Zur Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre

Peter Zahn

Abstract: In §1 we introduce hereditarily finite sets by the rules $\Rightarrow \emptyset$ and $a, b \Rightarrow a\{b\}$ (i.e. from the premises a, b infer $a\{b\}$). The relation '$\subseteq$' between those sets can be introduced by the rules

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\ b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} & (\text{where } b \in c \;:\!\!\Longleftrightarrow\; \{b\} \subseteq c) \\ b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} & (\text{where } b = d \;:\!\!\Longleftrightarrow\; b \subseteq d,\, d \subseteq b) \\ a \subseteq c,\, b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & (\text{if } a \not\equiv \emptyset). \end{array}$$

We can write $\{a, b\}$ for $\emptyset\{a\}\{b\}$, e.g. After recursively defining $\mathcal{V}a$ (union), $\mathcal{P}a$ (power set) etc., we show that the hereditarily finite sets satisfy the axioms of ZFC without the axiom of infinity. In §2 we transcribe those axioms into Skolem form, whereby we use the symbols $\emptyset, \mathcal{V}, \mathcal{P}$, and $\{.,.\}$. In §3 we sketch well-known facts of elementary proof theory that lead to the following result (due to Jacques Herbrand): If $\Gamma, \forall x\, Fx$ is an inconsistent (finite) list of formulas in Skolem form, then there exists a tuple $s_1, \ldots, s_k$ ($k \geq 0$) of terms such that $\Gamma, Fs_1, \ldots, Fs_k$ is inconsistent. (Those formulas and terms are supposed to belong to a pertinent formal language.)

The main part of this paper is §4, containing a consistency proof of ZFC. In this proof we only make use of the mentioned result of Herbrand and the fact that the hereditarily finite sets satisfy ZFC without the axiom of infinity. But this proof will also be questioned with regard to the second incompleteness theorem of Gödel.

Note: Wilhelm Ackermann has proved that Zermelo-Fraenkel set theory in which the axiom of infinity is replaced by its negation is equiconsistent to Peano's first order arithmetic. The latter theory has been proved to be consistent by Gerhard Gentzen. So the reader who is only interested in the consistency of ZFC needs only read §4 (given in less than three pages).

In §1 we partly argue informally. To justify those argumentations, in the appendix we investigate an obvioulsy consistent rule system in which the theory of hereditarily finite sets is deducible. However, that rule system is not a formal one. It containes a rule of infinite induction (i.e. with infinitely many premises).

Keywords: Hereditarily finite sets; Zermelo-Fraenkel set theory; consistency; elementary proof theory.

§1. Ein Modell von ZFC ohne Unendlichkeitsaxiom

Ausgehend von der leeren Menge $\emptyset$ konstruieren wir schrittweise endliche Mengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ aus ihren Elementen a_i, falls diese schon konstruiert sind. (Genauer gesagt konstruieren wir Schreibfiguren zur Darstellung derartiger '$\mathcal{E}$-Mengen'.) Dabei fassen wir $\{a_1, \ldots, a_n\}$ als Abkürzung für $\emptyset\{a_1\}\{a_2\} \ldots \{a_n\}$ auf. Die Konstruktionsregeln lauten

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \emptyset & (\text{Beginn mit } \emptyset) \\ p,, q & \Rightarrow & p\{q\} & (\text{Übergang von } p \text{ und } q \text{ zu } p\{q\}). \end{array}$$

p und q fungieren hier als Eigenvariable, d.h. als Variable für jeweils schon konstruierte Figuren. Auch im Folgenden diene der Regelpfeil '$\Rightarrow$' zur Mitteilung der Erlaubnis, die Konklusion des betreffenden Regeleinzelfalles herzuleiten, nachdem dessen Prämissen hergeleitet worden sind. Zur Trennung mehrerer Prämissen verwenden wir doppelte Kommata ‘,,’ (da einfache Kommata in Prämissen und Konklusionen der in §3 angeführten Regeln vorkommen).

$\mathcal{E}$ sei die Klasse der so konstruierbaren Schreibfiguren, die wir $\mathcal{E}$-Konstante nennen. Wir konstruieren nun eine Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen: $\mathcal{E}$-Terme seien diejenigen Schreibfiguren, die nach den Regeln zur Konstruktion von $\mathcal{E}$-Konstanten zuzüglich der Erlaubnis, mit Variablen (z.B. $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$) zu beginnen, konstruierbar sind. ($\mathcal{E}$-Konstante sind also $\mathcal{E}$-Terme, in denen keine Variablen vorkommen). - $\mathcal{E}$-Formeln seien die atomaren Formeln $p \subseteq q$ mit $\mathcal{E}$-Termen p, q, sowie mit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ stets auch $\neg\mathcal{F}$, $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$ und $\forall x\, \mathcal{F}$. Weitere $\mathcal{E}$-Terme und $\mathcal{E}$-Formeln soll es nicht geben. - Geschlossene $\mathcal{E}$-Formeln (d.h. solche, in denen keine Variablen frei vorkommen) nennen wir $\mathcal{E}$-Aussagen oder kurz Aussagen.

Zur Mitteilung dieser Figuren verwenden wir Metavariable, und zwar
für Variable: $u, v, w, x, y, z, x_1 \ldots$;
für $\mathcal{E}$-Konstante: $a, b, c, d, a_1, \ldots$;
für $\mathcal{E}$-Terme: $p, q, r, p_1, \ldots$;
für $\mathcal{E}$-Aussagen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$;
für $\mathcal{E}$-Formeln: $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$.

Abkürzungen (mit ‘:⥱’ als Definitionszeichen):

$$
\begin{array}{rcl}
\{p_1, \ldots, p_n\} & :\rightleftharpoons & \emptyset\{p_1\} \ldots \{p_n\} \\
p \in q & :\rightleftharpoons & \{p\} \subseteq q \\
p \subseteq q \subseteq r & :\rightleftharpoons & p \subseteq q \ \wedge \ q \subseteq r \\
p = q & :\rightleftharpoons & p \subseteq q \subseteq p \\
(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) & :\rightleftharpoons & \neg(\neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}) \\
(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}) & :\rightleftharpoons & \neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}) \\
\exists x\, \mathcal{F} & :\rightleftharpoons & \neg\forall x\, \neg\mathcal{F}.
\end{array}
$$

Ferner verwenden wir geläufige Konventionen zur Klammerersparnis.

Eine Aussage der Form $a \subseteq b$ bedeute, dass sie nach den folgenden Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ herleitbar ist; d.h. wir stellen die ‘Behauptungsregel’ auf: Behaupte $a \subseteq b$ nur dann, wenn diese Aussage nach den folgenden Regeln herleitbar ist:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\subseteq)1 & & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c \\
(\subseteq)2 & b \in c & \Rightarrow & b \in c\{d\} \\
(\subseteq)3 & b = d & \Rightarrow & b \in c\{d\} \\
(\subseteq)4 & a \subseteq c,,\ b \in c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c \quad (\text{für } a \not\equiv \emptyset).
\end{array}
$$

‘$\equiv$’ bezeichne die gestaltliche Gleichheit von Schreibfiguren.

Für komplexe Aussagen stellen wir folgende 'Behauptungsregeln' auf:
Behaupte $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ nur dann, wenn man $\mathcal{A}$ behaupten darf und $\mathcal{B}$ behaupten darf (d.h. wenn diese Behauptungen nach den hier angegebenen Regeln nicht verboten sind).
Behaupte $\forall x\, \mathcal{A}x$ nur dann, wenn man $\mathcal{A}c$ für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten darf.
Behaupte $\neg\mathcal{A}$ nur dann, wenn es (nach den hier angegebenen Regeln) verboten ist, $\mathcal{A}$ zu behaupten. (Im Anhang werden wir diese Regeln durch Regeln eines sog. Halbformalismus ersetzen.)

Diese Behauptungsregeln sind umkehrbar (da wir keine weiteren aufstellen). Das heißt: Ist eine 'atomare' Aussage $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar, dann darf man sie behaupten. Darf man $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{B}$ behaupten, so auch $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$. Darf man $\mathcal{A}c$ für beliebige $\mathcal{E}$-Mengen c behaupten, so auch $\forall x\, \mathcal{A}x$. Ist es verboten, $\mathcal{A}$ zu behaupten, so darf man $\neg\mathcal{A}$ behaupten. Da man jeweils entscheiden kann, ob $a \subseteq b$ nach den Regeln $(\subseteq)1 - (\subseteq)4$ herleitbar ist, sind Aussagen dieser Form stabil (d.h. man darf von $\neg\neg\, a \subseteq b$ auf $a \subseteq b$ schließen). Daher sind bekanntlich alle $\mathcal{E}$-Aussagen stabil, sodass man im Bereich dieser Aussagen die klassische Logik anwenden darf.

Wir wollen zeigen, dass die $\mathcal{E}$-Mengen die Axiome ZFC von Zermelo und Fraenkel außer dem Unendlichkeitsaxiom erfüllen.

1.1. Lemma: $a\{b\} \not\subseteq \emptyset$, insbesondere $b \notin \emptyset$, also

$$c \subseteq \emptyset \;\leftrightarrow\; c = \emptyset \;\leftrightarrow\; c \equiv \emptyset.$$

Beweis: $b \in \emptyset$ kommt nicht als Konklusion der Regeln $(\subseteq)1$ - $(\subseteq)4$ vor. Daher ist $a\{b\} \subseteq \emptyset$ auch nicht nach $(\subseteq)4$ herleitbar. □

1.2. Lemma: $b \in c\{d\} \;\leftrightarrow\; b \in c \;\vee\; b = d.$

Beweis: $b \in c\{d\}$ kann nach $(\subseteq)2$ oder $(\subseteq)3$ (und auch nur nach diesen Regeln) aus der Prämisse $b \in c$ oder aus $b = d$ gefolgert werden. □

1.3. Lemma: $a\{b\} \subseteq c \;\leftrightarrow\; a \subseteq c \;\wedge\; b \in c.$

Beweis: Für $a \equiv \emptyset$ ist 1.3 wegen $(\subseteq)1$ äquivalent mit $b \in c \;\leftrightarrow\; b \in c$. Nun sei $a \not\equiv \emptyset$. Dann steht zur Herleitung von $a\{b\} \subseteq c$ nur $(\subseteq)4$ mit den Prämissen $a \subseteq c$ und $b \in c$ zur Verfügung. □

1.4. Lemma: $a \subseteq c \;\rightarrow\; a \subseteq c\{d\},$

Der Beweis ergibt sich durch Induktion über (die Konstruktion von) a aus
$\emptyset \subseteq c\{d\}$ und Folgendem:

$$\begin{array}{rlll} a\{b\} \subseteq c & \rightarrow & a \subseteq c \;\wedge\; b \in c & \text{(nach 1.3)} \\ & \rightarrow & a \subseteq c\{d\} \;\wedge\; b \in c\{d\} & \text{(Induktionsvoraussetzung und } (\subseteq)2) \\ & \rightarrow & a\{b\} \subseteq c\{d\} & ((\subseteq)4). \;\square \end{array}$$

1.5. Korollar: $\mathcal{E}$-Terme $p(x)$ sind *invariant* bezüglich $(=)$:

$$a = b \ \rightarrow \ p(a) = p(b).$$

Der Beweis gelingt durch Induktion über die Konstruktion der $\mathcal{E}$-Terme. Denn nach 1.4, $(\subseteq)3$ und $(\subseteq)4$ gilt:

$$a \subseteq c \ \wedge \ b = d \ \rightarrow \ a \subseteq c\{d\} \ \wedge \ b \in c\{d\} \ \rightarrow \ a\{b\} \subseteq c\{d\}, \quad \text{also}$$
$$a = c \ \wedge \ b = d \ \rightarrow \ a\{b\} = c\{d\}. \quad \square$$

1.6. Lemma: $\quad a \subseteq b \subseteq c \ \rightarrow \ a \subseteq c.$

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)1$. Von nun an sei $a \not\equiv \emptyset$. Im Falle $b \equiv \emptyset$ gilt $a \not\subseteq b$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \ \rightarrow \ a \subseteq c)$. Für $b \not\equiv \emptyset$ und $c \equiv \emptyset$ gilt $b \not\subseteq c$ nach 1.1, also $(a \subseteq b \subseteq c \ \rightarrow \ a \subseteq c)$. Nun setzen wir $a \equiv a_1\{a_2\}, \ \ b \equiv b_1\{b_2\}, \ \ c \equiv c_1\{c_2\}$, und machen folgende Induktionsvoraussetzungen:

(a) $\quad a_1 \subseteq b \subseteq c \ \rightarrow \ a_1 \subseteq c.$

(b1) $\quad \{a_2\} \subseteq b_1 \subseteq c \ \rightarrow \ \{a_2\} \subseteq c.$

(b2) $\quad a_2 = b_2 = c_2 \ \rightarrow \ a_2 = c_2.$

(c) $\quad \{a_2\} \subseteq \{b_2\} \subseteq c_1 \ \rightarrow \ \{a_2\} \subseteq c_1.$

(Beachte, dass die Tripel (a_1, b, c), $(\{a_2\}, b_1, c)$, (a_2, b_2, c_2), (c_2, b_2, a_2), $(\{a_2\}, \{b_2\}, c_1)$ kürzer als (a, b, c) sind.)

Ferner machen wir die Annahme $a \subseteq b \subseteq c$, und haben zu zeigen: $a \subseteq c$.

Nach 1.3 erhalten wir: $a_1 \subseteq b$, $a_2 \in b$ sowie $b_1 \subseteq c$ und $b_2 \in c$.

Wegen $a_1 \subseteq b \subseteq c$ folgt $a_1 \subseteq c$ nach (a).

Nach 1.2 folgt ferner $a_2 \in b_1$ oder $a_2 = b_2$, sowie $b_2 \in c_1$ oder $b_2 = c_2$.

Im Falle $a_2 \in b_1 \subseteq c$ erhalten wir $a_2 \in c$ nach (b1).

Nun sei $a_2 = b_2 \in c_1$. Nach $(\subseteq)3$ erhalten wir $a_2 \in \{b_2\} \subseteq c_1$, also $a_2 \in c_1$ nach (c), also $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)2$.

