Eine pragmatische Rechtfertigung des klassischen Argumentierens

von Peter Zahn, TU-Darmstadt, Fachbereich Mathematik

Überblick

Zur Rechtfertigung allgemeiner Argumentationsmethoden entwerfen wir in §1 einen Aussagengebrauch mit Hilfe von 'Behauptungsregeln'. Dieser Entwurf, der mit der 'operativen Logik' in [7, 1., 2.] teilweise verwandt ist, soll uns zu zeigen helfen, dass bestimmte allgemeine Schlussregeln zu(ver)lässig sind (§2). - Der Einfachheit halber führen wir zunächst nur die Partikeln $\wedge, \vee, \exists$ und $\neg$ ein. Der sich daraus ergebende Aussagengebrauch möge "primär" heißen. Bei ihm bedeutet $\neg A$, dass es nach bestimmten (den 'internen') Behauptungsregeln verboten ist, A zu behaupten. Der primäre Gebrauch ermöglicht es jedoch noch nicht, mit Hilfe (auf geeignete Weise definierter) objektsprachlicher Aussagen $\forall x\,[A(x) \to B(x)]$ mitzuteilen, dass man für beliebige Werte r der Variablen x von $A(r)$ auf $B(r)$ schließen darf.

Aus diesem Grunde liberalisieren wir den primären Aussagengebrauch in §3 nachträglich und rechtfertigen den sich damit ergebenden 'klassischen' Gebrauch dadurch, dass wir u.a. Folgendes zeigen: Für Elementaraussagen stimmt der klassische mit dem primären Gebrauch überein. Es lassen sich Aussagen der Form $\forall x\,[A(x) \to B(x)]$ definieren, die den oben genannten Zweck 'optimal' erfüllen. Beim Übergang vom primären zum klassischen Aussagengebrauch gehen nur entbehrliche Ausdrucksmittel verloren. Einzelheiten werden wir in §6 diskutieren.

In §4 behandeln wir insbesondere den Begriff der Unendlichkeit und mit ihm verbundene Probleme am Beispiel der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Die Unendlichkeit von $\mathbb{N}$ wird dabei als eine 'deontische' betrachtet. Sie bedeutet, dass wir niemals verpflichtet sein werden, die Konstruktion natürlicher Zahlen durch Nachfolgerbildung endgültig abzubrechen.

In §5 entwerfen und untersuchen wir einen Gebrauch von Aussagen, in denen Indikatoren (wie "diese Ameise") oder Gegenstandsvariable an Stelle von Eigennamen vorkommen. Behauptungen solcher Aussagen gelten nur in bestimmten Situationen. Um aus ihnen situationsunabhängig geltende Folgerungen ziehen zu können, führen wir eine Art von Gegenstands-Quantifikation ein.

Die im Folgenden behandelten Objektsprachen sind nur von 1. Ordnung und somit ziemlich ausdrucksarm. Um sie - auf der Grundlage der vorliegenden Arbeit - zu erweitern, sind in [19] Sprachen höherer Ordnungen (Typen) eingeführt worden, in denen jedoch typenfreie Gleichungen $x = y$ definierbar sind. Alle Aussagen dieser

Sprachen sind zirkelfrei und invariant bezüglich dieser Gleichheit. Ferner werden dort auch solche Sprachen höherer Ordnung untersucht, in deren Formeln auch Gegenstandsvariable vorkommen dürfen. Zugrundegelegt ist dabei eine Quantifikation, die zugleich eine Einsetzungs- und eine Gegenstandsquantifikation ist. (Die reine Einsetzungs- und die reine Gegenstandsquantifikation ergeben sich als Sonderfälle.) Je zwei aufeinanderfolgende Einsquantoren (der dort betrachteten Art) dürfen vertauscht werden. Schließlich sind die soeben erwähnten Sprachen in [20] nochmals erweitert worden, und zwar um modallogische Ausdrucksmöglichkeiten, mit denen vor allem die Herleitbarkeit von Aussagen aus Hypothesen formuliert werden kann.

Inhalt:

§0. Einleitung

Unter einer Behauptung verstehen wir eine Handlung: Man behauptet eine Aussage im Allgemeinen einfach dadurch, dass man sie als selbständigen Satz vor Hörern ausspricht oder für Leser aufschreibt. Auch Feststellungen zählen wir zu den Behauptungen. Es gibt jedoch sprachliche Handlungen der Form von Behauptungen, die nicht als Behauptungen zu verstehen oder nicht ernst gemeint sind, z.B. fingierende oder scherzhafte Äußerungen. Dies kann extra gesagt werden oder aus dem Redezusammenhang oder äußeren Umständen (wie in einer Büttenrede) hervorgehen. Dennoch: Man kann im Allgemeinen entscheiden, ob jemand oder man selbst eine bestimmte Aussage behauptet hat. Denn auch Behauptungen, die unberechtigt sind (wie Lügen) oder einem nicht abgenommen oder geglaubt worden sind, sind dennoch Behauptungen (oder sollen wenigstens hier Behauptungen heißen).

Wie wird nun das *Verständnis* von Behauptungen ermöglicht? Hierzu betrachten wir die Aussage: "Hans hat gestern Abend $39,2°$ Fieber gehabt." Ein Hörer kann dies verstehen, sofern er die Regel kennt, nach der diese Aussage nur nach einer Fiebermessung mit entsprechendem Resultat behauptet werden sollte. - Derartige Beispiele führen uns zu der

These: Aussagen werden dadurch verständlich, dass es üblich oder vereinbart ist, deren Behauptungen in regelhafter Weise einzuschränken, nämlich Behauptungen mancher Aussagen endgültig oder nur vorläufig zu unterlassen.

Zur entsprechenden Einschränkung des Behauptens stehen uns jedoch i.Allg. keine formulierten Regeln, sondern nur Gepflogenheiten zur Verfügung. (Für ein derartiges Sprachverständnis benötigen wir vor allem auch die Kompetenz, entsprechende 'alethische' Gepflogenheiten von Erfordernissen der Höflichkeit, der 'political correctness', des Zeitgeistes usw. unterscheiden zu können.)

Um Hilfsmittel zum sprachlichen Argumentieren (insbesondere Schlussregeln) zu erhalten, von denen wir zeigen können, dass sie dazu geeignet und zuverlässig sind, entwerfen wir einen Aussagengebrauch durch Aufstellung ausdrücklicher 'Behauptungsregeln' (zur Festlegung der Behauptbarkeit von Aussagen). Dadurch versuchen wir jedoch *nicht*, den *faktischen* Sprachgebrauch und dessen Argumentationsweisen zu beschreiben oder zu erklären. Unser Ziel ist es vielmehr, eine Argumentationstechnik zu begründen, die vor allem für die wissenschaftliche Praxis möglichst gut geeignet ist, also zuverlässig, möglichst leistungsfähig, unkompliziert, übersichtlich, und leicht handhabbar ist.

