Erblich endliche Mengen und die Widerspruchsfreiheit einer abgeschwächten Version von ZFC

Peter Zahn

Abstract: In §1 we introduce hereditarily finite sets by the rules $\Rightarrow \emptyset$ and $a, b \Rightarrow a\{b\}$ (i.e. from the premises a, b derive $a\{b\}$). The relation '$\subseteq$' between those sets can be introduced by the rules

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\ b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} & (\text{where } b \in c \ :\!\!\Leftrightarrow\ \emptyset\{b\} \subseteq c) \\ b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} & (\text{where } b = d \ :\!\!\Leftrightarrow\ b \subseteq d, d \subseteq b) \\ a \subseteq c, b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & (\text{if } a \not\equiv \emptyset). \end{array}$$

We can write $\{a, b\}$ for $\emptyset\{a\}\{b\}$, e.g. The hereditarily finite sets satisfy the axioms of ZFC without the axiom of infinity. In §2 we transcribe those axioms into Skolem form. In §1 we partly argue informally. To justify those argumentations, in §3 we investigate an obviously consistent rule system in which the theory of hereditarily finite sets is deducible. However, that rule system is not a formal one. It containes a rule with infinitely many premises. In §4 we sketch well-known facts of elementary proof theory that lead to the following result of Jacques Herbrand [3]: If $\Sigma, \forall x\, Fx$ is an inconsistent (finite) list of formulas in Skolem form, then there exists a tuple $s_1, \ldots, s_k$ ($k \geq 0$) of terms such that $\Sigma, Fs_1, \ldots, Fs_k$ is inconsistent. (Those formulas and terms are supposed to belong to a pertinent formal language.)

The main part of this paper is §5, containing a consistency proof of a weakened version of ZFC. In this proof we make use of the mentioned result of Herbrand and the fact that the hereditarily finite sets satisfy ZFC without the axiom of infinity. This proof will also be discussed with regard to the second incompleteness theorem of Gödel. In §6 we interpret the rule system used in §3 by means of dialogue games.

Note: Wilhelm Ackermann [1] has proved that Zermelo-Fraenkel set theory in which the axiom of infinity is replaced by its negation is equiconsistent to Peano's first order arithmetic. The latter theory has been proved to be consistent by Gerhard Gentzen [2].

Keywords: Hereditarily finite sets; Zermelo-Fraenkel set theory; consistency; elementary proof theory.

§1. Ein Modell von ZFC ohne Unendlichkeitsaxiom

Ausgehend von der leeren Menge $\emptyset$ konstruieren wir schrittweise 'erblich-endliche' Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ aus ihren Elementen a_i, falls diese schon konstruiert sind. (Genauer gesagt konstruieren wir Schreibfiguren zur Darstellung derartiger '$\mathcal{E}$-Mengen'.) Dabei fassen wir $\{a_1, \ldots, a_n\}$ als Abkürzung für $\emptyset\{a_1\}\{a_2\} \ldots \{a_n\}$ auf. Die Konstruktionsregeln lauten

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset & (\text{Beginn mit } \emptyset) \\ a,,\ b & \Rightarrow & a\{b\} & (\text{Übergang von } a \text{ und } b \text{ zu } a\{b\}). \end{array}$$

a und b fungieren hier als Eigenvariable, d.h. als Variable für jeweils schon konstruierte Figuren. Auch im Folgenden diene der Regelpfeil '$\Rightarrow$' zur Mitteilung der Erlaubnis, die Konklusion des betreffenden Regeleinzelfalles herzuleiten, nachdem dessen Prämissen hergeleitet worden sind. Zur Trennung mehrerer Prämissen verwenden wir doppelte Kommata ',,' (da einfache Kommata in Prämissen und Konklusionen bestimmter Regeln vorkommen).

$\mathcal{E}$ sei die Klasse der so konstruierbaren Schreibfiguren, die wir $\mathcal{E}$-Konstante nennen. Wir konstruieren nun eine Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen: $\mathcal{E}$-Terme seien diejenigen Schreibfiguren, die nach den Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{E}$-Konstanten zuzüglich der Erlaubnis, mit Variablen (z.B. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$) zu beginnen, konstruierbar sind. $\mathcal{E}$-Konstante sind also geschlossene $\mathcal{E}$-Terme (d.h. solche, in denen keine Variablen vorkommen). - $\mathcal{E}$-Formeln seien die atomaren Formeln $\alpha \subseteq \beta$ mit $\mathcal{E}$-Termen α, β, sowie mit F, G stets auch $\neg F$, $(F \wedge G)$ und $\forall x\, F$. Weitere $\mathcal{E}$-Terme und $\mathcal{E}$-Formeln soll es nicht geben. - Geschlossene $\mathcal{E}$-Formeln (d.h. solche, in denen keine Variablen *frei* vorkommen) nennen wir $\mathcal{E}$-Aussagen oder kurz Aussagen.

Zur Mitteilung dieser Figuren verwenden wir Metavariable, und zwar
für Variable: $u, v, w, x, y, z, x_1 \dots;$
für $\mathcal{E}$-Konstante: $a, b, c, d, a_1, \dots;$
für $\mathcal{E}$-Terme: $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \dots, c(x), \dots;$
für $\mathcal{E}$-Aussagen: $A, B, \dots$; für Formeln: F, G.

Die in einer Formel durch verschiedene Metavariable mitgeteilten Variablen seien stets voneinander verschieden. Abkürzungen (mit '$:\risingdotseq$' als Definitionszeichen):

$$\begin{array}{rcl} \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} & :\risingdotseq & \emptyset\{\alpha_1\} \dots \{\alpha_n\} \\ \alpha \in \beta & :\risingdotseq & \{\alpha\} \subseteq \beta \\ \alpha \subseteq \beta \subseteq \gamma & :\risingdotseq & \alpha \subseteq \beta \ \wedge \ \beta \subseteq \gamma \\ \alpha = \beta & :\risingdotseq & \alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha \\ (F \vee G) & :\risingdotseq & \neg(\neg F \wedge \neg G) \\ (F \rightarrow G) & :\risingdotseq & \neg(F \wedge \neg G) \\ \exists x\, F & :\risingdotseq & \neg \forall x\, \neg F. \end{array}$$

Diese Abkürzungen mögen auch für später eingeführte Terme bzw. Formeln gelten.

'$\equiv$' bezeichne die gestaltliche Gleichheit von Schreibfiguren. Für spezielle Negate schreiben wir kurz $\alpha \nsubseteq \beta, \alpha \notin \beta, \alpha \neq \beta$ bzw. $\alpha \not\equiv \beta$. Ferner verwenden wir geläufige Konventionen zur Klammerersparnis.

Eine Aussage der Form $a \subseteq b$ bedeute, dass sie nach den folgenden Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ herleitbar ist; d.h. wir stellen die 'Behauptungsregel' auf: Behaupte $a \subseteq b$ nur dann, wenn diese Aussage nach den folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\begin{array}{lrcll} (\subseteq)1 & & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\ (\subseteq)2 & b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} & \\ (\subseteq)3 & b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} & \\ (\subseteq)4 & a \subseteq c,, \ b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & (\text{für } a \not\equiv \emptyset). \end{array}$$

Für komplexe Aussagen stellen wir vorläufig folgende 'Behauptungsregeln' auf:
Behaupte $A \wedge B$ nur dann, wenn man A behaupten darf und B behaupten darf (d.h. wenn diese Behauptungen nach den hier angegebenen Regeln nicht verboten sind).
Behaupte $\forall x\, Ax$ nur dann, wenn man Ac für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten darf.
Behaupte $\neg A$ nur dann, wenn es (nach den hier angegebenen Regeln) verboten ist, A zu behaupten.

In §3 werden wir diese Regeln durch präzisere Regeln eines sog. Halbformalismus ersetzen. Die Ausführungen in §3 gehörenen also systematisch an den Anfang unserer Untersuchungen.

Die angegebenen Behauptungsregeln sind umkehrbar (da wir keine weiteren aufstellen). Das heißt: Ist eine atomare Aussage $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar, dann darf man sie behaupten. Darf man A sowie B behaupten, so auch $A \wedge B$. Darf man Ac für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten, so auch $\forall x\, Ax$. Ist es verboten, A zu behaupten, so darf man $\neg A$ behaupten. Da man jeweils entscheiden kann, ob $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar ist, sind Aussagen dieser Form stabil (d.h. man darf von $\neg\neg\, a \subseteq b$ auf $a \subseteq b$ schließen). Daher sind bekanntlich alle $\mathcal{E}$-Aussagen stabil, sodass man im Bereich dieser Aussagen die klassische Logik anwenden darf.

Wir wollen zeigen, dass die $\mathcal{E}$-Mengen die Axiome ZFC von Zermelo und Fraenkel außer dem Unendlichkeitsaxiom erfüllen.

1.1. Lemma: $a\{b\} \not\subseteq \emptyset$, insbesondere $b \notin \emptyset$, also

$$c \subseteq \emptyset \;\leftrightarrow\; c = \emptyset \;\leftrightarrow\; c \equiv \emptyset.$$

Beweis: $b \in \emptyset$ kommt nicht als Konklusion der Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ vor. Daher ist $a\{b\} \subseteq \emptyset$ auch nicht nach $(\subseteq)4$ herleitbar. $\square$

1.2. Lemma: $b \in c\{d\} \;\leftrightarrow\; b \in c \;\vee\; b = d.$

Beweis: $b \in c\{d\}$ kann nach $(\subseteq)2$ oder $(\subseteq)3$ (und auch nur nach diesen Regeln) aus der Prämisse $b \in c$ oder aus $b = d$ gefolgert werden. $\square$

1.3. Lemma: $a\{b\} \subseteq c \;\leftrightarrow\; a \subseteq c \;\wedge\; b \in c.$

Beweis: Für $a \equiv \emptyset$ ist 1.3 wegen $(\subseteq)1$ äquivalent mit $b \in c \;\leftrightarrow\; b \in c$. Nun sei $a \not\equiv \emptyset$. Dann steht zur Herleitung von $a\{b\} \subseteq c$ nur $(\subseteq)4$ mit den Prämissen $a \subseteq c$ und $b \in c$ zur Verfügung. $\square$

1.4. Lemma: $a \subseteq c \;\rightarrow\; a \subseteq c\{d\},$

Der Beweis ergibt sich durch Induktion über (die Konstruktion von) a aus
$\emptyset \subseteq c\{d\}$ und Folgendem:

$$\begin{array}{rlll} a\{b\} \subseteq c & \rightarrow & a \subseteq c \;\wedge\; b \in c & \text{(nach 1.3)} \\ & \rightarrow & a \subseteq c\{d\} \;\wedge\; b \in c\{d\} & \text{(Induktionsannahne und } (\subseteq)2) \\ & \rightarrow & a\{b\} \subseteq c\{d\} & ((\subseteq)4).\ \square \end{array}$$

1.5. Korollar: $\mathcal{E}$-Terme $c(x)$ sind *invariant* bezüglich $(=)$:

$$a = b \;\to\; c(a) = c(b).$$

Der Beweis gelingt durch Induktion über die Konstruktion der $\mathcal{E}$-Terme. Denn nach 1.4, $(\subseteq)3$ und $(\subseteq)4$ gilt:

$$a \subseteq c \;\wedge\; b = d \;\to\; a \subseteq c\{d\} \;\wedge\; b \in c\{d\} \;\to\; a\{b\} \subseteq c\{d\}, \quad \text{also}$$
$$a = c \;\wedge\; b = d \;\to\; a\{b\} = c\{d\}. \quad \square$$

1.6. Lemma: $\qquad a \subseteq b \subseteq c \;\to\; a \subseteq c.$

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)1$. Von nun an sei $a \not\equiv \emptyset$. Im Falle $b \equiv \emptyset$ gilt $a \not\subseteq b$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \;\to\; a \subseteq c)$. Für $b \not\equiv \emptyset$ und $c \equiv \emptyset$ gilt $b \not\subseteq c$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \;\to\; a \subseteq c)$. Nun setzen wir $a \equiv a_1\{a_2\}$, $b \equiv b_1\{b_2\}$, $c \equiv c_1\{c_2\}$, und machen folgende Induktionsannahmen:

(a) $\qquad a_1 \subseteq b \subseteq c \;\to\; a_1 \subseteq c.$

(b1) $\qquad \{a_2\} \subseteq b_1 \subseteq c \;\to\; \{a_2\} \subseteq c.$

(b2) $\qquad a_2 = b_2 = c_2 \;\to\; a_2 = c_2.$

(c) $\qquad \{a_2\} \subseteq \{b_2\} \subseteq c_1 \;\to\; \{a_2\} \subseteq c_1.$

(Beachte, dass die Tripel (a_1, b, c), $(\{a_2\}, b_1, c)$, (a_2, b_2, c_2), (c_2, b_2, a_2), $(\{a_2\}, \{b_2\}, c_1)$ kürzer als (a, b, c) sind.)

Ferner machen wir die Annahme $a \subseteq b \subseteq c$, und haben zu zeigen: $a \subseteq c$.

Nach 1.3 erhalten wir: $a_1 \subseteq b$, $a_2 \in b$ sowie $b_1 \subseteq c$ und $b_2 \in c$.

Wegen $a_1 \subseteq b \subseteq c$ folgt $a_1 \subseteq c$ nach (a).

Nach 1.2 folgt ferner $a_2 \in b_1$ oder $a_2 = b_2$, sowie $b_2 \in c_1$ oder $b_2 = c_2$.

Im Falle $a_2 \in b_1 \subseteq c$ erhalten wir $a_2 \in c$ nach (b1).

Nun sei $a_2 = b_2 \in c_1$. Nach $(\subseteq)3$ erhalten wir $a_2 \in \{b_2\} \subseteq c_1$, also $a_2 \in c_1$ nach (c), also $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)2$.

Im übrigen Falle $a_2 = b_2 = c_2$ ist $a_2 = c_2$ nach (b2), also wieder $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)3$. Jedenfalls haben wir $a_1 \subseteq c$ (s.o.) und $a_2 \in c$, also $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)4$. $\square$

1.7. Lemma: $\qquad \forall x\,(x \in a \;\to\; x \in b) \;\leftrightarrow\; a \subseteq b,$
also auch $\qquad \forall x\,(x \in a \;\leftrightarrow\; x \in b) \;\leftrightarrow\; a = b.$

Beweis: $(\leftarrow)$ folgt aus 1.6. Wir beweisen $(\to)$ durch Induktion über a:
Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)1$. Nun sei $a :\equiv a_1\{a_2\}$. Ind.vor.: 1.7 gelte für a_i statt für a $(i = 1, 2)$. Vorausgesetzt sei ferner $\forall x\,(x \in a \;\to\; x \in b)$. Nach $(\subseteq)2$ erhalten wir

$\forall x\,(x \in a_1 \;\rightarrow\; x \in a \;\rightarrow\; x \in b)$, also $a_1 \subseteq b$ nach Ind.ann. Ferner gilt $a_2 = a_2$ nach Ind.ann., also $a_2 \in a$ nach $(\subseteq)3$, also $a_2 \in b$, also insgesamt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)4$. □

1.8. Satz: Für alle $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{C}x$, in denen nur die Variable x frei vorkommt, und alle a, b gilt:

$$a = b \;\rightarrow\; (\mathcal{C}a \;\leftrightarrow\; \mathcal{C}b).$$

Beweis: Aus 1.5 und 1.6 erhält man: $a = b \;\rightarrow\; \big(c(a) \subseteq d(a) \;\leftrightarrow\; c(b) \subseteq d(b)\big)$. Daraus folgt 1.8 durch Induktion über den Aufbau von $\mathcal{C}x$. □

1.9. Lemma: $a \subseteq \{b\} \;\leftrightarrow\; a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\}$.

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} a \subseteq \{b\} & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; \exists x\,(x \in a \;\wedge\; x = b) \\ & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; b \in a \\ & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; \{b\} \subseteq a; \quad \text{also} \\ a \subseteq \{b\} & \leftrightarrow & a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\} \quad \text{(s. } (\subseteq)1\text{).} \end{array}$$ □

Definitionen, rekursiv:

$$\begin{array}{rcl} a \cup \emptyset & :\risingdotseq & a \\ a \cup b\{c\} & :\risingdotseq & (a \cup b)\{c\} \\ \bigcup_{y \in \emptyset} c(y) & :\risingdotseq & \emptyset \\ \bigcup_{y \in a\{b\}} c(y) & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in a} c(y) \cup c(b) \\ \mathcal{V}a & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in a} y \\ a \cap \emptyset & :\risingdotseq & \emptyset \\ a \cap b\{c\} & :\risingdotseq & \begin{cases} (a \cap b)\{c\}, & \text{falls } c \in a \\ a \cap b, & \text{falls } c \notin a \end{cases} \\ \mathcal{P}\emptyset & :\risingdotseq & \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(a\{b\}) & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in \mathcal{P}a} \{y, y\{b\}\} \end{array}$$

Hinweis: Hiernach sind z.B. Terme der Formen $a \cup z, \bigcup_{y \in z} c(y), \mathcal{P}z$ noch nicht definiert.

