_1})$ in jedem beliebigen Modell $(\mathbb{K}, \lambda)$ für $\mathfrak{G}_1$ gilt. Wir setzen $\mathbb{K} =: ((G, \mathfrak{R}), M, J)$ und $\lambda =: \lambda_\mathcal{G} \,\dot\cup\, \lambda_\mathcal{C} \,\dot\cup\, \lambda_\mathcal{R}$. Aufgrund der Eckenbedingung für $\mathfrak{G}_1$ im Modell $(\mathbb{K}, \lambda)$ gilt für alle Begriffsnamen $c \in \mathcal{C}$ und für alle Ecken $v \in V_1$ mit $\kappa_1(v) \leq_\mathcal{C} c$

$$\lambda_\mathcal{G}\, \rho_1(v) \subseteq Ext\, \lambda_\mathcal{C} \kappa_1(v) \subseteq Ext\, \lambda_\mathcal{C}(c),$$

denn $\lambda_\mathcal{C}$ ist ordnungserhaltend. Somit gilt für alle $c \in \mathcal{C}$

$$\lambda_\mathcal{G}\big(\bigcup\{\rho_1(v) \mid v \in V_1, \kappa_1(v) \leq_\mathcal{C} c\}\big) \subseteq Ext\, \lambda_\mathcal{C}(c).$$

Weiterhin gilt mit der Eckenbedingung für $\mathfrak{G}_2$ im Standardmodell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ für alle Ecken $w \in V_2$ laut Definition der Inzidenzrelation $I^{\mathfrak{G}_1}$

$$\rho_2(w) \subseteq Ext\, \iota_\mathcal{C}^{\mathfrak{G}_1}(\kappa_2(w)) = \bigcup\{\rho_1(v) \mid v \in V_1, \kappa_1(v) \leq_\mathcal{C} \kappa_2(w)\}.$$

Insgesamt gilt folglich für alle $w \in V_2$ die Eckenbedingung

$$\lambda_\mathcal{G}(\rho_2(w)) \subseteq \lambda_\mathcal{G}\big(\bigcup\{\rho_1(v) \mid v \in V_1, \kappa_1(v) \leq_\mathcal{C} \kappa_2(w)\}\big) \subseteq Ext\, \lambda_\mathcal{C}(\kappa_2(w)).$$

Ähnlich wird für die Kantenbedingung argumentiert: Aufgrund der Kantenbedingung für $\mathfrak{G}_1$ in $(\mathbb{K}, \lambda)$ gilt für alle $R \in \mathcal{R}$

$$\lambda_\mathcal{G}\big(\bigcup\, \{\rho_1(e) \mid e \in E_1, \kappa_1(e) \leq_\mathcal{R} R\}\big) \subseteq \lambda_\mathcal{R}(R).$$

Daraus kann mit Hilfe der Kantenbedingung für $\mathfrak{G}_2$ in $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ die Kantenbedingung für $\mathfrak{G}_2$ in $(\mathbb{K}, \lambda)$ abgeleitet werden: Für alle $f \in E_2$ ist

$$\lambda_\mathcal{G}(\rho_2(f)) \subseteq \lambda_\mathcal{G}\big(\bigcup\{\rho_1(e) \mid e \in E_1, \kappa_1(e) \leq_\mathcal{R} \kappa_2(f)\}\big) \subseteq \lambda_\mathcal{R}(\kappa_2(f)). \qquad \square$$

Damit ist bewiesen, daß in dem Standardmodell eines Begriffsgraphen alle für die semantische Folgerung interessanten Informationen bereits enthalten sind. Die semantische Folgerbarkeit läßt sich somit leicht nachprüfen: Ein Begriffsgraph folgt nur dann semantisch aus einem anderen, wenn er im Standardmodells des zweiten gilt. Wir erhalten somit eine einfache, leicht implementierbare Überprüfungsmöglichkeit, um für je zwei Begriffsgraphen zu entscheiden, ob sie semantisch auseinander folgen.

Im folgenden Satz wird spezifiziert, wie man die Folgerbarkeit von Begriffsgraphen an den beiden Standardkontexten ablesen kann:

Lemma 18 *Es seien $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ Begriffsgraphen und $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ und $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_2}, \iota^{\mathfrak{G}_2})$ ihre Standardmodelle. Dann gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad I^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I^{\mathfrak{G}_2} \text{ und } \iota_\mathcal{R}^{\mathfrak{G}_1}(R) \supseteq \iota_\mathcal{R}^{\mathfrak{G}_2}(R) \text{ für alle } R \in \mathcal{R}.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{G}_2$ ein gültiger Begriffsgraph von $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$. Wir zeigen, daß für alle $g \in \mathcal{G}$ und $c \in \mathcal{C}$ mit $g\, I^{\mathfrak{G}_2}\, c$ gilt $g\, I^{\mathfrak{G}_1}\, c$. Der Beweis der Relationenbedingung $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}(R) \supseteq \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_2}(R)$ verläuft analog.

Gemäß Definition der Inzidenz im Standardmodell gilt $g\, I^{\mathfrak{G}_2}\, c$ genau dann, wenn ein $w \in V_2$ existiert, so daß $g \in \rho_2(w)$ und $\kappa_2(w) \leq_{\mathcal{C}} c$ gilt. Aus der Eckenbedingung für $\mathfrak{G}_2$ in $\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}$ folgt für alle $w \in V_2$

$$\rho_2(w) \subseteq Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_2(w) = \bigcup \{\rho_1(v) \mid v \in V_1, \kappa_1(v) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(w)\}.$$

Somit gibt es für $g \in \rho_2(w)$ ein $v \in V_1$ mit $g \in \rho_1(v)$ und $\kappa_1(v) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(w) \leq_{\mathcal{C}} c$, also gilt $g\, I^{\mathfrak{G}_1}\, c$.

Für die Umkehrung zeigt man die Gültigkeit der Eckenbedingung ebenso mit Hilfe von $I^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I^{\mathfrak{G}_2}$, die Gültigkeit der Kantenbedingung mit der Relationenbedingung. $\square$

Das bedeutet, daß wir die Folgerbarkeit auch auf der Ebene der Kontexte betrachten könnten: Hat man einmal für alle Begriffsgraphen die Standardmodelle aufgestellt, so ließe sich die semantische Folgerung durch deren Vergleich untersuchen. Zwar würde man dies in der Praxis nicht tun, dennoch hat das Lemma wichtige Konsequenzen. Zum einen können wir nun leicht ableiten, daß auch die Relation $\models$ reflexiv und transitiv ist, also eine Quasiordnung darstellt. Zweitens folgt aus dem Lemma, daß äquivalente Begriffsgraphen gleiche Standardmodelle haben:

Korollar 19 *Für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mit den Standardmodellen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ und $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_2}, \iota^{\mathfrak{G}_2})$ gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2 \;\; \textit{und} \;\; \mathfrak{G}_2 \models \mathfrak{G}_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1}) = (\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_2}, \iota^{\mathfrak{G}_2}).$$

Und schließlich können wir die von $\models$ induzierte Ordnung auf den Äquivalenzklassen der Begriffsgraphen charakterisieren: Kann man die Folgerungsbeziehung durch die Inklusionen im Standardkontext darstellen, so folgt insbesondere, daß auch die bzgl. dieser Ordnung definierten Infima und Suprema durch Durchschnitt bzw. Vereinigung der betreffenden Relationen in den Standardmodellen charakterisieren kann: Das Infimum zweier Äquivalenzklassen der Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist die Äquivalenzklasse des durch Nebeneinanderschreiben entstehenden Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$ (vgl. [CM95]). Man sieht leicht, daß das Standardmodell von $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$ genau dem Standardmodell entspricht, das man durch Verienigung der betreffenden Relationen erhält: Für $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2}, \iota^{\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2})$ haben wir $I^{\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2} = I^{\mathfrak{G}_1} \cup I^{\mathfrak{G}_2}$ und $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2}(R) = \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}(R) \cup \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_2}(R)$ für alle $R \in \mathcal{R}$.

Während es eine schwierige Aufgabe ist, das Supremum zweier Äquivalenzklassen zu bestimmen (wenn es überhaupt existiert), können wir aus Lemma 18 unmittelbar ableiten, daß sein Standardmodell $(\mathbb{K}, \iota)$ gerade durch Durchschnitt entsteht, daß also gilt $I = I^{\mathfrak{G}_1} \cap I^{\mathfrak{G}_2}$ und $\iota_{\mathcal{R}}(R) = \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}(R) \cap \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_2}(R)$ für alle $R \in \mathcal{R}$.

Wir können also festhalten, daß die durch $\models$ induzierte Ordnung auf Kontextebene relativ einfach zu charakterisieren ist. Gerade Suprema und Infima können auf diese Weise leichter bestimmt werden als auf der Ebene der Begriffsgraphen. Dies deutet an, daß es für gewisse Zwecke nützlich sein kann, das in Begriffsgraphen gegebene Wissen auf die Kontextebene zu übersetzen, worauf wir in Kapitel 5 zurückkommen werden.

4 Semantische Folgerbarkeit und syntaktische Herleitbarkeit

4.1 Korrektheit und Unvollständigkeit der Projektionen

Mit Hilfe der im vorigen Kapitel definierten Semantik können wir nun klären, inwieweit der in Definition 9 vorgeschlagene Begriff der $\Vdash$-Herleitbarkeit dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht. Zunächst zeigen wir die Korrektheit des durch die Projektionen charakterisierten Kalküls:

Lemma 20 *Für zwei Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}_1 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_1, \rho_1, \theta_1)$ *und* $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_2, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ *über demselben Alphabet gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2.$$

Beweis: Wir benutzen statt der $\Vdash$-Herleitbarkeit die äquivalente Charakterisierung durch die Quasiprojektionen. Sei also $\mathfrak{G}_1 \lesssim \mathfrak{G}_2$ und $\pi_V \dot\cup \pi_E$ die Quasiprojektion von $\mathfrak{G}_2$ nach $\mathfrak{G}_1$, und sei $(\mathbb{K}, \iota)$ ein Modell für $\mathfrak{G}_1$. Zu zeigen ist, daß dann $\mathfrak{G}_2$ auch in $(\mathbb{K}, \iota)$ gilt, also daß die Ecken- und Kantenbedingung für $\mathfrak{G}_2$ in $(\mathbb{K}, \iota)$ erfüllt sind.