Regeln welcher Art eignen sich nun besonders als Behauptungsregeln? Allgemeine Gebote der Form "Immer dann, wenn a getan worden ist, tue man auch b!" haben den Nachteil, dass man i.Allg. keine Gelegenheit hat, sie zu befolgen. Als Beipiel betrachten wir folgende Regel: "Hat man irgend zwei Aussagen A und B behauptet, dann behaupte man auch $A \wedge B$!" Da wir nach dieser Regel unendlich viele Behauptungen aufstellen müssten, liegt es nahe, sie durch eine entsprechende Erlaubnis zu ersetzen. Dass eine Handlung erlaubt ist, heißt etwa, dass sie nicht verboten ist oder dass sie nicht verboten werden darf. Eine Handlung zu verbieten, heißt aufzufordern, sie zu unterlassen. Die Bedeutung von Verboten kann z.B. durch Hinweise auf Strafen oder Tadel erläutert werden. - Diese Bemerkungen sowie die oben genannte These führen uns zu dem Versuch, geeignete *Vorbotsregeln* als Behauptungsregeln aufzustellen.

Mittel zur Formulierung spezieller Schlussregeln: Zweckdienlich anwendbar sind Schlussregeln, nach denen für gegebene Formeln, etwa $A_1(x), A_2(x)$ und $B(x)$, Folgendes gilt: Wenn man für irgendeinen Wert r der Variablen x die Aussagen $A_1(r)$ und $A_2(r)$ zu Recht behauptet hat, dann darf man sogleich auch $B(r)$ behaupten. Um mitzuteilen, dass man so schließen darf, wollen wir schreiben:

$$\forall x \, [A_1(x) \wedge A_2(x) \rightarrow B(x)].$$

Zu diesem 'regellogischen' Zweck haben wir die Partikeln $\wedge$ (und), $\rightarrow$ (wenn - dann) und $\forall$ (für alle) in geeigneter Weise einzuführen (vgl. [11, p. 104]).

Wir werden dies jedoch in der in §1 eingeführten Sprache der Einfachheit halber noch nicht tun. In dieser Sprache werden wir zwar Aussagen der Formen $A \rightarrow B$ und $\forall x \, A(x)$ definieren; diese können aber den soeben angegebenen Zweck erst nach einer nachträglichen Liberalisierung der in §1 aufgestellten Behauptungsregeln erfüllen.

Anmerkungen zu einigen bekannten Zugängen zur Logik

Die folgenden Ausführungen wenden sich an Leser, die schon bestimmte andere Zugänge zur Logik kennen.

(1) Zum dialogischen Zugang zur Logik (vgl. [9, pp. 60ff.]): Wir betrachten materiale Dialogspiele mit der 'effektiven allgemeinen Dialogregel' aus [9, pp. 75-83]. Zu ihrer Rechtfertigung benötigt man unter anderem den Satz: Falls es dialogische Gewinnstrategien für A und für $A \to B$ gibt, dann gibt es auch eine Gewinnstrategie für B ('modus ponens'). Schon der Versuch, diesen gesamten metasprachlichen Satz dialogisch zu interpretieren, stößt auf Schwierigkeiten. An seiner Stelle beweist man aus technischen Gründen einen allgemeineren 'Schnittsatz' - und argumentiert in dessen Beweis derart, dass dies schon einer Anwendung gewisser logischer Schlussregeln (und Induktionsprinzipien) in der Metasprache gleichkommt. Diese Schlussregeln sollen jedoch für die Objektsprache mit Hilfe des Schnittsatzes erst begründet werden. Zu beachten ist auch, dass im Beweis des Schnittsatzes metasprachliche Aussagen verwendet werden, in denen (unter anderem) der mit 'Vagheitsproblemen' verbundene Subjunktor ("wenn - dann") und der Allquantor iteriert vorkommen. Deren Verständnis wird immerhin durch sprachliche Kompetenz und den 'Sinnzusammenhang' des Beweises ermöglicht. (Die Einführung materialer Dialogspiele soll aber nicht nur zur Begründung einer allgemeinen Argumentationstechnik dienen, sondern zunächst einmal zur Normierung des Gebrauchs der logischen Partikeln.)

Um unter anderem den Beweis des Schnittsatzes vereinfachen zu können, hat K. LORENZ in [6] andere dialogische Rahmenregeln zugrundegelegt und dabei konstruktive Ordnungszahlen benutzt. Zum Nachweis dafür, dass jeder einzelne Dialog nach endlich vielen Schritten zu einem Gewinn oder Verlust des Proponenten führt, muss man jedoch auf einen 'vordialogischen' Beweis dafür zurückgreifen, dass diese angeblichen Ordnungszahlen tatsächlich als solche brauchbar sind, d.h. die transfinite Induktion ermöglichen.

Auch in der Beweistheorie (vgl. [12] oder [15]) treten analoge Probleme insbesondere im Zusammenhang mit 'Schnittsätzen' auf.

(2) Ein intuitionistischer Entwurf geht von einem Beweisbegriff aus, der induktiv definiert wird (vgl. [1], [4]). Wir formulieren ihn nur für die Subjunktion:

> Ein Beweis für $A \to B$ ist eine 'Konstruktion' c, die jeden Beweis von A in einen Beweis von B überführt.

Dass c ein Beweis von $A \to B$ ist, heißt ausführlicher, dass für alle 'Konstruktionen' p gilt: Wenn p ein Beweis von A ist, dann ist $c(p)$ ein Beweis von B. Speziell für $0 = 1$ an Stelle von B heisst dies, dass es keinen (d.h. nicht einen) Beweis von A gibt. Wir haben soeben unser Vorverständnis für die Worte "für alle", "wenn - dann" und "nicht" zur Erklärung von $A \to B$ herangezogen. Dies ist jedoch vor allem deshalb problematisch, weil man für komplexe A i.Allg. nicht entscheiden kann, ob eine Konstruktion p ein Beweis von A ist. Daher wurde in [5] die obige Konstruktion c ersetzt durch ein Paar (c, d) mit einer 'Demonstration' d, die zeigt, dass c jeden Beweis von A in einen Beweis von B überführt. Dieser Beweisbegriff (der in [1, p. 232] und [13] kritisch untersucht worden ist) ist jedoch recht kompliziert und dennoch etwas problematisch. Wir werden ihn und den zugrundeliegenden Konstruktionsbegriff eliminieren und an Stelle von Beweisen bloß Behauptungen in einem normativen Zusammenhang betrachten.