1.10. Satz: $\forall x\,(x \in a \cup b \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: Für $b \equiv \emptyset$ gilt:

$$x \in a \cup \emptyset \;\leftrightarrow\; x \in a \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in \emptyset \quad (\text{da } x \notin \emptyset).$$

Aus 1.10 als Ind.ann. folgt ferner:

$$\begin{array}{rcccl} x \in a \cup b\{c\} & \leftrightarrow & x \in (a \cup b)\{c\} & \leftrightarrow & x \in a \cup b \;\vee\; x = c \\ & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b \;\vee\; x = c & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b\{c\}. \end{array}$$ □

1.11. Satz: $\forall x\,(x \in \bigcup_{y \in a} c(y) \;\leftrightarrow\; \exists y \in a.\, x \in c(y))$,
speziell: $\forall x\,(x \in \mathcal{V}a \;\leftrightarrow\; \exists y\,(x \in y \in a))$.

Beweis durch Induktion über a: $x \in \bigcup_{y \in \emptyset} c(y) \leftrightarrow x \in \emptyset \leftrightarrow \exists y \in \emptyset.\, x \in c(y)$.

$$\begin{aligned}
x \in \textstyle\bigcup_{y \in a\{b\}} c(y) &\leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{y \in a} c(y) \cup c(b)\\
&\leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{y \in a} c(y) \ \vee\ x \in c(b)\\
&\leftrightarrow \exists y \in a.\, x \in c(y) \ \vee\ x \in c(b) \quad \text{(nach Ind.ann.)}\\
&\leftrightarrow \exists y \in a.\, x \in c(y) \ \vee\ \exists y = b.\, x \in c(y)\\
&\leftrightarrow \exists y \in a\{b\}.\, x \in c(y). \quad \square
\end{aligned}$$

1.12. Satz: $\forall x\, (x \in a \cap b \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: $x \in a \cap \emptyset \leftrightarrow x \in \emptyset \leftrightarrow x \in a \wedge x \in \emptyset$.
Für $c \in a$ (also $a\{c\} = a$) folgt aus der Ind.ann.:

$$\begin{aligned}
x \in a \cap b\{c\} &\leftrightarrow x \in (a \cap b)\{c\} \leftrightarrow x \in a \cap b \ \vee\ x = c\\
&\leftrightarrow (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ x = c\\
&\leftrightarrow x \in a\{c\} \ \wedge\ x \in b\{c\}\\
&\leftrightarrow x \in a \ \wedge\ x \in b\{c\} \quad \text{(wegen } a\{c\} = a).
\end{aligned}$$

Nun sei $c \notin a$. Dann gilt nach Ind.ann.:

$$\begin{aligned}
x \in a \cap b\{c\} &\leftrightarrow x \in a \cap b \leftrightarrow x \in a \ \wedge\ x \in b\\
&\rightarrow x \in a \ \wedge\ x \in b\{c\}\\
&\rightarrow x \in a \ \wedge\ (x \in b \ \vee\ x = c)\\
&\rightarrow (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ (x \in a \ \wedge\ x = c)\\
&\rightarrow (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ c \in a\\
&\rightarrow x \in a \ \wedge\ x \in b \qquad (\text{da } c \notin a) \quad \square
\end{aligned}$$

1.13. Satz: $\forall x\, (x \in \mathcal{P}a \leftrightarrow x \subseteq a)$.

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt: $x \in \mathcal{P}\emptyset \leftrightarrow x \in \{\emptyset\} \leftrightarrow x \subseteq \emptyset$ (da $\emptyset \subseteq x$). Ferner folgt aus der Ind.ann.:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{P}(a\{b\}) &\leftrightarrow x \in \textstyle\bigcup_{y \in \mathcal{P}a} \{y, y\{b\}\}\\
&\leftrightarrow \exists y \in \mathcal{P}a.\, x \in \{y, y\{b\}\} && (1.11)\\
&\leftrightarrow \exists y \subseteq a.\, (x = y \ \vee\ x = y\{b\}) && \text{(Ind.ann.)}\\
&\rightarrow x \subseteq a \ \vee\ x \subseteq a\{b\} && (1.2,\ 1.7)\\
&\rightarrow x \subseteq a\{b\} && (1.4)\\
&\rightarrow x = a\{b\} \cap x = (a \cap x) \cup (\{b\} \cap x) && (1.12, 1.10)\\
&\rightarrow x = a \cap x \ \vee\ x = (a \cap x)\{b\}\\
&\ (\text{da } \{b\} \cap x = \emptyset \text{ oder } \{b\} \cap x = \{b\})\\
&\rightarrow \exists y \subseteq a.\, (x = y \ \vee\ x = y\{b\}) && (y \text{ `für' } a \cap x). \quad \square
\end{aligned}$$

Zusammenfassung (auch ohne die Symbole $\mathcal{V}, \mathcal{P}$): Für alle x, a, b gilt:

$$\begin{aligned}
& x \notin \emptyset\\
x \in \{a, b\} &\leftrightarrow x = a \ \vee\ x = b\\
x \in \mathcal{V}a &\leftrightarrow \exists y\, (x \in y \in a), \quad \text{also} \quad \forall u\, \exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow \exists y\, (x \in y \in u))\\
x \in \mathcal{P}a &\leftrightarrow x \subseteq a, \quad \text{also} \quad \forall u\, \exists v\, \forall x\, (x \in v \leftrightarrow x \subseteq u).
\end{aligned}$$

D.h., unser 'Modell' erfüllt die ZF-Axiome der leeren Menge, der Paarmenge, der Vereinigungsmenge und der Potenzmenge sowie 1.7 und 1.8 als Gleichheitsaxiome. Nun zeigen wir, dass unser Modell auch folgende Ersetzungsaxiome erfüllt.

1.14. Satz: Cuv sei eine $\mathcal{E}$-Formel, die eine (evtl. partielle) Abbildung aus $\mathcal{E}$ in sich beschreibt, d.h. für die gilt:

$$\forall u, v, w\, (\mathcal{C}uv \ \wedge\ \mathcal{C}uw \ \rightarrow\ v = w).$$

Dann gilt für beliebige a: $\quad \exists y\, \forall v\, (v \in y \ \leftrightarrow\ \exists u \in a.\, \mathcal{C}uv)$.

Beweis durch Induktion über den Aufbau von a: Zunächst gilt
$\forall v\, (\exists u \in \emptyset.\, Cuv \ \leftrightarrow\ v \in \emptyset)$. Nun machen wir die Ind.ann.: $\forall v\, (\exists u \in a.\, Cuv \ \leftrightarrow\ v \in c)$.
Im Falle $\exists v\, Cbv$ dürfen wir ferner Cbd annehmen. Dann gilt für alle v

$$\begin{aligned} \exists u \in a\{b\}.\, \mathcal{C}uv \ &\leftrightarrow\ \exists u\, (u \in a \ \wedge\ Cuv) \ \vee\ \exists u\, (u = b \ \wedge\ Cuv) \\ &\leftrightarrow\ \exists u \in a.\, Cuv \ \vee\ Cbv \\ &\leftrightarrow\ v \in c \ \ \vee\ \ v = d \\ &\leftrightarrow\ v \in c\{d\}. \end{aligned}$$

Im anderen Falle $\neg\exists v\, \mathcal{C}bv$ gilt für alle v

$$\begin{aligned} \exists u \in a\{b\}.\, \mathcal{C}uv \ &\leftrightarrow\ \exists u \in a.\, Cuv \ \vee\ Cbv \\ &\leftrightarrow\ \exists u \in a.\, Cuv \\ &\leftrightarrow\ v \in c. \quad \square \end{aligned}$$

Für logische Untersuchungen ist es zweckdienlich, 1.14 wie folgt als das **Ersetzungsaxiomenschema** zu notieren, wobei Guv für Formeln steht, in denen außer u und v noch weitere Variable '...' frei vorkommen dürfen:

$$\begin{aligned} \forall \ldots\, (\forall u, v, w\, (Guv \ \wedge\ Guw \ \rightarrow\ v = w) \ \rightarrow \\ \rightarrow\ \forall x\, \exists y\, \forall v\, (v \in y \ \leftrightarrow\ \exists u \in x.\, Guv)). \end{aligned}$$

Für Formeln Guv der Gestalt $Gu \wedge u = v$ erhält man insbesondere das **Aussonderungsaxiomenschema**:

$$\forall \ldots\, \forall x\, \exists y\, \forall v\, (v \in y \ \leftrightarrow\ v \in x \ \wedge\ Gv).$$

Das **Auswahlaxiom** ist für endliche Mengen bekanntlich erfüllt. Für $\mathcal{E}$-Mengen erhalten wir dies einfach so: $c \neq \emptyset$ sei eine $\mathcal{E}$-Menge nichtleerer, einander elementefremder Mengen. c hat die Gestalt $\{c_1\{d_1\}, \ldots, c_k\{d_k\}\}$ mit $c_i\{d_i\} \cap c_j\{d_j\} = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$. Dann hat die Menge $\{d_1, \ldots, d_k\}$ mit jedem Element $c_i\{d_i\}$ von c genau ein Element gemein.

Das **Fundierungsaxiom** lautet: $a \neq \emptyset \rightarrow \exists\, x \in a.\, a \cap x = \emptyset$.
Beweisskizze: Würde a_1 dieses Axiom nicht erfüllen, so gäbe es eine unendliche 'Vorgängerfolge' $a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots$ von Konstanten derart, dass für jedes i das Glied a_{i+1} als Element von a_i *angeführt*, also kürzer als a_i ist (was nicht geht).

§2. Mengentheoretische Axiome in Skolemscher Normalform

Um den angestrebten Widerspruchsfreiheitsbeweis von ZFC zu ermöglichen, formen wir die bisher formulierten mengentheoretischen 'Axiome' um. Dazu legen wir eine lexikographische Anordnung ($\preceq$) aller $\mathcal{E}$-Konstanten zugrunde, und reden diesbezüglich von *frühesten* $\mathcal{E}$-Konstanten. Die erwähnte Umformung kann man nach folgender allgemeinen Methode durchführen: Man führe zunächst jedes 'Axiom' in eine pränexe Normalform über, etwa $\exists y_0 \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$, wobei $A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$ quantorenfrei ist. Daraufhin führe man neue Terme $f_0, f_1(x_1),\ f_2(x_1, x_2)$ folgender Art ein:
f_0 kennzeichnet das früheste y_0 mit $\forall x_1\ \exists y_1\ \forall x_2\ \exists y_2\ A(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_1(x_1)$ kennzeichnet das früheste y_1 mit $\forall x_2\ \exists y_2\ A(f_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_2(x_1, x_2)$ kennzeichnet das früheste y_2 mit $A(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2, y_2)$.
Das ursprüngliche Axiom werde dann ersetzt durch $\forall x_1, x_2 A(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2, f_2(x_1, x_2))$. Aus dieser Aussage in 'Skolemform' ('Skolemscher Normalform', d.h. ohne Einsquantoren) folgt das ursprüngliche Axiom sogar rein logisch, also ohne Bezugnahme auf die Bedeutung der Terme $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1.x_2)$.

Die erwähnten Terme $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1, x_2)$ sind gemäß folgender Skizze zu verstehen: Für $\mathcal{E}$-Formeln Fy, für die $\exists y\, Fy$ gilt - d.h. für alle Werte der darin frei vorkommenden Variablen gilt - sei

$$^yFy\ :\risingdotseq\ Fy\ \wedge\ \forall z\,(Fz \to y \preceq z),$$

wobei $y \preceq z$ zu lesen ist als "In der erwähnten lexikographischen Anordnung steht y vor z oder fällt mit z zusammen". (Dabei möge z nicht in $\mathcal{F}y$ vorkommen.) Im Falle $\exists y\, Fy$ gilt somit (klassisch) die Existenz und Eindeutigkeit:

$$\exists y\, {}^yFy\ \wedge\ \forall y, z\,({}^yFy \wedge {}^zFz \to y \equiv z)$$

Wegen des Vorkommens der Zeichen '$\preceq$' und '$\equiv$' nehmen wir hier also eine *Erweiterung* der oben eingeführten Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen zu Hilfe.

Nun können wir den μ-Term $\mu y\, Fy$ (gelesen: "das früheste y mit Fy") wie folgt einführen: Mit der Abkürzung $\tau :\risingdotseq \mu y\, Fy$ setzen wir $P\tau :\risingdotseq \exists y\,({}^yFy \wedge\ Py)$ für atomare $\mathcal{E}$-Formeln Py. Für beliebige $\mathcal{E}$-Formeln Ay erhalten wir dann bekanntlich (unter Variablenbedingungen)

$$\begin{array}{c} A\tau\ \leftrightarrow\ \exists y\,({}^yFy \wedge Ay)\ \leftrightarrow\ \forall y({}^yFy \to Ay), \quad \text{also} \\ \forall y\, Ay\ \to\ A\tau\ \to\ \exists y\, Ay \end{array}$$

(cf. [5], [6], 3.10). Dies gilt bekanntlich auch für - mit etwas mehr Aufwand einzuführende - Formeln $A\tau$, in denen mehrere μ-Terme evtl. ineinandergeschachtelt vorkommen.

Anmerkungen: Die Formel ${}^yFy$ ist allerdings nicht invariant bezüglich der Mengengleichheit ($=$); denn für verschiedene Darstellungen b, c derselben $\mathcal{E}$-Menge kann nicht sowohl ${}^bFb$ als auch ${}^cFc$ gelten. Dennoch ist z.B. $\exists y\,({}^yFy \wedge Ay)$ invariant bez. ($=$). Dies sieht man zunächst für $\mathcal{E}$-Formeln Ay und Fy, in denen keine μ-Terme vorkommen. Wir haben jedoch auch Formeln, in denen μ-Terme vorkommen, in Betracht zu ziehen und unsere Definitionen auf sie auszudehnen. Daher definieren wir: μ-Formeln seien: alle $\mathcal{E}$-Formeln, mit Gy und Fy auch $G(\mu y Fy)$ (falls $\exists y\, Fy$ gilt und eine Variablenbedingung erfüllt ist) sowie mit F und G stets auch $(F \wedge G)$, $\neg F$ und $\forall x\, F$. Weitere μ-Formeln soll es nicht geben. Durch Induktion über den Aufbau dieser Formeln ergibt sich leicht, dass alle μ-Formeln invariant bez. $(=)$ sind.

Mit Hilfe von μ-Termen $\mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ mit $n > 0$, für die $\forall x_1, \dots, x_n\, \exists y Fx_1 \dots x_n y$ gilt und in denen keine kürzeren μ-Terme vorkommen, können wir n-stellige Funktionen durch Symbole der Form $f :\risingdotseq \lambda x_1, \dots, x_n\, \mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ darstellen. Die Axiome von ZFC in Skolem-Form lassen sich nochmals derart umformen, dass in ihnen nur Terme der Form $f(x_1, \dots, x_n)$ an Stelle von μ-Termen $\mu y\, Fx_1 \dots x_n y$ vorkommen.

ZFC$_\circ$ sei das so formulierte System dieser Axiome ohne das Unendlichkeitsaxiom.

§3. Ein halbformales Regelsystem für die Lehre von erblich-endlichen Mengen

Die in §1 etwas informell durchgeführten Untersuchungen wollen wir nun auf eine strengere Grundlage stellen. Zu diesem Zweck werden wir einen Halbformalismus $\mathcal{H}$ aufstellen, in dem alle in §1 erhaltenen Resultate herleitbar sind. Zunächst führen wir die Sprache $\mathcal{L}$ ein, auf der $\mathcal{H}$ operiert:

$\mathcal{L}$-Terme seien: $\emptyset$, die bisherigen Variablen, mit σ, τ auch $\sigma\{\tau\}$ und mit $\tau_1, \dots, \tau_n$ auch $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ (für n-stellige Funktionssymbole f, die in den Axiomen von ZFC$_\circ$ vorkommen). Weitere $\mathcal{L}$-Terme soll es nicht geben. $\mathcal{L}$-Konstante seien geschlossene $\mathcal{L}$-Terme.

Das Klammernpaar $\{,\}$ zählen wir nicht zu den Funktionssymbolen. $\mathcal{E}$-Terme sind also 'funktionssymbol-frei'. Die in §1 eingeführten $\mathcal{E}$-Konstanten sind $\mathcal{L}$-Konstante.

Zum Aufbau von Formeln werden wir außer dem zweistelligen Prädikator '$\subseteq$' noch $\mathcal{E}$ und N als einstellige Prädikatoren verwenden. In $\mathcal{L}$ schreiben wir $\mathcal{E}r$ statt $r \in \mathcal{E}$ in der Metasprache. N soll auf diejenigen Elemente von $\mathcal{E}$ 'zutreffen', welche auf bestimmte Weise die natürlichen Zahlen darstellen.

Atomare $\mathcal{L}$-Formeln seien $\sigma \subseteq \tau, \mathcal{E}\tau$ und $\mathrm{N}\tau$ mit $\mathcal{L}$-Termen σ, τ. Aus ihnen werden die übrigen $\mathcal{L}$-Formeln wie üblich mittels $\wedge, \neg, \forall$ aufgebaut. $\mathcal{L}$-Aussagen seien geschlossene $\mathcal{L}$-Formeln. Auch für $\mathcal{L}$-Formeln F, G seien $F \vee G, F \to G$ und $\exists x\, F$ wie auf S. 2 für $\mathcal{E}$-Formeln definiert.