Im übrigen Falle $a_2 = b_2 = c_2$ ist $a_2 = c_2$ nach (b2), also wieder $a_2 \in c$ nach $(\subseteq)3$. Jedenfalls haben wir $a_1 \subseteq c$ (s.o.) und $a_2 \in c$, also $a \subseteq c$ nach $(\subseteq)4$. $\square$

1.7. Lemma: $\quad \forall x\,(x \in a \ \rightarrow \ x \in b) \ \leftrightarrow \ a \subseteq b,$
also auch $\quad \forall x\,(x \in a \ \leftrightarrow \ x \in b) \ \leftrightarrow \ a = b.$

Beweis: $(\leftarrow)$ folgt aus 1.6. Wir beweisen $(\rightarrow)$ durch Induktion über a:
Für $a \equiv \emptyset$ gilt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)1$. Nun sei $a \rightleftharpoons a_1\{a_2\}$. Ind.vor.: 1.7 gelte für a_i statt für a $(i = 1, 2)$. Vorausgesetzt sei ferner $\forall x\,(x \in a \ \rightarrow \ x \in b)$. Nach $(\subseteq)2$ erhalten wir

$\forall x\,(x \in a_1 \;\rightarrow\; x \in a \;\rightarrow\; x \in b)$, also $a_1 \subseteq b$ nach Ind.vor. Ferner gilt $a_2 = a_2$ nach Ind.vor., also $a_2 \in a$ nach $(\subseteq)3$, also $a_2 \in b$, also insgesamt $a \subseteq b$ nach $(\subseteq)4$. $\square$

1.8. Satz: Für alle $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{C}x$, in denen nur die Variable x frei vorkommt, und alle a, b gilt:

$$a = b \;\rightarrow\; (\mathcal{C}a \;\leftrightarrow\; \mathcal{C}b).$$

Beweis: Aus 1.5 und 1.6 erhält man: $a = b \;\rightarrow\; \big(p(a) \subseteq q(a) \;\leftrightarrow\; p(b) \subseteq q(b)\big)$. Daraus folgt 1.14 durch Induktion über den Aufbau von $\mathcal{C}x$. $\square$

1.9. Lemma: $\quad a \subseteq \{b\} \;\leftrightarrow\; a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\}$.

Beweis:

$$\begin{array}{rcll} a \subseteq \{b\} & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; \exists x\,(x \in a \;\wedge\; x = b) & \\ & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; b \in a & \\ & \rightarrow & a = \emptyset \;\vee\; \{b\} \subseteq a; & \text{also} \\ a \subseteq \{b\} & \leftrightarrow & a = \emptyset \;\vee\; a = \{b\} & \quad (\text{s. } (\subseteq)1)). \end{array}$$

Definitionen, rekursiv:

$$\begin{array}{rcl} a \cup \emptyset & :\risingdotseq & a \\ a \cup b\{c\} & :\risingdotseq & (a \cup b)\{c\} \\ \bigcup_{y \in \emptyset} c(y) & :\risingdotseq & \emptyset \\ \bigcup_{y \in a\{b\}} c(y) & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in a} c(y) \cup c(b) \\ \mathcal{V}a & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in a} y \\ a \cap \emptyset & :\risingdotseq & \emptyset \\ a \cap b\{c\} & :\risingdotseq & \begin{cases} (a \cap b)\{c\}, & \text{falls } c \in a \\ a \cap b, & \text{falls } c \notin a \end{cases} \\ \mathcal{P}\emptyset & :\risingdotseq & \{\emptyset\} \\ \mathcal{P}(a\{b\}) & :\risingdotseq & \bigcup_{y \in \mathcal{P}a} \{y, y\{b\}\} \end{array}$$

1.10. Satz: $\quad \forall x\,(x \in a \cup b \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: Für $b \equiv \emptyset$ gilt:

$$x \in a \cup \emptyset \;\leftrightarrow\; x \in a \;\leftrightarrow\; x \in a \;\vee\; x \in \emptyset \quad (\text{da } x \notin \emptyset).$$

Aus 1.10 als Ind.Vor. folgt ferner:

$$\begin{array}{rcccl} x \in a \cup b\{c\} & \leftrightarrow & x \in (a \cup b)\{c\} & \leftrightarrow & x \in a \cup b \;\vee\; x = c \\ & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b \;\vee\; x = c & \leftrightarrow & x \in a \;\vee\; x \in b\{c\}. \quad \square \end{array}$$

1.11. Satz: $\quad \forall x\,(x \in \bigcup_{y \in a} c(y) \;\leftrightarrow\; \exists y \in a.\, x \in c(y))$,
speziell: $\quad \forall x\,(x \in \mathcal{V}a \;\leftrightarrow\; \exists y\,(x \in y \in a))$.

Beweis durch Induktion über a: $x \in \bigcup_{y\in\emptyset} c(y) \leftrightarrow x \in \emptyset \leftrightarrow \exists y \in \emptyset.\, x \in c(y)$.

$$\begin{array}{rcll} x \in \bigcup_{y\in a\{b\}} c(y) & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y\in a} c(y) \cup c(b) & \\ & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y\in a} c(y) \ \vee\ x \in c(b) & \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a.\, x \in c(y) \ \vee\ x \in c(b) & \text{(nach Ind.vor.)} \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a.\, x \in c(y) \ \vee\ \exists y = b.\, x \in c(y) & \\ & \leftrightarrow & \exists y \in a\{b\}.\, x \in c(y). \quad \Box & \end{array}$$

1.12. Satz: $\forall x\, (x \in a \cap b \leftrightarrow x \in a \wedge x \in b)$.

Beweis durch Induktion über b: $x \in a \cap \emptyset \leftrightarrow x \in \emptyset \leftrightarrow x \in a \wedge x \in \emptyset$.
Für $c \in a$ (also $a\{c\} = a$) folgt aus der Ind.vor.:

$$\begin{array}{rcl} x \in a \cap b\{c\} & \leftrightarrow & x \in (a \cap b)\{c\} \leftrightarrow x \in a \cap b \ \vee\ x = c \\ & \leftrightarrow & (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ x = c \\ & \leftrightarrow & x \in a\{c\} \ \wedge\ x \in b\{c\} \\ & \leftrightarrow & x \in a \ \wedge\ x \in b\{c\} \quad \text{(wegen } a\{c\} = a\text{)}. \end{array}$$

Nun sei $c \notin a$. Dann gilt nach Ind.vor.:

$$\begin{array}{rcl} x \in a \cap b\{c\} & \leftrightarrow & x \in a \cap b \leftrightarrow x \in a \ \wedge\ x \in b \\ & \to & x \in a \ \wedge\ x \in b\{c\} \\ & \to & x \in a \ \wedge\ (x \in b \ \vee\ x = c) \\ & \to & (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ (x \in a \ \wedge\ x = c) \\ & \to & (x \in a \ \wedge\ x \in b) \ \vee\ c \in a \\ & \to & x \in a \ \wedge\ x \in b \qquad \text{(da } c \notin a\text{)} \quad \Box \end{array}$$

1.13. Satz: $\forall x\, (x \in \mathcal{P}a \leftrightarrow x \subseteq a)$.

Beweis durch Induktion über a: Für $a \equiv \emptyset$ gilt: $x \in \mathcal{P}\emptyset \leftrightarrow x \in \{\emptyset\} \leftrightarrow x \subseteq \emptyset$ (da $\emptyset \subseteq x$). Ferner folgt aus der Ind.vor.:

$$\begin{array}{rcll} x \in \mathcal{P}(a\{b\}) & \leftrightarrow & x \in \bigcup_{y\in\mathcal{P}a}\{y, y\{b\}\} & \\ & \leftrightarrow & \exists y \in \mathcal{P}a.\, x \in \{y, y\{b\}\} & (1.11) \\ & \leftrightarrow & \exists y \subseteq a.\, (x = y \ \vee\ x = y\{b\}) & \text{(Ind.vor.)} \\ & \to & x \subseteq a \ \vee\ x \subseteq a\{b\} & (1.2,\ 1.7) \\ & \to & x \subseteq a\{b\} & (1.4) \\ & \to & x = a\{b\} \cap x = (a \cap x) \cup (\{b\} \cap x) & (1.12, 1.10) \\ & \to & x = a \cap x \ \vee\ x = (a \cap x)\{b\} & \\ & & \text{(da } \{b\} \cap x = \emptyset \text{ oder } \{b\} \cap x = \{b\}\text{)} & \\ & \to & \exists y \subseteq a.\, (x = y \ \vee\ x = y\{b\}) & (y \text{ `für' } a \cap x). \quad \Box \end{array}$$

Zusammenfassung: Für alle x, a, b gilt:

$$\begin{array}{rcl} & x \notin \emptyset & \\ x \in \{a, b\} & \leftrightarrow & x = a \ \vee\ x = b \\ x \in \mathcal{V}a & \leftrightarrow & \exists y\, (x \in y \in a) \\ x \in \mathcal{P}a & \leftrightarrow & x \subseteq a. \end{array}$$

D.h., unser 'Modell' erfüllt die ZF-Axiome der leeren Menge, der Paarmenge, der Vereinigungsmenge und der Potenzmenge sowie 1.7 und 1.8 als Gleichheitsaxiome. Nun zeigen wir, dass unser Modell auch folgende Ersetzungsaxiome erfüllt.

1.14. Satz: $\mathcal{C}uv$ sei eine $\mathcal{E}$-Formel, die eine (evtl. partielle) Abbildung aus $\mathcal{E}$ in sich beschreibt, d.h. für die gilt:

$$\forall u, v, w\,(\mathcal{C}uv \;\wedge\; \mathcal{C}uw \;\rightarrow\; v = w).$$

Dann gilt für beliebige a: $\quad \exists y\, \forall v\,(v \in y \;\leftrightarrow\; \exists u \in a : \mathcal{C}uv).$

Beweis durch Induktion über den Aufbau von a: Zunächst gilt
$\forall v\,(\exists u \in \emptyset.\, \mathcal{C}uv \;\leftrightarrow\; v \in \emptyset)$. Nun machen wir die Ind.vor.: $\forall v\,(\exists u \in a.\, \mathcal{C}uv \;\leftrightarrow\; v \in c)$.
Im Falle $\exists v\, \mathcal{C}bv$ dürfen wir ferner $\mathcal{C}bd$ annehmen. Dann gilt für alle v

$$\begin{aligned}
\exists u \in a\{b\}.\, \mathcal{C}uv \;&\leftrightarrow\; \exists u\,(u \in a \;\wedge\; \mathcal{C}uv) \;\vee\; \exists u\,(u = b \;\wedge\; \mathcal{C}uv)\\
&\leftrightarrow\; \exists u \in a.\, \mathcal{C}uv \;\vee\; \mathcal{C}bv\\
&\leftrightarrow\; v \in c \;\vee\; v = d\\
&\leftrightarrow\; v \in c\{d\}.
\end{aligned}$$

Im anderen Falle $\neg\exists v\, \mathcal{C}bv$ gilt für alle v

$$\begin{aligned}
\exists u \in a\{b\}.\, \mathcal{C}uv \;&\leftrightarrow\; \exists u \in a.\, \mathcal{C}uv \;\vee\; \mathcal{C}bv\\
&\leftrightarrow\; \exists u \in a.\, \mathcal{C}uv\\
&\leftrightarrow\; v \in c. \quad \square
\end{aligned}$$

Für logische Untersuchungen ist es zweckdienlich, 1.14 wie folgt als das **Ersetzungsaxiomenschema** zu notieren, wobei $\mathcal{F}uv$ für Formeln steht, in denen außer u und v noch weitere Variable, die wir durch ... andeuten, frei vorkommen dürfen:

$$\begin{aligned}
\forall \ldots\, (\forall u, v, w\,(\mathcal{F}uv \;\wedge\; \mathcal{F}uw \;\rightarrow\; v = w) \;\rightarrow\\
\rightarrow\; \forall x\, \exists y\, \forall v\,(v \in y \;\leftrightarrow\; \exists u \in x.\, \mathcal{F}uv)).
\end{aligned}$$

Für Formeln $\mathcal{F}uv$ der Gestalt $\mathcal{F}u \wedge u = v$ erhält man insbesondere das **Aussonderungsaxiomenschema**:

$$\forall \ldots\, \forall x\, \exists y\, \forall v\,(v \in y \;\leftrightarrow\; v \in x \;\wedge\; \mathcal{F}v).$$

Das **Auswahlaxiom** ist für endliche Mengen bekanntlich erfüllt. Für $\mathcal{E}$-Mengen erhalten wir dies einfach so: $c \neq \emptyset$ sei eine $\mathcal{E}$-Menge nichtleerer, einander elementefremder Mengen. c hat die Gestalt $\{c_1\{d_1\}, \ldots, c_k\{d_k\}\}$ mit $c_i\{d_i\} \cap c_j\{d_j\} = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$. Dann hat die Menge $\{d_1, \ldots, d_k\}$ mit jedem Element $c_i\{d_i\}$ von c genau ein Element gemein.

Das **Fundierungsaxiom** lautet: $a \neq \emptyset \rightarrow \exists\, x \in a.\; a \cap x = \emptyset$.
Beweisskizze: Würde a_0 dieses Axiom nicht erfüllen, so gäbe es eine unendliche Vorgängerfolge $a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots$. Jedes dieser a_i wäre dann eine Konstante (also eine Schreibfigur), in der a_{i+1} als eine kürzere Konstante angeführt ist (was nicht geht).

§2. Mengentheoretische Axiome in Skolemscher Normalform

Um den angestrebten Widerspruchsfreiheitsbeweis von ZFC zu ermöglichen, formen wir die bisher formulierten mengentheoretischen 'Axiome' um. Dazu legen wir eine lexikographische Anordnung aller $\mathcal{E}$-Konstanten zugrunde, und reden diesbezüglich von *frühesten* $\mathcal{E}$-Konstanten. Die erwähnte Umformung kann man nach folgender allgemeiner Methode durchführen: Man führe zunächst jedes 'Axiom' in eine pränexe Normalform über, etwa $\exists y_0 \, \forall x_1 \, \exists y_1 \, \forall x_2 \, \exists y_2 \, \mathcal{A}(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$, wobei $\mathcal{A}(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$ quantorenfrei ist. Daraufhin führe man neue Terme $f_0, f_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2)$ folgender Art ein:
f_0 kennzeichnet das früheste y_0 mit $\forall x_1 \, \exists y_1 \, \forall x_2 \, \exists y_2 \, \mathcal{A}(y_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_1(x_1)$ kennzeichnet das früheste y_1 mit $\forall x_2 \, \exists y_2 \, \mathcal{A}(f_0, x_1, y_1, x_2, y_2)$;
$f_2(x_1, x_2)$ kennzeichnet das früheste y_2 mit $\mathcal{A}(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2, y_2)$.
Das ursprüngliche Axiom werde dann ersetzt durch $\forall x_1, x_2 \mathcal{A}(f_0, x_1, f_1(x_1), x_2, f_2(x_1, x_2))$. Aus dieser Aussage in 'Skolemform' ('Skolemscher Normalform', d.h. ohne Einsquantoren) folgt das ursprüngliche Axiom sogar rein logisch, also ohne Bezugnahme auf die Bedeutung der Terme $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1.x_2)$.