Das Problem des Anfangs

Oben haben wir am Beispiel des dialogischen Zugangs auf eine mit ihm verbundene Gefahr eines gewissen Zirkels oder Regresses aufmerksam gemacht. Dahinter steckt das allgemeinere Problem, dass zur Begründung, Rechtfertigung oder zum Zuverlässigkeitsnachweis von Argumentationsregeln bereits zuverlässige Argumentationen benötigt werden (vgl. [2], [14]). Ist es überhaupt möglich, Argumentationen zu rechtfertigen, und (falls ja) wie können wir beginnen, dies zu tun? Um dieses Problem wenigstens teilweise zu reduzieren, werden wir (in einem fingierten 'Behauptungsspiel') einerseits bestimmte Regeln zur Einschränkung von Behauptungen aufstellen, andererseits aber auch vereinbaren, dass entsprechende Behauptungen keinen weiteren Einschränkungen unterworfen sein sollen. Dann kann man einsehen, dass die vereinbarten Regeln für komplexe Aussagen auch umgekehrt werden dürfen. Somit dürfen wir diese Regeln sowie deren Umkehrungen beim Folgern oder Schließen anwenden.

Dies gilt auch im Rahmen der Umgangssprache, da diese zum Teil als in der angedeuteten Weise geregelt aufgefasst werden kann. Die Umgangssprache werden wir aber als Metasprache (insbesondere als Untersuchungssprache) verwenden. Zur Rechtfertigung mancher metasprachlichen Wenn-dann-Aussagen (Konditionalsätze) werden wir aus entsprechenden Annahmen schrittweise Folgerungen ziehen. Dabei werden wir die Annahmen wie behauptete Aussagen behandeln, und zwar derart, dass die Folgerungen, die wir aus ihnen ziehen, behauptet werden dürfen sobald die Annahmen zu Recht behauptet worden sind.

Derartige unserer Argumentationen haben zwar die Form von Anwendungen logischer Regeln, insbesondere der bekannten Regeln des natürlichen Schließens; sie setzen jedoch deren Zulässigkeit nicht in voller Allgemeinheit voraus. Wir brauchen diese Regeln nur in Fällen von so geringer, 'überschaubarer' Komplexität anzuwenden, dass in ihnen dieses Vorgehen offensichtlich unproblematisch ist.

Das Anfangsproblem wird uns in besonderer Weise auch in §4 bei der Behandlung der arithmetischen Induktion begegnen. Wir brauchen jedoch nicht vorauszusetzen, dass es ('aktual'- oder 'potentiell'-) unendlich viele Objekte gibt, z.B. (mentale oder andere) Konstruktionen, Beweise oder Zahlen.

§1. Ein Behauptungsspiel

Elementaraussagen und ihr Gebrauch

Vorausgesetzt sei, dass wir bereits über die Begriffe bestimmter '**Elementaraussagen**' und '**interner Regeln** oder Gepflogenheiten' für Behauptungen von Elementaraussagen verfügen. Da es im Folgenden nicht darauf ankommt, wie diese Begriffe im Einzelnen festgelegt sind, genügt es, einige Forderungen an sie zu stellen und einige Erläuterungen anzugeben. Dabei subsumieren wir Gepflogenheiten unter Regeln.

Die Elementaraussagen (oder 'elementaren' Aussagen) seien gestaltlich verschieden von 'komplexen' Aussagen, die aus anderen Formeln (Aussagen oder Aussageformen) mit Hilfe von Junktoren, Quantoren oder mengentheoretischen Zeichen auf übliche Weise aufgebaut sind. - Für beliebige Elementaraussagen schreiben wir $E, E_1, \ldots$.

Für die Praxis 'grundlegender' als die (noch zu erläuternden) internen Regeln sind in unserer Sprachgemeinschaft geltende Regeln, die *nicht* intern sind. Wir nennen sie '**externe Regeln**'. Zu ihnen gehören vor allem in der Praxis erlernte Regeln, nach denen manche Elementaraussagen erst dann behauptet werden dürfen, wenn wir eine bestimmte Wahrnehmung oder Beobachtung gemacht haben oder ein bestimmtes Resultat einer Handlung (z.B. einer Messung) erhalten haben.

E heiße **verankert**, wenn die Behauptung von E keine externe Regel mehr verletzen würde. (Auch eine behauptete Aussage wie "Ich habe Kopfschmerzen" sollte verankert sein - obwohl wir dem Hörer keinen Beweis für sie mitteilen können.)

Nun zu den internen Regeln: Mehrere Elementaraussagen können voneinander abhängen auf Grund von Regeln für deren Behauptungen. Beispiele dafür sind folgende Regeln, nach denen wir behaupten dürfen "(Alle) Käfer sind Insekten" und "Käfer sind keine Fliegen": Falls "Dies ist ein Käfer" behauptet werden darf, dann darf auch "Dies ist ein Insekt" behauptet werden, aber nicht "Dies ist eine Fliege" (vgl. 'Prädikatorenregeln' in [9, p. 182]). Somit verweisen Aussagen wie "Käfer sind Insekten" und "Käfer sind keine Fliegen" auf unseren gemeinschaftlichen Sprachgebrauch (vgl. auch [3]). [Wir brauchen uns hier nicht mit der Frage zu beschäftigen, ob Behauptungen solcher Aussagen auch gerechtfertigt werden könnten durch (fingierte) Definitionen wie "Käfer $\rightleftharpoons$ Insekt und geflügelt und mit Flügeldecken und ...". Wir werden jedoch Aussagen kennenlernen, für welche diese Frage zu verneinen ist.]

Zu den internen Regeln mögen in unserer Sprachgemeinschaft geltende Regeln gehören, nach denen Elementaraussagen wie in den soeben angeführten Beispielen voneinander abhängen. Zu den internen Regeln gehöre außerdem das Verbot, $\perp$ zu behaupten. ($\perp$ sei eine bestimmte Elementaraussage.)

Eine Elementaraussage heiße (gegenwärtig) **ausgeschlossen**, wenn ihre Behauptung allein oder zusammen mit gegenwärtig oder früher erfolgten Behauptungen weiterer Elementaraussagen eine interne Regel verletzten würde. (Ausgeschlossene Elementaraussagen bleiben also auch künftig ausgeschlossen.)