In §3 sagen wir jedoch einfach "Formel" statt "$\mathcal{L}$-Formel" und "Aussage" statt "$\mathcal{L}$-Aussage".

Als Metavariable verwenden wir nun: a, b, c, d für $\mathcal{E}$-Konstante; p, q für $\mathcal{L}$-Konstante; A, B, C, D für Aussagen; P (wie "prim") für atomare Aussagen; Ax für Formeln, in denen höchstens die Variable x frei vorkommt; und $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Pi$ für Listen $C_1. \cdots .C_n$ von Aussagen C_i mit $n \geq 0$ (also auch für die 'leere Liste'). (Zur Trennung der Glieder C_i dieser

Listen verwenden wir den Punkt statt des Kommas.) Wie wir sehen werden, können diese Listen für $n \geq 2$ als $C_1 \vee \ldots \vee C_n$ gelesen werden.

Der Halbformalismus $\mathcal{H}$ habe folgende (teils weiter unten angeführte) Schlussregeln:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\
\Gamma.\, b \in c.\, b \subseteq d \,,, \ \Gamma.\, b \in c.\, d \subseteq b & \Rightarrow & \Gamma.\, b \in c\{d\} & \\
\Gamma.\, a \subseteq c \,,, \ \Gamma.\, b \in c & \Rightarrow & \Gamma.\, a\{b\} \subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
 & \Rightarrow & b \notin \emptyset & \\
\Gamma.\, b \notin c \,,, \ \Gamma.\, b \not\subseteq d.\, d \not\subseteq b & \Rightarrow & \Gamma.\, b \notin c\{d\} & \\
\Gamma.\, a \not\subseteq c.\, b \notin c & \Rightarrow & \Gamma.\, a\{b\} \not\subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
\Gamma & \Rightarrow & \Delta & (\text{falls } \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Gamma.\, A & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\neg\, A & \\
\Gamma.\, A \,,, \ \Gamma.\, B & \Rightarrow & \Gamma.\, (A \wedge B) & \\
\Gamma.\, \neg\, A.\, \neg\, B & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, (A \wedge B) & \\
\text{für alle } c\text{: } \Gamma.\, Ac & \Rightarrow & \Gamma.\, \forall x\, Ax & (\text{s.u.}) \\
\Gamma.\, \neg\, Ac & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, \forall x\, Ax &
\end{array}
$$

Dabei bedeute $\Gamma \subseteq \Delta$, dass jedes Glied von Γ ein Glied von Δ ist. Jeder Einzelfall der vorletzten Regel habe unendlich viele Prämissen, nämlich (bei gegebener Liste $\Gamma.\, Ax$) für jede $\mathcal{E}$-Konstante c die Aussagenliste $\Gamma.\, Ac$. Da man nicht alle diese Listen herleiten kann, erlaube jeder Einzelfall dieser Regel, seine Konklusion $\Gamma.\, \forall x\, Ax$ herzuleiten, nachdem man ein effektives Verfahren beschrieben hat, das für jedes eingegebene c eine Herleitung von $\Gamma.\, Ac$ anzugeben vorschreibt. Diese Regel heiße daher halbformal.

Das erwähnte Verfahren soll für jede $\mathcal{E}$-Konstante c im Detail vorschreiben, welche Schlüsse von $\mathcal{H}$ nach Eingabe von c in welcher Reihenfolge anzuwenden sind, und die Eigenschaft haben, dass dadurch eine Herleitung von $\Gamma.Ac$ entsteht. (Vgl. [4], p. 66 - 69.)

Die in den Zeilen 3 bzw. 6 angeführte Bedingung "falls $a \not\equiv \emptyset$" hat zur Folge, dass die Liste $\Gamma.\, a\{b\} \subseteq c$ bzw. $\Gamma.\, a\{b\} \not\subseteq c$ in keinem anderen Regeleinzelfall als Konklusion vorkommt. - Weitere Regeln von $\mathcal{H}$ seien:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \mathcal{E}\emptyset & \\
\Gamma.\mathcal{E}a \,,, \ \Gamma.\mathcal{E}b & \Rightarrow & \Gamma.\mathcal{E}a\{b\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\, \mathcal{E}p & (\text{falls } p \notin \mathcal{E}). \\
 & \Rightarrow & \mathrm{N}\emptyset & \\
\Gamma.\, \mathrm{N}a & \Rightarrow & \Gamma.\, \mathrm{N}a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\, \mathrm{N}a\{b\} & (\text{falls } a \not\equiv b) \\
\Gamma.\, \neg\, \mathrm{N}a & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, \mathrm{N}a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\, \mathrm{N}p; & (\text{falls } p \notin \mathcal{E}).
\end{array}
$$

Erläuterung: Setzt man $a^+ :\equiv a\{a\}$, so kann man mit leerer (d.h. fehlender) Liste Γ nacheinander folgende Aussagen herleiten: $\mathrm{N}\emptyset$, $\mathrm{N}\emptyset^+$, $\mathrm{N}\emptyset^{++}$, $\mathrm{N}\emptyset^{+++}, \ldots$. D.h. N 'trift zu' auf folgende Darstellungen natürlicher Zahlen: $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$.

In den Axiomen von $\mathrm{ZFC}_\circ$ kommen Funktionssymbole f vor. Wir verwenden sie als Abkürzungen für je eine Funktionsdarstellung $\lambda \underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$ mit $\underline{x} :\equiv x_1, \ldots, x_j$ und einer Formel $F(\underline{x}, y)$, für die $\forall \underline{x}\, \exists y\, F(\underline{x}, y)$ in $\mathcal{H}$ herleitbar ist und in der keine Funktionssymbole vorkommen. Dabei ist $\mu y\, F(\underline{x}, y)$ zu lesen als "die früheste $\mathcal{E}$-Konstante y mit $F(\underline{x}, y)$", wobei sich "die früheste" auf eine gegebene lexikographische Anordnung '$\preceq$' aller $\mathcal{E}$-Konstanten bezieht. Für solche $f :\Longleftarrow \lambda\underline{x}\, \mu y\, F(\underline{x}, y)$ und atomare Formeln $P(y)$, die nicht mit $\mathcal{E}$ oder N beginnen, wählen wir als Regeln von $\mathcal{H}$:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma.\, \exists y\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\, P(f(\underline{c})) \\ \Gamma.\, \forall y \neg\, ({}^{y}F(\underline{c}, y) \;\wedge\; P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\, \neg\, P(f(\underline{c})). \end{array}$$

Dabei haben wir die Definition

$${}^{y}F(\underline{c}, y) \;:\Longleftarrow\; F(\underline{c}, y) \;\wedge\; \forall z\, (F(\underline{c}, z) \;\rightarrow\; y \preceq z)$$

aus §2 verwendet. Kommen in $P(f(\underline{c}))$ weitere Funktionssymbole vor, so können diese Regeln auf mehrere Weisen angewandt werden. Um Fragen, die sich daraus ergeben, zu erübrigen, schränken wir diese Regeln auf den Fall ein, dass in $P(f(\underline{c}))$ kein weiteres Funktionssymbol rechts von f steht. (Dies gelte für $\cup(a, b)$ statt $a \cup b$ und $\cap(a, b)$ statt $a \cap b$.) In $\underline{c}$ und daher auch in $F(\underline{c}, y)$ soll also kein Funktionssymbol vorkommen. Bekanntlich sind jedoch die angegebenen Regeln auch ohne diese Einschränkung zulässig (s. 3.10).

In $\mathcal{H}$ einzufügen sind außerdem Regeln mit Konklusionen der Formen $\Gamma.\, a \preceq b$ und $\Gamma.\, a \not\preceq b$. In $\mathcal{L}$ aufzunehmen sind daher noch Formeln der Gestalt $\sigma \preceq \tau$ mit $\mathcal{L}$-Termen σ, τ. Wir führen dies hier nicht aus.

Weitere Regeln mögen nicht zu $\mathcal{H}$ gehören.

$\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma$ bedeute, dass Γ in $\mathcal{H}$ herleitbar ist. Eine Schlussregel heiße in $\mathcal{H}$ **zulässig**, wenn für jeden ihrer Einzelfälle gilt: Sind alle seine Prämissen in $\mathcal{H}$ herleitbar, so ist dies auch seine Konklusion. Einzelfälle von Schlussregeln nennen wir kurz **Schlüsse**. Die Worte 'herleitbar' und 'zulässig' beziehen sich hier in §3 auf $\mathcal{H}$.

Die leere Liste ist nicht herleitbar, und Aussagen der Form $b \in \emptyset$ kommen nur in den Schlüssen $b \in \emptyset \Rightarrow b \in \emptyset$ und $\Gamma \Rightarrow b \in \emptyset$ mit leerem Γ von $\mathcal{H}$ als Konklusion vor, sind also nicht herleitbar. Daher ist $\mathcal{H}$ konsistent. Nach dem noch anzuführenden Schnittsatz ist insbesondere die Regel

$$\Gamma.\, A\,,\!,\;\; \Delta.\, \neg\, A \Rightarrow \Gamma.\, \Delta$$

zulässig, und zwar auch für leere Listen Γ, Δ. Daher sind für keine Aussage A sowohl A als auch $\neg\, A$ herleitbar, d.h. $\mathcal{H}$ ist 'widerspruchsfrei'.

Definition: $\mathbb{N}\, \tau \Longleftarrow \exists x\, (\mathrm{N}x \wedge x = \tau) \wedge \mathcal{E}\tau$ für $\mathcal{L}$-Terme τ.

Definition der 'Länge' #, rekursiv: $\#\emptyset :\Longleftarrow 1$ und $\#a\{b\} :\Longleftarrow \#a + \#b + 1$ (für $a, b \in \mathcal{E}$).

3.1 Lemma: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}a \wedge a = b$, dann ist $\#a \leq \#b$.

Beweis: Sei $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}a \wedge a = b$, $a \equiv \emptyset\{a_1\}\ldots\{a_m\}, b \equiv \emptyset\{b_1\}\ldots\{b_n\}$. Zur Herleitung von $\mathrm{N}a$ ist eine Herleitung von $\mathrm{N}a_m$ erforderlich. Für alle $i \leq m$ gibt es (wegen $\vdash_{\mathcal{H}} a_i \in b$) ein $k_i \leq n$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} a_i = b_{k_i}$. Daher gilt $\vdash_{\mathcal{H}} a_m = \emptyset\{a_1\}\ldots\{a_{m-1}\} = \emptyset\{b_{k_1}\}\ldots\{b_{k_{m-1}}\}$. Aus den Induktionsannahmen $\#a_m \leq \#b_{k_m}$ und $\#a_m \leq \#\emptyset\{b_{k_1}\}\ldots\{b_{k_{m-1}}\}$ folgt $\#a = \#a_m\{a_m\} \leq \#\emptyset\{b_{k_1}\}\ldots\{b_{k_{m-1}}\}\{b_{k_m}\} \leq \#b$. Denn für $1 \leq i < j \leq m$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} a_i \in a_j$ (Induktion über m), also $\vdash_{\mathcal{H}} b_{k_i} = a_i \neq a_j = b_{k_j}$, also $b_{k_i} \not\equiv b_{k_j}$. $\square$

3.2 Satz: (a) Für alle Aussagen A, in denen keine Quantoren vorkommen und Funktionssymbole höchstens in atomaren Teilaussagen der Form $\mathcal{E}p$ oder $\mathrm{N}p$ stehen, gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg A$ (mit "oder" im effektiven Sinne, so auch in (b)).
(b) Für alle $\mathcal{L}$-Konstanten p gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, p$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg \mathbb{N}\, p$.

Beweis: (a) Wir zeigen dies zuerst für atomare Aussagen der gen. Art durch eine Induktion: Zulässig sind die Regeln: $\Rightarrow \mathcal{E}a$ (für $a \in \mathcal{E}$); $\Rightarrow \neg \mathcal{E}p$ (für $p \notin \mathcal{E}$) sowie

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\
 & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq \emptyset & \\
\{b\} \subseteq c & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\
b \subseteq d\,,,\ d \subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\
\{b\} \not\subseteq c\,,,\ b \not\subseteq d & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\
\{b\} \not\subseteq c\,,,\ d \not\subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\
a \subseteq c\,,,\ \{b\} \subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
a \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & (\text{falls } a \not\equiv \emptyset) \\
\{b\} \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & \\
 & \Rightarrow & \mathrm{N}\emptyset & \\
\mathrm{N}a & \Rightarrow & \mathrm{N}a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\, \mathrm{N}a\{b\} & (\text{falls } a \not\equiv b) \\
\neg\, \mathrm{N}a & \Rightarrow & \neg\, \mathrm{N}a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\, \mathrm{N}p & (\text{für } p \notin \mathcal{E}).
\end{array}$$

Definition der Länge $\#P$ atomarer Aussagen P, in denen keine Funktionssymbole vorkommen:

$$\#(a \subseteq b) :\!\!= \#a + \#b\,; \quad \#\mathcal{E}c :\!\!= \#c\,; \quad \#Nc :\!\!= \#c.$$

Aus der Ind.ann., für alle atomaren Aussagen Q mit $\#Q < \#P$ gelte $\vdash_{\mathcal{H}} Q$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg\, Q$, folgt (nach den angegebenen Regeln) $\vdash_{\mathcal{H}} P$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg\, P$.

Damit ist 3.2(a) für atomare Aussagen der gen. Art bewiesen. Daraus ergibt sich 3.2(a) für quantorenfreie komplexe Aussagen der gen. Art wegen der Zulässigkeit folgender Regeln durch Induktion nach der Anzahl der Vorkommnisse von Junktoren in A:

$$\begin{array}{rcl}
A & \Rightarrow & \neg\neg\, A \\
\neg\, A & \Rightarrow & \neg\, A \\
A\,,,\ B & \Rightarrow & A \wedge B \\
\neg\, A & \Rightarrow & \neg\,(A \wedge B) \\
\neg\, B & \Rightarrow & \neg\,(A \wedge B).
\end{array}$$

Der Beweis von (b) ergibt sich aus (a), der Definition von $\mathbb{N}\,p$, der Zulässigkeit folgender Regeln, und weil es zu jedem $b \in \mathcal{E}$ nur endlich viele $a \in \mathcal{E}$ mit $\#a \leq \#b$ gibt:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{N}a \wedge a = b & \Rightarrow & \mathbb{N}\,b & \\ \text{für alle } a \text{ mit } \#a \leq \#b : \neg\,(\mathrm{N}a \wedge a = b) & \Rightarrow & \forall x\,\neg\,(\mathrm{N}x \wedge x = b) & \text{(nach 3.1)} \\ \forall x\,\neg\,(\mathrm{N}x \wedge x = b) & \Rightarrow & \neg\,\mathbb{N}\,b & \\ & \Rightarrow & \neg\,\mathbb{N}\,p & \text{(für } p \notin \mathcal{E}\text{)}. \ \square \end{array}$$

3.3 Lemma: Für alle Aussagen A gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A.\neg\,A$.

Beweis: Für atomare Aussagen A der in 3.2 genannten Art folgt 3.3 aus 3.2 nach der Regel: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (falls $\Gamma \subseteq \Delta$). Ferner sind folgende Regeln zulässig (wobei wir durch den linken '$\Rightarrow$' der zweiten bzw. dritten Zeile zwei bzw. unendlich viele Regeln zusammenfassen):

$$\begin{array}{c} A.\neg\,A \ \Rightarrow\ \neg\,A.\neg\neg\,A \\ A.\neg\,A\,,,\ B.\neg\,B \ \Rightarrow\ A.\neg\,(A \wedge B)\,,,\ B.\neg\,(A \wedge B) \ \Rightarrow\ (A \wedge B).\neg\,(A \wedge B) \\ \text{Für alle } c\text{: } Ac.\neg\,Ac \ \Rightarrow\ \text{Für alle } c\text{: } Ac.\neg\,\forall x\,Ax \ \Rightarrow\ \forall x\,Ax.\neg\,\forall x\,Ax \\ \exists y\,({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y)).\forall y\,\neg\,({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y)) \ \Rightarrow\ P(f(\underline{c})).\neg\,P(f(\underline{c})); \end{array}$$

dabei sei $f :\risingdotseq \lambda\underline{x}\,\mu y\,F(\underline{x}, y)$, und $P(y)$ stehe für atomare Formeln, die nicht mit $\mathcal{E}$ oder N beginnen und in denen kein Funktionssymbol rechts von f steht.