Die erwähnten Terme ('μ-Terme') $f_0, f_1(x_1), f_2(x_1.x_2)$ sind gemäß folgender Skizze zu verstehen: Für irgendeine $\mathcal{E}$-Formel $\mathcal{G}x$ sei

$$^x\mathcal{G}x \;\rightleftharpoons\; (\mathcal{G}x \;\wedge\; \forall u \, (\mathcal{G}u \to u \geq x)) \;\vee\; (x \equiv \emptyset \;\wedge\; \neg \, \exists u \, \mathcal{G}u)$$

wobei $u \geq x$ zu lesen ist als "In der erwähnten lexikographischen Anordnung steht u nach x oder fällt mit x zusammen". Somit gilt die Existenz und Eindeutigkeit:

$$\exists x \, {}^x\mathcal{G}x \;\wedge\; \forall x, y \, ({}^x\mathcal{G}x \wedge {}^y\mathcal{G}y \to x \equiv y),$$

und zwar ggf. für beliebige Werte der hier frei vorkommenden Variablen. (Dabei möge u nicht in $\mathcal{G}x$ vorkommen und y nicht in ${}^x\mathcal{G}x$.) Wegen des Vorkommens der Zeichen '$\geq$' und '$\equiv$' nehmen wir hier also eine *Erweiterung* der oben eingeführten Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen zu Hilfe.

Nun können wir den μ-Term $\mu x \, \mathcal{G}x$ (gelesen: "das früheste x mit $\mathcal{G}x$, falls es ein solches x gibt, anderenfalls $x \equiv \emptyset$") wie folgt einführen: Mit der Abkürzung $\gamma :\rightleftharpoons \mu x \, \mathcal{G}x$ setzen wir $\mathcal{F}\gamma \;:\rightleftharpoons\; \exists x \; ({}^x\mathcal{G}x \;\wedge\; \mathcal{F}x)$ für atomare $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{F}x$. Für beliebige $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{F}x$ erhalten wir dann bekanntlich (unter Variablenbedingungen):

$$\mathcal{F}\gamma \;\leftrightarrow\; \exists x \, ({}^x\mathcal{G}x \wedge \mathcal{F}x) \;\leftrightarrow\; \forall x({}^x\mathcal{G}x \to \mathcal{F}x),$$
$$\forall x \, \mathcal{F}x \;\to\; \mathcal{F}\gamma \;\to\; \exists x \, \mathcal{F}x$$

für beliebige Werte der noch frei vorkommenden Variablen. Verallgemeinerung:
Für atomare Formeln $Fx_1, \ldots, x_n$ und $\gamma_i :\rightleftharpoons \mu x_i \mathcal{G}x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ setze man

$$F\gamma_1, \ldots, \gamma_n \;:\rightleftharpoons\; \exists \, x_1, \ldots, x_n \, ({}^{x_1}\mathcal{G}_1 x_1 \wedge \ldots \wedge {}^{x_n}\mathcal{G}_n x_n \wedge Fx_1, \ldots, x_n).$$

Ineinandergeschachtelte μ-Terme entstehen dadurch, dass bereits in ${}^{x_i}\mathcal{G}_i x_i$ μ-Terme vorkommen. Die angeführten Ergebnisse gelten auch für $F\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ statt $F\gamma$.

Die Formel ${}^x\mathcal{G}x$ ist allerdings nicht invariant bezüglich der Mengengleichheit $(=)$; denn für verschiedene Darstellungen a, b derselben Menge, für die ${}^a\mathcal{G}a$ gilt, kann nicht auch ${}^b\mathcal{G}b$ gelten. Dennoch ist z.B. $\exists x\,({}^x\mathcal{G}x \wedge \mathcal{F}x)$ invariant bez. $(=)$. Dies sieht man zunächst für $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{F}x$ und $\mathcal{G}x$, in denen keine μ-Terme vorkommen. Wir haben jedoch auch Formeln, in denen μ-Terme vorkommen, in Betracht zu ziehen und unsere Definitionen auf sie auszudehnen. Daher definieren wir: μ-Formeln seien: alle $\mathcal{E}$-Formeln, mit $\mathcal{F}x$ und $\mathcal{G}x$ stets auch $\mathcal{F}(\mu x\,\mathcal{G}x)$, sowie mit $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ stets auch $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G})$, $\neg\mathcal{F}$ und $\forall x\,\mathcal{F}$. Weitere μ-Formeln soll es nicht geben. Durch Induktion über den Aufbau dieser Formeln ergibt sich leicht, dass alle μ-Formeln invariant bez. $(=)$ sind.

Zur Umformung der einzelnen Axiome in Skolemform kann man etwas von dem oben angegebenen Schema abweichen:

Das <u>Vereinigungsmengenaxiom</u>

$$\forall x, z\,(x \in \mathcal{V}z \;\leftrightarrow\; \exists y\,(x \in y \in z))$$

ist ersetzbar durch

$$\begin{array}{l} \forall x, y, z\,(x \in y \;\wedge\; y \in z \;\rightarrow\; x \in \mathcal{V}z) \quad \text{und} \\ \forall x, z\,(x \in \mathcal{V}z \;\rightarrow\; x \in f_{\mathcal{V}}(x, z) \in z). \end{array}$$

Dabei sei $f_{\mathcal{V}}(x, z) :\Longleftrightarrow \mu y\,(x \in y \;\wedge\; y \in z)$.

Das <u>Potenzmengenaxiom</u>

$$\forall y, z\,(y \in \mathcal{P}z \;\leftrightarrow\; \forall x\,(x \in y \;\rightarrow\; x \in z))$$

ist ersetzbar durch

$$\begin{array}{l} \forall x, y, z\,(y \in \mathcal{P}z \;\wedge\; x \in y \;\rightarrow\; x \in z) \quad \text{und} \\ \forall y, z\,(y \notin \mathcal{P}z \;\rightarrow\; f_{\mathcal{P}}(y, z) \in y \;\wedge\; f_{\mathcal{P}}(y, z) \notin z). \end{array}$$

Dabei sei $f_{\mathcal{P}}(y, z) :\Longleftrightarrow \mu x\,(x \in y \;\wedge\; x \notin z)$.

Zur Umformung weiterer Axiome ist es bequem, zunächst die bisherige Definition von $p = q$ durch

$$p = q \;:\Longleftrightarrow\; p \in \{q, q\}$$

zu ersetzen. Das <u>Paarmengenaxiom</u>

$$\forall x, y, z\,(x \in \{y, z\} \;\leftrightarrow\; x = y \;\vee\; x = z)$$

können wir ohnehin einfach beibehalten.

Als <u>Gleichheitsaxiome</u> betrachten wir zunächst

$$\begin{array}{l} \forall x, y\,(x = y \quad\leftrightarrow\quad \forall u\,(u \in x \;\leftrightarrow\; u \in y)), \\ \forall x, y\,(x = y \quad\rightarrow\quad \forall z\,(x \in z \;\leftrightarrow\; y \in z)) \end{array}$$

(die Umkehrung des letzten Axioms erübrigt sich) und ersetzen sie durch

$$\begin{aligned} \forall u, x, y\, (x = y &\rightarrow (u \in x \leftrightarrow u \in y)), \\ \forall x, y\, (x \neq y &\rightarrow \neg\, (f_{=}(x, y) \in x \leftrightarrow f_{=}(x, y) \in y)), \\ \forall x, y, z\, (x = y &\rightarrow (x \in z \leftrightarrow y \in z)). \end{aligned}$$

Dabei sei $f_{=}(x, y) :\rightleftharpoons \mu u \neg (u \in x \;\leftrightarrow\; u \in y)$. Wir werden diese Gleichheitsaxiome allerdings noch ergänzen.

Im Ersetzungaxiomenschema (in dem $\mathcal{F}uv$ für beliebige $\mathcal{E}$-Formeln steht) können die einzelnen zugehörigen Axiome nach der oben skizzierten allgemeinen Methode mit Hilfe von μ-Termen in Skolemform dargestellt werden. Auch das Auswahlaxiom und das Fundierungsaxiom können auf diese Weise in Skolemform dargestellt werden.

Mit Hilfe der μ-Terme $\mu y \mathcal{A} y x_1 \dots x_j$ lassen sich Funktionen $\lambda x_1, \dots, x_j\, \mu y \mathcal{A} y x_1 \dots x_j$ (oder $\mathcal{E}$-Mengen, für $j = 0$) darstellen. Wir bezeichnen sie kurz durch $\boldsymbol{f}_i^j$ mit geeigneten Nummern $i, j \geq 0$ (j für die Stellenzahl) (da wir durch sie später gewisse Symbole f_i^j einer formalen Sprache interpretieren wollen). Zur Numerierung der $\boldsymbol{f}_i^j$ verwenden wir für jedes $j \geq 0$ eine Gödelisierung aller geschlossenen Darstellungen der Form $\lambda x_1, \dots, x_j\, \mu y\, \mathcal{A} y x_1 \dots x_j$ mit $\mathcal{E}$-Formeln $\mathcal{A} y x_1 \dots x_j$, in denen keine μ-Terme vorkommen. Hat eine derartige Darstellung die Gödelnummer i, so bezeichnen wir sie mit $\boldsymbol{f}_i^j$.

Die angeführten mengentheoretischen Axiome lassen sich nochmals derart umformen, dass in ihnen Terme der Form $\boldsymbol{f}_i^j(x_1, \dots, x_j)$ an die Stelle der entsprechenden μ-Terme $\mu y\, \mathcal{A} y x_1 \dots x_j$ treten.

Nun können wir noch die fehlenden Ergänzungen der zuletzt angegebenen Gleichheitsaxiome formulieren: Für alle $i \geq 0$, $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} \forall x_1, \dots, x_j, y_1, \dots, y_j\, (x_1 = y_1 \;\wedge\; \dots \;\wedge\; x_j = y_j \;\rightarrow \\ \rightarrow\; \boldsymbol{f}_i^j(x_1, \dots, x_j) = \boldsymbol{f}_i^j(y_1, \dots, y_j)). \end{aligned}$$

§3. Bekannte logische Hilfsmittel

Die Axiome von Zermelo und Fraenkel lassen sich bekanntlich in einer formalen Sprache mit einem 2-stelligen Relationssymbol ε allein formulieren. Wir verwenden jedoch außerdem die Symbole $0, V, P, \pi, f_i^j\ (i, j \geq 0)$, die durch $\emptyset, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \{\,.\,,\,.\,\}, \boldsymbol{f}_i^j$ interpretierbar sind, also entsprechende Stellenzahlen haben - sowie ein Individuensymbol ω, ein Prädikatensymbol N und ein 1-stelliges Funktionensymbol h. (In §4 werden wir ω zur Formulierung des Unendlichkeitsaxioms sowie N und h als Hilfsmittel in Beweisen verwenden.)

$\mathcal{L}$ sei die formale Sprache 1. Stufe mit diesen Symbolen. Als Variable von $\mathcal{L}$ nehmen wir wieder die in §1 verwendeten Variablen. $\mathcal{L}$-Terme (d.h. Terme von $\mathcal{L}$) seien: Die Individuensymbole $0, \omega, f_i^0$, die Variablen, sowie mit s, t und $t_1, \dots, t_j$ stets auch $V(s), P(s), h(s), \pi(s, t)$ und $f_i^j(t_1, \dots, t_j)$. $\mathcal{L}$-Konstante seien geschlossene $\mathcal{L}$-Terme. Für $\mathcal{L}$-Terme s, t seien $(s\ \varepsilon\ t)$ und Ns atomare $\mathcal{L}$-Formeln. Mit F und G seien auch $\neg F$, $(F \wedge G)$ sowie $\forall x\, F$ $\mathcal{L}$-Formeln. Weitere $\mathcal{L}$-Terme und $\mathcal{L}$-Formeln soll es nicht geben. Eine Gleichung $s = t$ sei eine Abkürzung für $s\ \varepsilon\ \pi(t, t)$. $\mathcal{L}$-Formeln der Gestalten $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ sowie $\exists x\, F$ seien wie üblich 'klassisch' definiert.

Als Mitteilungszeichen verwenden wir:
für Variable: $x, y, z, \ldots$;
für $\mathcal{L}$-Terme: $s, t, s_1, \ldots$;
für $\mathcal{L}$-Formel: $F, G, H, F_1, \ldots, Fx, \ldots$;
für atomare $\mathcal{L}$-Formeln (d.h. der Gestalt $s \,\varepsilon\, t$ oder Ns): E;
für (evtl. leere) endliche Listen von $\mathcal{L}$-Formeln: $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \ldots$.
Fy bzw. Ft stehe für die $\mathcal{L}$-Formel, die aus Fx durch Substitution von y bzw. t für alle freien Vorkommnisse von x entsteht.

In diesem §3 sagen wir jedoch einfach "Term" bzw. "Formel" statt "$\mathcal{L}$-Term" bzw. "$\mathcal{L}$-Formel".

Ein vollständiger Logik-Kalkül $\mathcal{K}$

Die in ihm vorkommenden *Sequenzen* $F_1, \ldots, F_m \prec G_1, \ldots, G_n$ (mit $m, n \geq 0$) sind zu lesen als $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m \to G_1 \vee \ldots \vee G_n$. Ferner bedeute $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, dass alle Glieder der Liste Γ auch in Γ_1 als Glieder vorkommen. Die Regeln von $\mathcal{K}$ seien folgende:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & E \prec E & \text{(für atomare } E\text{)} \\
\Gamma \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma_1 \prec \Delta_1 & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1 \text{ und } \Delta \subseteq \Delta_1\text{)} \\
\Gamma, F \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec \neg F, \Delta & \\
\Gamma \prec F, \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg F \prec \Delta & \\
\Gamma \prec F, \Delta \,,\, \Gamma \prec G, \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec F \wedge G, \Delta & \text{(mit zwei Prämissen)} \\
\Gamma, F, G \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, F \wedge G \prec \Delta & \\
\Gamma \prec Fy, \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec \forall x\, Fx, \Delta & \text{(falls } y \text{ neu (s.u.))} \\
\Gamma, Ft \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \forall x\, Fx \prec \Delta & \text{(falls } t \text{ frei für } x \text{ in } Fx\text{).} \quad \Box
\end{array}$$

Die in der vorletzten Regel vorkommende Variablenbedingung "y neu" bedeute, dass die Variable y nicht in der Konklusion vorkommt. "t frei für x in Fx" bedeute, dass jedes freie Vorkommnis einer Variablen in t auch in Ft überall dort, wo t für x eingesetzt worden ist, frei ist. Auch im Folgenden mögen y und t diese oder entsprechende Variablenbedingungen erfüllen.

$\mathcal{K}$ ist bekanntlich *korrekt* und *vollständig* in dem Sinne, dass in ihm genau die allgemeingültigen Sequenzen herleitbar sind. Dabei heiße eine Sequenz $F_1, \ldots, F_m \prec G_1, \ldots, G_n$ allgemeingültig genau dann, wenn die Formel $F_1 \wedge \ldots \wedge F_m \to G_1 \vee \ldots \vee G_n$ bei jeder Interpretation der in ihr vorkommenden Parameter und Variablen über derselben Trägermenge in eine 'wahre' Aussage übergeht (d.h. deren Behauptung erlaubt ist).