Als **interne Regeln** für Elementaraussagen lassen wir - abgesehen von dem erwähnten Verbot, $\perp$ zu behaupten - zunächst nur Regeln mit Einzelfällen folgender Form zu:

$$\text{(IR)} \qquad E_1, \ldots, E_n \ \Rightarrow \ E,$$

in Worten: Es sei verboten, $E_1, \ldots, E_n$ zu behaupten und E auszuschließen.

Kommentar: Nach (IR) gilt: Falls $E_1, \ldots, E_n$ behauptet worden sind, dann ist es verboten, E auszuschließen. Falls jedoch E ausgeschlossen worden ist und $E_1, \ldots, E_{n-1}$ behauptet worden sind, dann ist damit E_n ausgeschlossen.

Gelegentlich werden wir noch weitere interne Regeln ähnlicher Formen für Elementaraussagen zulassen. Die beiden schon als Beispiele angeführten Regeln lassen sich zwar in den Formen $E_1 \Rightarrow E$ bzw. $E_1, E_2 \Rightarrow \perp$ schreiben, betreffen jedoch Behauptungen in bestimmten Situationen, in denen nämlich auf je ein bestimmtes Tier hingewiesen worden ist. Damit zusammenhängende Fragen werden wir erst in §5 behandeln.

Beispiel 1: a und b mögen jetzt für beliebige Längenbezeichnungen (wie '25 cm') stehen. $L(s, a)$ bedeute, dass ein Stab s die Länge a hat. $a \neq b$ bedeute, dass a von der Länge b verschieden ist. (Wir zählen $a = b$ und $a \neq b$ zu den Elementaraussagen.) Interne Regeln seien:

$$\begin{aligned} a = b,\, a \neq b \ &\Rightarrow \ \perp \\ L(s,a),\, L(s,b) \ &\Rightarrow \ a = b. \end{aligned}$$

Wird $a \neq b$ behauptet, so wird dadurch $a = b$ ausgeschlossen (da $\perp$ als ausgeschlossen gilt). Wird außerden $L(s, a)$ behauptet, dann wird also $L(s, b)$ ausgeschlossen.

Nach der letzten Regel dürfen wir nur *ein* Resultat einer Messung von s behaupten. Zur Beschreibung eines Zweiges, der wachsen kann, oder eines Stabes, dessen Länge sich auf andere Weise ändern kann, wird daher eine andere Formulierung, etwa "s hat die Länge a zur Zeit t", besser geeignet sein. Wir haben hier ein Beispiel dafür, dass ggf. erst die Erfahrung (bis auf Weiteres) zeigen kann, ob oder inwieweit sprachliche Regeln oder Gepflogenheiten zweckdienlich sind.

Nun betrachten wir die internen Regeln der Form (IR) als einen Kalkül, der mit Elementaraussagen operiert. Dabei bezeichne "$\Rightarrow$" die erlaubten Herleitungsschritte. Falls nun E nach diesen Regeln herleitbar ist aus anderen Elementaraussagen, die bereits verankert und danach behauptet worden sind, dann möge auch E als verankert gelten. Es ist jedoch nicht völlig unmöglich, dass eine Elementaraussage sowohl verankert als auch ausgeschlossen wird. (Daher sagen wir nicht einfach "begründet" oder "behauptbar" statt "verankert".) - Nach einer Regelverletzung sei es erlaubt, einige der daran beteiligten Behauptungen wieder zurückzunehmen.

Eine materiale Sprache $\mathcal{L}$ 1. Stufe

Wir betrachten zunächst nur solche Formeln (d.h. Aussagen oder Aussageformen), die Elementarformeln sind oder aus ihnen nur mittels $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht), $\exists$ (für ein), Klammern und bestimmten Variablen wie üblich aufgebaut sind, und fassen diese Formeln zu einer (etwas 'ausdrucksarmen') Sprache $\mathcal{L}$ zusammen. Jede Variable habe als Werte bestimmte Konstante, d.h. spezielle Schreibfiguren, in denen keine Variablen vorkommen. In die Sprache $\mathcal{L}$ nehmen wir nur Elementaraussagen E mit folgender Eigenschaft auf: Falls E einmal verankert (worden) ist, bleibt E auch künftig verankert, und zwar in beliebigen Situationen und Kontexten. In $\mathcal{L}$ nehmen wir daher auch nur solche Elementar*formeln* auf, die durch Substitutionen der in ihnen vorkommenden Variablen durch beliebige Werte derselben in Elementaraussagen der soeben genannten Art übergehen. - Zur Abkürzung werden wir gelegentlich Klammern in Formeln (insbesondere Außenklammern) fortlassen.

Erst in §5 werden wir uns mit anderen Aussagen wie "*Dies* ist ein Käfer", die nur in besonderen Situationen (wie beim Zeigen eines bestimmten Tieres) behauptet werden dürfen, beschäftigen.

Im Einzelnen setzen wir noch Folgendes voraus: Für jede Zeichenreihe x ist es entscheidbar, ob x eine Variable (von $\mathcal{L}$) ist. Für jede Variable x und jede Zeichenreihe c ist es entscheidbar, ob c ein Wert von x ist. Irgend zwei Vorkommnisse von Variablen in beliebigen Zeichenreihen überlappen sich nicht. - Elementarformeln enthalten Außenklammern (die wir jedoch evtl. fortlassen). Weitere Klammern kommen höchstens wie üblich paarweise in Elementarformeln vor.

Wir sagen kurz "Formel" statt "Formel von $\mathcal{L}$" und beziehen in gleicher Weise auch die Worte "Aussage", "Variable" und "Konstante" auf die betrachtete Sprache $\mathcal{L}$. Ist F eine Formel und sind $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ verschiedene Variable, dann sei auch

$$\exists\, x_1, \ldots, x_n\; F$$

eine Formel (in der evtl. mehrere Variable $x_1, \ldots, x_n$ *gebunden* vorkommen). Als 'Metavariable' verwenden wir

$E, E_1, \ldots$	für	Elementaraussagen
F, G, H	für	Formeln
A, B, C	für	Aussagen
x, y, z	für	Variable
$\underline{x}$	für	Listen $x_1, \ldots, x_n$ verschiedener Variablen
$\underline{r}$	für	Listen $r_1, \ldots, r_m$ von Konstanten
$A\underline{x}$ oder $A(\underline{x})$	für	Formeln, in denen höchstens die Variablen $\underline{x}$ frei vorkommen.