Somit ergibt sich 3.3 durch Induktion über den wie folgt definierten Rang $\mathrm{Rg}\,A$ von Aussagen A: $\mathrm{Rg}\,P :\risingdotseq 1$ für atomare Aussagen P, in denen keine Funktionssymbole vorkommen oder an deren Anfang $\mathcal{E}$ oder N steht,

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Rg}\,\neg\,A & :\risingdotseq & \mathrm{Rg}\,A + 1 & \\ \mathrm{Rg}\,(A \wedge B) & :\risingdotseq & \mathrm{Rg}\,A + \mathrm{Rg}\,B + 1 & \\ \mathrm{Rg}\,\forall x\,Ax & :\risingdotseq & \mathrm{Rg}\,A\emptyset + 1 & \\ \mathrm{Rg}\,P(f(\underline{c})) & :\risingdotseq & \mathrm{Rg}\,\exists y\,({}^{y}F(\underline{c}, y) \wedge P(y)) + 1 & \text{(für } f \text{ und } P(y) \text{ wie oben).} \ \square \end{array}$$

3.4 Lemma: Zulässig sind folgende Regeln (z.T. 'Umkehrungen' von Regeln von $\mathcal{H}$):

(a) $\Gamma.\neg\neg\,A \ \Rightarrow\ \Gamma.A$
(b) $\Gamma.(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \Gamma.A\,,,\ \Gamma.B$ (2 Regeln)
(c) $\Gamma.\neg\,(A \wedge B) \ \Rightarrow\ \Gamma.\neg\,A.\neg\,B$
(d) $\Gamma.\forall x\,Ax \ \Rightarrow\ \Gamma.Ac$
(e) $\Gamma.b \in c\{d\} \ \Rightarrow\ \Gamma.b \in c.b = d$
(f) $\Gamma.a\{b\} \subseteq c \ \Rightarrow\ \Gamma.a \subseteq c\,,,\ \Gamma.b \in c$
(g) $\Gamma.b \in \emptyset \ \Rightarrow\ \Gamma$
(h) $\Gamma.\mathrm{N}a\{a\} \ \Rightarrow\ \Gamma.\mathrm{N}a$
(i) $\Gamma.\mathrm{N}a\{b\} \ \Rightarrow\ \Gamma$ (falls $a \not\equiv b$)
(j) $\Gamma.A.B \ \Leftrightarrow\ \Gamma.(A \vee B)$
(k) $\Gamma.Ac \ \Rightarrow\ \Gamma.\exists x\,Ax$
(l) $\Gamma.\neg\,A\,,,\ \Gamma.\neg\,B \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\neg\,(A \vee B)$ (3 Regeln)

(m) für alle c: $\Gamma.\neg Ac \;\Leftrightarrow\; \Gamma.\neg\exists x\,Ax$
(n) $\Gamma.\,P(f(\underline{c})) \;\Rightarrow\; \Gamma.\;\exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y)\wedge P(y))$ (s.u.).
In (n) stehe $P(y)$ für atomare Aussagen, die nicht mit $\mathcal{E}$ oder N beginnen und in denen kein Funktionssymbol rechts von y steht.

Anmerkung: (1) Nach dem folgenden Lemma 3.5 sind auch entsprechende Regeln für Negate der in (e), (f), (h) hinter dem linken Γ angeführten Aussagen zulässig.
(2) Wegen der Zulässigkeit von (c), (a) ist auch die Regel $A\to B \;\Rightarrow\; \neg A.\,B$ und somit nach dem schon erwähnten Schnittsatz der **modus ponens** $A\,,\!,\;A\to B \;\Rightarrow\; B$ zulässig.

Definition: $\Delta - A$ entstehe aus Δ durch Fortlassen aller Glieder von Δ, die $\equiv A$ sind.

Um die Beweise von (a) – (f), (h) und (n) zusammenzufassen, beweisen wir:

3.5 Lemma: A habe nicht die Gestalt $\neg\forall x\,Bx$. Für jeden Schluss von $\mathcal{H}$ der Gestalt

$$\Gamma.\,\Lambda_i\;(i\in I)\;\Rightarrow\;\Gamma.\,A$$

(mit einer oder mehreren Prämissen $\Gamma.\,\Lambda_i$), der nicht die Form $\Gamma'\Rightarrow\Delta$ mit $\Gamma'\subseteq\Delta$ hat, sind folgende Schlüsse zulässig:

$$\Gamma.\,A\;\Rightarrow\;\Gamma.\,\Lambda_i\quad(\text{für }\; i\in I).$$

Beweis: $\Gamma.\,\Lambda_i\;(i\in I)\;\Rightarrow\;\Gamma.\,A$ sei ein Schluss von $\mathcal{H}$. Da auch $(\Gamma-A).\,\Lambda_i\;\Rightarrow\;\Gamma.\,\Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\Gamma.A\;\Rightarrow\;(\Gamma-A).\,\Lambda_i\quad(\text{für }\; i\in I)$$

zulässig ist. Wir tun dies durch Prämisseninduktion, indem wir zeigen, dass für jeden Schluss $\Delta_j\;(j\in J)\Rightarrow\Delta$ von $\mathcal{H}$ (mit keiner, einer oder mehreren Prämissen Δ_j) und alle $i\in I$ folgender Induktionsschritt zulässig ist:

$$(\Delta_j-A).\,\Lambda_i\;(j\in J)\Rightarrow(\Delta-A).\,\Lambda_i.$$

Zu $\Delta_1\Rightarrow\Delta$ mit $\Delta_1\subseteq\Delta$: Wegen $(\Delta_1-A).\,\Lambda_i\subseteq(\Delta-A).\,\Lambda_i$ ist auch $(\Delta_1-A).\,\Lambda_i\Rightarrow(\Delta-A).\,\Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$.

Zu Schlüssen von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\Delta.\,\Pi_j\;(j\in J)\Rightarrow\Delta.\,B$ (die nicht die Form $\Gamma\Rightarrow\Delta$ mit $\Gamma\subseteq\Delta$ haben): Für $B\not\equiv A$ sind wegen $((\Delta.\,\Pi_j)-A).\,\Lambda_i\subseteq(\Delta-A).\,\Lambda_i.\,\Pi_j$ folgende Schlüsse zulässig:

$$((\Delta.\,\Pi_j)-A).\,\Lambda_i\;(j\in J)\;\Rightarrow\;(\Delta-A).\,\Lambda_i.\,\Pi_j\;(j\in J)\;\Rightarrow\;(\Delta-A).\,\Lambda_i.\,B\;\Rightarrow\;((\Delta.\,B)-A).\,\Lambda_i.$$

Für $B\equiv A$ und $i\in I$ ist auch $I=J$ und $\Pi_i\equiv\Lambda_i$ (da nach Voraussetzung A nicht die Gestalt $\neg\forall x\,Ax$ hat), sodass folgende Schlüsse zulässig sind:

$$((\Delta.\,\Pi_j)-A).\,\Lambda_i\;(j\in I)\;\Rightarrow\;((\Delta.\,\Lambda_i)-A).\,\Lambda_i\;\Rightarrow\;(\Delta-A).\,\Lambda_i\;\Rightarrow\;((\Delta.\,A)-A).\,\Lambda_i.\;\square$$

Beweis von (g): Für $\Delta :\equiv \Gamma.\, b\in\emptyset$ gilt $\Delta - b\in\emptyset \subseteq \Gamma$, sodass $\Delta - b\in\emptyset \Rightarrow \Gamma$ zulässig ist. Es genügt also, die Zulässigkeit von $\Delta \Rightarrow \Delta - b\in\emptyset$ zu zeigen. Dies folgt durch Prämisseninduktion daraus, dass für jeden Schluss $\Pi_i \ (i\in I) \Rightarrow \Pi$ von $\mathcal{H}$ der Induktionsschritt $\Pi_i - b\in\emptyset \ (i\in I) \Rightarrow \Pi - b\in\emptyset$ zulässig ist. - Beweis von (i): analog. □

Beweise zu (j) - (m): Folgende Regeln sind zulässig:

Zu (j): $\Gamma.\, A.\, B \underset{(a)}{\Leftrightarrow} \Gamma.\, \neg\neg A.\, \neg\neg B \underset{(c)}{\Leftrightarrow} \Gamma.\, \neg(\neg A \wedge \neg B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, (A \vee B)$.

Zu (k): $\Gamma.\, Ac \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg Ac \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \neg\forall x \neg Ax \ \Rightarrow\ \Gamma.\, \exists x\, Ax$.

Zu (l): $\Gamma.\, \neg A\,,,\ \Gamma.\, \neg B \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, (\neg A \wedge \neg B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg(\neg A \wedge \neg B) \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg(A \vee B)$.

Zu (m): Für alle c: $\Gamma.\, \neg Ac \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \forall x \neg Ax \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\neg\forall x \neg Ax \ \Leftrightarrow\ \Gamma.\, \neg\exists x\, Ax$. □

3.6 Schnittsatz: Zulässig ist die ‘Schnittregel’

$$\Gamma.\, C\,,,\ \Delta \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg C).$$

Beweis: In ihm werden wir folgende Definition verwenden:
B heiße **einfacher als** C, wenn (1) oder (2) gilt (zu ‘#’ und ‘Rg’ s.o.):
(1) $\mathrm{Rg}\, B = \mathrm{Rg}\, C = 1$ und $\#B < \#C$.
(2) In $\mathrm{Rg}\, B < \mathrm{Rg}\, C$.

Zur Induktion über den Formelaufbau verwenden wir die Induktionsannahme:

IA: Für alle B, die einfacher als C sind, ist $\Gamma'.\, B\,,,\ \Delta' \ \Rightarrow\ \Gamma'.\, (\Delta' - \neg B)$ für alle $\Gamma'.\, \Delta'$ zulässig.

Falls C ein Negat ist, $C \equiv \neg A$, sind - wegen $\Delta \subseteq (\Delta - \neg\neg A).\, \neg\neg A$ und $(\Gamma.\, \neg A) - \neg A \subseteq \Gamma$ - folgende Regeln zulässig:

$$\begin{array}{rll} \Gamma.\, \neg A\,,,\ \Delta & \Rightarrow & (\Delta - \neg\neg A).\, \neg\neg A\,,,\ \Gamma.\, \neg A \\ & \Rightarrow_{(a)} & (\Delta - \neg\neg A).\, A\,,,\ \Gamma.\, \neg A \\ & \Rightarrow_{IA} & (\Delta - \neg\neg A).\, ((\Gamma.\, \neg A) - \neg A) \\ & \Rightarrow & \Gamma.\, (\Delta - \neg\neg A). \end{array}$$

Von nun an machen wir folgende beiden Voraussetzungen:
V1: C sei kein Negat.
V2: $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\, C$.

Wir haben zu zeigen, dass $\Delta \Rightarrow \Gamma.\, (\Delta - \neg C)$ für beliebige Δ zulässig ist. Dazu zeigen wir, dass für jeden Schluss $\Delta_i\ (i\in I) \Rightarrow \Delta$ von $\mathcal{H}$ auch der ‘Induktionsschritt’ $\Gamma.\, (\Delta_i - \neg C)\ (i\in I) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg C)$ zulässig ist.

Für jeden Schluss der Gestalt $\Delta_1 \Rightarrow \Delta$ mit $\Delta_1 \subseteq \Delta$ ist auch $\Delta_1 - \neg C \subseteq \Delta - \neg C$, sodass der Induktionsschritt $\Gamma.\, (\Delta_1 - \neg C) \ \Rightarrow\ \Gamma.\, (\Delta - \neg C)$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ ist.

Für Schlüsse von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\bullet\ \Delta.\, \Lambda_i\ (i\in I) \ \Rightarrow\ \Delta.\, D$ lautet der Induktionsschritt $\Gamma.\, ((\Delta.\, \Lambda_i) - \neg \mathcal{C})\ (i\in I) \Rightarrow \Gamma.\, ((\Delta.\, D) - \neg C)$. Wegen $(\Delta.\, \Lambda_i) - \neg C \subseteq (\Delta - \neg C).\, \Lambda_i$ ist der

Schluss $\Gamma.((\Delta.\Lambda_i)-\neg C) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i$ zulässig. Daher genügt es, die Zulässigkeit von $\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.((\Delta.D)-\neg C)$ zu zeigen.

Für $D \not\equiv \neg C$ folgt dies aus der Zulässigkeit der Schlüsse

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).D \;\Rightarrow\; \Gamma.((\Delta.D)-\neg C).$$

Somit brauchen wir die Zulässigkeit des Induktionsschrittes nur noch für $D \equiv \neg C$ zu beweisen. Wegen $\Delta-\neg C \subseteq (\Delta.\neg C)-\neg C$ ist $\Gamma.(\Delta-\neg C) \Rightarrow \Gamma.((\Delta.\neg C)-\neg C)$ zulässig. Daher brauchen wir nur noch zu zeigen, dass folgender Schluss zulässig ist:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\Lambda_i\ (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Delta.A \Rightarrow \Delta.\neg\neg A$. Den Fall $C \equiv \neg A$ haben wir schon behandelt.

Zu • $\Delta.\neg A.\neg B \Rightarrow \Delta.\neg(A \wedge B)$ mit $C \equiv A \wedge B$: Nach V2 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.(A \wedge B)$, also nach (b) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.B$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.A$; also sind zulässig:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg A.\neg B \;\Rightarrow_{IA}\; \Gamma.(\Delta-\neg C).\neg A \;\Rightarrow_{IA}\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Delta.\neg Ac \;\Rightarrow\; \Delta.\neg\forall x\, Ax$ mit $C \equiv \forall x\, Ax$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\forall x\, Ax$ gilt nach (d) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.Ac$. Zulässig ist also der Induktionsschritt: $\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg Ac \Rightarrow_{IA} \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Delta.b \notin c\,,,\ \Delta.b \neq d \Rightarrow \Delta.b \notin c\{d\}$ mit $C \equiv b \in c\{d\}$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c\{d\}$ gilt nach (e) $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c.b = d$. Ferner gilt z.B. $((\Delta-\neg C).b \notin c)-b \notin c \subseteq \Delta-\neg C$. Zulässig sind also:

$$\begin{array}{rll}
 & \Gamma.(\Delta-\neg C).b \notin c\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).b \neq d & \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.b = d.(\Delta-\neg C)\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).b \neq d & (\text{da } \vdash \Gamma.b = d.b \in c) \\
\Rightarrow_{(b),(c)} & \Gamma.(\Delta-\neg C).b \subseteq d\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \subseteq b\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \not\subseteq b.b \not\subseteq d & \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.(\Delta-\neg C).d \not\subseteq b\,,,\ \Gamma.(\Delta-\neg C).d \subseteq b & \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma.(\Delta-\neg C). &
\end{array}$$

Zu • $\Delta.a \not\subseteq c.b \notin c \Rightarrow \Delta.a\{b\} \not\subseteq c$ mit $C \equiv a\{b\} \subseteq c$ und $a \not\equiv \emptyset$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.a\{b\} \subseteq c$ gilt nach (f) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in c$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.a \subseteq c$. Daher sind nach IA zulässig:

$$\Gamma.(\Delta-\neg C).a \not\subseteq c.b \notin c \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).a \not\subseteq c \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta-\neg C).$$

Zu • $\Rightarrow b \notin \emptyset$ mit $C \equiv b \in \emptyset$: Hierbei ist Δ leer. Nach V1 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.b \in \emptyset$, also nach (g) $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma$, d.i. $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Rightarrow \neg\,\mathrm{N}a\{b\}$ mit $a \not\equiv b$; $\quad \Rightarrow \neg\,\mathrm{N}p$ mit $p \notin \mathcal{E}$; $\quad \Rightarrow \neg\,\mathcal{E}p$ mit $p \notin \mathcal{E}$: Analog.

Zu • $\Delta.\neg\,\mathrm{N}a \;\Rightarrow\; \Delta.\neg\,\mathrm{N}a\{a\}$ mit $C \equiv \mathrm{N}a\{a\}$: Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\mathrm{N}a\{a\}$ gilt nach (h) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\mathrm{N}a$. Zulässig ist nach IA also $\Gamma.(\Delta-\neg C).\neg\,\mathrm{N}a \Rightarrow \Gamma.(\Delta-\neg C)$.

Zu • $\Delta.\ \forall y\,\neg({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) \Rightarrow \Delta.\neg P(f(\underline{c}))$ mit $C \equiv P(f(\underline{c}))$. Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.P(f(\underline{c}))$ gilt nach (n) auch $\vdash_{\mathcal{H}} \Gamma.\ \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y))$. Zulässig ist nach IA also
$\Gamma.(\Delta - \neg C).\forall y\,\neg({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) \;\Rightarrow\; \Gamma.(\Delta - \neg C).$ □

Wir setzen nun $\Sigma' :\!\!\Leftarrow \neg C_1. \cdots .\neg C_n$ für $\Sigma \equiv C_1, \ldots, C_n$ (mit Kommata, die als "und" zu lesen sind) und schreiben $\Sigma \vdash A$ statt $\Sigma'.A$. Zulässig sind u.a. folgende Regeln. Nach ihnen ist $\Sigma \vdash A$ genau dann herleitbar, wenn aus den Gliedern von Σ (als 'Annahmen') A nach entsprechenden 'Regeln des natürlichen Schließens' (RnS, vgl. G. Gentzen) herleitbar ist (vgl. 4.4).