Sei $v \in V_2$. Da $\pi_V \dot\cup \pi_E$ eine Quasiprojektion ist, gilt $\rho_2(v) \subseteq \rho_1\pi_V(v)$, und damit $\iota_{\mathcal{G}}\rho_2(v) \subseteq \iota_{\mathcal{G}}\rho_1\pi_V(v)$. Nun gilt $\mathfrak{G}_1$ in $(\mathbb{K}, \iota)$, und deshalb ist $\iota_{\mathcal{G}}\rho_1\pi_V(v) \subseteq Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa_1\pi_V(v))$. Da π eine Quasiprojektion ist, gilt $\kappa_1\pi_V(v) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(v)$, und damit auch $Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa_1\pi_V(v)) \subseteq Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa_2(v))$. Insgesamt gilt folglich $\iota_{\mathcal{G}}\rho_2(v) \subseteq Ext(\iota_{\mathcal{C}}\kappa_2(v))$.

Sei $e \in E_2$, dann ist $|e| = |\pi_E(e)|$ und wegen $\iota_{\mathcal{R}}\kappa_1\pi_E(e) \in \mathcal{R}_{|e|}$ ist auch $\iota_{\mathcal{R}}\kappa_2(e) \in \mathfrak{R}_{|e|}$. Weiterhin gilt für die Quasiprojektion $\pi_V \dot\cup \pi_E$ die Beziehung $\rho_2(e) \subseteq \rho_1\pi_E(e)$ und $\kappa_1\pi_E(e) \leq_{\mathcal{R}} \kappa_2(e)$ und daher

$$\iota_{\mathcal{G}}\rho_2(e) \subseteq \iota_{\mathcal{G}}\rho_1\pi_E(e)) \subseteq Ext\, \iota_{\mathcal{R}}\kappa_1\pi_E(e) \subseteq Ext\, \iota_{\mathcal{R}}\kappa_2(e).$$ □

Daß die Rückrichtung nicht stimmt, kann man an den Graphen in Abbildung 2 sehen. Ausgehend von dem dort angegebenen Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ kann man leicht überlegen, daß $\mathfrak{G}_2$ in jedem Modell für $\mathfrak{G}_1$ gültig sein muß, daß also $\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2$ gilt. Doch es gilt nicht $\mathfrak{G}_1 \Vdash \mathfrak{G}_2$, denn mit den $\Vdash$-Herleitungsregeln lassen sich die Referenzen höchstens verkleinern, also weder ausweiten noch vereinigen. Durch die Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$ wird deutlich, daß die Herleitungsregeln nicht einmal für die Einschränkung auf einelementige Referenzen vollständig sind, wir also auch für die begrifflichen Graphen, wie sie von Sowa und Chein/Mugnier behandelt werden, keine Übereinstimmung der hier definierten syntaktischen und semantischen Folgerungsbegriffe erlangen können: $\mathfrak{G}_4$ läßt sich aus $\mathfrak{G}_3$ semantisch folgern, aber nicht mit den gegebenen Regeln syntaktisch herleiten, denn der Begriffsname FRAU kann nur verallgemeinert, nicht aber durch einen unvergleichbaren ausgetauscht werden.

Um dieser Unvollständigkeit der $\Vdash$-Herleitungsregeln zu entgegnen, wird in anderen Arbeiten (etwa [CM92]) und in der praktischen Implementation die Menge der betrachteten begrifflichen Graphen eingeschränkt, für die das definierte System von $\Vdash$-Herleitungsregeln vollständig ist: Vollständigkeitssätze werden ausschließlich für begriffliche Graphen in sogenannter Normalform bewiesen, das sind diejenigen begrifflichen Graphen mit einelementigen Referenzen, in denen jeder Gegenstand Referenz von höchstens einer Ecke ist. Das hat

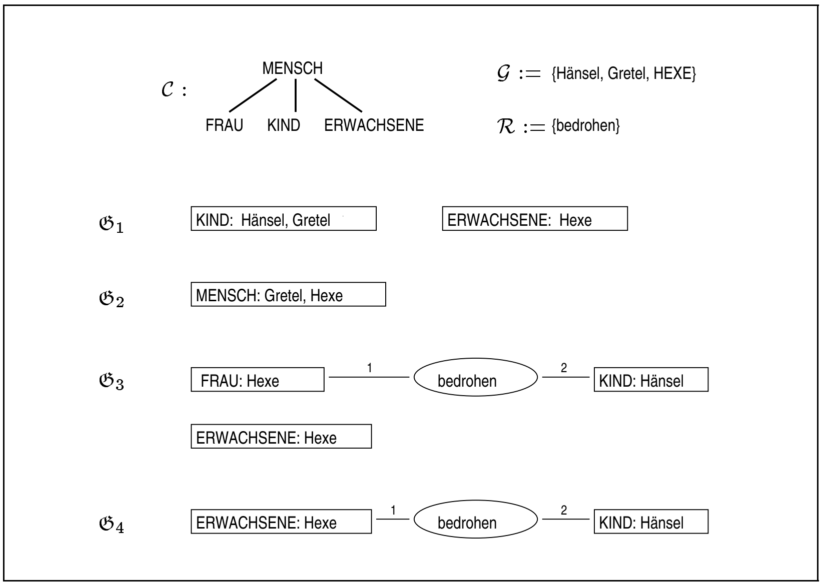


Abbildung 2: Beispiele für die Unvollständigkeit der Projektion

den Vorteil, daß man an der Charakterisierung durch die Projektionen festhalten kann.

Wir wollen hier einen anderen Weg gehen und nicht die Menge der Begriffsgraphen einschränken, sondern den Kalkül aus Definition 9 verändern und erweitern. Dabei entsprechen die neuen Regeln im wesentlichen den für die Transformation und Rücktransformation der Begriffsgraphen in Normalform benötigten Umformungsregeln.

4.2 Ein korrekter und vollständiger Kalkül für Begriffsgraphen

Definition 21 *Gegeben seien zwei Begriffsgraphen* $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ *und* $\mathfrak{G}'$. *Wir definieren folgende Herleitungsregeln:*

5*. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa', \rho, \theta)$ *mit* $\kappa'\big|_{V\setminus\{v\}\cup E} = \kappa\big|_{V\setminus\{v\}\cup E}$ *und* $\kappa'(v) = c$ *für ein* $v \in V$ *und ein* $c \in \mathcal{C}$, *für das ein* $w \in V$ *existiert, so daß* $\kappa(w) \leq_{\mathcal{C}} c$ *und* $\rho(v) \subseteq \rho(w)$, *dann sagen wir,* $\mathfrak{G}'$ *geht aus* $\mathfrak{G}$ *durch* Austauschen des Begriffsnamens $\kappa(v)$ *hervor.*

6*. *Ist* $\mathfrak{G}' = (V, E, \nu, \kappa', \rho, \theta)$ *mit* $\kappa'\big|_{V\cup E\setminus\{e\}} = \kappa\big|_{V\cup E\setminus\{e\}}$ *und* $\kappa'(e) = R$ *für ein* $e \in E$ *und ein* $R \in \mathcal{R}_{|e|}$, *für das ein* $f \in E$ *existiert, so daß gilt* $\kappa(f) \leq_{\mathcal{R}} R$ *und* $\rho(e) \subseteq \rho(f)$, *dann sagen wir,* $\mathfrak{G}'$ *geht aus* $\mathfrak{G}$ *durch* Austauschen des Relationsnamens $\kappa(e)$ *hervor.*

10*. *Gilt für zwei Ecken* $v, w \in V$ *die Bedingung* $\rho(v) = \rho(w)$, *und ist* $\mathfrak{G}' = (V', E', \nu', \kappa', \rho', \theta')$ *mit*

- $V' = V\setminus\{v, w\} \,\dot\cup\, \{v \vee w\}$, $E' = E$,
- *für alle* $e \in E$ *und für alle* $i \in \{1, \ldots, |e|\}$ *ist* $\nu'(e)\big|_i = v \vee w$, *falls* $\nu(e)\big|_i = v$ *oder* $\nu(e)\big|_i = w$, *sonst gilt* $\nu'(e)\big|_i = \nu(e)\big|_i$,

- $\kappa'\big|_{V\setminus\{v,w\}\cup E} = \kappa\big|_{V\setminus\{v,w\}\cup E}$ *und* $\kappa'(v \vee w) = c$ *für ein* $c \in \mathcal{C}$ *mit* $\kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c$ *und* $\kappa(w) \leq_{\mathcal{C}} c$,
- $\rho'\big|_{V\setminus\{v,w\}} = \rho\big|_{V\setminus\{v,w\}}$ *und* $\rho'(v \vee w) = \rho(v) = \rho(w)$, *sowie*
- $$\begin{aligned}\theta' = (\theta \cap (V' \times V')) \ &\cup \ \{(v \vee w, v \vee w)\} \\ &\cup \ \{(v \vee w, x) \mid (v,x) \in \theta \text{ oder } (w,x) \in \theta\} \\ &\cup \ \{(x, v \vee w) \mid (x,v) \in \theta \text{ oder } (x,w) \in \theta\},\end{aligned}$$

dann sagen wir, $\mathfrak{G}'$ *geht aus* $\mathfrak{G}$ *durch* Verbinden der Ecken v und w bei gleichen Referenzen *hervor.*

11*. *Angenommen, es stimmen für zwei Ecken* $v, w \in V$ *alle Kanten überein, d.h. es gibt für alle Kanten* $e \in E_v$ *eine Kante* $e' \in E_w$ *(und umgekehrt) mit* $\kappa(e) = \kappa(e')$*und für jedes* $i = 1, \ldots, |e|$ *mit* $\nu(e)\big|_i = v$ *gilt* $\nu(e')\big|_i = w$ *(und umgekehrt) sowie* $\rho(\nu(e)\big|_i) = \rho(\nu(e')\big|_i)$, *falls* $\nu(e)\big|_i \neq v$. *Sind nun für* $\mathfrak{G}'$ *die Mengen und Abbildungen* $V', E', \nu', \kappa', \theta'$ *definiert wie in Regel* 10* *und gelten für* ρ' *die Bedingungen* $\rho'\big|_{V\setminus\{v,w\}} = \rho\big|_{V\setminus\{v,w\}}$ *sowie* $\rho'(v \vee w) = \rho(v) \cup \rho(w)$, *dann sagen wir,* $\mathfrak{G}'$ *geht aus* $\mathfrak{G}$ *durch* Verbinden der Ecken v und w bei übereinstimmenden Kanten *hervor.*

Mit diesem modifiziertem System von Herleitungsregeln erklären wir nun einen erweiterten Begriff der Herleitbarkeit, dessen Äquivalenz zur semantischen Folgerbarkeit wir im Anschluß zeigen können.