Definition: $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma \prec \Delta$ bedeute: $\Gamma \prec \Delta$ ist in $\mathcal{K}$ herleitbar.

3.1 Lemma: Für alle $\mathcal{L}$-Formeln H gilt $\vdash_{\mathcal{K}} H \prec H$.

Beweis durch Induktion über den Aufbau von H: Für atomare E ist $\vdash_{\mathcal{K}} E \prec E$ gefordert. Ferner sind folgende Regeln in $\mathcal{K}$ zulässig:

$$\begin{array}{l}
F \prec F \;\Rightarrow\; \prec \neg F, F \;\Rightarrow\; \prec F, \neg F \;\Rightarrow\; \neg F \prec \neg F. \\
F \prec F \,,\, G \prec G \;\Rightarrow\; F, G \prec F \,,\, F, G \prec G \;\Rightarrow\; F \wedge G \prec F \wedge G. \\
Fy \prec Fy \;\Rightarrow\; \forall x\, Fx \prec Fy \;\Rightarrow\; \forall x\, Fx \prec \forall x\, Fx. \quad \Box
\end{array}$$

Wegen der Korrektheit und Vollständigkeit von $\mathcal{K}$ ist die **Schnittregel**

$$\Gamma \prec F, \Delta ,, \; \Gamma, F \prec \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma \prec \Delta$$

in $\mathcal{K}$ zulässig. (Man kann diesen '**Schnittsatz**' auch rein syntaktisch beweisen, und zwar nach dem Muster des Beweises des Schnittsatzes für den im Anhang angeführten Halbformalismus $\mathcal{H}$, jedoch einfacher.)

Definition: $\prec H \vdash_{\mathcal{K}^*} \Gamma \prec \Delta$ bedeute: Aus $\prec H$ ist $\Gamma \prec \Delta$ herleitbar, und zwar nach den Regeln von $\mathcal{K}$ zuzüglich der Schnittregel.

3.2 Lemma: $\prec H \vdash_{\mathcal{K}^*} \Gamma \prec \Delta$ gilt genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} H, \Gamma \prec \Delta$.

Beweis: Wir schreiben kurz '$\vdash$' statt '$\vdash_{\mathcal{K}}$' bzw. '$\vdash_{\mathcal{K}^*}$'. Zu '($\rightarrow$)': Eine Aussage der Form $\prec H \vdash \Gamma \prec \Delta$ ist genau dann wahr, wenn sie nach folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \prec H \vdash \prec H & \\
 & \Rightarrow & \prec H \vdash E \prec E & \\
\prec H \vdash \Gamma \prec \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma_1 \prec \Delta_1 & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1 \text{ und } \Delta \subseteq \Delta_1\text{)} \\
\prec H \vdash \Gamma, F \prec \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma \prec \neg F, \Delta & \\
\prec H \vdash \Gamma \prec F, \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma, \neg F \prec \Delta & \\
\prec H \vdash \Gamma \prec F, \Delta ,, \; \prec H \vdash \Gamma \prec G, \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma \prec F \wedge G, \Delta & \\
\prec H \vdash \Gamma, F, G \prec \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma, F \wedge G \prec \Delta & \\
\prec H \vdash \Gamma \prec Fy, \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma \prec \forall x\, Fx, \Delta & \text{(falls } y \text{ neu)} \\
\prec H \vdash \Gamma, Ft \prec \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma, \forall x\, Fx \prec \Delta & \text{(falls } t \text{ frei für } x \text{ in } Fx\text{)} \\
\prec H \vdash \Gamma \prec F, \Delta ,, \; \prec H \vdash \Gamma, F \prec \Delta & \Rightarrow & \prec H \vdash \Gamma \prec \Delta. &
\end{array}$$

Ersetzt man in diesen Regeln jede (als Prämisse oder Konklusion vorkommende) Aussage der Form $\prec H \vdash \Gamma \prec \Delta$ durch $H, \Gamma \prec \Delta$, so erhält man in $\mathcal{K}$ zulässige 'Induktionsschritte'. Daraus folgt 3.2($\rightarrow$) durch Prämisseninduktion.

Zu '($\leftarrow$)': Zu $\mathcal{K}^*$ gehören die Regeln:

$$\prec H \Rightarrow \Gamma \prec H, \Delta \quad \text{und} \quad \Gamma \prec H, \Delta ,, \; H, \Gamma \prec \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma \prec \Delta.$$

Im Falle $\vdash_{\mathcal{K}} H, \Gamma \prec \Delta$ gilt also $\prec H \vdash_{\mathcal{K}^*} \Gamma \prec \Delta$. $\square$ - Aus 3.2 folgt insbesondere:

3.3 Korollar: $\prec H \vdash_{\mathcal{K}^*} \prec G \wedge \neg G$ genau dann, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} H \prec G \wedge \neg G$.

Definition: Γ heiße **widerspruchsvoll**, wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma \prec G \wedge \neg G$ für eine Formel G gilt.

3.4 Lemma: In $\mathcal{K}$ zulässig sind:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & \Gamma, F \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg\neg F \prec \Delta \\
\text{(b)} & \Gamma, \neg F \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec F, \Delta \\
\text{(c)} & \Gamma, \neg F \prec \Delta ,, \; \Gamma, \neg G \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg(F \wedge G) \prec \Delta \\
\text{(d)} & \Gamma, \neg Fy \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg \forall x\, Fx \prec \Delta.
\end{array}$$

Beweis: (a) ergibt sich durch Anwenden der dritten und vierten Regel von $\mathcal{K}$.
(b) Wir beweisen zunächst (mit H statt F) die Zulässigkeit der Regel

$$\Gamma \prec \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma^- \prec H, \Delta,$$

wobei Γ^- aus Γ durch Fortlassen aller Vorkommnisse von $\neg H$ als Glieder entstehe: Dies ergibt sich durch Prämisseninduktion daraus, dass für jeden Regeleinzelfall $\Gamma_i \prec \Delta_i \;\; (i \in I) \Rightarrow \Gamma \prec \Delta$ (mit keiner, einer oder zwei Prämissen $\Gamma_i \prec \Delta_i$) von $\mathcal{K}$ der 'Induktionsschritt' $\Gamma_i^- \prec H, \Delta_i \;\; (i \in I) \Rightarrow \Gamma^- \prec H, \Delta$ oder $\Gamma_i \prec \Delta_i \;\; (i \in I) \Rightarrow \Gamma^- \prec H, \Delta$ in $\mathcal{K}$ zulässig ist. Diese Induktionsschritte lauten:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & E \prec H, E & \text{(für atomare } E\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma_1^- \prec H, \Delta_1 & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1 \text{ und } \Delta \subseteq \Delta_1\text{)} \\
\Gamma^-, F \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^- \prec H, \neg F, \Delta & \text{(mit } F \not\equiv \neg H\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^- \prec H, \neg\neg H, \Delta & \text{(mit } F \equiv \neg H\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, F, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^-, \neg F \prec H, \Delta & \text{(mit } F \not\equiv H\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^- \prec H, \Delta & \text{(mit } F \equiv H\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, F, \Delta \,,, \; \Gamma^- \prec H, G, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^- \prec H, F \wedge G, \Delta & \\
\Gamma^-, F, G \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^-, F \wedge G \prec H, \Delta & \text{(mit } F, G \not\equiv \neg H\text{)} \\
\Gamma^-, G \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^-, F \wedge G \prec H, \Delta & \text{(mit } F \equiv \neg H \not\equiv G\text{, z.B.)} \\
\Gamma^- \prec H, Fy, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^- \prec H, \forall x\, Fx, \Delta & \text{(mit } y \text{ nicht in } H\text{)} \\
\Gamma \prec Fy, \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec Hy, \forall x\, Fx, \Delta & \text{(mit } y \text{ in } Hy \; (\equiv H), s.u.\text{)} \\
\Gamma^-, Ft \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^-, \forall x\, Fx \prec H, \Delta & \text{(mit } Ft \not\equiv \neg H\text{)} \\
\Gamma^- \prec H, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^-, \forall x\, Fx \prec H, \Delta & \text{(mit } Ft \equiv \neg H\text{)}
\end{array}$$

Für die viert- und die drittletzte Regel ist wieder vorausgesetzt, dass y auch nicht in $\Gamma \prec \forall x\, Fx, \Delta$ vorkommt. Falls y in H vorkommt (drittletzte Regel) ist daher $\Gamma \equiv \Gamma^-$. - Nun ergibt sich (b) wegen $(\Gamma, \neg H)^- \equiv \Gamma^-$ und $\Gamma^- \subseteq \Gamma$ nach dem Schema:
$\Gamma, \neg H \prec \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma^- \prec H, \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma \prec H, \Delta.$

Zu (c) und (d): Zulässig sind folgende Regeln:

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma, \neg F \prec \Delta \,,, \; \Gamma, \neg G \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec F, \Delta, , \; \Gamma \prec G, \Delta \quad \text{(nach (b))} \\
 & \Rightarrow & \Gamma \prec F \wedge G, \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma, \neg(F \wedge G) \prec \Delta \\
\Gamma, \neg Fy \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma \prec Fy, \Delta \quad \text{(nach (b))} \\
 & \Rightarrow & \Gamma \prec \forall x\, Fx, \Delta \;\Rightarrow\; \Gamma, \neg\forall x\, Fx \prec \Delta. \quad \Box
\end{array}$$

Im folgenden Kalkül $\mathcal{W}$ sind alle **widerspruchsvollen** (endlichen) Formellisten (in denen die Kommata als '$\wedge$' zu lesen sind) herleitbar. $\mathcal{W}$ habe die folgenden Regeln :

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & E, \neg E & \\
\Gamma & \Rightarrow & \Gamma_1 & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1\text{)} \\
\Gamma, F & \Rightarrow & \Gamma, \neg\neg F & \\
\Gamma, \neg F \,,, \; \Gamma, \neg G & \Rightarrow & \Gamma, \neg\,(F \wedge G) & \\
\Gamma, F, G & \Rightarrow & \Gamma, F \wedge G & \\
\Gamma, \neg Fy & \Rightarrow & \Gamma, \neg\forall x\, Fx & \\
\Gamma, Ft & \Rightarrow & \Gamma, \forall x\, Fx. &
\end{array}$$

Definitionen: $\vdash_{\mathcal{W}} \Gamma$ bedeute: In $\mathcal{W}$ ist Γ herleitbar.
Für $\Delta \equiv G_1, \dots, G_n$ (i.S.v. $G_1 \vee \dots \vee G_n$) sei $\Delta' \equiv \neg G_1, \dots, \neg G_n$ (i.S.v. $\neg G_1 \wedge \dots \wedge \neg G_n$).

3.5 Satz: (a) Wenn $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma \prec \Delta$, dann $\vdash_{\mathcal{W}} \Gamma, \Delta'$.
(b) Alle widerspruchsvollen Formellisten sind in $\mathcal{W}$ herleitbar.

Beweis von (a) durch Prämisseninduktion in $\mathcal{K}$: Wir ordnen jeder Sequenz $\Gamma \prec \Delta$ die Liste Γ, Δ' zu, ersetzen in den Regeln von $\mathcal{K}$ alle Sequenzen durch ihre zugeordnenten Listen, und erhalten folgende Induktionsschritte, die in $\mathcal{W}$ zulässig ist:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & E, \neg E & \\
\Gamma, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma_1, \Delta'_1 & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1 \text{ und } \Delta \subseteq \Delta_1) \\
\Gamma, F, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, \neg\neg F, \Delta' & \\
\Gamma, \neg F, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, \neg F, \Delta' & \\
\Gamma, \neg F, \Delta' \,,, \; \Gamma, \neg G, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, \neg (F \wedge G), \Delta' & \\
\Gamma, F, G, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, F \wedge G, \Delta' & \\
\Gamma, \neg Fy, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, \neg \forall x\, Fx, \Delta' & \\
\Gamma, Ft, \Delta' & \Rightarrow & \Gamma, \forall x\, Fx, \Delta'. & \square
\end{array}$$

Zu (b): Nach dem Schnittsatz sind auch folgende Regeln in $\mathcal{K}$ zulässig:

$$\Gamma \prec G,, \; \Gamma \prec \neg G \;\Rightarrow\; \Gamma, \neg G \prec,, \; \Gamma \prec \neg G \;\Rightarrow\; \Gamma \prec .$$

D.h. für widerspruchsvolle Γ gilt $\vdash_{\mathcal{K}} \Gamma \prec$ und somit $\vdash_{\mathcal{W}} \Gamma$. $\square$

Wir zeigen noch, dass in $\mathcal{W}$ auch *nur* widerspruchsvolle Formellisten herleitbar sind.

3.6 Satz: Wenn $\vdash_W \Gamma$, dann $\vdash_K \Gamma \prec \Delta$ (speziell auch für leeres Δ).

Beweis durch Prämisseninduktion bez. $\mathcal{W}$: In $\mathcal{K}$ zulässig sind folgende Induktionsschritte:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & E, \neg E \prec \Delta & \\
\Gamma \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma_1 \prec \Delta & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1) \\
\Gamma, F \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg\neg F \prec \Delta & \text{(s. 3.1(a))} \\
\Gamma, \neg F \prec \Delta \,,, \; \Gamma, \neg G \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg(F \wedge G) \prec \Delta & \text{(s. 3.1(c))} \\
\Gamma, F, G \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, F \wedge G \prec \Delta & \\
\Gamma, \neg Fy \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \neg \forall x\, Fx \prec \Delta & \text{(s. 3.1(d))} \\
\Gamma, Ft \prec \Delta & \Rightarrow & \Gamma, \forall x\, Fx \prec \Delta. & \square
\end{array}$$

Formeln in Skolemform haben die Gestalt $\forall x_1 \dots, \forall x_k F$ ($k \geq 0$) mit einer quantorenfreien Formel F. Wir nennen Listen derartiger Formeln kurz **allpränex**. Jeder Einzelfall einer Regel von $\mathcal{W}$ mit einer allpränexen Konklusion hat nur allpränexe Prämissen. Wir wollen zeigen, dass jede allpränexe Liste, die in $\mathcal{W}$ herleitbar ist, sogar ohne Anwendung der Regel $\Gamma, \neg Fy \Rightarrow \Gamma, \neg \forall x\, Fx$ (d.h. der vorletzten Regel von $\mathcal{W}$) herleitbar ist. Dazu definieren wir:

Definition: $\mathcal{W}^-$ entstehe aus $\mathcal{W}$ durch Fortlassen der Regel $\Gamma, \neg Fy \Rightarrow \Gamma, \neg\forall x\, Fx$.