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & A \vdash A & \\
 & \Rightarrow & \vdash \emptyset \subseteq c & \\
\Sigma \vdash A & \Rightarrow & \mathrm{T} \vdash A & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}) \\
\Sigma \vdash b \in \emptyset & \Rightarrow & \Sigma \vdash A & \\
\Sigma \vdash b \in c \vee b = d & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash b \in c\{d\} & \\
\Sigma \vdash a \subseteq c\,,,\ \Sigma \vdash b \in c & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash a\{b\} \subseteq c & \\
\Sigma \vdash A\,,,\ \Sigma \vdash B & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash A \wedge B & \\
\text{für alle } c\text{: } \Sigma \vdash Ac & \Leftrightarrow & \Sigma \vdash \forall x\, Ax & \\
\Sigma \vdash A & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \vee B & \\
\Sigma \vdash B & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \vee B & \\
\Sigma \vdash A \vee B\,,,\ \Sigma, A \vdash D\,,,\ \Sigma, B \vdash D & \Rightarrow & \Sigma \vdash D & \\
\Sigma \vdash Ac & \Rightarrow & \Sigma \vdash \exists x\, Ax & \\
\Sigma \vdash \exists x\, Ax\,,,\ \text{für alle } c\text{: } \Sigma, Ac \vdash D & \Rightarrow & \Sigma \vdash D & \\
\Sigma, A \vdash B & \Rightarrow & \Sigma \vdash A \to B & \\
\Sigma \vdash A\,,,\ \Sigma \vdash A \to B & \Rightarrow & \Sigma \vdash B & \\
\Sigma, A \vdash \bot & \Rightarrow & \Sigma \vdash \neg A & \text{(für } \bot :\!\!\Leftarrow \emptyset \in \emptyset) \\
\Sigma \vdash A\,,,\ \Sigma \vdash \neg A & \Rightarrow & \Sigma \vdash \bot & \\
\Sigma \vdash \neg\neg A & \Rightarrow & \Sigma \vdash A. &
\end{array}
$$

Die Zulässigkeit dieser Regeln erhält man leicht nach den Regeln von $\mathcal{H}$ und 3.3 - 3.6. Z.B. die Zulässigkeit der 'Beseitigungsregel' für '$\exists$' ergibt sich so: Sind $\Sigma'.\exists x\, Ax$ und $\Sigma'.\neg Ac, D$ für alle c herleitbar, so nach 3.4(m) auch $\Sigma'.\neg\exists x\, Ax, D$, also nach dem Schnittsatz auch $\Sigma'.D$. Die Zulässigkeit der Beseitigungsregel für '$\vee$' erhält man analog. $\square$

Somit sind auch alle Schlussregeln, die wir in §1 angewandt haben, in $\mathcal{H}$ zulässig. Dies kann man im Einzelnen nachprüfen. Daher erhalten wir:

3.7: Alle einzelnen Ergebnisse aus §1 sind in $\mathcal{H}$ herleitbar.

Zur Vereinfachung der Beweise der Herleitbarkeit einiger Ergebnisse von §1 in $\mathcal{H}$ kann man auch folgende Lemmata verwenden:

3.8 Für Aussagen A der in 3.2 gen. Art gilt: Ist $A \Rightarrow B$ zulässig, so gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A \to B$.
3.9.1 Ist $\Gamma.A \Rightarrow \Gamma.B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A \to B$.
3.9.2 Ist $\Gamma.A_1.A_2 \Rightarrow \Gamma.B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A_1 \vee A_2 \to B$.
3.9.3 Ist $\Gamma.A_1\,,,\ \Gamma.A_2 \Rightarrow \Gamma.B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A_1 \wedge A_2 \to B$.

Beweise: Zu 3.8: Ist $A \Rightarrow B$ zulässig, so sind dies auch $A \Rightarrow A \to B$ und $\neg A \Rightarrow A \to B$, und nach 3.2 gilt $\vdash_{\mathcal{H}} A$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \neg A$. - Zu 3.9: Man setze 1. $\Gamma \equiv \neg A$, 2. $\Gamma \equiv \neg A_i$ $(i = 1, 2)$, und 3. $\Gamma \equiv \neg A_1.\neg A_2$ und wende 3.3, 3.4 und $\mathcal{H}$ an. $\square$

Zur Verwendung von Kennzeichnungen von Funktionswerten

Für atomare Formeln $P(y)$, die nicht mit $\mathcal{E}$ oder N beginnen, und Funktionssymbole $f :\Longleftarrow \lambda\underline{x}\,\mu y\,F(\underline{x},y)$, die in ZFC$_\circ$ vorkommen, hatten wir folgende Regeln aufgestellt:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma.\,\exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y)\ \wedge\ P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\,P(f(\underline{c})) \\ \Gamma.\,\forall y\,\neg\,({}^{y}F(\underline{c},y)\ \wedge\ P(y)) & \Rightarrow & \Gamma.\,\neg\,P(f(\underline{c})). \end{array}$$

Dabei ist noch vorausgesetzt, dass f das in $P(f(\underline{c}))$ am weitesten rechts stehende Funktionssymbol ist. Nach 3.9.1 gilt also $\vdash_{\mathcal{H}} \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)) \to P(f(c))$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\,\neg\,({}^{y}F(\underline{c},y)\ \wedge\ P(y)) \to \neg\,P(f(\underline{c}))$, also insgesamt

$$\vdash_{\mathcal{H}} P(f(c)) \leftrightarrow \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y)).$$

3.10 Satz: Allgemeiner gilt:

$$\vdash_{\mathcal{H}} \forall y\,({}^{y}F(\underline{p},y) \to A(y)) \to A(f(\underline{p})) \to \exists y\,({}^{y}F(\underline{p},y) \wedge A(y)),$$

$$\text{also} \qquad \vdash_{\mathcal{H}} \forall y\,A(y) \to A(q) \to \exists y\,A(y)$$

für alle Formeln $A(y)$, in denen kein freies Vorkommnis von y im Bereich von $\mathcal{E}$ oder N (d.h. in einer mit $\mathcal{E}$ oder N beginnenden atomaren Teilformel von $A(y)$) steht, und für alle $\mathcal{L}$-Konstantentupel $\underline{p}$ passender Stellenzahl bzw. alle $\mathcal{L}$-Konstanten q (da diese aus $\mathcal{E}$-Konstanten mit Hilfe von Funktionssymbolen aufgebaut sind).

Beweis (nach [5] 170-175): Wir zeigen zunächst, dass die oben genannte Voraussetzung, dass f das in $P(f(\underline{c}))$ am weitesten rechts stehende Funktionssymbol ist, entbehrlich ist. In $\mathcal{H}$ herleitbar sind

$$\begin{array}{rcl} P(g(\underline{d}),f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(g(\underline{d}),y)) \\ & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge \exists z\,({}^{z}G(\underline{d},z) \wedge P(z,y))) \\ & \leftrightarrow & \exists y,z\,({}^{z}G(\underline{d},z) \wedge {}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(z,y)) \\ & \leftrightarrow & \exists z\,({}^{z}G(\underline{d},z) \wedge \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(z,y))) \\ & \leftrightarrow & \exists z\,({}^{z}G(\underline{d},z) \wedge P(z,f(\underline{c}))). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(f(\underline{c}),f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(f(\underline{c}),y) \\ & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge \exists z\,({}^{z}F(\underline{c},z) \wedge P(z,y)) \\ & \leftrightarrow & \exists y,z\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge {}^{z}F(\underline{c},z) \wedge P(z,y)) \\ & \leftrightarrow & \exists y,z\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge y \equiv z \wedge P(z,y)) \\ & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge y \equiv y \wedge P(y,y)) \\ & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge P(y,y)). \end{array}$$

Wir setzen nun voraus, kein freies Vorkommnis von y in $A(y) \wedge B(y)$ bzw. $\neg\,A(y)$ bzw. $\forall x\,A(x,y)$ mit $x \not\equiv y$ stehe im Bereich von $\mathcal{E}$ oder N; also steht auch kein freies Vorkommnis von y in $A(y)$ oder $B(y)$ bzw. $A(x,y)$ im Bereich von $\mathcal{E}$ oder N. Ferner machen wir die Ind.ann., in $\mathcal{H}$ seien herleitbar:

$$\begin{array}{rcl} A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge A(y)) \\ B(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^{y}F(\underline{c},y) \wedge B(y)). \end{array}$$

Dann sind in $\mathcal{H}$ auch folgende Aussagen herleitbar:

$$\begin{array}{rcl}
A(f(\underline{c})) \wedge B(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(y)) \wedge \exists z\,({}^zF(\underline{c},z) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y,z\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge^z F(\underline{c},z) \wedge A(y) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y,z\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge y \equiv z \wedge A(y) \wedge B(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(y) \wedge B(y)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\neg\, A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall y\, \neg\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(y)) \\
& \leftrightarrow & \forall y\,({}^yF(\underline{c},y) \to \neg\, A(y)) \\
& \to & \exists z\,({}^zF(\underline{c},z) \wedge \neg\, A(z)) \;\; (\text{da } \vdash_{\mathcal{H}} \exists z\, {}^zF(\underline{c},z)) \\
& \to & \exists z\, \forall y\,({}^yF(\underline{c},y) \to y \equiv z \to \neg\, A(y)) \\
& \to & \text{Zeile 2},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
{}^uF(\underline{c},u) \to [\forall x\, A(x, f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall x\, \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(x,y)) \\
& \to & \forall x\, \exists y\,(y \equiv u \wedge A(x,y)) \\
& \to & {}^uF(\underline{c},u) \wedge \forall x\, A(x,u)) \\
& \to & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge \forall x\, A(x,y)) \\
& \to & \exists y\, \forall x\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(x,y)) \\
& \to & \text{Zeile 1 rechts}].
\end{array}$$

Für alle Formeln $A(y)$, in denen kein freies Vorkommnis von y im Bereich von $\mathcal{E}$ oder N steht, folgt daraus durch Induktion über deren Aufbau die Herleitbarkeit von

$$\begin{array}{rrcl}
& A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(y)) \\
\text{sowie von} & A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \neg\neg\, A(f(\underline{c})) \\
& & \leftrightarrow & \forall y\,({}^yF(\underline{c},y) \to \neg\neg\, A(y)) \quad \text{(s.o.)}, \\
\text{also von} & A(f(\underline{c})) & \leftrightarrow & \forall y\,({}^yF(\underline{c},y) \to A(y)).
\end{array}$$

Die bisherige ‘Voraussetzung’, dass $\underline{c}$ keine Funktionssymbole enthält, können wir fallenlassen; denn weil in $g(y,\underline{p})$ weniger Funktionssymbole vorkommen als in $g(f(\underline{c}),\underline{p})$, sind nach zugehöriger Induktionsannahme in $\mathcal{H}$ herleitbar:

$$\begin{array}{rcl}
A(g(f(\underline{c}),\underline{p})) & \leftrightarrow & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge A(g(y,\underline{p})) \\
& \leftrightarrow & \exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge \exists z\,({}^zG(y,\underline{p},z) \wedge A(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists z,y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge^z G(y,\underline{p},z) \wedge A(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists z\,(\exists y\,({}^yF(\underline{c},y) \wedge^z G(y,\underline{p},z)) \wedge A(z)) \\
& \leftrightarrow & \exists z\,({}^zG(f(\underline{c}),\underline{p},z) \wedge A(z)). \;\; \Box
\end{array}$$

§4. Bekannte logische Hilfsmittel

Die formale Sprache $\mathcal{L}_\omega$ entstehe aus der in §3 eingeführte Sprache $\mathcal{L}$ durch die Hinzunahme eines Individuensymbols ω und Fortlassen von N. $\mathcal{L}_\omega$-Terme seien: Die Symbole $\emptyset, \omega$, die (bisherigen) Variablen, sowie mit $\sigma, \tau, \tau_1, \ldots$ stets auch $\sigma\{\tau\}$ und $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ für n-stellige Funktionssymbole f, die in den Axiomen von ZF$\mathrm{C}_\circ$ vorkommen. $\mathcal{L}_\omega$-Konstante seien geschlossene $\mathcal{L}_\omega$-Terme. Für $\mathcal{L}_\omega$-Terme σ, τ seien $(\sigma \subseteq \tau)$ und $\mathcal{E}\tau$ atomare $\mathcal{L}_\omega$-Formeln. Mit F und G seien auch $\neg F$, $(F \wedge G)$ sowie $\forall x\, F$ $\mathcal{L}_\omega$-Formeln. Weitere $\mathcal{L}_\omega$-Terme und $\mathcal{L}_\omega$-Formeln soll es nicht geben. Im Folgenden lassen wir jedoch das Präfix "$\mathcal{L}_\omega$" vor den Worten "Term", "Konstante" und "Formel" fort.

Als Metavariable verwenden wir von nun an:
für Terme: $\sigma, \tau, \tau_1, \dots$;
für atomare Formeln: P;
für Formeln: $F, G, H, F_1, \dots, Fx, \dots$;
für $\wedge$-Listen (s.u.): Σ, T;
für $\vee$-Listen (s.u.): Γ, Δ.

An Stelle der von G. Gentzen eingeführten (klassischen) Sequenzen $H_1, \dots, H_n \vdash G_1, \dots, G_m$ verwende ich im Folgenden (um Schreibarbeit zu sparen) i.Allg. nur deren vor bzw. hinter dem Zeichen '$\vdash$' stehenden Formellisten $H_1, \dots, H_n$ bzw. $G_1.G_2 . \cdots .G_m$ (mit dem Punkt statt des Kommas). Es wird sich herausstellen, dass - für $n > 1$ bzw. $m > 1$ - das Komma in $H_1, \dots, H_n$ als '$\wedge$' und der Punkt in $G_1.G_2. \cdots .G_m$ als '$\vee$' gelesen werden kann. Dementsprechend nenne ich Listen der Form $H_1, \dots, H_n$ mit $n \geq 0$ $\wedge$-Listen und Listen der Form $G_1. \cdots .G_m$ mit $m \geq 0$ $\vee$-Listen. Die leere $\wedge$-Liste $(n = 0)$ ist von der leeren $\vee$-Liste $(m = 0)$ zu unterscheiden.

$\Gamma \subseteq \Delta$ und entsprechend $\Sigma \subseteq T$ seien wie in §3 definiert.

Definition: Ist $\underline{u} \equiv u_1, \dots, u_n$ mit voneinander verschiedenen Variablen u_i und $\underline{\sigma} \equiv \sigma_1, \dots, \sigma_n$, so entstehe $\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ aus Γ dadurch, dass man in Γ zuerst alle gebundenen Vorkommnisse von Variablen, die in $\underline{\sigma}$ (frei) vorkommen, durch Variable, die weder in Γ noch in $\underline{\sigma}$ oder $\underline{u}$ vorkommen, ersetzt und im so erhaltenen Resultat für $i = 1, \dots, n$ alle freien Vorkommnisse von u_i simultan durch σ_i ersetzt. (Bei der erwähnten 'Umbenennung' der in F gebundenen Variablen sind gleiche bzw. verschiedene Variable durch gleiche bzw. verschiedene Variable zu ersetzen.) Für Formeln F sei F^τ_x entsprechend definiert.

Wir schreiben jedoch auch Fx statt F, $F\tau$ statt $(Fx)^\tau_x$ und Fy statt $(Fx)^y_x$.
Beachte, dass kein Vorkommnis einer Variablen in τ in $F\tau$ gebunden ist.

Definition: $\mathcal{K}$ sei der '**Logik-Kalkül**' mit den folgenden Regeln:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P.\neg\, P & \text{(für atomare } P) \\
\Gamma & \Rightarrow & \Delta & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Gamma.F & \Rightarrow & \Gamma.\neg\neg\, F & \\
\Gamma.F \,,,\, \Gamma.G & \Rightarrow & \Gamma.(F \wedge G) & \text{(mit zwei Prämissen)} \\
\Gamma.\neg\, F.\neg\, G & \Rightarrow & \Gamma.\neg\,(F \wedge G) & \\
\Gamma.Fy & \Rightarrow & \Gamma.\forall x\, Fx & \text{(falls } y \text{ neu, s.u.)} \\
\Gamma.\neg\, F\tau & \Rightarrow & \Gamma.\neg\, \forall x\, Fx &
\end{array}$$

Die Variablenbedingung "y neu" bedeute, dass y nicht in der Konklusion frei vorkommt.

$\mathcal{K}$ ist *vollständig* in dem Sinne, dass in ihm alle allgemeingültigen $\vee$-Listen herleitbar sind. Dabei heiße $G_1. \dots .G_m$ allgemeingültig genau dann, wenn die Formel $G_1 \vee \dots \vee G_n$ allgemeingültig ist.

Definition: $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ bedeute, dass Γ in $\mathcal{K}$ herleitbar ist.

4.1 Lemma: Für alle Formeln F gilt $\vdash_{\mathcal{K}} F.\neg F$.

Der Beweis gelingt durch Induktion über den Aufbau von F (vgl. Beweis von 3.3). $\square$.

4.2 Lemma: In $\mathcal{K}$ zulässig ist die Regel $\Gamma \Rightarrow \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ (für $\underline{u}, \underline{\sigma}$ wie oben).