Definition 22 *Der Begriffsgraph* $\mathfrak{G}_2$ *heißt aus* $\mathfrak{G}_1$ herleitbar, *wenn* $\mathfrak{G}_2$ *in endlich vielen Schritten durch die Herleitungsregeln*

1. Verdoppeln einer Ecke.
2. Wegnehmen einer isolierten Ecke.
3. Verdoppeln einer Kante.
4. Wegnehmen einer Kante.
5*. Begriffsnamen austauschen.
6*. Relationsnamen austauschen.
7. Referenzen einschränken.
8. Äquivalenzrelation verändern.
9. Isomorphen Begriffsgraphen erstellen.
10*. Ecken verbinden bei gleichen Referenzen.
11*. Ecken verbinden bei übereinstimmenden Kanten.

aus $\mathfrak{G}_1$ *hervorgeht. Wir schreiben dann* $\mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{G}_2$.

Auch diese Relation $\vdash$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch, bildet also eine Quasiordnung auf der Klasse der Begriffsgraphen über demselben Alphabet.

Wir zeigen zunächst die Korrektheit des so definierten Kalküls:

Satz 23 (Korrektheitssatz) *Für zwei Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *über demselben Alphabet gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{G}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2.$$

Beweis: Zu zeigen ist, daß die durch die Herleitungsregeln gewonnenen Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_2$ im Standardmodell von $\mathfrak{G}_1$ gelten. Für die Regeln $1-4$ und $7-9$ wurde die Korrektheit bereits in Lemma 20 gezeigt; es bleiben also die Regeln $5^*, 6^*, 10^*$ und 11^* zu betrachten. Sei nun $\mathfrak{G}_1 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_1, \rho_1, \theta_1)$ ein Begriffsgraph mit Standardmodell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$.

5^*. *Begriffsnamen austauschen.*
Für den mit Regel 5^* aus $\mathfrak{G}_1$ hergeleiteten Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_2 := (V_1, E_1, \nu_1, \kappa_2, \rho_1, \theta_1)$ gibt es laut Regel 5^* ein $v \in V_1$ und ein $c \in \mathcal{C}$, für das ein $w \in V_1$ existiert, so daß $\kappa_1(w) \leq_{\mathcal{C}} c$ und $\rho_1(v) \subseteq \rho_1(w)$, sowie $\kappa_2\big|_{V_1\setminus\{v\}\cup E_1} = \kappa_1\big|_{V_1\setminus\{v\}\cup E}$ und $\kappa_2(v) = c$ gilt. Daher gilt für alle $u \in V_1\setminus\{v\}$ die Eckenbedingung, und auch für v gilt

$$\iota_{\mathcal{G}}^{\mathfrak{G}_1}\rho_2(v) = \rho_1(v) \subseteq \rho_1(w) \subseteq Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_1(w) \subseteq Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}c = Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_2(v).$$

Folglich gilt $\mathfrak{G}_2$ im Standardmodell von $\mathfrak{G}_1$.

6^*. *Relationsnamen austauschen.*
Für diesen Übergang kann man für die Kantenbedingung genauso argumentieren wie in Regel 5^* für die Eckenbedingung.

10^*. *Ecken verbinden bei gleichen Referenzen.*
Es sei $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_1, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ derart, daß es zwei Ecken $v, w \in V_1$ mit $\rho_1(v) = \rho_1(w)$ gibt, so daß die für Regel 10^* geforderten Bedingungen gelten, also insbesondere

- $V_2 = V_1\setminus\{v, w\} \,\dot\cup\, \{v \vee w\}$,
- $\kappa_2\big|_{V_1\setminus\{v,w\}\cup E_1} = \kappa_1\big|_{V\setminus\{v,w\}\cup E_1}$ und $\kappa_2(v \vee w) = c$
  für ein $c \in \mathcal{C}$ mit $\kappa_1(v) \leq_{\mathcal{C}} c$ und $\kappa_1(w) \leq_{\mathcal{C}} c$, sowie
- $\rho_2\big|_{V_1\setminus\{v,w\}} = \rho_1\big|_{V_1\setminus\{v,w\}}$ und $\rho_2(v \vee w) = \rho_1(v)$.

Dann gilt für alle $e \in E_1$ die Kantenbedingung und für alle $u \in V_1\setminus\{v, w\}$ die Eckenbedingung, und für $v \vee w$ gilt

$$\iota_{\mathcal{G}}^{\mathfrak{G}_1}\rho_2(v \vee w) = \rho_1(v) \subseteq Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_1(v) \subseteq Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}c = Ext\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_2(v \vee w).$$

11^*. *Ecken verbinden bei übereinstimmenden Kanten.*
Gibt es für $\mathfrak{G}_2 := (V_2, E_1, \nu_2, \kappa_2, \rho_2, \theta_2)$ zwei Ecken $v, w \in V_1$ mit übereinstimmenden Kanten, so daß die für Regel 11^* geforderten Bedingungen gelten, so gilt mit gleicher Argumentation wie bei Regel 10^* die Eckenbedingung für alle Ecken aus V_2.

Folglich sind die Regeln $1 - 11^*$ korrekt. □

Für den Beweis der Vollständigkeit der Herleitungsregeln benutzen wir die Möglichkeit, einen Begriffsgraphen in seine elementaren Bauteile zu zerlegen. Als solche elementaren Bauteile definieren wir die Sterne:

Definition 24 *Ein Begriffsgraph* $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ *heißt* STERN, *falls gilt* $|E| = 1$ *und* $V = \{\nu(e)\big|_i \mid i = 1, \ldots, |e|\}$ *für* $E = \{e\}$. $\mathfrak{G}$ *heißt* STERN DES BEGRIFFSGRAPHEN $\mathfrak{G}'$, *wenn er Unterbegriffsgraph von* $\mathfrak{G}'$ *ist.*

Wir beginnen zunächst mit der Herleitbarkeit der Sterne:

Lemma 25 *Gegeben seien zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ über demselben Alphabet und ein Atom $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}_2$. Dann gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{A}.$$

Beweis: Seien $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei Begriffsgraphen mit $\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2$ und sei $\mathfrak{A}$ ein Stern von $\mathfrak{G}_2$ mit Kante f und Ecken $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Um $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{G}_1$ herzuleiten, gehen wir in drei Schritten vor:

(i.) Zuerst leiten wir aus $\mathfrak{G}_1$ für jedes Tupel $(g_1, \ldots, g_k)$ von Gegenständen in $\rho(f)$ einen Stern $\mathfrak{A}^{g_1,\ldots,g_k}$ mit Kante $e_{g_1,\ldots,g_k}$ her, so daß gilt $\rho(e_{g_1,\ldots,g_k}) = (g_1, \ldots, g_k)$.

(ii.) Dann verschmelzen wir in mehreren Schritten diese Sterne durch Verbinden der Ecken mit gleichen Referenzen. Wir erhalten somit einen Stern $\mathfrak{B}$ mit Kante f', der die gleichen Referenzen hat wie der Stern $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}_2$. Allerdings stimmen die Begriffs- und Relationsnamen nicht unbedingt überein.

(iii.) Um diese anzupassen, muß zunächst für jede Ecke w_i von $\mathfrak{A}$ ein isolierte Ecke v_i mit $\kappa_1(v_i) = \kappa_2(w_i)$ und $\rho_1(v_i) \supseteq \rho_2(w_i)$ hergeleitet werden. Dann können die Regeln 5* und 6* (*Begriffs- und Relationsnamen austauschen*) angewandt werden, und so können wir schließlich aus $\mathfrak{B}$ einen zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Stern herleiten.

i) Da $\mathfrak{A}$ im Standardmodell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ gilt und $\kappa_2(f) \in \mathcal{R}$ ist, gibt es eine Menge $T \subseteq \kappa_1(E_1)$ von Relationen, so daß $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}\kappa_2(f) = \bigcup \{\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1} R \mid R \in T\}$. Folglich gibt es für alle $(g_1, \ldots, g_k) \in \rho_2(f)$ eine Relation $R \in T$ mit $\iota_{\mathcal{G}}^{\mathfrak{G}_1}(g_1, \ldots, g_k) = (g_1, \ldots, g_k) \in \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}(R)$. Wegen $R \in \kappa_1(E_1)$ können wir eine Kante $e_{g_1,\ldots,g_k} \in E_1$ finden mit $(g_1, \ldots, g_k) \in \rho_1(e_{g_1,\ldots,g_k})$.