Definition: Eine Konstantenliste $\underline{r}$ heiße ein Wert von $\underline{x}$, falls $\underline{r}$ ebensoviele Glieder wie $\underline{x}$ hat (d.h. $m = n$) und r_i ein Wert von x_i für $i = 1, \ldots, n$ ist. In diesem Falle bezeichnen wir mit $A\underline{r}$ diejenige Aussage, welche aus der Formel $A\underline{x}$ durch die Substitution von $\underline{x}$ durch $\underline{r}$ entsteht. Bei dieser Substitution ist jedes freie (d.h. nicht gebundene) Vorkommnis von x_i durch r_i zu ersetzen ($i = 1, \ldots, n$). - Wir schreiben

$$\natural\, A \quad \text{für} \quad A \text{ behaupten}$$

oder zum Verweis auf eine Behauptung von A. (IR) lässt sich nun ausführlicher so schreiben: $\natural\, E_1, \ldots, \natural\, E_n \;\Rightarrow\; \natural\, E\,.$

Trotz ihres formalisierten Aufbaus mit Hilfe von 'Symbolen' (wie $\neg$) ist $\mathcal{L}$ keine formale Sprache im Sinne der mathematischen Logik, sondern eine 'materiale' oder 'assertorische' Sprache. Da wir nämlich einen Aussagengebrauch vereinbaren werden, nach dem einige, aber nicht alle Aussagen von $\mathcal{L}$ behauptet werden dürfen, benötigen wir keine (darüber hinausgehende) Interpretation dieser Aussagen.

Die Regeln des primären Behauptungsspiels

Behauptungen sollten begründbar sein. Daher sollte ein Sprecher oder Schreiber die Gründe für eine Behauptung schon vor deren Äußerung kennen und somit wenigstens 'gedanklich' sich selbst gegenüber behauptet haben. Dementsprechend lassen wir im folgenden 'Behauptungsspiel' auch stillschweigende Behauptungen im gedanklichen Selbstgespräch als Behauptungen gelten.

Wir definieren nun das **primäre Spiel** als das Behauptungsspiel, dem die externen und die internen Regeln für Behauptungen von Elementaraussagen sowie die unten angegebenen Behauptungsregeln für komplexe Aussagen angehören. Auch diese Regeln nennen wir **intern**. Sie sind ebenfalls bedingte, evtl. vorläufige Behauptungsverbote, in denen wir "$:\Rightarrow$" für "erst dann, wenn" schreiben. Die erste dieser Regeln ist demnach zu lesen als: "Behaupte $(A \wedge B)$ erst dann, wenn A behauptet worden ist und B behauptet worden ist."

$$\begin{array}{lrcl}
\mathrm{P}(\wedge) & \natural\,(A \wedge B) & :\Rightarrow & \natural\, A \text{ und } \natural\, B \\
\mathrm{P}(\vee) & \natural\,(A \vee B) & :\Rightarrow & \natural\, A \text{ oder } \natural\, B \text{ (oder beides)} \\
\mathrm{P}(\exists) & \natural\,\exists\underline{x}\, A\underline{x} & :\Rightarrow & \text{für einen Wert } \underline{r} \text{ von } \underline{x} : \natural\, A\underline{r} \\
\mathrm{P}(\neg) & \natural\,\neg A & :\Rightarrow & A \text{ ist ausgeschlossen.}
\end{array}$$

Dabei bedeute "A ist ausgeschlossen", dass A nach den internen Regeln nicht (mehr) behauptet werden sollte. (Dies ist i.Allg. erst dann der Fall, wenn schon bestimmte Elementaraussagen behauptet worden sind; eine Erläuterung folgt.)

Das primäre Spiel möge keine weiteren Regeln enthalten. - $\mathrm{P}(\wedge)$ kann auch durch zwei einfachere Regeln ersetzt werden. Die Behauptungsregeln sind mit umgangssprachlichen Mitteln formuliert, die wir exemplarisch erlernt haben. Dies ist für die Regeln P($\wedge$), P($\vee$) und P($\exists$) unproblematisch, weil wir wissen, wie zu einer beliebigen Zeit und für eine beliebige Aussage der Form $A \wedge B$, $A \vee B$ oder $\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ zu entscheiden wäre, ob (wir wissen, dass) ihre gegenwärtige Behauptung die zugehörige Behauptungsregel nicht verletzen würde. - Zur Erläuterung von P($\neg$) mögen zunächst einige Beispiele dienen:

Beispiel 2: Für zu Recht behauptete Aussagen A, B und für beliebige C darf man nacheinander auch $A \wedge B$ und $(A \wedge B) \vee C$ behaupten, weil dadurch keine Behauptungsregel verletzt würde. Daher darf $\neg[(A \wedge B) \vee C]$ nicht behauptet werden.

Beispiel 3: Nicht behauptet werden darf $\exists x\,(Ax \wedge \neg Ax)$, da sonst für einen Wert r von x vorher $Ar \wedge \neg Ar$ und daher nochmals vorher Ar sowie $\neg Ar$ behauptet werden müssten; hierzu müsste aber Ar auch ausgeschlossen sein. Somit darf $\neg \exists x\,(Ax \wedge \neg Ax)$ behauptet werden (weil dadurch P($\neg$) nicht verletzt würde).

Beispiel 4: s bezeichne einen Holzstab, dessen Länge *schätzungsweise* 25 cm beträgt. $E(s)$ sei eine Abkürzung für "s ist 24,8 cm lang". Diese Aussage kann nur durch eine Messung von s mit dem Ergebnis 24,8 cm verankert werden. Wir betrachten jedoch den Fall, dass s vor seiner Messung verbrannt ist. Angenommen, $E(s)$ könne nur durch die Behauptung eines anderen Ergebnisses einer Längenmessung von s ausgeschlossen werden. Dann kann $E(s)$ weder verankert noch ausgeschlossen werden. Daher darf man weder $E(s)$ noch $\neg E(s)$ behaupten.

Dieses Beispiel zeigt, dass das Negat $\neg E$ einer Elementaraussage E im Allgemeinen nicht schon deshalb behauptet werden darf, weil eine endgültige Verhinderung, E zu verankern, eingetreten ist.

Nach P($\neg$) darf ein Negat $\neg A$ erst dann behauptet werden, wenn A ausgeschlossen ist. Zu einer Erläuterung dieser Bedingungen sei zunächst angemerkt, dass für die Behauptung einer komplexen Aussage A nach den zugehörigen Behauptungsregeln i.Allg. eine 'Serie' vorheriger Behauptungen erforderlich ist (vgl. Beispiel 3).