Beweis durch Prämisseninduktion: Für jeden Schluss (d.h. Einzelfall einer Regel) $\Gamma_i \;\; (i \in I) \Rightarrow \Gamma$ von $\mathcal{K}$ (mit keiner, einer oder zwei Prämissen Γ_i) ist der 'Induktionsschritt' $(\Gamma_i)^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}} \;\; (i \in I) \Rightarrow \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}$ zulässig. Wir zeigen dies nur für Schlüsse der Form

$$\Gamma.F^y_x \;\Rightarrow\; \Gamma.\forall x\, F$$

in denen y nicht frei in $\Gamma.\forall x\, F$ vorkommt, aber alle Glieder von $\underline{u}$ in $\Gamma.\forall x\, F$ frei vorkommen. (Also ist y kein Glied von $\underline{u}$.) Ferner komme z weder in $\Gamma.\forall x\, F$ noch in $\underline{\sigma}$ vor. Der zur simultanen Substitution $^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}}$ gehörige Induktionsschritt lautet

$$\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.\, (F^y_x)^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \;\Rightarrow\; \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.(\forall x\, F)^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.$$

Bei der zu $^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}}$ gehörigen Umbenennung der gebundenen Variablen sei x in $\dot{x}$ umzubenennen, und es sei $\dot{F} :\equiv F^{\dot{x}}_x$. $\dot{x}$ kommt nicht in $F, \underline{u}$ oder $\underline{\sigma}$ vor. Daher ist $(F^y_x)^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \equiv (\dot{F}^y_{\dot{x}})^{z,\underline{\sigma}}_{y,\underline{u}} \equiv (\dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}})^z_{\dot{x}}$. Der Induktionsschritt ist also identisch mit

$$\Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.(\dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}})^z_{\dot{x}} \;\Rightarrow\; \Gamma^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}}.\forall \dot{x}\, \dot{F}^{\underline{\sigma}}_{\underline{u}},$$

ist also ein Schluss von $\mathcal{K}$. $\square$

4.3 Lemma: In $\mathcal{K}$ zulässig ist die Regel

$$\Gamma.\, \forall u\, Hu \;\Rightarrow\; \Gamma.\, H\sigma \quad (\text{für } H\sigma :\equiv (Hu)^\sigma_u).$$

Beweis: Für jede $\vee$-Liste Γ entstehe Γ° aus Γ dadurch, dass man jedes Glied von Γ, das $\equiv \forall u\, Hu$ ist, fortlässt. Es genügt zu zeigen, dass $\Gamma \Rightarrow \Gamma^\circ.H\sigma$ zulässig ist. Wir beweisen dies durch Induktion über die Länge der Herleitung von Γ. Zu diesem Zweck ersetzen wir in den Schlüssen von $\mathcal{K}$ jede Liste Γ durch $\Gamma^\circ.H\sigma$. Dadurch erhalten wir folgende Induktionsschritte, die in $\mathcal{K}$ zulässig sind:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P.\neg P.H\sigma & (\text{für atomare } P) \\
\Gamma^\circ.H\sigma & \Rightarrow & \Delta^\circ.H\sigma & (\text{falls } \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Gamma^\circ.F.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.\neg\neg\, F.H\sigma & (\text{s.u.}) \\
\Gamma^\circ.F.H\sigma\,,,\; \Gamma^\circ.G.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.(F \wedge G).H\sigma & (\text{s.u.}) \\
\Gamma^\circ.\neg\, F.\neg\, G.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.\neg\,(F \wedge G).H\sigma & \\
\Gamma^\circ.Fz.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.\forall x\, Fx.H\sigma & (\text{für } \forall x\, Fx \not\equiv \forall u\, Hu;\, s.u.). \\
\Gamma^\circ.Hz.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.H\sigma & (\text{für } \forall x\, Fx \equiv \forall u\, Hu;\ \text{s. } 4.2) \\
\Gamma^\circ.\neg\, F\tau.H\sigma & \Rightarrow & \Gamma^\circ.\neg\,\forall x\, Fx.H\sigma. &
\end{array}$$

In den Prämissen ist das Glied F, G oder Fz fortzulassen, falls es $\equiv \forall u\, Hu$ ist. Für die drittletzte Zeile lautet der ursprüngliche Schluss $\Gamma.Fy \Rightarrow \Gamma.\forall x\, Fx$. Falls y in σ vorkommt - und somit in der Konklusion $\Gamma^\circ.\forall x\, Fx.H\sigma$ des Induktionschrittes $\Gamma^\circ.Fy.H\sigma \Rightarrow \Gamma^\circ.\forall x\, Fx.H\sigma$ frei vorkommt, ist dieser evtl. nicht zulässig. Aus der Herleitung der ursprünglichen Prämisse $\Gamma.Fy$ erhält man jedoch eine - ebenso lange - Herleitung von $\Gamma.Fz$, indem man in jener alle freien Vorkommnisse von y durch eine Variable z ersetzt, die weder in der Herleitung von $\Gamma.Fy$ noch in σ vorkommt. Dann ist der zu $\Gamma.Fz \Rightarrow \Gamma.\forall x\, Fx$ gehörige angegebene Induktionsschritt zulässig. □

Zulässig sind auch die Umkehrungen der Regeln von $\mathcal{K}$, in deren Konklusion $\neg\neg F$, $(F \wedge G)$ oder $\neg(F \wedge G)$ angeführt ist. Dies ergibt sich nach dem Muster der Beweise von 3.4, 3.5 für $\mathcal{H}$ statt $\mathcal{K}$. In $\mathcal{K}$ ist auch die **Schnittregel**

$$\Gamma.F \,,,\; \Delta.\neg F \;\Rightarrow\; \Gamma.\Delta$$

zulässig. Der Beweis dafür verläuft nach dem Muster des Beweises des Schnittsatzes 3.6, jedoch einfacher. Dazu benötigt man die Umkehrbarkeit der erwähnten Regeln von $\mathcal{K}$. In seinen Beweis einzufügen ist nur noch der Induktionsschritt zur Regel $\Rightarrow P.\neg P$; er lautet: $\Rightarrow \Gamma.(P.\neg P - \neg G)$ mit einer Formel G (statt C), für die V2: $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma.G$ wie im Beweis von 3.6 vorausgesetzt ist. Er ist offenbar zulässig in $\mathcal{K}$.

Für Formeln F, G verwenden wir wieder die Abkürzungen: $F \vee G \risingdotseq \neg(\neg F \wedge \neg G)$; $F \rightarrow G :\risingdotseq \neg(F \wedge \neg G)$; $\exists x\, F :\risingdotseq \neg\forall x \neg F$. Wie leicht zu zeigen ist, sind in $\mathcal{K}$ folgende Regeln zulässig: $\Gamma.(F \vee G) \Leftrightarrow \Gamma.F.G$ (vgl. 3.4(j)) sowie $\Gamma.(F \rightarrow G) \Leftrightarrow \Gamma.\neg F.G$, nach der Schnittregel also auch $\Gamma.F \,,,\; \Gamma.(F \rightarrow G) \Rightarrow \Gamma.G$ (vgl. *modus ponens*).

Definitionen:
Für Formeln F sei $\sim\neg F :\risingdotseq F$. Beginnt F nicht mit '$\neg$', so sei $\sim F :\risingdotseq \neg F$.
Für $\Gamma \equiv G_1. \cdots .G_m$ sei $\Gamma' \equiv \sim G_1, \ldots, \sim G_m$ (i.S.v. $\sim G_1 \wedge \ldots \wedge \sim G_m$).
Für $\Sigma \equiv H_1, \ldots, H_n$ sei $\Sigma' \equiv \sim H_1. \cdots .\sim H_n$ (i.S.v. $\sim H_1 \vee \ldots \vee \sim H_n$).

$\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ bedeute: Aus den Gliedern von Σ ist Γ in $\mathcal{K}$ plus Schnittregel herleitbar (d.h. Γ ist nach den Regeln von $\mathcal{K}$, der Schnittregel und $\Rightarrow H_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ herleitbar).

4.4 Lemma: $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ gilt genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'.\Gamma$.

Beweis: Sei $\Sigma \equiv H_1, \ldots, H_n$. Zu $(\rightarrow)$: $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ gilt genau dann, wenn die 'Sequenz' $\Sigma \vdash \Gamma$ nach folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \Sigma \vdash H_i & \text{(für } i = 1, \ldots, n) \\
 & \Rightarrow & \Sigma \vdash P.\neg P & \\
\Sigma \vdash \Gamma & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Delta & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Sigma \vdash \Gamma.F & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg\neg F & \\
\Sigma \vdash \Gamma.F \,,,\; \Sigma \vdash \Gamma.G & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.(F \wedge G) & \\
\Sigma \vdash \Gamma.\neg F.\neg G & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg(F \wedge G) & \\
\Sigma \vdash \Gamma.Fy & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\forall x\, Fx & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Sigma \vdash \Gamma.\neg F\tau & \Rightarrow & \Sigma \vdash \Gamma.\neg\forall x\, Fx & \\
\Sigma \vdash \Gamma.G \,,,\; \mathrm{T} \vdash \Delta.\neg G & \Rightarrow & \Sigma, \mathrm{T} \vdash \Gamma.\Delta & \text{('}\Sigma\text{-Schnitt').}
\end{array}$$

Ersetzt man in diesen Regeln jede (als Prämisse oder Konklusion vorkommende) Sequenz der Form $\Sigma \vdash \Gamma$ durch $\Sigma'.\Gamma$, so erhält man in $\mathcal{K}$ zulässige Induktionsschritte. Daraus folgt 4.4($\rightarrow$) durch Prämisseninduktion.

Zu ($\leftarrow$): Sei $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'.\Gamma$, also $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma.\sim H_1. \cdots .\sim H_n$. Wegen $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} H_i \;\; (i \leq n)$ folgt $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$ durch n-fache Anwendung der Regel Σ-Schnitt (s.o., mit leerem T). □

Definition: Σ heiße **widerspruchsvoll** genau dann, wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} G$ und $\Sigma \vdash_{\mathcal{K}} \neg G$ für eine Formel G gilt.

Aus 4.4 und der Zulässigkeit der Schnittregel folgt:

4.5 Lemma: Σ ist widerspruchsvoll genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$.

Definition: $\mathcal{W}$ sei der Kalkül mit den Regeln

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P, \neg P & \text{(für atomare } P\text{)} \\
\Sigma & \Rightarrow & \mathrm{T} & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}\text{)} \\
\Sigma, F & \Rightarrow & \Sigma, \neg\neg F & \\
\Sigma, \neg F \,,, \; \Sigma, \neg G & \Rightarrow & \Sigma, \neg (F \wedge G) & \\
\Sigma, F, G & \Rightarrow & \Sigma, (F \wedge G) & \\
\Sigma, \neg F y & \Rightarrow & \Sigma, \neg \forall x\, F x & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Sigma, F\tau & \Rightarrow & \Sigma, \forall x\, F x &
\end{array}
$$

Wir werden zeigen, dass in $\mathcal{W}$ alle widerspruchsvollen $\wedge$-Listen - und nur diese - herleitbar sind.

Definition: $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$ bedeute: In $\mathcal{W}$ ist Σ herleitbar.

4.6 Satz: (a) Wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma$, dann $\vdash_{\mathcal{W}} \Gamma'$.
(b) Alle **widerspruchsvollen $\wedge$-Listen** sind in $\mathcal{W}$ herleitbar.

Beweis von (a) durch Prämisseninduktion in $\mathcal{K}$: Ersetzen wir in den Schlüssen von $\mathcal{K}$ jede Liste Γ durch Γ', so erhalten folgende Induktionsschritte, die in $\mathcal{W}$ zulässig sind. (Dabei beachte man, dass $\Gamma', \sim F \;\; \Rightarrow \;\; \Gamma', \neg F$ in $\mathcal{W}$ zulässig ist.)

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \sim P, \sim\neg P & \\
\Gamma' & \Rightarrow & \Delta' & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta\text{)} \\
\Gamma', \sim F & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg\neg F & \\
\Gamma', \sim F \,,, \; \Gamma', \sim G & \Rightarrow & \Gamma', \sim (F \wedge G) & \\
\Gamma', \sim\neg F, \sim\neg G, & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg (F \wedge G) & \\
\Gamma', \sim F y & \Rightarrow & \Gamma', \sim \forall x\, F x & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Gamma', \sim\neg F\tau & \Rightarrow & \Gamma', \sim\neg \forall x\, F x. &
\end{array}
$$

Zu (b): Ist Σ widerspruchsvoll, dann gilt $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$ nach 4.5, also $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma''$ nach (a), und daher auch $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$. Denn ist z.B. $\Sigma \equiv \forall x\, Hx, \neg (F \wedge G), \neg\neg F$, so ist $\Sigma'' \equiv \forall x\, Hx, \neg (F \wedge G), F$, sodass $\Sigma'' \Rightarrow \Sigma$ nach der dritten Regel von $\mathcal{W}$ zulässig ist. □

4.7 Lemma: Wenn $\vdash_{\mathcal{W}} \Sigma$, dann gilt $\vdash_{\mathcal{K}} \Sigma'$; also ist dann Σ widerspruchsvoll (nach 4.5).

Beweis durch Prämisseninduktion bez. $\mathcal{W}$: In $\mathcal{K}$ zulässig sind folgende Induktionsschritte:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \sim P.\sim\neg\, P & \\
\Sigma' & \Rightarrow & \mathrm{T}' & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}) \\
\Sigma'.\sim F & \Rightarrow & \Sigma'.\sim\neg\neg\, F & \\
\Sigma'.\sim\neg\, F\ ,,\ \Sigma'.\sim\neg\, G & \Rightarrow & \Sigma'.\sim\neg\,(F\wedge G) & \\
\Sigma'.\sim F.\sim G & \Rightarrow & \Sigma',\sim(F\wedge G) & \\
\Sigma'.\sim\neg\, Fy & \Rightarrow & \Sigma'.\sim\neg\,\forall x\, Fx & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\Sigma'.\sim F\tau & \Rightarrow & \Sigma'.\sim\forall x\, Fx. & \Box
\end{array}$$

Formeln in Skolemform haben die Gestalt $\forall x_1 \ldots \forall x_k F$ $(k \geq 0)$ mit einer quantorenfreien Formel F. Wir nennen Listen derartiger Formeln kurz **allpränex**. Wir wollen zeigen, dass jede allpränexe $\wedge$-Liste, die in $\mathcal{W}$ herleitbar ist, sogar ohne Anwendung der Regel $\Sigma, \neg Fy \Rightarrow \Sigma, \neg\forall x\, Fx$ (d.h. der vorletzten Regel von $\mathcal{W}$) herleitbar ist.

Definition: $\mathcal{W}^-$ entstehe aus $\mathcal{W}$ durch Fortlassen der Regel $\Sigma, \neg Fy \Rightarrow \Sigma, \neg\forall x\, Fx$.

4.8 Lemma: Für allpränexe $\wedge$-Listen Σ gilt:
Ist Σ herleitbar in $\mathcal{W}$, so auch in $\mathcal{W}^-$ (und natürlich umgekehrt).

Beweis durch Prämisseninduktion: Σ sei allpränex und in $\mathcal{W}$ herleitbar. Dann kommt in Σ kein Glied der Form $\neg\forall x\, Fx$ vor, sodass Σ die Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{W}^-$ ist, dessen Prämissen (falls vorhanden) ebenfalls allpränex sind. Sind diese Prämissen in $\mathcal{W}^-$ herleitbar, so ist auch Σ in $\mathcal{W}^-$ herleitbar. $\Box$

4.9 Theorem (nach Herbrand): Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, \forall u\, Hu$, dann gibt es ein Termtupel $\tau_1, \ldots, \tau_k$ $(k \geq 0)$, für das auch $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, H\tau_1, \ldots, H\tau_k$ gilt (für $H\tau_i :\rightleftharpoons (Hu)^{\tau_i}_u$).

Beweis: Σ° entstehe aus Σ durch Fortlassen aller Vorkommnisse von $\forall u\, Hu$ als Glied von Σ. Wir zeigen zunächst allgemeiner:

(*) Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma$, dann gibt es ein Termtupel $\tau_1, \ldots, \tau_k$ mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma^\circ, H\tau_1, \ldots, H\tau_k$.

Der Beweis gelingt durch Prämisseninduktion, denn in $\mathcal{W}^-$ sind Induktionsschritte folgender Gestalt mit $\Omega \equiv H\tau_1, \ldots, H\tau_k$ zulässig:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & P, \neg\, P, \Omega & \text{(z.B. mit leerem } \Omega) \\
\Sigma^\circ, \Omega & \Rightarrow & \mathrm{T}^\circ, \Omega & \text{(falls } \Sigma \subseteq \mathrm{T}) \\
\Sigma^\circ, \Omega, F & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, \neg\neg F & \\
\Sigma^\circ, \Omega_1, \neg F,,\ \Sigma^\circ, \Omega_2, \neg G & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega_1, \Omega_2, \neg(F\wedge G) & \\
\Sigma^\circ, \Omega, F, G & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Omega, (F\wedge G) & \\
\Sigma^\circ, \Omega, F\tau & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, \forall x\, Fx & \text{(falls } \forall x\, Fx \not\equiv \forall u\, Hu) \\
\Sigma^\circ, \Omega, H\tau & \Rightarrow & \Sigma^\circ, \Omega, H\tau & \text{(s.u.).}
\end{array}$$

In den Prämissen ist das Glied F, G oder $F\tau$ fortzulassen, falls es $\equiv \forall u\, Hu$ ist. In der letzten Zeile steht der Induktionsschritt zu $\Sigma, H\tau \Rightarrow \Sigma, \forall u\, Hu$. Aus (*) erhalten wir 4.9, da wegen $\Sigma^\circ \subseteq \Sigma$ der Schluss $\Sigma^\circ, \Omega \Rightarrow \Sigma, \Omega$ zu $\mathcal{W}^-$ gehört. $\Box$

4.10 Korollar: Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, \forall u\, Hu$ und ist $\Sigma, \forall u\, Hu$ geschlossen, dann gibt es ein Konstantentupel $s_1, \ldots, s_k$ $(k \geq 0)$ mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Sigma, Hs_1, \ldots, Hs_k$.