Wir können mit Hilfe von Regel 2 und 4 (*Ecken und Kanten entfernen*) für alle Tupel $(g_1, \ldots, g_k) \in \rho_2(f)$ den zur Kante $e_{g_1,\ldots,g_k}$ gehörigen Stern von $\mathfrak{G}_1$ herleiten und mit Regel 7 die Referenzen auf die einelementigen Referenzen $g_1, \ldots, g_k$ einschränken. Die so entstehenden Sterne bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^{g_1,\ldots,g_k}$ und seine Ecken mit $v_{g_1}, \ldots, v_{g_k}$.

ii) Im ersten Verbindungsvorgang werden die k-ten Ecken aller Sterne $\mathfrak{A}^{g_1,\ldots,g_k}$ verschmolzen, deren erste $k-1$ Referenzen übereinstimmen: Für jedes feste Tupel $(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{k-1}) \in \rho_2(w_1) \times \ldots \times \rho_2(w_{k-1})$ betrachten wir alle Sterne $\mathfrak{A}^{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1},g_k}$ mit $g_k \in \rho_2(w_k)$ und vereinheitlichen mit Regel 6* (*Relationsnamen austauschen*) den zugeordneten Relationsnamen $\kappa(e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1},g_k})$ auf einen über allen anderen liegenden Relationsnamen $R_{e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}}$. Da für alle $g_k \in \rho_2(w_k)$ gilt $\kappa(e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1},g_k}) \leq_{\mathcal{R}} \kappa(f)$, finden wir einen gemeinsamen Relationsnamen $R_{e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}} \leq_{\mathcal{R}} \kappa(f)$.

Dann werden die so veränderten Begriffsgraphen $\mathfrak{A}^{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1},g_k}$ nach Regel 11* (*Ecken verbinden bei übereinstimmenden Kanten*) an der k-ten Ecke verschmolzen, dann an der $k-1$-ten bis ersten Ecke und schließlich, nach Anwendung von Regel 4 (*Wegnehmen von Kanten*), entsteht ein Stern mit k Ecken, den wir mit $\mathfrak{A}^{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}$ bezeichnen wollen. Er hat eine Kante $e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}$, und es gilt $\rho(e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}) = \{\overline{g}_1\} \times \ldots \times \{\overline{g}_{k-1}\} \times \rho_2(w_k)$ sowie $\kappa(e_{\overline{g}_1,\ldots,\overline{g}_{k-1}}) \leq_{\mathcal{R}} \kappa(f)$.

Ebenso werden im nächsten Verbindungsvorgang alle Sterne $\mathfrak{A}^{g_1,\dots,g_{k-1}}$ (die alle in der k-ten Referenz übereinstimmen) verschmolzen, deren $k-1$-ten Referenzen übereinstimmen. Es entstehen nach Anwendung der Regeln $6^*, 11^*$ und 4 Sterne $\mathfrak{A}^{g_1,\dots,g_{k-2}}$ mit je einer Kante $e_{g_1,\dots,g_{k-2}}$, für die gilt $\rho(e_{g_1,\dots,g_{k-2}}) = \{g_1\} \times \ldots \times \{g_{k-2}\} \times \rho_2(w_{k-1}) \times \rho_2(w_k)$.

So entsteht nach k Vorgängen der Stern $\mathfrak{B}$ mit einer Kante f' mit gleichen Referenzen wie der Stern $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}_2$.

iii) Da $\mathfrak{A}$ ein gültiger Begriffsgraph von $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ ist, gilt für jede Ecke w_i von $\mathfrak{A}$

$$\rho_2(w_i) \subseteq Ext\,(\iota_{\mathcal{G}}^{\mathfrak{G}_1}\, \kappa_2(w_i)) = \kappa_2(w_i)^{I^{\mathfrak{G}_1}} = \bigcup\ \{\rho_1(v) \mid v \in V_1, \kappa_1(v) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(w_i)\}$$

Somit können für jede Ecke w_i von $\mathfrak{A}$ nach Anwendung der Regel 4 (*Kanten wegnehmen*) alle isolierten Ecken $v \in V_1$ mit $\kappa_1(v) \leq_{\mathcal{C}} \kappa_2(w_i)$ abgeleitet werden. Mit Hilfe von Regel 11^* (*Ecken verbinden bei übereinstimmenden Kanten*) werden diese zu einer isolierten Ecke v_i mit $\kappa_1(v_i) = \kappa_2(w_i)$ und $\rho_1(v_i) \supseteq \rho_2(w_i)$ verbunden.

Daraus erhält man schließlich mit Regel 5^* (*Begriffsnamen austauschen*), Regel 6^* (*Relationsnamen austauschen*) und Regel 2 (*Wegnehmen der isolierten Ecken*) einen zum Ausgangsstern $\mathfrak{A}$ isomorphen Begriffsgraphen, aus dem mit Regel 10 (*isomorphen Begriffsgraphen erstellen*) der Begriffsgraph $\mathfrak{A}$ hergeleitet werden kann. □

Aus diesem Lemma können wir nun leicht den Vollständigkeitssatz ableiten:

Satz 26 (Vollständigkeitssatz) *Für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ über demselben Alphabet gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{G}_2.$$

Beweis: Nach dem vorausgehenden Lemma können wir jeden Stern von $\mathfrak{G}_2$ aus $\mathfrak{G}_1$ herleiten, falls $\mathfrak{G}_2$ aus $\mathfrak{G}_1$ semantisch folgt. Mit Hilfe von Regel 9 (*isomorphen Begriffsgraphen erstellen*) bzw. Regel 1 und 3 (*Ecken und Kanten verdoppeln*) können wir genügend Kopien von $\mathfrak{G}_2$ erstellen, um all seine Sterne herzuleiten.

Aus der Menge all seiner Sterne und der isolierten Ecken kann man schließlich mit Hilfe der Regel 10 (*Ecken verbinden bei gleichen Referenzen*) und Regel 8 (*Äquivalenzrelation verändern*) den Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_2$ herleiten. □

Somit haben wir also ein vollständiges und korrektes System von Herleitungsregeln ermittelt, mit dem der Begriff der Inferenz von Begriffsgraphen kalkülisiert werden kann.

Diese Herleitungsregeln erscheinen zwar umständlicher als die Herleitungsregeln der entsprechenden prädikatenlogischen Teilsprache, haben aber aufgrund ihres graphischen Charakters den Vorteil, daß sie intuitiv erfaßbar und daher für die unmittelbare Herleitung relativ ähnlicher Begriffsgraphen leicht zu aktivieren sind. Sie können so in einem überschaubaren Rahmen die Kommunikation über das in ihnen formalisierte Wissen unterstützen.

Im allgemeinen Fall ist es jedoch nicht einfach, für zwei Begriffsgraphen anzugeben, durch welche Herleitungsregeln sie auseinander hervorgehen. Dafür ist die leichter zu automatisierende (und damit zu implementierende) Überprüfungsmöglichkeit vorteilhaft, ob ein Begriffsgraph im Standardmodell eines anderen gilt (vgl. Satz 17).

5 Standardgraph eines relationalen Kontexts

Mit der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Konstruktion von Standardmodellen zu Begriffsgraphen haben wir nicht nur ein mathematisches Konstrukt zur Charakterisierung der semantischen Folgerung eingeführt, sondern auch einen Übersetzungsmechanismus angegeben, wie in Begriffsgraphen formalisiertes Wissen auf die Ebene der relationalen Kontexte übertragen werden kann. Diese Übersetzungsmöglichkeit von der Graphenebene zur Kontextebene spielt für den Aufbau begrifflicher Wissenssysteme mit Begriffsgraphen eine wichtige Rolle.

Für ein solches begriffliches Wissenssystem ist auch der umgekehrte Weg wichtig: Wissen, das in relationalen Kontexten gegebenen ist, soll auch zurück auf die Ebene der Begriffsgraphen übersetzt werden können. Natürlich kann man zu einem relationalen Kontext viele verschiedene gültige Begriffsgraphen angeben. Wenn wir aber einen sogenannten Standardgraphen suchen, in dem das gleiche Wissen codiert ist wie in dem relationalen Kontext, so ist es zweckmäßig, nach demjenigen Begriffsgraphen zu suchen, aus dem alle anderen gültigen Begriffsgraphen dieses Kontexts hergeleitet werden können.

Mit ähnlicher Zielsetzung wird in [Wi97] ein Verfahren zur Konstruktion eines "kanonischen Begriffsgraphen" vorgeschlagen. Dabei wird die Vorstellung von "kanonisch" als möglichst vollständig, aber nicht unnötig groß, dort so festgelegt, daß die Ecken mit dem kleinstmöglichen Begriff bezeichnet werden, die mit möglichst großen Instanzen versehen werden. Dazu werden die Kanten durch minimale Relationen beschrieben. Wir werden in Anlehnung an diesen kanonischen Begriffsgraphen ein Verfahren zur Konstruktion eines Standardgraphen definieren, das allerdings in zwei Punkten abgewandelt werden muß: Zum einen muß die Relationenmenge erweitert werden, zum anderen müssen isolierte Ecken hinzugefügt werden, die mit den Gegenstandsbegriffen und deren Extensionen versehen werden. Mit diesen Erweiterungen kann das Konstruktionsverfahren des Standardgraphen auf die folgende Weise beschrieben werden:

Konstruktion des Standardgraphen. Gegeben sei ein relationaler Kontext $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$. Als Alphabet des zu konstruierenden Begriffsgraphen setzen wir $\mathcal{A} := (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{C} := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$, $\mathcal{G} := G$ und $\mathcal{R} := \mathfrak{R}$.