3.7 Satz: Für allpränexe Formellisten Γ gilt:
Ist Γ herleitbar in $\mathcal{W}$, so auch in $\mathcal{W}^-$ (und natürlich umgekehrt).

Beweis durch Prämisseninduktion: Γ sei allpränex und in $\mathcal{W}$ herleitbar. Dann kommt in Γ kein Glied der Form $\neg\forall x\, Fx$ vor, sodass Γ die Konklusion eines Einzelfalls einer Regel von $\mathcal{W}^-$ ist, dessen Prämissen (falls vorhanden) ebenfalls allpränex und in $\mathcal{W}$ herleitbar sind. Sind diese Prämissen sogar in $\mathcal{W}^-$ herleitbar (Ind.Vor.), so ist auch Γ in $\mathcal{W}^-$ herleitbar. □

Ferner benötigen wir:

3.8 Lemma (nach Herbrand): Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma, \forall z\, Hz$, dann gibt es ein Termtupel $s_1, \ldots, s_k$ $(k \geq 0)$, für das auch $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma, Hs_1, \ldots, Hs_k$ gilt.

Wir beweisen zunächst:

(*) Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma$, dann gibt es ein Termtupel $s_1, \ldots, s_k$ mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma^\circ, Hs_1, \ldots, Hs_k$.

Dabei entstehe Γ° aus Γ durch Fortlassen aller Vorkommnisse von $\forall z\, Hz$ als Glied von Γ. Der Beweis von (*) gelingt durch Prämisseninduktion, denn $\mathcal{W}^-$ enthält Sonderfälle von Regeln folgender Gestalt mit $\Delta \equiv Hs_1, \ldots, Hs_k$ an Stelle von $\forall z\, Hz$:

$$
\begin{array}{lrcll}
 & & \Rightarrow & E, \neg E, \Delta & \text{(z.B. mit leerem } \Delta) \\
 & \Gamma^\circ, \Delta & \Rightarrow & \Gamma_1^\circ, \Delta & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Gamma_1) \\
 & \Gamma^\circ, \Delta, F & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, \neg\neg F & \\
 & \Gamma^\circ, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, \neg\neg F & \text{(mit } F \equiv \forall z\, Hz) \\
 & \Gamma^\circ, \Delta_1, \neg F,,\ \Gamma^\circ, \Delta_2, \neg G & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta_1, \Delta_2, \neg(F \wedge G) & \\
 & \Gamma^\circ, \Delta, F, G & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, F \wedge G & \\
 & \Gamma^\circ, \Delta, G & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, F \wedge G & \text{(mit } F \equiv \forall z\, Hz, \text{ z.B.)} \\
 & \Gamma^\circ, \Delta, Ft & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, \forall x\, Fx & \\
 & \Gamma^\circ, \Delta & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, \forall x\, Fx & \text{(mit } Ft \equiv \forall z\, Hz), \\
\text{sowie} & \Gamma^\circ, \Delta, Hs & \Rightarrow & \Gamma^\circ, \Delta, Hs & \\
\text{an Stelle von} & \Gamma, Hs & \Rightarrow & \Gamma, \forall z\, Hz. &
\end{array}
$$

Aus (*) erhalten wir 3.5, da wegen $\Gamma^\circ \subseteq \Gamma$ die Regel $\Gamma^\circ, \Delta \Rightarrow \Gamma, \Delta$ zu $\mathcal{W}^-$ gehört. □

3.8* Lemma: Gilt $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma, \forall z\, Hz$ und kommen in $\Gamma, \forall z\, Hz$ keine Variablen frei vor, dann gibt es ein Tupel $s_1, \ldots, s_k$ $(k \geq 0)$ von $\mathcal{L}$-Konstanten s_i mit $\vdash_{\mathcal{W}^-} \Gamma, Hs_1, \ldots, Hs_k$.

Beweis: Für jeden Schluss Γ_i $(i \in I) \Rightarrow \Delta$ von $\mathcal{W}^-$ (mit keiner, einer oder zwei Prämissen Γ_i) und jede Variable x ist der 'Induktionsschritt' $\Gamma_i[x/0]$ $(i \in I) \Rightarrow \Delta[x/0]$ zulässig. ($[x/0]$ sei die Substitution aller freien Vorkommnisse von x durch 0.) Durch Prämisseninduktion erhalten wir daher die Zulässigkeit in $\mathcal{W}^-$ der Regel $\Delta \Rightarrow \Delta[x/0]$. Daraus und aus 3.8 folgt 3.8*. □

Aus 3.5 - 3.8* erhält man sofort:

3.9 Korollar: Ist $\Gamma, \forall z\, Hz$ allpränex und widerspruchsvoll, und kommen in $\Gamma, \forall z\, Hz$ keine Variablen frei vor, dann gibt es ein Tupel $s_1, \ldots, s_k$ von $\mathcal{L}$-Konstanten, für das auch $\Gamma, Hs_1, \ldots, Hs_k$ widerspruchsvoll ist.

§4 Ist ZFC widerspruchsfrei?

ZFC_0 sei das System derjenigen Axiome, die aus den in §2 angeführten Axiomen in geschlossener Skolemform dadurch entstehen, dass man die Zeichen $\emptyset, \mathcal{V}, \mathcal{P}, \{.,.\}, \boldsymbol{f}_i^j$ und $\in$ (in dieser Reihenfolge) durch die Symbole $0, V, P, \pi, f_i^j$ und ε von $\mathcal{L}$ ersetzt. Man erhält also ein Modell von ZFC_0 mit dem Träger $\mathcal{E}$, indem man diese Symbole 'umgekehrt' durch jene Zeichen interpretiert.

Erinnert sei daran, dass zur Signatur von $\mathcal{L}$ außerdem das Konstantensymbol ω, das Prädikatensymbol N und das Funktionensymbol h gehören, die nicht in den Axiomen von ZFC_0 vorkommen. ω ist jedoch ein 'Wert' der Variablen, sodass gilt: $\vdash_{\mathcal{K}} \forall x\, Fx \prec F\omega \prec \exists x\, Fx$.

Für $\mathcal{L}$-Formeln F, G setzen wir $F \to G :\!\!\!= \neg\,(F \wedge \neg\, G)$.
Für $a \in \mathcal{E}$ (d.h. für $\mathcal{E}$-Konstante a) sei $a^+ :\!\!\!= a\{a\}$ ('Nachfolger von a').
Für $\mathcal{L}$-Terme s definieren wir dementsprechend

$$s^+ :\!\!\!= (s \cup \{s\}) \quad \text{mit} \quad (s \cup t) :\!\!\!= V(\pi(s,t)),\ \{s,t\} :\!\!\!= \pi(s,t) \ \text{ und } \ \{s\} :\!\!\!= \{s,s\}$$

und formulieren damit in $\mathcal{L}$ das **Unendlichkeitsaxiom**

$$0\ \varepsilon\ \omega \ \wedge\ \forall x\,(x\ \varepsilon\ \omega \to x^+\ \varepsilon\ \omega).$$

Definitionen: $\mathbb{N}\, a$ bedeute $a \in \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \ldots\}$, d.h. dass a nach den beiden Regeln $\Rightarrow \emptyset$ und $m \Rightarrow m^+$ (mit der Eigenvariablen m) herstellbar ist (vgl. die Regeln von $\mathcal{H}$ im Anhang). (Die Zeichen $\in, \{,\}$ und $\cup$ verwenden wir auch in der Metasprache.)

$\mathcal{N}$ sei die Menge derjenigen $\mathcal{L}$-Konstanten, die nach den Regeln $\Rightarrow 0$ und $\mu \Rightarrow \mu^+$ (mit der Eigenvariablen μ) herstellbar sind.

$\mathcal{N}^c$ sei die Menge derjenigen $\mathcal{L}$-Konstanten, die nicht zu $\mathcal{N}$ gehören.

Die Funktion $\boldsymbol{h}\colon \mathcal{E} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert: Für beliebige $a, b \in \mathcal{E}$ setzen wir

$$\boldsymbol{h}(a) :\!\!\!= \begin{cases} b, & \text{falls} \quad a = b \ \wedge\ \mathbb{N}\, b \\ a, & \text{falls} \quad \neg\, \exists y\, (a = y \ \wedge\ \mathbb{N}\, y). \end{cases}$$

$\mathcal{L}$-Konstante, in denen ω nicht vorkommt, nennen wir $\mathcal{L}-\omega$-Konstante.

I sei die wie folgt rekursiv definierte Interpretation aller $\mathcal{L}-\omega$-Konstanten durch $\mathcal{E}$-Konstante: $I0 :\!\!\!= \emptyset$, $IVs :\!\!\!= \mathcal{V}(Is)$, $IPs :\!\!\!= \mathcal{P}(Is)$, $I\pi(s,t) :\!\!\!= \{Is, It\}$, $Ih(s) :\!\!\!= \boldsymbol{h}(Is)$ und $If_i^j(s_1, \ldots, s_j) :\!\!\!= \boldsymbol{f}_i^j(Is_1, \ldots, Is_j)$ für $\mathcal{L}-\omega$-Konstante $s, t, s_1, \ldots, s_j$. Ferner sei $I\varepsilon :\!\!\!= \in$ (Relation in $\mathcal{E}^2$) und $IN :\!\!\!= \mathbb{N}$, d.h. I erfülle Ns genau dann, wenn $\mathbb{N}\, Is$.

4.1 Lemma: $s \in \mathcal{N}$ genau dann, wenn $\mathbb{N}\, Is$ (für $\mathcal{L}-\omega$-Konstante s).

Die Beweise in beiden Richtungen durch Induktion sind trivial. $\square$.

Definitionen:

$$\mathrm{ZFC}_N :\risingdotseq \mathrm{ZFC}_0 \cup \{N0,\, \forall x\, (Nx \to Nx^+)\} \cup \{\neg\, Nr \mid r \in \mathcal{N}^c\}\}$$

An Stelle des Unendlichkeitsaxioms betrachten wir jetzt die unendlich vielen Axiome $s \,\varepsilon\, \omega$ mit $s \in \mathcal{N}$. Dementsprechend setzen wir

$$\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h} :\risingdotseq \;\; \mathrm{ZFC}_N \cup \{s \,\varepsilon\, \omega \mid s \in \mathcal{N}\} \cup \{\forall x\, (x \,\varepsilon\, \omega \;\to\; Nh(x)),\, \forall x\, h(x) = x\}.$$

4.2 Lemma: $\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Wir nehmen an, $\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$ sei widerspruchsvoll. Dann gäbe es ein (endliches) Tupel $s_1, \ldots, s_k$ mit $s_1 \in \mathcal{N}, \ldots, s_k \in \mathcal{N}$, für das

$$\mathrm{ZFC}_N \cup \{s_1 \,\varepsilon\, \omega, \ldots, s_k \,\varepsilon\, \omega,\, \forall x\, (x \,\varepsilon\, \omega \;\to\; Nh(x)),\, \forall x\, h(x) = x\}$$

widerspruchsvoll ist. Sei $t :\risingdotseq \{s_1, \ldots, s_k, \{\{0\}\}\,\} \cap \{s_1, \ldots, s_k\}$. Da offenbar ω nicht in den Elementen $s_1, \ldots, s_k$ von $\mathcal{N}$ vorkommt, wäre also auch das Axiomensystem

$$(*) \qquad \mathrm{ZFC}_N[t/\omega] \cup \{s_1 \,\varepsilon\, t, \ldots, s_k \,\varepsilon\, t,\, \forall x\, (x \,\varepsilon\, t \to Nh(x)),\, \forall x\, h(x) = x\}$$

widerspruchsvoll. ($\mathrm{ZFC}_N[t/\omega]$ entstehe aus ZFC_N dadurch, dass man in den Axiomen $\neg\, Nr$ mit $r \in \mathcal{N}^c$ überall t für ω substituiert.) In $(*)$ kann man noch die aus ZFC_0 herleitbaren Axiome $s_1 \,\varepsilon\, t, \ldots, s_k \,\varepsilon\, t$ fortlassen. Ferner ist $\mathrm{ZFC}_N[t/\omega] \subseteq \mathrm{ZFC}_N \cap (\mathcal{L}- \omega)$ ($:\risingdotseq$ Menge aller Axiome aus ZFC_N, in denen ω nicht vorkommt). Um dies zu zeigen, betrachten wir irgendein $r \in \mathcal{N}^c$. Kommt ω in r vor, so kommt $\{\{0\}\}$ in $r[t/\omega]$ vor, sodass $r[t/\omega] \in \mathcal{N}^c$, also $\neg\, Nr[t/\omega]$ ein Axiom von $\mathrm{ZFC}_N \cap (\mathcal{L}- \omega)$ ist. Dieses Ergebnis erhalten wir auch dann, wenn ω nicht in r vorkommt. - Daher wäre auch

$$(**) \qquad (\mathrm{ZFC}_N \cap (\mathcal{L}- \omega)) \cup \{\forall x\, (x \,\varepsilon\, t \to Nh(x)),\, \forall x\, h(x) = x\}$$

widerspruchsvoll. Dies ist aber nach folgendem Lemma 4.3 nicht der Fall. Daher ist obige Annahme falsch. $\square$

4.3 Lemma: I erfüllt $(**)$.

Beweis: I erfüllt offenbar $\mathrm{ZFC}_0 \cup \{N0,\, \forall x\, (Nx \to Nx^+)\}$ und nach 4.1 auch $\{\neg\, Nr \mid r \in \mathcal{N}^c\} \cap (\mathcal{L}-\omega)$. Zu zeigen ist noch, dass I auch $\forall x\, (x \,\varepsilon\, t \to Nh(x))$ und $\forall x\, h(x) = x$ erfüllt.