Beweis: $\Sigma, \forall u\, Hu$ sei geschlossen, und * sei eine Substitution aller in $\tau_1, \ldots, \tau_k$ vorkommenden Variablen durch Konstante (z.B. $\emptyset$). Dann ist der Schluss $\Sigma, H\tau_1, \ldots, H\tau_k \Rightarrow \Sigma, H\tau_1^*, \ldots, H\tau_k^*$ in $\mathcal{W}^-$ zulässig (vgl. 4.2). Daraus und aus 4.9 folgt 4.10 $\square$

Aus 4.6(b), 4.8, 4.10 und 4.7 erhält man sofort:

4.11 Korollar: Ist $\Sigma, \forall u\, Hu$ allpränex, geschlossen und widerspruchsvoll, dann gibt es ein Tupel $s_1, \ldots, s_k$ von Konstanten, für das auch $\Sigma, Hs_1, \ldots, Hs_k$ widerspruchsvoll ist.

§5. Die Widerspruchsfreiheit einer abgeschwächten Version von ZFC

In §1 hatten wir gezeigt, dass die $\mathcal{E}$-Mengen die Axiome von ZFC ohne das Unendlichkeitsaxiom erfüllen. $\mathrm{ZFC}_\circ$ sei das System dieser Axiome in Skolemform. Sie seien in der in §3 eingeführten Sprache $\mathcal{L}$ formuliert, jedoch ohne Verwendung der Prädikatoren $\mathcal{E}$ und N. Außer Funktionssymbolen steht in ihnen nur das Relationssymbol $\subseteq$. In den folgenden Untersuchungen werden wir außerdem die Symbole $\mathcal{E}$, N und ω verwenden. Unter Termen und Konstanten verstehen wir wieder solche, die der in §4 eingeführten Sprache $\mathcal{L}_\omega$ angehören.

Hinweis: Die Zeichen $\{,\}, \in, \subseteq$ und $\cup$ werden wir auch in der Metasprache auf übliche Weise verwenden.

Für beliebige Konstante schreiben wir $q, r, s, t, r_1, \ldots$; für Elemente von $\mathcal{E}$ wie bisher $a, b, c, d, a_1, \ldots$; für Terme $\sigma, \tau, \tau_1, \ldots$. - Wie in §1 setzen wir

$$\begin{aligned} \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \;&:\rightleftharpoons\; \emptyset\{\sigma_1\}\ldots\{\sigma_n\} \\ \sigma \in \tau \;&:\rightleftharpoons\; \{\sigma\} \subseteq \tau \\ \sigma = \tau \;&:\rightleftharpoons\; \sigma \subseteq \tau \;\wedge\; \tau \subseteq \sigma \\ \sigma^+ \;&:\rightleftharpoons\; \sigma\{\sigma\}. \end{aligned}$$

Die folgende Charakterisierung von $\subseteq$ durch $\in$ möge in Skolemform zu $\mathrm{ZFC}_\circ$ gehören:

$$\forall x, y\, (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y)).$$

Ferner zählen wir folgendes Axiom zu $\mathrm{ZFC}_\circ$:

$$\forall x, y, z\, (x \in y\{z\} \;\leftrightarrow\; x \in y \;\vee\; x = z).$$

Aus $\mathrm{ZFC}_\circ$ (d.h. aus endlich vielen Elementen von $\mathrm{ZFC}_\circ$) sind somit in $\mathcal{K}$ herleitbar:

$$\begin{aligned} &\forall x, z\, (x = z \;\leftrightarrow\; x \in \{z\}) \\ &\forall x, y\, (x = y \;\leftrightarrow\; \forall z\, (x \in z \leftrightarrow y \in z)) \\ &\forall x, y\, (x \in y^+ \leftrightarrow x \in y \;\vee\; x = y). \end{aligned}$$

Damit können wir das **Unendlichkeitsaxiom** so formulieren:

$$\emptyset \in \omega \ \wedge \ \forall x\,(x \in \omega \to x^{+} \in \omega).$$

Sonderfälle der Regeln von $\mathcal{H}$ in §3 mit leerem Γ für die Prädikatoren N und $\mathbb{N}$ sind:

$$\begin{array}{lrcl} (N)_1 & & \Rightarrow & \mathrm{N}\,\emptyset \\ (N)_2 & \mathrm{N}b & \Rightarrow & \mathrm{N}\,b^{+} \\ (N)_3 & \mathrm{N}b,\ b=c & \Rightarrow & \mathbb{N}\,c. \end{array}$$

Man beachte, dass zur Herleitung in $\mathcal{H}$ von $\mathbb{N}\,c$, d.h. $\neg\forall x\neg(\mathrm{N}x \wedge x=c)$, Herleitungen von $\mathrm{N}b$ und $b=c$ für ein b erforderlich sind. Aussagen der Form $\mathbb{N}\,c$ sind also genau dann in $\mathcal{H}$ herleitbar, wenn sie nach $(N)_1-(N)_3$ und $(\subseteq)1-(\subseteq)4$ herleitbar sind.)

5.0 Hinweise: Für Konstante r, in denen ω oder ein Funktionssymbol vorkommt, gilt $r \notin \mathcal{E}$; $\nvdash_{\mathcal{H}} \mathcal{E}r$; $\nvdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$ und $\nvdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\,r$. Jede Aussage der Form $r \in \mathcal{E}$; $\vdash_{\mathcal{H}} \mathcal{E}r$; $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\,r$ impliziert also, dass r ω-frei und funktionssymbol-frei ist.

Definition: Die Konstanten $\emptyset, \emptyset^{+}, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots$ nennen wir **Nummern**. (Sie sind genau diejenigen Konstanten r, für die $\vdash_{\mathcal{H}} \mathrm{N}r$ gilt.)

5.1 Lemma: Für Nummern κ, λ gilt: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = \lambda$, dann $\kappa \equiv \lambda$.

Beweis durch Induktion über die Konstruktion von κ. Induktionsanfang:
Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \emptyset = \lambda$, dann $\emptyset \equiv \lambda$. Ebenso: Wenn $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = \emptyset$, dann $\kappa \equiv \emptyset$. Ferner gilt:
$\vdash_{\mathcal{H}} \kappa\{\kappa\} = \lambda\{\lambda\} \wedge \kappa \neq \lambda \to \kappa \in \lambda \wedge \lambda \in \kappa$, wobei die rechte Seite dem Fundierungsaxiom widerspricht. Im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa\{\kappa\} = \lambda\{\lambda\}$ gilt also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = \lambda$, also nach Induktionsannahme $\kappa \equiv \lambda$, also $\kappa\{\kappa\} \equiv \lambda\{\lambda\}$. $\square$

5.2 Lemma: $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\,c \ \wedge \ a \in c \to \mathbb{N}\,a$.

Beweis, zunächst für $\mathrm{N}c$ statt $\mathbb{N}\,c$ durch Induktion über die Herleitung von $\mathrm{N}c$ nach $(N)_1-(N)_2$: Sei $\vdash_{\mathcal{H}} a \in c$. Daher ist $c \not\equiv \emptyset$, also $\mathrm{N}c$ nicht nach $(N)_1$ hergeleitet. Ist $c \equiv b\{b\}$, und ist $\mathrm{N}c$ nach (N_2) hergeleitet aus $\mathrm{N}b$, dann gilt $\vdash_{\mathcal{H}} a \in b\{b\}$, also $\vdash_{\mathcal{H}} a \in b$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} a = b$, also gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}a$ nach Induktionsannahme oder nach $(N)_3$. Nun sei $\mathbb{N}\,c$ nach $(N)_3$ hergeleitet aus $\mathrm{N}b$ und $b=c$. Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} a \in c$ gilt daher $\vdash_{\mathcal{H}} a \in b$, also (nach dem schon Bewiesenen) $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\,a$. $\square$

5.3 Lemma: $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\,c \ \wedge \ a \in c \ \to \ a \subseteq c$.

Beweis durch Induktion über die Herleitung von $\mathrm{N}b$ bzw. $\mathbb{N}c$ nach $(N)_1-(N)_3$:
Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} a \notin \emptyset$ gilt der Induktionsanfang $\vdash_{\mathcal{H}} a \in \emptyset \ \to \ a \subseteq \emptyset$.
Aus der Induktionsannahme $\vdash_{\mathcal{H}} a \in b \ \to \ a \subseteq b$ und $\vdash_{\mathcal{H}} b = c$ folgt:

$$\begin{array}{l} \vdash_{\mathcal{H}} a \in b^{+} \ \to \ a \in b \ \vee \ a = b \ \to \ a \subseteq b \subseteq b^{+} \\ \vdash_{\mathcal{H}} a \in c \ \to \ a \in b \ \to \ a \subseteq b \ \to \ a \subseteq c. \quad \square \end{array}$$

Definition: Für Konstante s, t entstehe s^{t} aus s durch Einsetzen von t für ω.

5.4 Lemma: Kommt ω in s vor, so gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, s^t \to t \subseteq s^t$.

Beweis durch Induktion über die Konstruktion von s : ω komme in s vor und es gelte $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, s^t$. In s^t, also auch in s, kommt also kein Funktionssymbol vor. Steht ω am Anfang von s (d.h. ist $s \equiv \omega$ oder $s \equiv \omega\{s_1\}\dots\{s_n\}$), dann ist $s^t \equiv t$ oder $s^t \equiv t\{s_1^t\}\dots\{s_n^t\}$, und daher gilt $\vdash_{\mathcal{H}} t \subseteq s^t$. Anderenfalls hat s die Gestalt $\emptyset\{s_1\}\dots\{s_n\}$ und ω kommt in s_i für ein $i \le n$ vor. Dann ist $s^t \equiv \emptyset\{s_1^t\}\dots\{s_n^t\}$. Nach 5.2 gilt also $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, s_i^t$. Nach Induktionsannahme erhalten wir $\vdash_{\mathcal{H}} t \subseteq s_i^t \in s^t$ und somit (nach 5.3) $\vdash_{\mathcal{H}} t \subseteq s^t$. $\Box$

Definition: Eine ω-Belegung einer $\vee$-Liste von $\mathcal{L}_\omega$-Formeln entstehe aus ihr dadurch, dass man alle in ihr alle frei vorkommenden Variablen sowie ω durch ω-freie Konstante ersetzt. Eine $\vee$-Liste heiße in $\mathcal{H}^*$ herleitbar, wenn jede ihrer ω-Belegungen in $\mathcal{H}$ herleitbar ist. (Dabei kann man $\mathcal{H}^*$ als eine Erweiterung von $\mathcal{H}$ auffassen.)

5.5 Lemma: Jede in $\mathcal{K}$ herleitbare $\vee$-Liste, in der das Symbol $\mathcal{E}$ nicht im Bereich von $\forall$ steht, ist auch in $\mathcal{H}^*$ herleitbar.

Zum Beweis durch Prämisseninduktion ist zu zeigen: Sind alle Prämissen eines Schlusses von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{H}^*$ herleitbar, so ist dies auch seine Konklusion, falls in ihr $\mathcal{E}$ nicht im Bereich von $\forall$ steht. Diese Bedingung gilt dann auch für die Prämisse(n) des Schlusses (falls vorhanden). (Beachte: $\mathcal{K}$ operiert nur auf $\vee$-Listen von $\mathcal{L}_\omega$-Formeln; in ihnen kommt weder N noch $\mathbb{N}$ vor; s. Anfang von §4.)

Ad '$\Gamma.F_x^y \;\Rightarrow\; \Gamma.\forall x\, F$ (falls y nicht frei in $\Gamma.\forall x\, F$)'.
$\underline{z}$ sei eine Liste aller in $\Gamma.\forall x\, F$ frei vorkommenden Variablen zuzüglich ω, die von einander verschieden sind. Für alle ω-freien Konstantentupel $\underline{s}$ der Stellenzahl von $\underline{z}$ gehört folgender Schluss zu $\mathcal{H}$:

$$\text{Für alle } c \in \mathcal{E}\colon (\Gamma.F_x^c)_{\underline{z}}^{\underline{s}} \;\Rightarrow\; (\Gamma.\forall x\, F)_{\underline{z}}^{\underline{s}}.$$

Daraus folgt: Ist $\Gamma.F_x^y$ in $\mathcal{H}^*$ herleitbar, dann ist dies auch $\Gamma.\forall x\, F$.

Ad '$\Gamma.\neg F_x^\tau \;\Rightarrow\; \Gamma.\neg\forall x\, F$': $\mathcal{E}$ stehe nicht in $\forall x\, F$. Dann steht x in keiner mit $\mathcal{E}$ beginnenden Teilformel von F. Für $\underline{z}, \underline{s}$ wie soeben gilt also nach 3.10:
$\vdash_{\mathcal{H}} (\forall x\, F)_{\underline{z}}^{\underline{s}} \to (F_x^\tau)_{\underline{z}}^{\underline{s}}$. Daraus folgt: Ist $\Gamma.\neg F_x^\tau$ in $\mathcal{H}^*$ herleitbar, dann ist dies auch $\Gamma.\neg\forall x\, F$. - Auch alle anderen Schlüsse von $\mathcal{K}$ sind in $\mathcal{H}^*$ zulässig (vgl. 3.3). $\Box$

Hinweis: Ein Sonderfall einer Regel von $\mathcal{K}$ ist: $\neg\mathcal{E}f(\underline{c}) \Rightarrow \neg\forall x\,\mathcal{E}x$. In $\mathcal{H}$ sind jedoch $\neg\mathcal{E}f(\underline{c})$ und $\forall x\,\mathcal{E}x$ herleitbar. Somit gilt der Induktionsschritt nicht für alle Schlüsse der Form $\Gamma.\neg F_x^\tau \Rightarrow \Gamma.\neg\forall x\, F$, in denen $\mathcal{E}$ im Bereich von $\forall$ steht.

Definition:

$$\begin{aligned} \varphi\mathcal{E} \;&:\equiv\; \mathcal{E}\emptyset \wedge \forall x, y\,(\mathcal{E}x \wedge \mathcal{E}y \to \mathcal{E}x\{y\}) \\ \mathrm{ZFC}^- \;&:\equiv\; \mathrm{ZFC}_\circ \cup \{\varphi\mathcal{E}, \emptyset \,\varepsilon\, \omega,\, \forall x\,(\mathcal{E}x \wedge x \,\varepsilon\, \omega \;\to\; x^+ \,\varepsilon\, \omega)\}. \end{aligned}$$

5.6 Theorem: ZFC^- ist widerspruchsfrei.

Beweis: Wir nehmen an, ZFC$^-$ sei widerspruchsvoll, kurz: $\vdash_{\mathcal{W}}$ ZFC$^-$, d.h. es gebe eine $\wedge$-Liste $\Sigma \subseteq \mathrm{ZFC}_\circ$ mit

$$\vdash_{\mathcal{W}} \ \Sigma, \varphi\mathcal{E}, \emptyset \in \omega, \forall x\, (\mathcal{E}x \wedge x \in \omega \to x^+ \in \omega).$$

Nach 4.11 gibt es dann ein Konstanten-Tupel $s_1, \ldots, s_k$ mit

$$\vdash_{\mathcal{W}} \ \Sigma, \varphi\mathcal{E}, \emptyset \in \omega, (\mathcal{E}s_1 \wedge s_1 \in \omega \to s_1^+ \in \omega), \ldots, (\mathcal{E}s_k \wedge s_k \in \omega \to s_k^+ \in \omega).$$

Im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, s_i$ sei $F_i :\risingdotseq s_i^+ \;\varepsilon\; \omega$. Im Falle $\not\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, s_i$ sei $F_i :\risingdotseq \neg\, (\mathcal{E}s_i \wedge s_i \in \omega)$. Nach 3.2(b) sind $F_1, \ldots, F_k$ definiert. Wegen $F_i \vdash_{\mathcal{K}} (\mathcal{E}s_i \wedge s_i \in \omega \to s_i^+ \in \omega)$ $(i \leq k)$ erhalten wir $\vdash_{\mathcal{W}} \ \Sigma, \varphi\mathcal{E}, \emptyset \in \omega, F_1, \ldots, F_k$.