Für jedes $k = 1, \dots, n$ werden für jede Relation $R \in \mathfrak{R}_k$ alle maximalen k-Tupel $(A_1, \dots, A_k)$ von nicht-leeren Teilmengen von G ermittelt, die in R enthalten sind. Die so gewonnenen $(k+1)$-Tupel $(R, A_1, \dots, A_k)$ werden in der Menge $E_\mathbb{K}$ zusammengefaßt. Wir definieren also für $R \in \mathfrak{R}_k$ die Menge

$$\begin{aligned} \mathrm{Ref}^{\max}(R) \; := \; & \{A_1 \times \ldots \times A_k \subseteq R \mid \\ & B_1 \times \ldots \times B_k \subseteq R \text{ impliziert } B_1 \times \ldots \times B_k \not\supset A_1 \times \ldots A_k\} \end{aligned}$$

und erhalten als Kantenmenge

$$E_\mathbb{K} := \{(R, A_1, \dots, A_k) \mid R \in \mathfrak{R}_k,\ A_1 \times \ldots \times A_k \in \mathrm{Ref}^{\max}(R)\}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} V_\mathbb{K} \; := \; & \{A \subseteq G \mid \text{es gibt ein } (R, A_1, \dots, A_k) \in E_\mathbb{K} \text{ mit } A = A_i \text{ für ein } i \leq k\} \cup \\ & \{g^{II} \subseteq G \mid g \in G\}, \end{aligned}$$

und definieren $\nu_\mathbb{K} : E_\mathbb{K} \to \bigcup_{k=1}^n V_\mathbb{K}^k$ durch $\nu_\mathbb{K}(R, A_1, \dots, A_k) := (A_1, \dots, A_k)$ und bestimmen $\kappa_\mathbb{K} : V_\mathbb{K} \cup E_\mathbb{K} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \cup \mathfrak{R}$ durch $\kappa_\mathbb{K}(R, A_1, \dots, A_k) := R$

und $\kappa_{\mathbb{K}}(A) := (A^{II}, A^I)$. Nun definieren wir für alle $A \in V_{\mathbb{K}}$ stets $\rho_{\mathbb{K}}(A) := A$. Schließlich nehmen wir als Äquivalenzrelation $\theta_{\mathbb{K}}$ die Identität auf $V_{\mathbb{K}}$. Damit erhalten wir einen in $(\mathbb{K}, \iota)$ mit $\iota := id_{\mathcal{C}} \cup id_{\mathcal{G}} \cup id_{\mathcal{R}}$ gültigen Begriffsgraphen, den wir als den Standardgraphen definieren wollen:

Definition 27 *Für einen relationalen Kontext $\mathbb{K}$ heißt der Begriffsgraph $\mathfrak{G}(\mathbb{K}) := (V_{\mathbb{K}}, E_{\mathbb{K}}, \nu_{\mathbb{K}}, \kappa_{\mathbb{K}}, \rho_{\mathbb{K}}, id_{V_{\mathbb{K}}})$ der* STANDARDGRAPH VON $\mathbb{K}$.

Satz 28 *Für jeden relationalen Kontext $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$ gilt: Jeder in $(\mathbb{K}, id)$ gültige Begriffsgraph $\mathfrak{G}'$ ist aus dem Standardgraphen $\mathfrak{G}(\mathbb{K})$ von $\mathbb{K}$ herleitbar.*

Beweis: Sei $\mathfrak{G}'$ ein in $(\mathbb{K}, id)$ gültiger Begriffsgraph. Wir zeigen, daß er dann auch im Standardmodell von $\mathfrak{G}(\mathbb{K}) := \mathfrak{G}$ gilt. Daraus folgt mit Satz 17 und Satz 26 die Behauptung.

Für das Standardmodell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}, \iota^{\mathfrak{G}})$ mit $\mathbb{K}^{\mathfrak{G}} = ((G, \mathfrak{R}), \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}), I^{\mathfrak{G}})$ gilt $\iota^{\mathfrak{G}}_{\mathcal{G}} = id_G$, und für alle $R \in \mathfrak{R}$ ist $\iota^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{R}}(R) = \bigcup \{\rho_{\mathbb{K}}(e) \mid e \in E, \kappa_{\mathbb{K}}(e) \leq R\} = R$, also auch $\iota^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{R}} = id_{\mathfrak{R}}$. Somit ist für $\mathfrak{G}'$ in $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}, \iota^{\mathfrak{G}})$ die Kantenbedingung erfüllt. Weiterhin ist $\iota^{\mathfrak{G}}_{\mathcal{C}}(c) := (c^{I^{\mathfrak{G}}}, c^{I^{\mathfrak{G}} I^{\mathfrak{G}}})$, und gemäß Definition der Inzidenz im Standardmodell ist

$$c^{I^{\mathfrak{G}}} = \bigcup \{\rho_{\mathbb{K}}(A) \mid \kappa_{\mathbb{K}}(A) \leq c\} = \bigcup \{g^{II} \mid (g^{II}, g^I) \leq c\} = \bigcup \{g^{II} \mid g \in c^I\} = c^I.$$

Damit gilt für den in $(\mathbb{K}, id)$ gültigen Begriffsgraphen $\mathfrak{G}'$ auch die Eckenbedingung in $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}, \iota^{\mathfrak{G}})$. $\square$

Aus dem Beweis können wir auch sehen, daß der Kontext $\mathbb{K}^{\mathfrak{G}(\mathbb{K})}$ bis auf Reduktion des Kontextes und Umbenennung der Merkmale dem Kontext $\mathbb{K}$ entspricht, denn mit $c^{I^{\mathfrak{G}}} = c^I$ gilt insbesondere für alle Merkmale $m \in M$ die Gleichheit $(m^I, m^{II})^{I^{\mathfrak{G}}} = m^I$, und so erhalten wir den einfachen Isomorphismus $\varphi : \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}) \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}})$ mit $\varphi(B^I, B) := (B^{I^{\mathfrak{G}}}, B^{I^{\mathfrak{G}} I^{\mathfrak{G}}})$.

Dieser Satz gewährleistet, daß der Standardgraph gewissermaßen das Gegenstück zum Standardmodell ist: Erfassen wir mit dem Standardmodell auf Kontextebene alle Informationen, die in einem Begriffsgraphen enthalten sind, so können wir umgekehrt zu einem relationalen Kontext mit dem Standardgraphen einen Begriffsgraphen angeben, aus dem alle anderen gültigen Begriffsgraphen des relationalen Kontextes abgeleitet werden können.

Im allgemeinen läßt sich statt des Standardgraphen auch ein kleinerer Begriffsgraph konstruieren, aus dem alle anderen hergeleitet werden können, indem wir für jedes $k = 1, \ldots, n$ eine vereinigungsdichte Teilmenge $\mathfrak{R}^*_k$ von $\mathfrak{R}_k$ bestimmen, also eine Menge, für die für jedes $S \in \mathfrak{R}_k$ eine Teilmenge $T \subseteq \mathfrak{R}^*_k$ existiert, so daß $S = \bigcup T$ gilt. Dann bilden wir die Eckenmenge

$$E'_{\mathbb{K}} := \{(R, A_1, \ldots, A_k) \mid R \in \mathfrak{R}^*_k, A_1 \times \ldots \times A_k \in \mathrm{Ref}^{\max}(R)\},$$

und verfahren ansonsten wie oben. Solche Teilmengen zu bestimmen, ist jedoch (algorithmisch) meist aufwendiger als die Bildung eines zu großen Standardgraphen.

Daran wird deutlich, daß es zuweilen interessant ist, stärkere Bedingungen an die Ordnung auf der Relationenmenge eines Kontextes zu stellen, um erzeugende Elemente auszeichnen zu können. Eine Möglichkeit dazu stellt der Übergang von relationalen Kontexten zu Potenzkontextfamilien dar, der im Abschnitt 6 erläutert werden soll.

6 Begriffsgraphen und Potenzkontextfamilien

Der in [Wi97] vorgestellte erste, strukturtheoretische Ansatz, eine Verbindung zwischen der Formalen Begriffsanalyse und der Theorie der begrifflichen Graphen herzustellen, beruhte auf der Definition *realisierter Begriffsgraphen* über *Potenzkontextfamilien*. Wir wollen auch für diese Formalisierung den Zusammenhang zwischen der Ebene der Begriffsgraphen und der der Kontexte dadurch präzisieren, daß wir eine Semantik der Begriffsgraphen in Potenzkontextfamilien bereitstellen. Zunächst wiederholen wir die dort gegebene Definition von Potenzkontextfamilien in leicht modifizierter Form:

6.1 Potenzkontextfamilien

Definition 29 *Eine* POTENZKONTEXTFAMILIE $\vec{\mathbb{K}} := (\mathbb{K}_0, \ldots, \mathbb{K}_n)$ (VOM TYP n) *ist eine Familie von Kontexten* $\mathbb{K}_k := (G_k, M_k, I_k)$, *für die für jedes* $k = 1, \ldots, n$ *gilt* $G_k \subseteq (G_0)^k$. *Die Elemente der Menge* $\mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}} := \bigcup_{k=1}^{n} \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_k)$ *nennen wir* RELATIONSBEGRIFFE, *und wir schreiben* $\mathrm{Ext}(\mathbb{K}_k) := \{\mathrm{Ext}\,\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_k)\}$.

Die im Unterschied zu R. Wille eingeführte Unterscheidung von Kontext $\mathbb{K}_0$ und $\mathbb{K}_1$ ist begründet auf dem Ansatz, zwischen einstelligen Relationen und Begriffen trennen zu können, so daß die Realationsnamen einstelliger Kanten nicht im gleichen Begriffsverband wie die Begriffsnamen interpretiert werden. Ist dies in bestimmten Fällen nicht relevant, können $\mathbb{K}_0$ und $\mathbb{K}_1$ auch identifiziert werden.

In Potenzkontextfamilien können zwar strukturell ähnliche Informationen formalisiert werden wie in relationalen Kontexten, doch ist die Formalisierung in Potenzkontextfamilien etwas reichhaltiger. Zum einen können durch die Kontextbeschreibung die Relationen auch intensional beschrieben werden, so daß die für die Formale Begriffsanalyse grundlegende Zweiheit von Extension und Intension auch für Relationen bereitgestellt wird. Zum anderen wird durch die Betrachtung der Begriffsverbände der Relationsbegriffe die Ordnungsstruktur auf den Relationenmengen angereichert. Andererseits bringt diese Reichhaltigkeit eine aufwendigere Formalisierung mit sich, die nicht für alle Anwendungen notwendig ist. In solchen Fällen ist eine Formalisierung durch relationale Kontexte angemessen.

Trotz der Unterschiede kann durch folgende Definition der Zusammenhang zwischen Potenzkontextfamilien und relationalen Kontexten hergestellt werden:

Definition 30 *Für eine Potenzkontextfamilie* $\vec{\mathbb{K}} := (G_k, M_k, I_k)_{k=0,\ldots,n}$ *heißt der relationale Kontext* $\mathbb{K}_{\vec{\mathbb{K}}} := ((G_0, \mathfrak{R}), M_0, I_0)$ *mit* $\mathfrak{R} := \bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{R}_k$ *und* $\mathfrak{R}_k := \mathrm{Ext}(\mathbb{K}_k)$ *für jedes* $k = 1, \ldots, n$ *der* ZU $\vec{\mathbb{K}}$ GEHÖRIGE RELATIONALE KONTEXT.