Wegen $s_1 \in \mathcal{N}, \ldots, s_k \in \mathcal{N}$ gilt $\mathbb{N}\, Is_1, \ldots, \mathbb{N}\, Is_k$ nach 4.1. Nach den Definitionen $t :\risingdotseq \{s_1, \ldots, s_k, \{\{0\}\}\,\} \cap \{s_1, \ldots, s_k\}$ und von $\boldsymbol{h}$ gilt also für jede $\mathcal{E}$-Konstante a:

$$a \in It \;\to\; a = Is_1 \vee \ldots \vee a = Is_k \;\to\; \mathbb{N}\, \boldsymbol{h}(a).$$

Offenbar gilt auch $\boldsymbol{h}(a) = a$. I erfüllt also $\forall x\,(x \,\varepsilon\, t \to Nh(x))$ sowie $\forall x\, h(x) = x$. $\square$

4.4 Lemma: $\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h} \cup \{\forall y\,(Ny \to y \,\varepsilon\, \omega)\}$ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Annahme: Dieses Axiomensystem ist widerspruchsvoll. Dann gäbe es eine (endliche) Liste $\Gamma \subseteq \mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$, für die $\Gamma, \forall y\,(Ny \to y \,\varepsilon\, \omega)$ widerspruchsvoll ist. Nach 3.9 gäbe es ferner ein $\mathcal{L}$-Konstanten-Tupel $s_1, \dots, s_k$, für das

$$\Gamma, (Ns_1 \to s_1 \,\varepsilon\, \omega), \dots, (Ns_k \to s_k \,\varepsilon\, \omega)$$

widerspruchsvoll ist. Für $s_i \in \mathcal{N}$ sei $F_i :\rightleftharpoons s_i \,\varepsilon\, \omega$, also $F_i \in \mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$. Für $s_i \in \mathcal{N}^c$ sei $F_i :\rightleftharpoons \neg Ns_i$, also $F_i \in \mathrm{ZFC}_N \subseteq \mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$. Wegen $\vdash_{\mathcal{K}} F_i \prec (Ns_i \to s_i \,\varepsilon\, \omega)$ $(i = 1, \dots, k)$ wäre $\Gamma, F_1, \dots, F_k$ widerspruchsvoll. Wegen $\Gamma, F_1, \dots, F_k \subseteq \mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$ wäre also $\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h}$ widerspruchsvoll, was nach 4.2 nicht der Fall ist. Also ist die Annahme dieses Beweises falsch. $\square$

Aus $\mathrm{ZFC}_{N,\omega,h} \cup \{\forall y\,(Ny \to y \,\varepsilon\, \omega)\}$ sind in $\mathcal{K}$ herleitbar: $\prec 0 \,\varepsilon\, \omega$ sowie

$$\prec \forall x\,(x \,\varepsilon\, \omega \;\to\; Nh(x) \;\to\; Nh(x)^+ \;\to\; h(x)^+ \,\varepsilon\, \omega \;\to\; x^+ \varepsilon\, \omega).$$

Nach 4.4 ist also erst recht folgendes Axiomensystem (in dem die Symbole N, h nicht vorkommen) widerspruchsfrei:

$$\mathrm{ZFC}_0 \cup \{0 \,\varepsilon\, \omega \;\wedge\; \forall x\,(x \,\varepsilon\, \omega \to x^+ \,\varepsilon\, \omega)\}.$$

Infragestellung: Aus dem sog. Zweiten Unvollständigkeitssatz von Gödel folgt insbesondere: Falls ZFC widerspruchsfrei ist, dann ist aus ZFC keine Kodierung (bekannter Art) der Aussage „ZFC ist widerspruchsfrei“ herleitbar. D.h., falls eine solche Kodierung aus ZFC herleitbar ist, dann ist ZFC widerspruchsvoll. Somit stellt sich die Frage, ob der hier angegebene Beweis für die Widerspruchsfreiheit von ZFC in entsprechend kodierter Form als eine Herleitung aus ZFC darstellbar ist. Wäre sie zu bejahen, so wäre ZFC also widerspruchsvoll. Zu diesem Beweis gehört im Prinzip die gesamte vorliegende Arbeit, also insbesondere der im Anhang angeführte Beweis des Schnittsatzes für den Halbformalismus $\mathcal{H}$. Dieser Beweis ist jedoch nicht rein formal. Eine Beantwortung der gestellten Frage bedarf daher m.E. weiterer Untersuchungen.

ANHANG: Ein halbformales System für die Lehre von endlichen Mengen

Die in §1 etwas informell durchgeführten Untersuchungen wollen wir nun auf eine strengere Grundlage stellen. Zu diesem Zweck werden wir einen Halbformalismus $\mathcal{H}$ aufstellen, in dem alle in §1 erhaltenen Resultate herleitbar sind.

In §1 hatten wir $a \cup b$, $\bigcup_{y \in a} c(y)$, $\mathcal{V}(a)$, $a \cap b$ und $\mathcal{P}(a)$ rekursiv definiert, und zwar mit Hilfe von Gleichungen der Form $\beta :\rightleftharpoons \alpha$. Daher erweitern wir die Sprache über $\mathcal{E}$-Mengen derart, dass ihr auch diese rekursiv definierten Konstanten angehören.

$\mathcal{E}'$-Terme seien die nach folgenden Regeln herstellbaren Schreibfiguren: $\emptyset$ sowie jede Variable x seien $\mathcal{E}'$-Terme. Sind s und t $\mathcal{E}'$-Terme, so seien dies auch $s\{t\}$, $s \cup t$, $\bigcup_{y \in s} t$, $\mathcal{V}(s)$, $s \cap t$ und $\mathcal{P}(s)$. Weitere $\mathcal{E}'$-Terme soll es nicht geben. $\mathcal{E}'$-Konstante seien geschlossene $\mathcal{E}'$-Terme. Atomare $\mathcal{E}'$-Formeln seien $s \subseteq t$ und $\mathbb{N}\, s$ mit $\mathcal{E}'$-Termen s, t. Aus ihnen werden die übrigen $\mathcal{E}'$-Formeln wie üblich mit Hilfe von $\neg, \wedge$ und $\forall$ aufgebaut. $\mathcal{E}'$-Aussagen seien geschlossene $\mathcal{E}'$-Formeln. In diesem Anhang sagen wir jedoch einfach "Formel" statt "$\mathcal{E}'$-Formel" und "Aussage" statt "$\mathcal{E}'$-Aussage".

Unter $\mathcal{E}$-Konstanten verstehen wir (wie bisher) Konstante, die nach den Regeln $\Rightarrow \emptyset$ und $a, b \Rightarrow a\{b\}$ allein herstellbar sind. (Alle $\mathcal{E}$-Konstanten sind also $\mathcal{E}'$-Konstante.)

Als Metavariable verwenden wir nun: a, b, c, d für $\mathcal{E}$-Konstante; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für $\mathcal{E}'$-Konstante; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ für Aussagen; A für atomare Aussagen; $\mathcal{A}x$ für Formeln, in denen höchstens die Variable x frei vorkommt; und $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Sigma$ für Listen $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ von Aussagen $\mathcal{C}_i$ mit $n \geq 0$ (also auch für die 'leere Liste'). Für $n \geq 2$ sind diese Listen informell zu lesen als "$\mathcal{C}_1$ oder ... oder $\mathcal{C}_n$" im klassischen Sinne, d.h. als $\neg(\neg \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \neg \mathcal{C}_n)$. -
Ferner verwenden wir die Abkürzungen

$$\alpha \nsubseteq \beta \;:\!\!\!= \neg\, \alpha \subseteq \beta; \quad \alpha \notin \beta \;:\!\!\!= \neg\, \alpha \in \beta; \quad \alpha \neq \beta \;:\!\!\!= \neg\, \alpha = \beta.$$

Jede $\mathcal{E}'$-Konstante α 'repräsentiert' genau eine $\mathcal{E}$-Konstante, die wir das Redukt von α nennen. a sei das Redukt von α genau dann, wenn die Figur $a \mathcal{R} \alpha$ nach den folgenden Regeln herleitbar ist:

$$\begin{array}{lrcll}
 & & \Rightarrow & \emptyset \mathcal{R} \emptyset & \\
 & a \mathcal{R} \alpha ,, \; b \mathcal{R} \beta & \Rightarrow & a\{b\} \mathcal{R} \alpha\{\beta\} & \\
 & a \mathcal{R} \alpha & \Rightarrow & a \mathcal{R} \beta, & \text{falls } \beta :\!\!\!= \alpha \text{ in §1 gesetzt ist,} \\
\text{z.B.} & a \mathcal{R} \alpha & \Rightarrow & a \mathcal{R} (\alpha \cup \emptyset) & \\
 & a \mathcal{R} (\alpha \cup \beta)\{\gamma\} & \Rightarrow & a \mathcal{R} (\alpha \cup \beta\{\gamma\}). &
\end{array}$$

Im folgenden Beispiel wird die Fallunterscheidung in unserer Definitition des Durchschnitts berücksichtigt:

$$\begin{array}{rcl}
d \mathcal{R} \emptyset & \Rightarrow & d \mathcal{R} (\alpha \cap \emptyset) \\
d \mathcal{R} (\alpha \cap \beta)\{\gamma\} ,, \; a \mathcal{R} \alpha ,, \; c \mathcal{R} \gamma ,, \; c \in a & \Rightarrow & d \mathcal{R} (\alpha \cap \beta\{\gamma\}) \\
d \mathcal{R} (\alpha \cap \beta) ,, \; a \mathcal{R} \alpha ,, \; c \mathcal{R} \gamma ,, \; c \notin a & \Rightarrow & d \mathcal{R} (\alpha \cap \beta\{\gamma\}).
\end{array}$$

Dabei sind die Prämissen $c \in a$, $c \notin a$ im folgenden Halbformalismus $\mathcal{H}$ herzuleiten.

Wir bezeichnen das (eindeutig bestimmte) Redukt von γ mit γ°.
Aus einer atomaren Aussage A entstehe A° dadurch, dass man alle Vorkommnisse γ von $\mathcal{E}'$-Konstanten in A durch deren Redukte γ° ersetzt.

Der Halbformalismus $\mathcal{H}$ habe folgende Schlussregeln:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c & \\
\Gamma, b \in c, b = d & \Rightarrow & \Gamma, b \in c\{d\} & \\
\Gamma, a \subseteq c\,,,\ \Gamma, b \in c & \Rightarrow & \Gamma, a\{b\} \subseteq c & (\text{falls } \ a \not\equiv \emptyset) \\
 & \Rightarrow & b \notin \emptyset & \\
\Gamma, b \notin c\,,,\ \Gamma, b \neq d & \Rightarrow & \Gamma, b \notin c\{d\} & \\
\Gamma, a \not\subseteq c, b \notin c & \Rightarrow & \Gamma, a\{b\} \not\subseteq c & (\text{falls } \ a \not\equiv \emptyset) \\
 & \Rightarrow & \mathbb{N}\,\emptyset & \\
\Gamma, \mathbb{N}\,a & \Rightarrow & \Gamma, \mathbb{N}\,a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\,\mathbb{N}\,a\{b\} & (\text{falls } a \not\equiv b) \\
\Gamma, \neg\,\mathbb{N}\,a & \Rightarrow & \Gamma, \neg\,\mathbb{N}\,a\{a\} & \\
\Gamma, A^{\circ} & \Rightarrow & \Gamma, A & (\text{für atomare } A \not\equiv A^{\circ}) \\
\Gamma, \neg\,A^{\circ} & \Rightarrow & \Gamma, \neg\,A & (\text{für atomare } A \not\equiv A^{\circ}) \\
\Gamma & \Rightarrow & \Delta & (\text{falls } \ \Gamma \subseteq \Delta) \\
\Gamma, \mathcal{A} & \Rightarrow & \Gamma, \neg\neg\,\mathcal{A} & \\
\Gamma, \mathcal{A}\,,,\ \Gamma, \mathcal{B} & \Rightarrow & \Gamma, (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \\
\Gamma, \neg\,\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{B} & \Rightarrow & \Gamma, \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \\
\text{`für alle } c\text{' } \Gamma, \mathcal{A}c & \Rightarrow & \Gamma, \forall x\, \mathcal{A}x & (\text{s.u.}) \\
\Gamma, \neg\,\mathcal{A}c & \Rightarrow & \Gamma, \neg\,\forall x\, \mathcal{A}x &
\end{array}$$

Jeder Einzelfall der mit "für alle c" beginnenden Regel habe unendlich viele Prämissen, nämlich (bei gegebener Liste $\Gamma, \mathcal{A}x$) für jede $\mathcal{E}$-Konstante c die Aussagenliste $\Gamma, \mathcal{A}c$. Da man nicht alle diese Listen herleiten kann, erlaube jeder Einzelfall dieser Regel, seine Konklusion $\Gamma, \forall x\, \mathcal{A}x$ herzuleiten, nachdem man ein effektives Verfahren angegeben hat, das für jedes c eine Herleitung von $\Gamma, \mathcal{A}c$ anzugeben vorschreibt. Diese Regel heiße daher halbformal.

Anmerkungen: (1) Die in den Zeilen 3 bzw. 6 angeführte Bedingung "falls $a \not\equiv \emptyset$" hat zur Folge, dass die Liste $\Gamma, a\{b\} \subseteq c$ bzw. $\Gamma, a\{b\} \not\subseteq c$ in keinem anderen Regeleinzelfall als Konklusion vorkommt. Analoges gilt für die Zeilen (9), (11), (12).
(2) Die Regeln für den 'Prädikator' $\mathbb{N}$ sind den Erfordernissen des Widerspruchsfreiheits-Beweises in §4 angepasst. (Herleitbar ist z.B. $\mathbb{N}\,\emptyset\{\emptyset\}\{\emptyset\{\emptyset\}\}$, aber nicht $\mathbb{N}\,\emptyset\{\emptyset\{\emptyset\}\}\{\emptyset\}$.)

$\vdash \Gamma$ bedeute, dass Γ in $\mathcal{H}$ herleitbar ist. Einzelfälle von Schlussregeln nennen wir kurz Schlüsse. Die Worte 'herleitbar' und 'zulässig' beziehen sich von nun an auf $\mathcal{H}$.

Aussagen der Form $b \in \emptyset$ kommen nicht als Konklusion eines Schlusses von $\mathcal{H}$ vor, sind also nicht herleitbar. Daher ist $\mathcal{H}$ konsistent. Die leere Liste ist ebenfalls nicht herleitbar. Nach dem noch anzuführenden Schnittsatz ist insbesondere die Regel

$$\Gamma, \mathcal{A}\,,,\ \Delta, \neg\,\mathcal{A} \Rightarrow \Gamma, \Delta$$

zulässig, und zwar auch für leere Listen Γ, Δ. Daher sind für keine Aussage $\mathcal{A}$ sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\neg\,\mathcal{A}$ herleitbar, d.h. $\mathcal{H}$ ist 'widerspruchsfrei'.

5.1 Lemma: Für alle atomare Aussagen A gilt $\vdash A$ oder $\vdash \neg\,A$.
(Dabei und im Folgenden sei "oder" im effektiven Sinne zu verstehen.)