$r_1, \ldots, r_m, a_1, \ldots, a_n$ sei eine Permutation von $s_1, \ldots, s_k$ mit $\not\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, r_i$ für $i \leq m$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, a_j$ für $j \leq n$. Also gilt

$$\vdash_{\mathcal{W}} \ \Sigma, \varphi\mathcal{E}, \neg\, (\mathcal{E}r_1 \wedge r_1 \in \omega), \ldots, \neg\, (\mathcal{E}r_m \wedge r_m \in \omega), \emptyset \in \omega, a_1^+ \in \omega, \ldots, a_n^+ \in \omega.$$

Für jede $\mathcal{E}$-Konstante b gilt daher auch

$$\vdash_{\mathcal{W}} \ \Sigma, \varphi\mathcal{E}, \neg\, (\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b), \ldots, \neg\, (\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b), \emptyset \in b, a_1^+ \in b, \ldots, a_n^+ \in b.$$

Zu jeder $\mathcal{L}$-Konstanten q gibt es nach 5.1 höchstens eine Nummer λ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \lambda = q$. Unter den unendlich viele Nummern gibt es daher eine Nummer κ derart, dass $\not\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = q$ für jede der endlich vielen Konstante q gilt, die eine der Konstanten $\emptyset, a_1^+, \ldots, a_n^+$ ist oder in einer der Konstanten $r_1, \ldots, r_m$ als Teilfigur vorkommt. Für eine solche Nummer κ setzen wir nun

$$a :\risingdotseq \{\emptyset, a_1^+, \ldots, a_n^+\} \ \text{ und } \ b :\risingdotseq a\{\kappa^+\}.$$

Dann gilt $\mathrm{ZFC}_\circ \vdash_{\mathcal{K}} \emptyset \in b$ und $\mathrm{ZFC}_\circ \vdash_{\mathcal{K}} a_j^+ \in b$ für $j \leq n$. Daher (und wegen $\Sigma \subseteq \mathrm{ZFC}_\circ$) gilt auch

$$\begin{aligned} &\vdash_{\mathcal{W}} \ \mathrm{ZFC}_\circ \cup \{\varphi\mathcal{E}, \neg\, (\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b), \ldots, \neg\, (\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b), \quad \text{d.h.} \\ &\vdash_{\mathcal{W}} \ T, \varphi\mathcal{E}, \neg\, (\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b), \ldots, \neg\, (\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b) \end{aligned}$$

für eine $\wedge$-Liste $T \subseteq \mathrm{ZFC}_\circ$. Nochmals nach 4.11 gibt es daher eine $\wedge$-Liste $\psi\mathcal{E}$ aus endlich vielen Gliedern $(\mathcal{E}s \wedge \mathcal{E}t \to \mathcal{E}s\{t\})$ mit Konstanten s, t (in denen evtl. ω vorkommt), für die $\vdash_{\mathcal{W}} \ T, \mathcal{E}\emptyset, \psi\mathcal{E}, \neg\, (\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b), \ldots, \neg\, (\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b)$ gilt. Nach 4.5 folgt daraus

$$\vdash_{\mathcal{K}} T'.\neg\, \mathcal{E}\emptyset.(\psi\mathcal{E})'.(\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b) \ . \cdots .(\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b).$$

$(\psi\mathcal{E})^\emptyset$ entstehe aus $\psi\mathcal{E}$ durch Substitution von $\emptyset$ für ω. Darin kommt $\mathcal{E}$ nicht im Bereich von $\forall$ vor. Nach 4.2 und 5.5 folgt (mit $\mathcal{H}$ statt $\mathcal{K}$)

$$\vdash_{\mathcal{H}} T'.\neg\, \mathcal{E}\emptyset.((\psi\mathcal{E})^\emptyset)'.(\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b) \ . \cdots .(\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b).$$

Da aber alle Glieder von $T, \mathcal{E}\emptyset, (\psi\mathcal{E})^\emptyset$ in $\mathcal{H}$ herleitbar sind, erhalten wir

$$\vdash_{\mathcal{H}} (\mathcal{E}r_1^b \wedge r_1^b \in b) \ . \cdots .(\mathcal{E}r_m^b \wedge r_m^b \in b)$$

durch mehrfache Anwendung von 3.6. Wegen $b \equiv \{\emptyset, a_1^+, \dots, a_n^+, \kappa^+\}$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} (\mathcal{E}r_i^b \wedge r_i^b \in b \to \mathbb{N}r_i^b)$ $(i \leq m)$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}r_1^b. \cdots .\mathbb{N}r_m^b$. Nach 3.2(b) und 3.6 gibt es also ein $i \leq m$ mit $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}r_i^b$, also $r_i^b \in \mathcal{E}$.

Käme ω nicht in r_i vor, dann wäre $r_i^b \equiv r_i$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, r_i$, was falsch ist (s.o.). - Also kommt ω in r_i vor. Wegen $b \equiv a\{\kappa^+\}$ und $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, r_i^b$ erhalten wir $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in b \subseteq r_i^b$ (nach 5.4), also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in \kappa^+ \subseteq r_i^b$ (nach 5.3). In r_i^b, also auch in r_i, kommen keine Funktionssymbole vor. Also hat r_i die Gestalt $\emptyset\{r_{i1}\} \dots \{r_{i\ell}\}$ oder $\omega\{r_{i1}\} \dots \{r_{i\ell}\}$. Daher ist $r_i^b \equiv \emptyset\{r_{i1}^b\} \dots \{r_{i\ell}^b\}$ oder $r_i^b \equiv b\{r_{i1}^b\} \dots \{r_{i\ell}^b\}$. Wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in r_i^b$ gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in b$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = r_{ij}^b$ für ein $j \leq \ell$. Im Falle $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \in b \equiv \{\emptyset, a_1^+, \dots, a_n^+, \kappa^+\}$ wäre $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = \emptyset$ oder $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = a_k^+$ für ein $k \leq n$ (wegen $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa \neq \kappa^+$), was der Wahl von κ widerspricht. Also gilt $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = r_{ij}^b$ für ein $j \leq \ell$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \mathbb{N}\, r_{ij}^b$. Käme ω in r_{ij} vor, erhielten wir $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in b \subseteq r_{ij}^b$ (nach 5.4), also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa^+ \in \kappa$, was falsch ist. Also kommt ω nicht in r_{ij} vor, und wir erhalten $r_{ij}^b \equiv r_{ij}$, also $\vdash_{\mathcal{H}} \kappa = r_{ij}$, was der Wahl von κ widerspricht. - Damit haben wir die Annahme vom Anfang dieses Beweises widerlegt. $\square$

Wegen $\mathrm{ZFC}^- \vdash_{\mathcal{K}} \forall x, u\, (x = u \to (x \in \omega \leftrightarrow u \in \omega))$ erhalten wir aus 5.6:

5.7 Korollar: $\mathrm{ZFC}^- \vdash_{\mathcal{K}} \forall x, u\, (\mathcal{E}u \wedge x = u \wedge x \in \omega \to x^+ \in \omega)$. $\square$

Das Vorkommen von $\mathcal{E}$ in 5.6 und 5.7 ist jedoch hinderlich zur üblichen mengentheoretischen Begründung der Arithmetik im Rahmen von ZFC^-.

Zur Problematik: Aus dem sog. Zweiten Unvollständigkeitssatz von Gödel folgt insbesondere: Falls eine Kodierung (bekannter Art) der Aussage „ZFC ist widerspruchsfrei“ aus ZFC herleitbar ist, dann ist ZFC widerspruchsvoll. Obwohl wir nur eine Abschwächung der angeführten Aussage bewiesen haben, stellt sich die Frage, ob der hier angegebene Beweis von 5.6 in entsprechend kodierter Form als eine Herleitung aus ZFC darstellbar ist. Zu diesem Beweis gehört aber auch die Untersuchung des in §3 angeführten Halbformalismus $\mathcal{H}$ (mit einer Schlussregel mit unendlich vielen Prämissen). $\mathcal{H}$ ist jedoch nicht ‘beweisdefinit’, d.h. es gibt kein effektives Verfahren, das für jede angebliche Herleitung in $\mathcal{H}$ zu entscheiden gestattet, ob sie tatsächlich eine Herleitung in $\mathcal{H}$ ist. $\mathcal{H}$ ist also nicht ersetzbar durch einen Kalkül (dessen Regeln je nur endlich viele Prämissen haben).

§6. Anhang: Dialogische Interpretation des Halbformalismus $\mathcal{H}$

In §3 haben wir beschrieben, wie nach den Regeln von $\mathcal{H}$ mit ($\vee$-)Listen $C_1.C_2. \cdots .C_n$ mit $n \geq 1$ von Aussagen der Sprache $\mathcal{L}$ zu operieren ist. Für beliebige dieser Listen schreiben wir wieder $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots$.

Die in $\mathcal{H}$ herleitbaren Listen sind genau diejenigen, die ein ‘Proponent’ P in bestimmten Dialogspielen gegen beliebige Opponenten verteidigen kann (vgl. [4] S.67). $\mathcal{H}$ ist (wie erwähnt) nicht beweisdefinit. Demgegenüber hat jedes der im Folgenden behandelten Dialogspiele den methodischen Vorteil, dass nachprüfbar ist, ob in ihm die Spielregeln nicht verletzt worden sind, ob es vollendet worden ist und ob im letzten Falle P gewonnen hat; d.h. sie sind ‘dialogisch-definit’. Es kommt allerdings darauf an, ob es eine Gewinnstrategie gegen beliebige Opponenten gibt.

Ein $\mathcal{H}$-Dialog beginne damit, dass ein Proponent P eine nicht leere Liste Γ_0 als ‘These’ wählt und sie (d.h. deren Herleitbarkeit) behauptet. Hat P im Verlaufe dieses Dialogs eine Liste Γ behauptet, so habe er dies sogleich dadurch zu verteidigen, dass er einen Schluss S von $\mathcal{H}$ mit der Konklusion Γ angibt. Daraufhin darf ein Opponent - höchstens einmal - eine Prämisse von S (falls vorhanden) wählen und P auffordern, sie zu behaupten; usw.

Hat P eine Liste Γ_k durch einen Schluss $\Gamma_{k+1} \Rightarrow \Gamma_k$ mit $\Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k$ verteidigt, so sei es für P verboten Γ_{k+1} durch $\Gamma_{k+2} \Rightarrow \Gamma_{k+1}$ mit $\Gamma_{k+2} \subseteq \Gamma_{k+1}$ zu verteidigen. (P darf aber Γ_k sogleich durch $\Gamma_{k+2} \Rightarrow \Gamma_k$ verteidigen.)

Hat P einen Schluss $\Rightarrow A$ von $\mathcal{H}$ ohne Prämissen angegeben, dann habe P gewonnen. Er habe verloren, falls er einen Zug nicht mehr verteidigen darf. Hat P auf diese Weise gewonnen oder verloren, so sei der Dialog vollendet.

Bemerkung: Die Schlüsse von $\mathcal{H}$ ohne Prämissen sind diejenigen mit Konklusionen der Formen: $\emptyset \subseteq c, b \notin \emptyset$, $\mathrm{N}\emptyset$, $\neg\,\mathrm{N}a\{b\}$ mit $a \not\equiv b, \neg\,\mathrm{N}p$ mit $p \notin \mathcal{E}, \mathcal{E}\emptyset$, und $\neg\,\mathcal{E}p$ mit $p \notin \mathcal{E}$.

In jedem $\mathcal{H}$-Dialog $\Gamma_0 \,,, \,\dots\, ,, \,\Gamma_k \,,, \,\Gamma_{k+1} \,,, \,\Gamma_{k+2} \,,, \,\dots$ entsteht Γ_{k+1} oder Γ_{k+2} aus Γ_k dadurch, dass man ein Glied von Γ_k durch ein oder zwei ‘einfachere’ (s. Beweis von 3.6) Glieder ersetzt. (Ist Γ_{k+1} nicht ‘einfacher’ als Γ_k, so ist $\Gamma_{k+1} \subseteq \Gamma_k$.) Jeder $\mathcal{H}$-Dialog kann also nach endlich vielen Schritten vollendet werden.

Definition: Eine **$\mathcal{H}$-Gewinnstrategie** für Γ_0 sei eine Vorschrift P, die bei jeder Eingabe einer Liste Γ einen Schluss $\mathrm{P}(\Gamma)$ von $\mathcal{H}$ mit der Konklusion Γ oder *Error* auszugeben vorschreibt, sodass Folgendes für jedes mit der ‘These’ Γ_0 beginnende Tupel $\Gamma_0 \,,, \,\Gamma_1 \,,, \,\dots\, ,, \,\Gamma_n$ gilt: Wenn $\mathrm{P}(\Gamma_k)$ für jedes $k < n$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ mit der Konklusion Γ_k und Γ_{k+1} eine Prämisse dieses Schlusses ist, dann ist auch $\mathrm{P}(\Gamma_n) \not\equiv \mathit{Error}$.

Die Prämissen $\Gamma_1 \,,, \,\Gamma_2 \,,, \,\dots\, ,, \,\Gamma_n$ können dabei von einem Opponenten O gewählt werden.

Mittels einer Gewinnstrategie P für Γ_0 lässt sich (von unten nach oben fortschreitend) ein Baum $\mathcal{B}$ mit der Wurzel Γ_0 (unten), in dem jeder Zweig mit einem Schluss von $\mathcal{H}$ ohne Prämissen (oben) endet, wie folgt erzeugen. Um die Konstruktion von $\mathcal{B}$ übersichtlich darzustellen, bezeichnen wir Γ_0 kurz mit 0 und für jede mit x bezeichnete Liste die Prämissen von $\mathrm{P}x$ (soweit vorhanden) mit $x0, x1, x2, \dots$ in lexikographischer Anordnung. Wir ordnen die Resultate wiederholter Anwendungen von P nach der Anzahl der Ziffern $0, 1, 2, \dots$ in ihren Bezeichnungen, bei gleicher Anzahl nach der Summe der darin stehenden Ziffern, und bei gleicher Summe lexikographisch. Das von unten nach oben zu lesende Resultat lautet:

$$\begin{array}{l}
\dots \\
00000, \dots \\
0000; 0001, 0010, 0100; 0002, 0011, 0020, 0101, 0110, 0200; \dots \\
000; 001, 010; 002, 011, 020; 003, 012, 021, 030; \dots \\
00, 01, 02, 03, \dots \\
0 \ \text{(d.h. } \Gamma_0\text{).}
\end{array}$$

Wie wir sehen werden, stellt diese Tabelle eine Herleitung von Γ_0 dar, in der aber i.Allg. viele der hier schematisch angeführten Listen fehlen und die Prämissen einer Liste in der darüber stehenden Zeile i.Allg. 'verstreut' stehen. Jede in dieser Tabelle angeführte Liste lässt sich in folgender diagonalen Reihenfolge in endlich vielen Schritten erreichen:

$$0; 00; 01, 000; 02, 001, 0000; 03, 010, 0001, 00000; \ldots$$

Für jede in dieser Folge angeführte Liste Γ sind auch alle Prämissen von $\mathrm{P}(\Gamma)$ (dahinter) angeführt. Nun betrachten wir die Vorschrift, alle Glieder dieser Folge (mit 0 beginnend) nacheinander aufzuschreiben, und zwar wie in der vorher angegebenen Tabelle angeordnet. Z. B. nach 7 Schritten erhält man ggf.

$$\begin{array}{l} 0000 \\ 000, 001 \\ 00, 01, 02 \\ 0. \end{array}$$

V sei diese Vorschrift. Nach ihr ist eine Liste nur dann in die Tabelle einzutragen, wenn sie die Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{H}$ ist, dessen Prämissen ebenfalls (evtl. später) in die Tabelle einzutragen sind. Somit ist V eine Herleitungsvorschrift von Γ_0 in einem etwas liberalisierten Sinne, d.h. nach der es auch für Schlüsse mit nur endlich vielen Prämissen erlaubt ist, ihre Konklusion herzuleiten, nachdem beschrieben worden ist, wie ihre Prämissen herzuleiten sind (also evtl. schon bevor sie hergeleitet worden sind).

Ist umgekehrt eine derartige Vorschrift V zur Herleitung von Γ_0 in $\mathcal{H}$ gegeben, und wird durch P jeder nach V herzuleitenden Liste Γ genau ein Schluss $\mathrm{P}(\Gamma)$ von $\mathcal{H}$ mit der Konklusion Γ effektiv zugeordnet, dessen Prämissen (falls vorhanden) ebenfalls nach V herzuleiten sind, so ist P eine Gewinnstrategie für Γ_0. (Für weitere Γ sei $\mathrm{P}(\Gamma)$ nicht definiert.)

Um dies zu zeigen, betrachten wir irgendein mit Γ_0 beginnendes Tupel $\Gamma_0 ,, \ \Gamma_1 ,, \ \ldots ,, \ \Gamma_n$ derart, dass Γ_{k+1} für jedes $k < n$ eine Prämisse von $\mathrm{P}(\Gamma_k)$ ist. Dann ist auch Γ_n nach V herzuleiten, also $\mathrm{P}(\Gamma_n)$ ein Schluss mit der Konklusion Γ_n, also $\mathrm{P}(\Gamma_n) \not\equiv$ *Error*.
(Zu weiteren Fragen s. [7] VI.)

Literatur

[1] W. Ackermann: „Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre", Math. Annalen 114 (1937).
[2] G. Gentzen: „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", Math. Annalen 112 (1936).
[3] Herbrand, J.: "Recherches sur la theorie de la demonstration"; in Travoux de la Societe des Sciences et de Lettres de Varsovie, Class III, Sciences Mathematiques et Physiques, Nr. 33, 1930.
[4] Lorenzen, P.: „Metamathematik", BI 1962.
[5] Lorenzen, P.: „Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie", BI 1987.
[6] Russell, B.: "On Denoting", Mind 14, 1905, 479-493.
[7] Schütte, K.: „Beweistheorie", 1960, VI.