Unter einer **Behauptungsserie** verstehen wir eine Gesamtheit von Behauptungen unter Berücksichtigung von deren zeitlichen Reihenfolge; wir lassen jedoch zu, dass in einer Behauptungsserie mehrere gleichzeitig aufgestellte Behauptungen vorkommen. Eine Serie tatsächlich aufgestellter Behauptungen kann dargestellt werden durch die Liste der dabei behaupteten Aussagen in zeitlicher Reihenfolge, wobei gleichzeitig behauptete Aussagen nacheinander stehen. Durch eine beliebige Liste von Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (die man, wie angedeutet, numerieren könnte; $n \in \mathbb{N}$, vgl. §4) werde eine 'mögliche Behauptungsserie' dargestellt. - Die folgenden Erklärungen nehmen nur auf die *internen* Regeln Bezug (daher der Zusatz "i.-"):

Eine Behauptungsserie heiße **i.-korrekt**, wenn Folgendes gilt: Sie beginnt nur mit Behauptungen von Elementaraussagen, die noch nicht ausgeschlossen sind, oder mit Behauptungen von Negaten bereits ausgeschlossener Aussagen (oder mit Behauptungen beider Arten), und in ihr werden danach nur Inversionsregeln angewandt (sodass auch die Regeln P($\wedge$), P($\vee$), P($\exists$) nicht verletzt werden). (Die Worte "noch nicht" und “bereits” verweisen dabei auf die Momente, an denen die einzelnen erwähnten Behauptungen vollendet bzw. begonnen werden. Man beachte auch, dass Elementaraussagen durch frühere oder gleichzeitige Behauptungen anderer Elementaraussagen - die nicht zur betrachteten Serie zu gehören brauchen - ausgeschlossen sein können.)

Nun sagen wir, eine Aussage sei **zu i.-Recht** behauptet worden, wenn sie am Ende einer i.-korrekten (tatsächlich aufgestellten) Behauptungsserie behauptet worden ist. Offensichtlich sollte eine Aussage nur zu i.-Recht behauptet werden. Weiteren Einschränkungen sind Behauptungen nach den internen Regeln nicht unterworfen. (Elementarausssagen sollten allerdings auch nur dann behauptet werden, wenn sie verankert sind.) Eine Aussage A ist demnach genau dann **ausgeschlossen**, wenn keine mögliche Behauptungsserie, die mit einer Behauptung von A endet, i.-korrekt ist.

Trotz dieser Erläuterung bleibt unser Verständnis von P($\neg$) etwas unsicher. Es scheint auch nicht möglich zu sein, eine andere in perfekter Weise nachprüfbare oder operable Behauptbarkeitsbedingung für Negate zu finden, da es (nach einem Satz von GÖDEL) kein effektives Verfahren gibt, nach dem man für beliebige arithmetische Aussagen 1. Stufe entscheiden kann, ob sie behauptet werden dürfen.

Wie in den Beispielen 2 und 3 können die Behauptungsregeln für komplexe Aussagen umgekehrt werden, weil das primäre Spiel keine anderen Regeln zur Einschränkung von Behauptungen komplexer Aussagen enthält, diese Aussagen *eindeutig* in ihre Komponenten zerlegbar sind [wie $(A \wedge B)$ in $A, \wedge, B$], und weil im primären Spiel der Gebrauch jeder komplexen Aussage *zirkelfrei* eingeführt ist. Er hängt nämlich nur vom Gebrauch ihrer ‘Vorgänger’ im Sinne folgender Definition ab.

Definition: C heiße ein **Vorgänger** von D, falls C *aus* D nach den folgenden Regeln in mindestens einem Schritt hergeleitet werden kann (dabei bezeichne “$\Rightarrow$” die erlaubten Herleitungsschritte, und $\underline{r}$ stehe für Werte von $\underline{x}$):

$$\begin{array}{lcllcl} A \wedge B & \Rightarrow & A; & A \wedge B & \Rightarrow & B; \\ A \vee B & \Rightarrow & A; & A \vee B & \Rightarrow & B; \\ \exists \underline{x}\, A\underline{x} & \Rightarrow & A\underline{r}; & \neg A & \Rightarrow & A. \end{array}$$

(Danach sind z.B. A und B die ‘unmittelbaren Vorgänger’ von $A \wedge B$ und von $A \vee B$.) - Die erwähnte Zirkelfreiheit bedeute: Keine Aussage ist ein Vorgänger von sich selbst.

Das folgende Beispiel zeigt, dass unsere Behauptungsregeln im Allgemeinen nur für *zirkelfreie* Aussagen umgekehrt werden dürfen. Nehmen wir z.B. an, dass eine Erweiterung der Sprache $\mathcal{L}$ eine Aussage A_0 (wie z.B. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$) enthält, deren Behauptung durch folgende Regel eingeschränkt ist: $\natural A_0 :\Rightarrow \natural \neg A_0$. Dann ist diese Regel nicht umkehrbar. A_0 ist ein Vorgänger von sich selbst.

Wir verfügen jedoch bisher *weder* über eine Methode zum Beweis der Zirkelfreiheit *aller* Aussagen (von $\mathcal{L}$) *noch* zum Beweis ihrer eindeutigen Zerlegbarkeit [nach der z.B. $(A \wedge B)$

und $(A \vee B)$ auch *nur* die beiden unmittelbaren Vorgänger A und B haben]. Daher soll hier unter einer Aussage stets eine *zirkelfreie* Aussage verstanden werden, die selbst und deren sämtliche Vorgänger eindeutig zerlegbar oder elementar sind. (Dies ist nur für Aussagen 'höherer' Komplexität problematisch.)

Nun betrachten wir folgende '**Inversionsregeln**' (der Behauptungsregeln):

$$\begin{array}{lrcll} \mathrm{I}(\wedge) & A, B & \Rightarrow & A \wedge B & \\ \mathrm{I}(\vee) & A & \Rightarrow & A \vee B & \\ & B & \Rightarrow & A \vee B & \\ \mathrm{I}(\exists) & A\underline{r} & \Rightarrow & \exists \underline{x}\, A\underline{x} & \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\text{).} \end{array}$$

Diese Regeln haben ersichtlich folgende Eigenschaft: Nach den Behauptungen der Prämissen eines Einzelfalles einer Inversionsregel würde die Behauptung seiner Konklusion die zugehörige Behauptungsregel nicht verletzen. Wie im Beispiel 2 dürfen wir dementsprechend ggf. mehrere Aussagen nacheinander behaupten.