Beweis durch Induktion über die Anzahl der Vorkommnisse der Klammern '{', '}' in A°: Zulässig sind die Regeln:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq c. & \\
 & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq \emptyset & \\
\{b\} \subseteq c & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\
b \subseteq d \,,,\; d \subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \subseteq c\{d\} & \\
\{b\} \not\subseteq c \,,,\; b \not\subseteq d & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\
\{b\} \not\subseteq c \,,,\; d \not\subseteq b & \Rightarrow & \{b\} \not\subseteq c\{d\} & \\
a \subseteq c \,,,\; \{b\} \subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \subseteq c & \\
a \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & \\
\{b\} \not\subseteq c & \Rightarrow & a\{b\} \not\subseteq c & \\
 & \Rightarrow & \mathbb{N}\,\emptyset & \\
\mathbb{N}\,a & \Rightarrow & \mathbb{N}\,a\{a\} & \\
 & \Rightarrow & \neg\,\mathbb{N}\,a\{b\} & \qquad \text{(falls } a \not\equiv b\text{)} \\
\neg\,\mathbb{N}\,a & \Rightarrow & \neg\,\mathbb{N}\,a\{a\} &
\end{array}$$

Induktionsannahme: Für alle atomaren Aussagen B, für die in B° die Klammern '{', '}' seltener als in A° vorkommen, gilt $\vdash B^\circ$ oder $\vdash \neg\, B^\circ$. Aus ihr folgt (nach den angegebenen Regeln) $\vdash A^\circ$ oder $\vdash \neg\, A^\circ$ - und somit $\vdash A$ oder $\vdash \neg\, A$. □

5.2 Lemma: Für alle Aussagen $\mathcal{A}$, in denen keine (All-)Quantoren vorkommen, gilt $\vdash \mathcal{A}$ oder $\vdash \neg\,\mathcal{A}$.

Beweis: Dies ergibt sich aus 5.1 und der Zulässigkeit folgender Regeln durch Induktion nach der Anzahl der Vorkommnisse von Junktoren in $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & \Rightarrow & \neg\neg\,\mathcal{A} \\
\neg\,\mathcal{A} & \Rightarrow & \neg\,\mathcal{A} \\
\mathcal{A} \,,,\; \mathcal{B} & \Rightarrow & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \\
\neg\,\mathcal{A} & \Rightarrow & \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \\
\neg\,\mathcal{A} & \Rightarrow & \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}).\ \square
\end{array}$$

5.3 Korollar: Für alle Aussagen $\mathcal{A}$ gilt $\vdash \mathcal{A}, \neg\,\mathcal{A}$.

Beweis: Für elementare Aussagen A folgt $\vdash A, \neg\, A$ aus 5.1 nach der Regel: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (falls $\Gamma \subseteq \Delta$). Ferner sind folgende Regeln zulässig:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{A} & \Rightarrow & \neg\,\mathcal{A}, \neg\neg\,\mathcal{A} \\
\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{A} \,,,\; \mathcal{B}, \neg\,\mathcal{B} & \Rightarrow & \mathcal{A}, \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \,,,\; \mathcal{B}, \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \;\Rightarrow\; (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}), \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \\
\text{'für alle } c\text{'}\ \mathcal{A}c, \neg\,\mathcal{A}c & \Rightarrow & \text{'für alle } c\text{'}\ \mathcal{A}c, \neg\,\forall x\,\mathcal{A}x \;\Rightarrow\; \forall x\,\mathcal{A}x, \neg\,\forall x\,\mathcal{A}x.
\end{array}$$

(In den linken Teilen den letzten beiden Zeilen haben wir zwei bzw. unendlich viele Regeln zusammengefasst.) Somit ergibt sich 5.3 durch Induktion nach dem Formelaufbau. □

Definitionen: Auch für $\mathcal{E}'$-Formeln $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sei gesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{F} \vee \mathcal{G} & :\rightleftharpoons & \neg\,(\neg\,\mathcal{F} \wedge \neg\,\mathcal{G}) \\
\exists x\,\mathcal{F} & :\rightleftharpoons & \neg\,\forall x\,\neg\,\mathcal{F} \\
\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} & :\rightleftharpoons & \neg\,(\mathcal{F} \wedge \neg\,\mathcal{G}).
\end{array}$$

5.4 Lemma: Zulässig sind folgende Regeln (z.T. 'Umkehrungen' von Regeln von $\mathcal{H}$):
(a) $\Gamma, \neg\neg\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathcal{A}$
(b) $\Gamma, (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathcal{A}\,,, \;\Gamma, \mathcal{B}$ (2 Regeln)
(c) $\Gamma, \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \;\Rightarrow\; \Gamma, \neg\,\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{B}$
(d) $\Gamma, \forall x\, \mathcal{A}x \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathcal{A}c$
(e) $\Gamma, b \in c\{d\} \;\Rightarrow\; \Gamma, b \in c, b = d$
(f) $\Gamma, a\{b\} \subseteq c \;\Rightarrow\; \Gamma, a \subseteq c\,,, \;\Gamma, b \in c$
(g) $\Gamma, b \in \emptyset \;\Rightarrow\; \Gamma$
(h) $\Gamma, \mathrm{I\!N}\, a\{a\} \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathrm{I\!N}\, a$
(i) $\Gamma, \mathrm{I\!N}\, a\{b\} \;\Rightarrow\; \Gamma$ (falls $a \not\equiv b$)
(j) $\Gamma, A \;\Rightarrow\; \Gamma, A^{\circ}$ (für atomare A)
(k) $\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \Gamma, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
(l) $\Gamma, \mathcal{A}c \;\Rightarrow\; \Gamma, \exists x\, \mathcal{A}x$
(m) $\Gamma, \neg\,\mathcal{A}\,,, \;\Gamma, \neg\,\mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \Gamma, \neg\,(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ (3 Regeln)
(n) 'für alle c' $\Gamma, \neg\,\mathcal{A}c \;\Leftrightarrow\; \Gamma, \neg\,\exists x\, \mathcal{A}x$.

Anmerkung: (1) Nach dem folgenden Lemma 5.5 sind auch entsprechende Regeln für Negate der in (d), (e), (f), (h), (j) hinter dem linken Γ angeführten Aussagen zulässig. (2) Wegen der Zulässigkeit von (c), (a) und dem schon erwähnten Schnittsatz sind auch die Regeln $\mathcal{A}\,,, \;\mathcal{A} \to \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A}\,,, \;\neg\,\mathcal{A}, \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}$ und somit der **modus ponens** zulässig.

Definition: $\Delta - \mathcal{A}$ entstehe aus Δ durch Fortlassen aller Glieder von Δ, die $\equiv \mathcal{A}$ sind.

Um die Beweise von (a) – (j) (außer (g) und (i)) zusammenzufassen, beweisen wir:

5.5 Lemma: $\mathcal{A}$ habe nicht die Gestalt $\neg\,\forall x\, \mathcal{A}x$. Für jeden Schluss von $\mathcal{H}$ der Gestalt

$$\Gamma, \Lambda_i \; (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathcal{A}$$

(mit einer oder mehreren Prämissen Γ, Λ_i), der ein Einzelfall einer in $\mathcal{H}$ außerhalb der Zeile "$\Gamma \Rightarrow \Delta$ (falls $\Gamma \subseteq \Delta$)" angeführten Regel ist, sind folgende Schlüsse zulässig:

$$\Gamma, \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Gamma, \Lambda_i \quad (\text{für } \; i \in I).$$

Beweis: $\Gamma, \Lambda_i \; (i \in I) \;\Rightarrow\; \Gamma, \mathcal{A}$ sei ein Schluss von $\mathcal{H}$. Da auch $(\Gamma - \mathcal{A}), \Lambda_i \;\Rightarrow\; \Gamma, \Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ und $\Gamma - \mathcal{A} \equiv (\Gamma, \mathcal{A}) - \mathcal{A}$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\Gamma, \mathcal{A} \;\Rightarrow\; ((\Gamma, \mathcal{A}) - \mathcal{A}), \Lambda_i \quad (\text{für } \; i \in I)$$

zulässig ist. Wir tun dies durch Prämisseninduktion, indem wir zeigen, dass für jeden Schluss $\Delta_j \; (j \in J) \Rightarrow \Delta$ von $\mathcal{H}$ (mit keiner, einer oder mehreren Prämissen Δ_j) und $i \in I$ folgender Induktionsschritt zulässig ist:

$$(\Delta_j - \mathcal{A}), \Lambda_i \; (j \in J) \Rightarrow (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i.$$

Zu $\Delta_1 \Rightarrow \Delta$ mit $\Delta_1 \subseteq \Delta$: Wegen $(\Delta_1 - \mathcal{A}), \Lambda_i \subseteq (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i$ ist auch $(\Delta_1 - \mathcal{A}), \Lambda_i \Rightarrow (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i$ ein Schluss von $\mathcal{H}$.

Zu Schlüssen von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\Delta, \Sigma_j \ (j \in J) \Rightarrow \Delta, \mathcal{B}$ (die Einzelfälle einer in $\mathcal{H}$ außerhalb der Zeile "$\Gamma \Rightarrow \Delta$ (falls $\Gamma \subseteq \Delta$)" angeführten Regel sind): Für $\mathcal{B} \not\equiv \mathcal{A}$ sind wegen $((\Delta, \Sigma_j) - \mathcal{A}), \Lambda_i \subseteq (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i, \Sigma_j$ folgende Schlüsse zulässig:

$$((\Delta, \Sigma_j) - \mathcal{A}), \Lambda_i \ (j \in J) \ \Rightarrow \ (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i, \Sigma_j \ (j \in J) \ \Rightarrow \ (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i, \mathcal{B} \ \Rightarrow \ ((\Delta, \mathcal{B}) - \mathcal{A}), \Lambda_i.$$

Für $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $i \in I$ ist auch $I = J$ und $\Sigma_i \equiv \Lambda_i$ (da nach Voraussetzung $\mathcal{A}$ nicht die Gestalt $\neg \forall x \, \mathcal{A}x$ hat), sodass folgende Schlüsse zulässig sind:

$$((\Delta, \Sigma_j) - \mathcal{A}), \Lambda_i \ (j \in I) \ \Rightarrow \ ((\Delta, \Lambda_i) - \mathcal{A}), \Lambda_i \ \Rightarrow \ (\Delta - \mathcal{A}), \Lambda_i \ \Rightarrow \ ((\Delta, \mathcal{A}) - \mathcal{A}), \Lambda_i. \ \square$$

Beweis von (g): Für $\Delta :\equiv \Gamma, b \in \emptyset$ gilt $\Delta - b \in \emptyset \subseteq \Gamma$, sodass $\Delta - b \in \emptyset \Rightarrow \Gamma$ zulässig ist. Es genügt also, die Zulässigkeit von $\Delta \Rightarrow \Delta - b \in \emptyset$ zu zeigen. Dies folgt durch Prämisseninduktion daraus, dass für jeden Schluss $\Sigma_i \ (i \in I) \Rightarrow \Sigma$ von $\mathcal{H}$ (mit keiner, einer oder mehreren Prämissen Σ_i) der Induktionsschritt $\Sigma_i - b \in \emptyset \ (i \in I) \Rightarrow \Sigma - b \in \emptyset$ zulässig ist. - Beweis von (i): analog. $\square$

Beweise zu (k) - (n): Folgende Regeln sind zulässig:

Zu (k): $\Gamma, \mathcal{A}, \mathcal{B} \Leftrightarrow_{(a)} \Gamma, \neg\neg \mathcal{A}, \neg\neg \mathcal{B} \Leftrightarrow_{(c)} \Gamma, \neg(\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}) \ \Leftrightarrow \ \Gamma, (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.

Zu (l): $\Gamma, \mathcal{A}c \ \Rightarrow \ \Gamma, \neg\neg \mathcal{A}c \ \Rightarrow \ \Gamma, \neg \forall x \neg \mathcal{A}x \ \Rightarrow \ \Gamma, \exists x \, \mathcal{A}x$.

Zu (m): $\Gamma, \neg \mathcal{A} \,,, \ \Gamma, \neg \mathcal{B} \ \Leftrightarrow \ \Gamma, (\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}) \ \Leftrightarrow \ \Gamma, \neg\neg(\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}) \ \Leftrightarrow \ \Gamma, \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.

Zu (n): 'Für alle c' $\Gamma, \neg \mathcal{A}c \ \Leftrightarrow \ \Gamma, \forall x \neg \mathcal{A}x \ \Leftrightarrow \ \Gamma, \neg\neg \forall x \neg \mathcal{A}x \ \Leftrightarrow \ \Gamma, \neg \exists x \, \mathcal{A}x$. $\square$

5.6 Schnittsatz: Zulässig ist die 'Schnittregel'

$$\Gamma, \mathcal{C} \,,, \ \Delta \ \Rightarrow \ \Gamma, (\Delta - \neg \mathcal{C}).$$

Beweis: Zur Induktion über den Formelaufbau verwenden wir die Induktionsannahme:

IA: Für alle Aussagen $\mathcal{A}$ gilt: Wenn in $\mathcal{A}$ die Symbole $\neg, \wedge, \forall$ insgesamt seltener als in $\mathcal{C}$ vorkommen oder ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^\circ$ und $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}^\circ$ atomar sind und in $\mathcal{A}$ die Klammern $\{,\}$ seltener als in $\mathcal{C}$ vorkommen) oder ($\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ atomar sind und $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}^\circ \not\equiv \mathcal{C}$ gilt), dann ist $\Gamma, \mathcal{A} \,,, \ \Delta \ \Rightarrow \ \Gamma, (\Delta - \neg \mathcal{A})$ für alle Γ, Δ zulässig.

(Beachte: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^\circ$ gilt genau dann, wenn $\mathcal{A}$ nur $\mathcal{E}$-Konstante vorkommen.)

Falls $\mathcal{C}$ ein Negat ist, $\mathcal{C} \equiv \neg \mathcal{A}$, sind - wegen $\Delta \subseteq (\Delta - \neg\neg \mathcal{A}), \neg\neg \mathcal{A}$ und $(\Gamma, \neg \mathcal{A}) - \neg \mathcal{A} \subseteq \Gamma$ - folgende Regeln zulässig:

$$\begin{array}{rll} \Gamma, \neg \mathcal{A} \,,, \ \Delta & \Rightarrow & (\Delta - \neg\neg \mathcal{A}), \neg\neg \mathcal{A} \,,, \ \Gamma, \neg \mathcal{A} \\ & \Rightarrow_{(a)} & (\Delta - \neg\neg \mathcal{A}), \mathcal{A} \,,, \ \Gamma, \neg \mathcal{A} \\ & \Rightarrow_{IA} & (\Delta - \neg\neg \mathcal{A}), ((\Gamma, \neg \mathcal{A}) - \neg \mathcal{A}) \\ & \Rightarrow & \Gamma, (\Delta - \neg\neg \mathcal{A}). \end{array}$$

Von nun an machen wir folgende beiden Voraussetzungen:
V1: $\mathcal{C}$ sei kein Negat.
V2: $\vdash \Gamma, \mathcal{C}$.

Wir haben zu zeigen, dass $\Delta \Rightarrow \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})$ für beliebige Δ zulässig ist. Dazu zeigen wir, dass für jeden Schluss $\Delta_i\ (i \in I) \Rightarrow \Delta$ von $\mathcal{H}$ auch der 'Induktionsschritt' $\Gamma, (\Delta_i - \neg\,\mathcal{C})\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})$ zulässig ist.