Ist umgekehrt $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$ *ein relationaler Kontext, so ist die* ZU $\mathbb{K}$ GEHÖRIGE POTENZKONTEXTFAMILIE $\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}} = (G_k, M_k, I_k)_{k=0,\ldots,n}$ *definiert durch* $\mathbb{K}_0 := (G, M, I)$ *und für jedes* $k = 1, \ldots, n$ *ist* $G_k := G^k$, $M_k := \mathfrak{R}_k$, *und für alle* $(g_1, \ldots, g_k) \in G^k$, $R \in \mathfrak{R}_k$ *ist*

$$(g_1, \ldots, g_k)\, I_k\, R :\Longleftrightarrow (g_1, \ldots, g_k) \in R.$$

Im allgemeinen gilt für die zu $\mathbb{K}$ gehörige Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ die Beziehung $\mathfrak{R}_k \subseteq \mathrm{Ext}(\mathbb{K}_k)$, das heißt die Menge der Relationen des Kontextes $\mathbb{K}$ ist nur eine Teilmenge der Menge der Extensionen aller Relationsbegriffe der zugehörigen Potenzkontextfamilie. Stattdessen ist der zu $\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}$ gehörige relationale Kontext $\mathbb{K}_{\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}}$ nur dann gleich $\mathbb{K}$, wenn die Relationenmengen $\mathfrak{R}_k$ schnittabgeschlossen sind.

6.2 Semantik in Potenzkontextfamilien

Wir wollen nun eine Semantik der Begriffsgraphen in Potenzkontextfamilien analog zu der in relationalen Kontexten definieren:

Definition 31 *Für ein Alphabet $\mathcal{A} := (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ und eine Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}$ heißt die Vereinigung $\lambda := \lambda_{\mathcal{C}} \dot\cup \lambda_{\mathcal{G}} \dot\cup \lambda_{\mathcal{R}}$ der Abbildungen $\lambda_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0)$, $\lambda_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \to G_0$ und $\lambda_{\mathcal{R}}: \mathcal{R} \to \mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}}$ eine $\vec{\mathbb{K}}$-Interpetation von $\mathcal{A}$, wenn $\lambda_{\mathcal{C}}$ und $\lambda_{\mathcal{R}}$ ordnungserhaltend sind und für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_k) \subseteq \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_k)$. Das Tupel $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$ heißt dann Kontexteinterpretation von $\mathcal{A}$.*

Für einen Begriffsgraphen $\mathfrak{G}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}$ heißt das Tupel $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$ auch Kontexteinterpretation von $\mathcal{A}$ für $\mathfrak{G}$.

Definition 32 *Der Begriffsgraph $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ heißt gültiger Begriffsgraph von $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$, wenn*

- *für alle $v \in V$ gilt $\lambda_{\mathcal{G}}\rho(v) \subseteq \mathrm{Ext}(\lambda_{\mathcal{C}}\kappa(v))$* (Eckenbedingung)
- *für alle $e \in E$ gilt $\lambda_{\mathcal{G}}\rho(e) \subseteq \mathrm{Ext}(\lambda_{\mathcal{R}}\kappa(e))$* (Kantenbedingung).

Gilt $\mathfrak{G}$ in $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$, so heißt $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$ ein (Potenz-)Modell für $\mathfrak{G}$.

Das folgende Lemma zeigt, wie eng der Zusammenhang zwischen den Modellen der beiden Semantiken ist:

Lemma 33 *Gilt der Begriffsgraph $\mathfrak{G}$ in $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$, so gilt er auch in $(\mathbb{K}_{\vec{\mathbb{K}}}, \iota)$ mit $\iota_{\mathcal{C}} := \lambda_{\mathcal{C}}$, $\iota_{\mathcal{G}} := \lambda_{\mathcal{G}}$ und $\iota_{\mathcal{R}}(R) := \mathrm{Ext}(\lambda_{\mathcal{R}}(R))$ für alle $R \in \mathcal{R}$.*

Gilt umgekehrt der Begriffsgraph $\mathfrak{G}$ in $(\mathbb{K}, \iota)$, so gilt er auch in $(\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}, \lambda)$ mit $\lambda_{\mathcal{C}} := \iota_{\mathcal{C}}$, $\lambda_{\mathcal{G}} := \iota_{\mathcal{G}}$ und $\lambda_{\mathcal{R}}(R) := ((\iota_{\mathcal{R}} R)^{I_k I_k}, (\iota_{\mathcal{R}} R)^{I_k})$ für alle $R \in \mathcal{R}_k$ und $k = 1, \ldots, n$.

6.3 Standard-Potenz-Modell eines Begriffsgraphen

Definition 34 *Für den Begriffsgraphen $\mathfrak{G} := (V, E, \nu, \kappa, \rho, \theta)$ über dem Alphabet $(\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ definiert man die Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}} := (G_k^{\mathfrak{G}}, M_k^{\mathfrak{G}}, I_k^{\mathfrak{G}})_{k=0,\ldots,n}$ durch $G_0^{\mathfrak{G}} := \mathcal{G}, M_0^{\mathfrak{G}} := \mathcal{C}$, $G_k^{\mathfrak{G}} := \mathcal{G}^k$ und $M_k^{\mathfrak{G}} := \mathcal{R}_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Die Inzidenzrelationen $I_k^{\mathfrak{G}}$ sind so definiert, daß für alle $g \in \mathcal{G}$, $(g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{G}^k$, $c \in \mathcal{C}$ und $R \in \mathcal{R}_k$ mit $k = 1, \ldots, n$ gilt*

$$
\begin{aligned}
g\, I_0^{\mathfrak{G}}\, c \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists v \in V \quad \kappa(v) \leq_{\mathcal{C}} c \quad \text{und } g \in \rho(v) \\
(g_1, \ldots, g_k)\, I_k^{\mathfrak{G}}\, R \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists e \in E \quad \kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} R \quad \text{und } (g_1, \ldots, g_k) \in \rho(e).
\end{aligned}
$$

Die $\vec{\mathbb{K}}$-Interpretation $\lambda^{\mathfrak{G}} := \lambda_{\mathcal{C}} \dot\cup \lambda_{\mathcal{G}} \dot\cup \lambda_{\mathcal{R}}$ ist definiert durch $\lambda_{\mathcal{C}}(c) := (c^{I_0}, c^{I_0 I_0})$ für alle $c \in \mathcal{C}$, $\lambda_{\mathcal{G}} := id_{\mathcal{G}}$, und $\lambda_{\mathcal{R}}(R) := (R^{I_k}, R^{I_k I_k})$ für $R \in \mathcal{R}_k$. Dann heißt die Kontexteinterpretation $(\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}}, \lambda^{\mathfrak{G}})$, das Standard-Potenz-Modell von $\mathfrak{G}$.

Der Zusammenhang zu dem für relationale Kontexte definierten Standardmodell läßt sich wiederum durch Vergleich der Ecken- und Kantenbedingungen leicht herstellen:

Lemma 35 *Ein Begriffsgraph* $\mathfrak{G}_2$ *gilt genau dann im Standard-Potenz-Modell* $(\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}_1}, \lambda^{\mathfrak{G}_1})$ *des Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}_1$, *wenn er in dem Standardmodell* $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ *gilt.*

In beiden Standardmodellen werden also dieselben Informationen codiert. Um genauer sagen zu können, wie sie zusammenhängen, brauchen wir einen Isomorphiebegriff für Potenzkontextfamilien.

Definition 36 *Die beiden Potenzkontextfamilien* $\vec{\mathbb{K}} := (G_k, M_k, I_k)_{k=0,\dots,n}$ *und* $\vec{\mathbb{K}}' := (G'_k, M'_k, I'_k)_{k=0,\dots,n}$ *heißen* ISOMORPH, *wenn es zwei bijektive Abbildungen* $\varphi_{G_0} : G_0 \to G'_0$ *und* $\varphi_M : \bigcup_{k=0}^n M_k \to \bigcup_{k=0}^n M'_k$ *gibt, so daß*

- *die Fortsetzung* $\varphi_G : \begin{array}{ccc} \bigcup_{k=0}^n G_k & \to & \bigcup_{k=0}^n G'_k \\ (g_1, \dots, g_k) & \mapsto & (\varphi_{G_0}(g_1), \dots, \varphi_{G_0}(g_k)) \end{array}$

  von φ_{G_0} *wohldefiniert und bijektiv ist,*
- *für alle* $k = 0, \dots, n$ *gilt* $\varphi_M(M_k) = M'_k$ *und*
- *für alle* $k = 0, \dots, n$ *und für alle* $(g_1, \dots g_k) \in G_k$ *und* $m \in M_k$ *gilt*

$$(g_1, \dots g_k)\, I_k\, m \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi_{G_0}(g_1), \dots, \varphi_{G_0}(g_k))\, I'_k\, \varphi_M(m).$$

Lemma 37 *Für jeden Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}$ *ist die in den Kontexten* $\mathbb{K}_1$ *bis* $\mathbb{K}_n$ *spaltenbereinigte Potenzkontextfamilie zu* $\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}}$ *isomorph zu* $\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}}$.