Dies zeigt eine enge Verwandtschaft unserer Einführung komplexer Aussagen mit der in [7] angegebenen (vgl. insbesondere [7, §4, §7]), in der unter anderem Kalkülregeln der Formen I($\wedge$), I($\vee$) und I($\exists$) zugrundegelegt worden sind. Diese Regeln haben zwar den Vorteil, dass zu ihrer Formulierung Worte wie "oder" und "es gibt ein" nicht benötigt werden. Gebraucht wird jedoch die zusätzliche Vereinbarung, dass man eine Aussage A (die keine Elementaraussage und kein Negat ist) nur dann behaupten darf, wenn *es* eine Herleitung von A aus zu Recht behaupteten Elementaraussagen oder Negaten nach den zugrundegelegten Kalkülregeln *gibt*. (Wir haben soeben die Wendung "es gibt" verwendet.)

Offenbar darf auch die Regel P($\neg$) umgekehrt werden, d.h. man darf $\neg A$ behaupten sobald A ausgeschlossen ist (vgl. Beispiel 3).

In unserer Objektsprache definieren wir eine 'Generalisation' und eine 'Subjunktion' durch

$$\begin{array}{rcl} \forall \underline{x}\, F & \rightleftharpoons & \neg \exists \underline{x}\, \neg F \\ F \to G & \rightleftharpoons & \neg\, (F \wedge \neg G). \end{array}$$

Eine dadurch definierte Aussage $\forall x\, (Ax \to Bx)$ kann jedoch i.Allg. nicht zur Mitteilung dafür dienen, dass man für beliebige Werte r von x von Ar auf Br schließen darf (vgl. §0). Um dies dennoch zu erreichen, werden wir das primäre Spiel in §3 liberalisieren.

Im primären Spiel kann man Definitionen mit Hilfe folgender zusätzlicher Behauptungsregeln anwenden:

$$\natural\, E(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) \ :\Rightarrow\ \natural\, E(r_1, \ldots, r_n),$$

falls $\tilde{r}_1 \rightleftharpoons r_1,\ \ldots,\ \tilde{r}_n \rightleftharpoons r_n$ Definitionen 'neuer' Konstanten $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$ sind und keine anderen durch Definitionen eingeführten Konstanten in $E(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n)$ vorkommen.
Ferner entspricht der Definition $\tilde{A} \rightleftharpoons A$ einer 'neuen' Aussage $\tilde{A}$ die Behauptungsregel $\natural\, \tilde{A} :\Rightarrow\ \natural\, A$. Man sollte jedoch nur solche Definitionen verwenden, für welche diese Regeln

auch umkehrbar sind. - Zu iterierten Definitionen gehörige Regeln können schrittweise angewandt werden.

§2. Zulässigkeit von Schlussregeln

Bei der Behandlung von Schlussregeln beschränken wir uns vorläufig auf solche, die höchstens zwei Prämissen haben und deren Konklusionen Negate sind; denn dies ist bequemer und wird für den 'klassischen Aussagengebrauch' ausreichen. Wir betrachten hier also nur Schlussregeln der Form

$$\mathcal{R}: \qquad \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$$

($n = 0, 1, 2$) mit Aussageschemata $\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{B}$, in denen Metavariable (für Aussagen, Formeln, Variable, Konstante oder andere Terme) vorkommen dürfen - und die nach Ersetzung dieser Metavariablen durch beliebige Werte derselben in Aussagen übergehen. Bei einer solchen Ersetzung möge aus $\mathcal{R}$ ein 'Einzelfall' dieser Regel entstehen.

Dass man $\mathcal{R}$ *anwenden darf*, heißt, dass man für jeden Einzelfall

$$R: \qquad A_1, \ldots, A_n \;\Rightarrow\; \neg B$$

von $\mathcal{R}$, dessen Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ zu Recht behauptet worden sind, sogleich auch $\neg B$ behaupten darf (da dann B bereits ausgeschlossen ist). Die wie folgt definierte Zulässigkeit von $\mathcal{R}$ ist (wie wir noch zeigen werden) eine dafür hinreichende Bedingung:

Definition: $\mathcal{R}$ heißt **zulässig**, wenn es nach den internen Regeln für jeden Einzelfall R von $\mathcal{R}$ verboten ist, sowohl $A_1, \ldots, A_n$ als auch B zu behaupten. Diese Bedingung gehört einer Metasprache an und lässt sich formalisieren durch

$$\neg\exists \ldots (\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \mathcal{B}),$$

wobei ".." für eine Liste aller dahinter vorkommenden Metavariablen stehe. Die Formalisierung der Zulässigkeit des Einzelfalles R lautet dementsprechend einfach

$$\neg\,(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B).$$

Die soeben erwähnte Metasprache ist also eine Erweiterung der Objektsprache $\mathcal{L}$. - Wir haben soeben folgende Abkürzung benutzt:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge B \rightleftharpoons (A_1 \wedge A_2) \wedge B.$$

Nach dem folgenden Lemma dürfen alle zulässigen Schlussregeln der Form $\mathcal{R}$ angewandt werden.

Lemma 1: Ist $A_1, \dots, A_n \Rightarrow \neg B$ ein Einzelfall einer zulässigen Regel, dessen Prämissen $A_1, \dots, A_n$ zu i.-Recht behauptet worden sind, dann ist B bereits ausgeschlossen (sodass $\neg B$ sogleich behauptet werden darf).

Beweis (z.B. für n=2): $A_1, A_2 \Rightarrow \neg B$ sei ein Sonderfall einer zulässigen Regel $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \Rightarrow \neg\mathcal{B}$. Somit ist $\exists \,..\, (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B})$ ausgeschlossen. Ferner seien A_1 und A_2 zu i.-Recht behauptet worden. Würde auch B zu i.-Recht behauptet, so hätten wir i.-korrekte Behauptungsserien, an deren Enden A_1, A_2 bzw. B behauptet werden. Diese Serien ließen sich durch die anschließenden Behauptungen von $A_1 \wedge A_2$, $A_1 \wedge A_2 \wedge B$ und $\exists \,..\, (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B})$ i.-korrekt ergänzen. Da die letzte Aussage aber ausgeschlossen ist, kann auch B nicht am Ende einer i.-korrekten Behauptungsserie stehen; d.h. B ist ausgeschlossen.

Anmerkung: Die Konklusion $\neg B$ einer zulässigen Schlussregel darf man also insbesondere auch dann behaupten, wenn alle ihre Prämissen zu i.-Recht behauptet worden sind, aber eine dieser Prämissen eine *noch nicht verankerte* Elementaraussage ist. Auch aus diesem Grunde empfiehlt es sich, (z.B. versehentliche) Behauptungen nicht verankerter Elementaraussagen möglichst wieder zurückzunehmen.