Für jeden Schluss der Gestalt $\Delta_1 \Rightarrow \Delta$ mit $\Delta_1 \subseteq \Delta$ ist auch $\Delta_1 - \neg\,\mathcal{C} \subseteq \Delta - \neg\,\mathcal{C}$, sodass der Induktionsschritt $\Gamma, (\Delta_1 - \neg\,\mathcal{C}) \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})$ ein Schluss von $\mathcal{H}$ ist.

Für Schlüsse von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\bullet\ \Delta, \Lambda_i\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Delta, \mathcal{D}$ lautet der Induktionsschritt $\Gamma, ((\Delta, \Lambda_i) - \neg\,\mathcal{C})\ (i \in I) \Rightarrow \Gamma, ((\Delta, \mathcal{D}) - \neg\,\mathcal{C})$. Wegen $(\Delta, \Lambda_i) - \neg\,\mathcal{C} \subseteq (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \Lambda_i$ ist der Schluss $\Gamma, ((\Delta, \Lambda_i) - \neg\,\mathcal{C}) \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \Lambda_i$ zulässig. Daher genügt es, die Zulässigkeit von $\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \Lambda_i\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Gamma, ((\Delta, \mathcal{D}) - \neg\,\mathcal{C})$ zu zeigen.

Für $\mathcal{D} \not\equiv \neg\,\mathcal{C}$ folgt dies aus der Zulässigkeit der Schlüsse

$$\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \Lambda_i\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \mathcal{D} \ \Rightarrow\ \Gamma, ((\Delta, \mathcal{D}) - \neg\,\mathcal{C}).$$

Somit brauchen wir die Zulässigkeit des Induktionsschrittes nur noch für $\mathcal{D} \equiv \neg\,\mathcal{C}$ zu beweisen. Wegen $\Delta - \neg\,\mathcal{C} \subseteq (\Delta, \neg\,\mathcal{C}) - \neg\,\mathcal{C}$ ist $\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}) \Rightarrow \Gamma, ((\Delta, \neg\,\mathcal{C}) - \neg\,\mathcal{C})$ zulässig. Daher brauchen wir nur noch zu zeigen, dass folgender Schluss zulässig ist:

$$\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \Lambda_i\ (i \in I) \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}).$$

Zu $\bullet\ \ \Delta, \mathcal{A} \Rightarrow \Delta, \neg\neg\,\mathcal{A}$. Den Fall $\mathcal{C} \equiv \neg\,\mathcal{A}$ haben wir schon behandelt.

Zu $\bullet\ \ \Delta, \neg\,\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{B} \Rightarrow \Delta, \neg\,(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ mit $\mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$: Wegen $\vdash \Gamma, (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ gilt nach (b) auch $\vdash \Gamma, \mathcal{B}$ und $\vdash \Gamma, \mathcal{A}$; also sind zulässig:

$$\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \neg\,\mathcal{A}, \neg\,\mathcal{B} \ \Rightarrow_{IA}\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \neg\,\mathcal{A} \ \Rightarrow_{IA}\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}).$$

Zu $\bullet\ \ \Delta, \neg\,\mathcal{A}c \Rightarrow \Delta, \neg\,\forall x\, \mathcal{A}x$ mit $\mathcal{C} \equiv \forall x\, \mathcal{A}x$: Wegen $\vdash \Gamma, \forall x\, \mathcal{A}x$ gilt nach (d) auch $\vdash \Gamma, \mathcal{A}c$. Zulässig ist also: $\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), \neg\,\mathcal{A}c \Rightarrow_{IA} \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})$.

Zu $\bullet\ \ \Delta, b \notin c\,,,\ \Delta, b \neq d \Rightarrow \Delta, b \notin c\{d\}$ mit $\mathcal{C} \equiv b \in c\{d\}$: Wegen $\vdash \Gamma, b \in c\{d\}$ gilt nach (e) $\vdash \Gamma, b \in c, b = d$. Ferner gilt z.B. $((\Delta - \neg\,\mathcal{C}), b \notin c) - b \notin c \subseteq \Delta - \neg\,\mathcal{C}$, und $b = d$ ist definiert als $b \subseteq d\ \wedge\ d \subseteq b$. Zulässig sind also:

$$\begin{array}{ll}
 & \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), b \notin c\,,,\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), b \neq d \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma, b = d, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})\,,,\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), b \neq d \qquad (\text{da } \ \vdash \Gamma, b = d, b \in c) \\
\Rightarrow_{(b),(c)} & \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), b \subseteq d\,,,\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), d \subseteq b\,,,\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), d \not\subseteq b, b \not\subseteq d \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), d \not\subseteq b\,,,\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), d \subseteq b \\
\Rightarrow_{IA} & \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C})
\end{array}$$

Zu $\bullet\ \ \Delta, a \not\subseteq c, b \notin c \Rightarrow \Delta, a\{b\} \not\subseteq c$ mit $\mathcal{C} \equiv a\{b\} \subseteq c$ und $a \not\equiv \emptyset$: Wegen $\Gamma, a\{b\} \subseteq c$ gilt nach (f) auch $\Gamma, b \in c$ und $\Gamma, a \subseteq c$. Daher sind nach IA zulässig:

$$\Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), a \not\subseteq c, b \notin c \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}), a \not\subseteq c \ \Rightarrow\ \Gamma, (\Delta - \neg\,\mathcal{C}).$$

Zu • $\Rightarrow b \notin \emptyset$ mit $\mathcal{C} \equiv b \in \emptyset$: Hierbei ist Δ leer. Nach V1 gilt $\vdash \Gamma, b \in \emptyset$, also nach (g) $\vdash \Gamma$, d.i. $\vdash \Gamma, (\Delta - \neg \mathcal{C})$.

Zu • $\Delta, \neg\, \mathbb{N}\, a \Rightarrow \Delta, \neg\, \mathbb{N}\, a\{a\}$ mit $\mathcal{C} \equiv \mathbb{N}\, a\{a\}$: Wegen $\vdash \Gamma, \mathbb{N}\, a\{a\}$ gilt nach (h) auch $\vdash \Gamma, \mathbb{N}\, a$. Zulässig ist nach IA also $\Gamma, (\Delta - \neg\, \mathbb{N}\, a\{a\}), \neg\, \mathbb{N}\, a \Rightarrow \Gamma, (\Delta - \neg\, \mathbb{N}\, a\{a\})$.

Zu • $\Rightarrow \neg\, \mathbb{N}\, a\{b\}$ mit $a \not\equiv b$ und $\mathcal{C} \equiv \mathbb{N}\, a\{b\}$. Δ ist leer. Wegen $\vdash \Gamma, \mathbb{N}\, a\{b\}$ gilt nach (i) auch $\vdash \Gamma$, d.h. $\vdash \Gamma, (\Delta - \neg\, \mathbb{N}\, a\{b\})$.

Zu • $\Delta, \neg\, A^\circ \Rightarrow \Delta, \neg\, A$ für atomare A: Wegen $\vdash \Gamma, A$ gilt nach (j) auch $\vdash \Gamma, A^\circ$. Zulässig ist nach IA somit $\Gamma, (\Delta - \neg\, A), \neg\, A^\circ \Rightarrow \Gamma, (\Delta - \neg\, A)$. □

Zulässig sind z.B.

$$\Gamma, \beta \in \gamma, \beta = \delta \;\Rightarrow\; \Gamma, \beta^\circ \in \gamma^\circ, \beta^\circ = \delta^\circ \;\Rightarrow\; \Gamma, \beta^\circ \in \gamma^\circ\{\delta^\circ\} \;\Rightarrow\; \Gamma, \beta \in \gamma\{\delta\}.$$

Ebenso erweisen sich folgende Regeln (mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ statt a, b, c, d in $\mathcal{H}$) als zulässig:

$$\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \emptyset \subseteq \gamma & \\
\Gamma, \beta \in \gamma, \beta = \delta & \Rightarrow & \Gamma, \beta \in \gamma\{\delta\} & \\
\Gamma, \alpha \subseteq \gamma \,;\, \Gamma, \beta \in \gamma & \Rightarrow & \Gamma, \alpha\{\beta\} \subseteq \gamma & (\text{für } \alpha \not\equiv \emptyset) \\
 & \Rightarrow & \beta \notin \emptyset & \\
\Gamma, \beta \notin \gamma \,;\, \Gamma, \beta \neq \delta & \Rightarrow & \Gamma, \beta \notin \gamma\{\delta\} & \\
\Gamma, \alpha \not\subseteq \gamma, \beta \notin \gamma & \Rightarrow & \Gamma, \alpha\{\beta\} \not\subseteq \gamma & (\text{für } \alpha \not\equiv \emptyset)
\end{array}$$

Die Verwendung der Symbole a, b, c, d statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in den entsprechenden Regeln von $\mathcal{H}$ diente nur zur Erleichterung der hier durchgeführten Beweise.

5.7 Satz: Entsteht $\Gamma(\beta^\circ)$ bzw. $\Gamma(\beta)$ aus einer Formelliste $\Gamma(x)$ durch Substitution von β° bzw. β für alle freien Vorkommnisse von x, so sind die Schlüsse $\Gamma(\beta^\circ) \Leftrightarrow \Gamma(\beta)$ zulässig.

Beweis: Da die Regeln $\Delta, A^\circ \Leftrightarrow \Delta, A$ und $\Delta, \neg\, A^\circ \Leftrightarrow \Delta, \neg\, A$ für atomare A zulässig sind, erhält man für beliebige Aussagen $\mathcal{A}$ durch Teilformelinduktion die Zulässigkeit von $\Delta, \mathcal{A}^\circ \Leftrightarrow \Delta, \mathcal{A}$, daraus von

$$\Delta, \mathcal{A}\beta^\circ \;\Leftrightarrow\; \Delta, (\mathcal{A}\beta^\circ)^\circ \;\Leftrightarrow\; \Delta, (\mathcal{A}\beta)^\circ \;\Leftrightarrow\; \Delta, \mathcal{A}\beta,$$

und daraus schrittweise von $\Gamma(\beta^\circ) \Leftrightarrow \Gamma(\beta)$. □

Wir setzen nun $\Gamma^* :\!\!\!\!= \neg\, \mathcal{C}_1, \ldots, \neg\, \mathcal{C}_n$ für $\Gamma \equiv \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ und schreiben $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ statt $\Gamma^*, \mathcal{A}$. Zulässig sind die folgenden 'Regeln des natürlichen Schließens' (RnS, vgl. G. Gentzen) Nach ihnen ist bekanntlich $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ genau dann herleitbar, wenn aus den Gliedern von Γ (als 'Annahmen') $\mathcal{A}$ nach entsprechenden Regeln herleitbar ist. Somit sind auch alle logischen Schlussregeln, die wir in §1 angewandt haben, zulässig. **Daher sind alle Ergebnisse aus §1 in $\mathcal{H}$ herleitbar.**

Die erwähnten RnS lauten:

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} & \\
 & \Rightarrow & \vdash \emptyset \subseteq c & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A} & \Rightarrow & \Delta \vdash \mathcal{A} & \text{(falls } \Gamma \subseteq \Delta\text{)} \\
\Gamma \vdash b \in \emptyset & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} & \\
\Gamma \vdash b \in c \vee b = d & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash b \in c\{d\} & \\
\Gamma \vdash a \subseteq c\,,, \; \Gamma \vdash b \in c & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash a\{b\} \subseteq c & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A}\,,, \; \Gamma \vdash B & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \\
\text{`für alle } c\text{'} \; \Gamma \vdash \mathcal{A}c & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \forall x\, \mathcal{A}x & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
\Gamma \vdash \mathcal{B} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\,,, \; \Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{D}\,,, \; \Gamma, \mathcal{B} \vdash \mathcal{D} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{D} & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A}c & \Rightarrow & \Gamma \vdash \exists x\, \mathcal{A}x & \\
\Gamma \vdash \exists x\, \mathcal{A}x\,,, \; \text{`für alle } c\text{'} \; \Gamma, \mathcal{A}c \vdash \mathcal{D} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{D} & \\
\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} & \\
\Gamma \vdash \mathcal{A}\,,, \; \Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{B} & \\
\Gamma, \mathcal{A} \vdash \bot & \Rightarrow & \Gamma \vdash \neg\, \mathcal{A} & \text{(für } \bot :\Longleftrightarrow \emptyset \in \emptyset\text{)} \\
\Gamma \vdash \mathcal{A}\,,, \; \Gamma \vdash \neg\, \mathcal{A} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \bot & \\
\Gamma \vdash \neg\neg\, \mathcal{A} & \Rightarrow & \Gamma \vdash \mathcal{A} & \\
\Gamma \vdash A^{\circ} & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash A & \text{(für atomare } A\text{).}
\end{array}
$$

Die Zulässigkeit dieser Regeln erhält man leicht nach den Regeln von $\mathcal{H}$, 5.3, 5.4 und dem Schnittsatz 5.6. Z.B. die Zulässigkeit der 'Beseitigungsregel' für '$\exists$' ergibt sich so: Sind $\Gamma^*, \exists x\, \mathcal{A}x$ und $\Gamma^*, \neg\, \mathcal{A}c, \mathcal{D}$ für alle c herleitbar, so nach 5.4(m) auch $\Gamma^*, \neg\, \exists x\, \mathcal{A}x, \mathcal{D}$, also nach dem Schnittsatz auch $\Gamma^*, \mathcal{D}$. Die Zulässigkeit der Beseitigungsregel für '$\vee$' erhält man analog. □

Zur Vereinfachung der Beweise der Herleitbarkeit einiger Ergebnisse von §1 in $\mathcal{H}$ kann man auch folgende Lemmata verwenden:

5.8 Für quantorenfreie $\mathcal{A}$ gilt: Ist $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zulässig, so ist $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ herleitbar.
5.9.1 Ist $\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \Gamma, \mathcal{B}$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.
5.9.2 Ist $\Gamma, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \Rightarrow \Gamma, B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}$.
5.9.3 Ist $\Gamma, \mathcal{A}_1 \,,,\, \Gamma, \mathcal{A}_2 \Rightarrow \Gamma, B$ für alle Γ zulässig, dann gilt $\vdash \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \rightarrow B$.

Beweise: Zu 5.8: Zulässig sind $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg\, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, und nach 5.2 gilt $\vdash \mathcal{A}$ oder $\vdash \neg\, \mathcal{A}$.
Zu 5.9: Man setze 1. $\Gamma \equiv \neg\, \mathcal{A}$, 2. $\Gamma \equiv \neg\, \mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2)$, und 3. $\Gamma \equiv \neg\, \mathcal{A}_1, \neg\, \mathcal{A}_2$ und wende 5.3, 5.4 und $\mathcal{H}$ an. □

Literatur

W. Ackermann: „Die Widerspruchsfreihet der allgemeinen Mengenlehre“, Math. Annalen 114 (1937)
G. Gentzen: „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“, Math. Annalen 112 (1936).