Beweis: Es ist $\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}^{\mathfrak{G}}} = (H_k, N_k, J_k)_{k=0,\dots,n}$ die zum Standardkontext von $\mathfrak{G}$ gehörige Potenzkontextfamilie, also ist $H_0 = \mathcal{G}$, $H_k = \mathcal{G}^k$, $N_0 = \mathcal{C}$, $N_k = \mathfrak{R}_k^{\mathfrak{G}} = \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}}(\mathcal{R}_k)$ mit $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}}(R) = \bigcup\{\rho(e) \mid e \in E\colon \kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} E\}$ für alle $R \in \mathcal{R}$

und schließlich $J_k = \in$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Die in den Kontexten $\mathbb{K}_1$ bis $\mathbb{K}_n$ spaltenbereinigte Potenzkontextfamilie des Standard-PCF-Modells ist $(G_k^{\mathfrak{G}}, \widetilde{M}_k^{\mathfrak{G}}, \widetilde{I}_k^{\mathfrak{G}})_{k=0,\dots,n}$ mit $G_0^{\mathfrak{G}} = \mathcal{G}$, $M_0 = \mathcal{C}$, und für alle $k = 1, \dots, n$ ist $G_k^{\mathfrak{G}} = \mathcal{G}^k$ und

$$\widetilde{M}_k^{\mathfrak{G}} = \{[R] \mid R \in \mathcal{R}_k\} \text{ wobei } [R] := \{S \in \mathcal{R} \mid R^{I_{|R|}^{\mathfrak{G}}} = S^{I_{|R|}^{\mathfrak{G}}}\}$$

$$\text{und } [R]^{\widetilde{I}_k^{\mathfrak{G}}} = \bigcup\{\rho(e) \mid e \in E\colon \kappa(e) \leq_{\mathcal{R}} R\} \quad \text{für } R \in \mathcal{R}_k.$$

Diese Potenzkontextfamilien sind isomorph, denn die beiden Abbildungen $\varphi_{G_0} : G_0^{\mathfrak{G}} \to H_0$ mit $\varphi_{G_0} := id_{G_0}$, und $\varphi_M : \bigcup_{k=0}^n \widetilde{M}_k^{\mathfrak{G}} \to \bigcup_{k=0}^n N_k$ mit $\varphi_M([R]) = \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}}(R) = R^{I_{|R|}^{\mathfrak{G}}}$ sind bijektiv und erfüllen die geforderten Bedingungen. □

Mit diesen Lemmata können wir viele Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel, insbesondere die Überlegungen zu dem Folgerungsbegriff und somit auch den Vollständigkeitssatz, direkt übertragen:

Korollar 38 *Ein Begriffsgraph* $\mathfrak{G}_2$ *folgt genau dann semantisch aus einem Begriffsgraphen* $\mathfrak{G}_1$, *wenn er im Standard-Potenz-Modell* $(\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}_1}, \lambda^{\mathfrak{G}_1})$ *von* $\mathfrak{G}_1$ *gilt.*

Schließlich können wir folgende Äquivalenz festhalten:

Satz 39 *Es seien* $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *Begriffsgraphen mit den Standard-Potenz-Modellen* $(\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}_1}, \lambda^{\mathfrak{G}_1})$ *und* $(\vec{\mathbb{K}}^{\mathfrak{G}_2}, \lambda^{\mathfrak{G}_2})$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{G}_2 \quad \iff \quad I_k^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I_k^{\mathfrak{G}_2} \text{ für alle } k = 0, \ldots, n.$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{G}_1 \vdash \mathfrak{G}_2$ für zwei Begriffsgraphen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Dann gilt mit Satz 26 auch $\mathfrak{G}_1 \models \mathfrak{G}_2$, woraus mit Lemma 18 folgt, daß in den Standardmodellen $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_1}, \iota^{\mathfrak{G}_1})$ und $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}_2}, \iota^{\mathfrak{G}_2})$ gilt $I^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I^{\mathfrak{G}_2}$ und $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_1}(R) \supseteq \iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}_2}(R)$ für alle $R \in \mathcal{R}$. Mit Lemma 37 gilt folglich für die Standard-Potenz-Modelle:

$$I_0^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I_0^{\mathfrak{G}_2} \text{ und } R^{I_{|R|}^{\mathfrak{G}_1}} \supseteq R^{I_{|R|}^{\mathfrak{G}_2}} \text{ für alle } R \in \mathcal{R}.$$

Somit gilt für alle $k = 0, \ldots, n$ die behauptete Inklusion $I_k^{\mathfrak{G}_1} \supseteq I_k^{\mathfrak{G}_2}$. Für die Umkehrung kann man genauso argumentieren. □

Wie schon in Lemma 18 für relationale Kontexte läßt sich mit diesem Satz also die Folgerungsbeziehung auf der Kontextebene durch die Inklusion der Inzidenzen in den zugehörigen Standard-Potenz-Modellen charakterisieren. Damit können wir Infimum und Supremum von Begriffsgraphen auf der Ebene der Standard-Potenzmodelle mit Durchschnitt und Vereinigung der Inzidenzrelationen bestimmen. Ohne dies hier näher auszuführen, wird deutlich, daß die Möglichkeit einer Rückübersetzung auf die Graphenebene wichtig ist, wenn man dies ausnutzen will. Wir wollen also auch zu einer gegebenen Potenzkontextfamilie einen Standardgraphen angeben können.

6.4 Standardgraph einer Potenzkontextfamilie

Den Standardgraphen einer Potenzkontextfamilie definieren wir in Analogie zu dem eines relationalen Kontext so, daß aus dem Standardgraphen alle anderen gültigen Begriffsgraphen dieser Potenzkontextfamilie abgeleitet werden können. Dabei machen wir uns die Kontextbeschreibung der Relationenmengen zunutze, so daß wir nicht zu jeder Relation Kanten konstruieren müssen, sondern nur zu den (supremumdicht liegenden) Gegenstandsbegriffen der Kontexte $\mathbb{K}_k$.

Gegeben sei eine Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}} := (G_k, M_k, I_k)_{k=0,\ldots,n}$. Als Alphabet des zu konstruierenden Begriffsgraphen setzen wir $\mathcal{A} := (\mathcal{C}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$ mit $\mathcal{C} := \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0)$, $\mathcal{G} := G_0$ und $\mathcal{R} := \mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}}$. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ betrachten wir nun die Menge $\mathfrak{R}_k^*$ aller Gegenstandsbegriffe, also

$$\mathfrak{R}_k^* := \gamma(G_k) = \{((g_1, \ldots, g_k)^{I_k I_k}, (g_1, \ldots, g_k)^{I_k}) \mid (g_1, \ldots, g_k) \in G_k\},$$

und bestimmen für jeden Relationsbegriff $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}_k^*$ die Menge

$$\begin{aligned} \operatorname{Ref}^{\max}(\mathfrak{r}) \; := \; \{ & A_1 \times \ldots \times A_k \subseteq \operatorname{Ext}(\mathfrak{r}) \mid \\ & B_1 \times \ldots \times B_k \subseteq \operatorname{Ext}(\mathfrak{r}) \text{ impliziert } B_1 \times \ldots \times B_k \not\supset A_1 \times \ldots A_k\}. \end{aligned}$$

Wir definieren als Kantenmenge

$$E_{\vec{\mathbb{K}}} := \{(\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) \mid \mathfrak{r} \in \mathfrak{R}_k^*, A_1 \times \ldots \times A_k \in \operatorname{Ref}^{\max}(\mathfrak{r})\},$$

und wir setzen, wie für die relationalen Kontexte,

$$V_{\vec{\mathbb{K}}} := \{A \subseteq G_0 \mid \text{es gibt ein } (\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) \in E_{\vec{\mathbb{K}}} \text{ mit } A = A_i \text{ für ein } i \leq k\} \cup \{g^{I_0 I_0} \subseteq G_0 \mid g \in G_0\}.$$

Auch die Abbildungen werden analog definiert: Wir setzen $\nu_{\vec{\mathbb{K}}} : E_{\vec{\mathbb{K}}} \to \bigcup_{k=1}^{n} V_{\vec{\mathbb{K}}}^k$ durch $\nu_{\vec{\mathbb{K}}}(\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) := (A_1, \ldots, A_k)$ und $\kappa_{\vec{\mathbb{K}}} : V_{\vec{\mathbb{K}}} \cup E_{\vec{\mathbb{K}}} \to \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0) \cup \mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}}$ durch $\kappa_{\vec{\mathbb{K}}}(\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) := \mathfrak{r}$ und $\kappa_{\vec{\mathbb{K}}}(A) := (A^{I_0 I_0}, A^{I_0}) \in \underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0)$. So können wir für alle $A \in V_{\vec{\mathbb{K}}}$ nun $\rho_{\vec{\mathbb{K}}}(A) := A$ setzen. Schließlich nehmen wir als Äquivalenzrelation $\theta_{\vec{\mathbb{K}}}$ die Identität auf $V_{\vec{\mathbb{K}}}$. Damit erhalten wir einen in $(\vec{\mathbb{K}}, \lambda)$ gültigen Begriffsgraphen, wobei die $\vec{\mathbb{K}}$-Interpretation λ definiert ist durch $\lambda := id_{\mathcal{C}} \cup id_{\mathcal{G}} \cup id_{\mathcal{R}}$. Ihn wollen wir als den Standardgraphen definieren:

Definition 40 *Für eine Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}$ heißt der Begriffsgraph $\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}}) := (V_{\vec{\mathbb{K}}}, E_{\vec{\mathbb{K}}}, \nu_{\vec{\mathbb{K}}}, \kappa_{\vec{\mathbb{K}}}, \rho_{\vec{\mathbb{K}}}, id_{V_{\vec{\mathbb{K}}}})$ der* Standardgraph von $\vec{\mathbb{K}}$.

Um die Entsprechung dieses Standardgraphen zu dem eines relationalen Kontextes zu finden, müssen wir das Alphabet etwas anpassen, indem wir statt der Relationsbegriffe ihre Extensionen betrachten:

Ist $\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}}) := (V_{\vec{\mathbb{K}}}, E_{\vec{\mathbb{K}}}, \nu_{\vec{\mathbb{K}}}, \kappa_{\vec{\mathbb{K}}}, \rho_{\vec{\mathbb{K}}}, id_{V_{\vec{\mathbb{K}}}})$ der Standardgraph der Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}$ über dem zugehörigen Alphabet $(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0), G_0, \mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}})$, dann ist $\mathfrak{G}'(\vec{\mathbb{K}}) := (V_{\vec{\mathbb{K}}}, E'_{\vec{\mathbb{K}}}, \nu_{\vec{\mathbb{K}}}, \kappa'_{\vec{\mathbb{K}}}, \rho_{\vec{\mathbb{K}}}, id_{V_{\vec{\mathbb{K}}}})$ ein gültiger Begriffsgraph von $\vec{\mathbb{K}}$ über dem Alphabet $(\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0), G_0, \mathrm{Ext}(\mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}}))$. Dazu wird folgendes definiert:

$$E'_{\vec{\mathbb{K}}} := \{(\mathrm{Ext}\,\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) \mid (\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) \in E_{\vec{\mathbb{K}}}\},$$
$$\kappa'_{\vec{\mathbb{K}}}(v) := \kappa_{\vec{\mathbb{K}}}(v) \text{ für alle } v \in V_{\vec{\mathbb{K}}} \text{ und}$$
$$\kappa'_{\vec{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ext}\,\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) := \mathrm{Ext}\,\mathfrak{r} \text{ für alle } (\mathrm{Ext}\,\mathfrak{r}, A_1, \ldots, A_k) \in E'_{\vec{\mathbb{K}}}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt folgendes Lemma:

Lemma 41 *Für jeden relationalen Kontext $\mathbb{K}$ gilt $\mathfrak{G}(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{G}'(\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}})$.*

Es soll explizit bemerkt werden, daß diese beiden Graphen zwar isomorph sind, d.h. gleiche Gestalt, aber nicht dasselbe Alphabet haben, denn die Menge der Relationsnamen für $\mathfrak{G}'(\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}})$ ist im allgemeinen größer.

Die entsprechende Beziehung $\mathfrak{G}'(\vec{\mathbb{K}}) \cong \mathfrak{G}(\mathbb{K}_{\vec{\mathbb{K}}})$ ist im allgemeinen nicht richtig.

Beweis: Für jeden relationalen Kontext $\mathbb{K} := ((G, \mathfrak{R}), M, I)$ gilt $\mathfrak{R} = \mathrm{Ext}(\mathfrak{R}^*_{\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}})$. Damit gilt $E_{\mathbb{K}} = E'_{\vec{\mathbb{K}}_{\mathbb{K}}}$, und die Gleichheit der Standardgraphen folgt unmittelbar.

□

Mit diesem Lemma folgt aus Satz 28, daß der Standardgraph die gewünschte Eigenschaft erfüllt, alle gültigen Begriffsgraphen der Potenzkontextfamilie zu implizieren:

Korollar 42 *Für jede Potenzkontextfamilie $\vec{\mathbb{K}}$ gilt: Jeder in $(\vec{\mathbb{K}}, id)$ gültige Begriffsgraph $\mathfrak{G}'$ folgt semantisch aus dem Standardgraphen $\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})$ von $\vec{\mathbb{K}}$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{G}'$ gültig in $(\vec{\mathbb{K}}, id)$. Gilt $\mathfrak{G}'$ auch im Standard-Modell $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})}, \iota^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})})$ von $\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})$, dann folgt mit Satz 28 die Behauptung. Es gilt $\iota_{\mathcal{G}}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})} = id_{G_0}$ sowie $\iota_{\mathcal{C}}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})} = id_{\underline{\mathfrak{B}}(\vec{\mathbb{K}})}$ und $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})}: \mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}} \to \operatorname{Ext}(\mathfrak{R}_{\vec{\mathbb{K}}})$ mit $\iota_{\mathcal{R}}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})}(\mathfrak{r}) = \operatorname{Ext}(\mathfrak{r})$, folglich ist $\mathfrak{G}'$ auch in $(\mathbb{K}^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})}, \iota^{\mathfrak{G}(\vec{\mathbb{K}})})$ gültig. □

7 Diskussion

In diesem Artikel wurde ein Ansatz vorgestellt, die Verbindung zwischen der Theorie der begrifflichen Graphen und der Formalen Begriffsanalyse herzustellen, indem eine Theorie der Begriffsgraphen im Rahmen einer Kontextuellen Logik entwickelt wurde. Dazu werden Begriffsgraphen als syntaktische Konstrukte eingeführt, deren Semantik in relationalen Kontexten bzw. Potenzkontextfamilien definiert wurde. Inferenzen für Begriffsgraphen können zum einen durch einen vollständigen und korrekten Kalkül, zum anderen mit Hilfe der Standardmodelle beschrieben werden. Damit wurde ein effizientes Entscheidungsverfahren präsentiert, wann ein Begriffsgraph einen anderen impliziert.

In ihrer jetzigen Ausgestaltung umfaßt die Logik der Begriffsgraphen nur einen kleinen Teilbereich der Prädikatenlogik, denn man kann mit den einfachen Begriffsgraphen, in der Sprache der Prädikatenlogik ausgedrückt, nur atomare Formeln und deren Konjunktionen aufstellen. Eine Erweiterung durch geschachtelte Begriffsgraphen und Quantoren ist deshalb anzustreben, um eine ausdrucksstärkere Logik zu entwickeln. Dazu ist in [Wi98] ein erster Ansatz gemacht worden, gegliederte Begriffsgraphen mit triadischen Kontexten in Verbindung zu bringen.

Hauptanliegen dieser Arbeit war es jedoch nicht, eine direkte Konkurrenz zur Prädikatenlogik vorzustellen, zumal die hier definierte kontextuelle Semantik rechnerisch umständlicher ist als die der Prädikatenlogik. Es ging vielmehr darum, eine formale Sprache zu entwickeln, die durch ihre Einfachheit und Nähe zur natürlichen Sprache dazu geeignet ist, Wissen zu repräsentieren und kommunizierbar zu machen. Unter dieser Zielsetzung stellt die Logik der Begriffsgraphen einen wichtigen Beitrag zur Fortentwicklung einer Begrifflichen Wissensverarbeitung dar.

Die scharfe Trennung zwischen Syntax und Semantik in seiner logischen Bedeutung kann für die Begriffliche Wissensverarbeitung wieder etwas in den Hintergrund treten, und der Schwerpunkt wird auf den Möglichkeiten liegen, das gleiche Wissen in verschiedenen Sprachen zu formalisieren: Mit dem Standardmodell und dem Standardgraphen sind Übersetzungsmöglichkeiten zwischen der Graphenebene und der Kontextebene angegeben worden. Damit ist die sprachliche Grundlage für ein Begriffliches Daten- und Wisenssystem geschaffen, in dem die Vorteile beider Ansätze möglichst gut kombiniert werden.

So wäre ein Wissenssystem vorstellbar, in dem Wissen in formalen Kontexten codiert wird und die Sprache der Begriffsgraphen als Schnittstelle und Darstellungsform für das Wissen dient. In einem solchen System könnte etwa der Wissensingenieur die gegebene Wissensbasis durch die Eingabe neuer Begriffsgraphen erweitern. Dann könnten implementierte Algorithmen auf der Ebene der Graphen oder auch der der Kontexte (je nachdem, was für die spezifische Situation nützlicher ist) überprüfen, ob der neue Begriffsgraph im gegebenen Kontext bereits gültig (also die Information redundant) ist oder ob in ihm zusätzliche Informationen codiert sind. Das System könnte Begriffsgraphen formulieren, um die codierten Informationen zu visualisieren und könnte von den zahlreichen Methoden und Algorithmen profitieren, die bereits für begriffliche Graphen entwickelt wurden. Eine Einbindung in TOSCANA könnte ein einfacher Weg sein, um mit Hilfe von Begriffsverbänden die begrifflichen Strukturen und Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Daten aufzudecken und die Methoden der Formalen Begriffsanalyse fruchtbar zu machen.

Literatur

[Ch97] M. Chein: The CORALI-Project: From Conceptual Graphs to Conceptual Graphs via Labelled Graphs, in: D. Lukose et.al. (eds.): Conceptual Structures: Fulfilling Peirce's Dream. Lectures Notes in Artificial Intelligence 1257, Springer, Berlin–New York 1997, 65–79.

[CM92] M. Chein, M.-L. Mugnier: Conceptual Graphs: Fundamental Notions, Revue d'Intelligence Artificielle 6, 1992, 365–406.

[CM95] M. Chein, M.-L. Mugnier: Conceptual Graphs are also Graphs, Rapport de Recherche 95003, LIRMM, Université Montpellier II, 1995.

[CM96] M. Chein, M.-L. Mugnier: Représenter des Connaissances et Raisonner avec des Graphes, Revue d'Intelligence Artificielle 10, 1996, 7–56.

[GW96] B. Ganter / R. Wille: Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen, Springer, Berlin – Heidelberg 1996.

[Ka88] I. Kant: Logic. Dover– New York 1988.

[Pre98] S. Prediger: Simple Concept Graphs: A Logic Approach, Preprint FB Mathematik, TU Darmstadt 1998.

[Pri96] U. Priß: The Formalization of WordNet by Methods of Relational Concept Analysis, in: C. Fellbaum (ed.): WordNet - An Electronic Lexical Database and some of its Applications, MIT-Press 1996.

[So84] J. F. Sowa: Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine, Adison-Wesley, Reading 1984.

[So98] J. F. Sowa: Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations, PWS Publishing Co., Boston, to appear.

[We95] M. Wermelinger: Conceptual Graphs and First-Order Logic, in: G. Ellis et al. (eds.): Conceptual Structures: Applications, Implementations and Theory, Springer, Berlin–New York 1995, 323–337.

[Wi82] R. Wille: Restructuring Lattice Theory: an Approach based on Hierarchies of Concepts. In: I. Rival (ed.): Ordered Sets. Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445–470.

[Wi96] R. Wille: Restructuring Mathematical Logic: an Approach based on Peirce's Pragmatism, in: A. Ursini, P. Agliano (eds.): Logic and Algebra, Marcel Dekker, New York 1996, 267–281.

[Wi97] R. Wille: Conceptual Graphs and Formal Concept Analysis, in: D. Lukose et. al. (eds.): Conceptual Structures: Fulfilling Peirce's Dream, Lectures Notes in Artificial Intelligence 1257, Springer, Berlin–New York 1997, 290–303.

[Wi98] R. Wille: Triadic Concept Graphs, Preprint FB Mathematik, TU Darmstadt 1998.