Um zu zeigen, dass bestimmte Schlussregeln zulässig sind, werden wir außer den Regeln P($\wedge$), P($\vee$), P($\exists$), ihren Inversen und Regeln, deren Zulässigkeit bereits bewiesen worden ist, zunächst nur Lemma 1 anwenden.

Definition: Für Formeln F, in denen die verschiedenen Variablen $x_1, \dots, x_n$ und nur diese Variablen frei vorkommen, definieren wir

$$\begin{array}{rrcl} & \exists.F & \rightleftharpoons & \exists\, x_1, \dots, x_n\, F, \\ \text{insbesondere} & \exists.A & \rightleftharpoons & A \quad \text{für Aussagen } A \ \ (\text{d.h. } n = 0). \end{array}$$

Satz: Folgende Schlussregeln sind zulässig:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{R01} & A,\ \neg\,(A \wedge B) & \Rightarrow & \neg B \\
 & B,\ \neg\,(A \wedge B) & \Rightarrow & \neg A \\
\text{R02} & \neg\,(A \vee B) & \Rightarrow & \neg A \\
 & \neg\,(A \vee B) & \Rightarrow & \neg B \\
\text{R03} & \neg\exists\underline{x}\, A\underline{x} & \Rightarrow & \neg A\underline{r} \quad (\text{für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{R1} & \Rightarrow \quad \neg\exists.(F \wedge \neg F) \\
\text{R2} & \Rightarrow \quad \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] \\
\text{R3}a & \Rightarrow \quad \neg\exists.\{[(F \wedge G) \wedge H] \wedge \neg\,[F \wedge (G \wedge H)]\} \\
\text{R3}b & \Rightarrow \quad \neg\exists.\{[F \wedge (G \wedge H)] \wedge \neg\,[(F \wedge G) \wedge H]\} \\
\text{R4} & \neg\exists.G \quad \Rightarrow \quad \neg\exists.(F \wedge G) \\
\text{R5} & \neg\exists.(F \wedge G),\ \neg\exists.(F \wedge \neg G) \quad \Rightarrow \quad \neg\exists.F
\end{array}$$

Diese Regeln haben die oben angeführte Form $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \neg\mathcal{B}$. Um zu zeigen, dass eine derartige Regel zulässig ist, gehen wir von der Annahme aus, dass Aussagen der Formen

$$\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$$

zu i.-Recht behauptet worden sind. Um dies anzudeuten, notieren wir diese Aussageschemata und dahinter "Ann." (für "Annahmen"). Anschließend notieren wir Schemata für Aussagen, die nach den internen Regeln vorher behauptet worden sein müssen - oder danach behaupet werden dürfen, und zwar nach den Inversionsregeln oder bereits als zulässig nachgewiesenen Regeln in Verbindung mit Lemma 1. Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir einen 'Widerspruch' $\mathcal{C}, \neg\,\mathcal{C}$ erhalten. (Dadurch wird gezeigt, dass $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B}$ nicht zu i.-Recht behauptet werden kann und somit ausgeschlossen ist.) - Substitutionen der in den betrachteten Formeln von $\mathcal{L}$ frei vorkommenden Variablen durch Werte derselben teilen wir durch * mit.

Ad R01:

$$\begin{array}{ll} A,\ B,\ \neg\,(A \wedge B) & \text{Ann.} \\ A \wedge B & \text{I}(\wedge). \end{array}$$

Ad R03:

$$\begin{array}{ll} A\underline{r},\ \neg\exists\underline{x}A\underline{x} & \text{Ann.} \\ \exists\underline{x}A\underline{x} & \text{I}(\exists). \end{array}$$

Ad R02: Analog. - Ad R1: Vgl. Beispiel 3.

Ad R2:

$$\begin{array}{rll} & \exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] & \text{Ann.} \\ \text{Für ein *:} & (F^* \wedge G^*) \wedge \neg\,(G^* \wedge F^*) & \text{P}(\exists) \\ & F^* \wedge G^*,\quad \neg\,(G^* \wedge F^*) & \text{P}(\wedge) \\ & F^*,\ G^* & \text{P}(\wedge) \\ & G^* \wedge F^* & \text{I}(\wedge). \end{array}$$

Ad R3: Analog mit Hilfe des Teilschemas:

$$\begin{array}{c} (F^* \wedge G^*) \wedge H^* \\ F^* \wedge G^*,\ \ H^* \\ F^*,\ \ G^* \\ F^*,\ \ G^* \wedge H^* \\ F^* \wedge (G^* \wedge H^*). \end{array}$$

Ad R4:

$$\begin{array}{rll} & \exists.(F \wedge G),\ \neg\exists.G & \text{Ann.} \\ \text{Für ein *:} & F^* \wedge G^*,\ \ G^*,\ \ \exists.G. & \end{array}$$

Ad R5:

$$\begin{array}{rllll} & \exists.F, & \neg\exists.(F \wedge G), & \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein * :} & F^*, & \neg(F^* \wedge G^*), & \neg(F^* \wedge \neg G^*) & \text{P}(\exists), \text{R03} \\ & & \neg G^* & \neg\neg G^* & \text{R01.} \end{array}$$

Unter einem **Term** verstehen wir eine Schreibfigur t, in der Variable vorkommen dürfen, und die bei jeder Substitution aller frei vorkommenden Variablen durch Werte derselben in eine Konstante übergeht. Man nennt diese Konstante eine **Belegung** von t. - Zur Mitteilung dafür, dass zwei Schreibfiguren ϱ und σ gestaltlich gleich sind, schreiben wir kurz: $\varrho \equiv \sigma$.

Definition: Für Listen $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 0)$ verschiedener Variablen und Listen $\underline{t} \equiv t_1, \ldots, t_n$ geeigneter Terme entstehe $F_{\underline{t}}^{\underline{x}}$ aus F bei der simultanen Substitution aller freien Vorkommnisse von x_i durch t_i $(i = 1, \ldots, n)$. - Ferner verwenden wir folgende metasprachlichen Aussagen:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}(x, F) & \rightleftharpoons & x \text{ kommt in } F \text{ nicht frei vor.} \\ \mathrm{Fr}(t, x, F) & \rightleftharpoons & t \text{ ist frei für } x \text{ in } F, \text{ d.h.} \end{array}$$

1) jede Belegung von t ist ein Wert von x,
2) F_t^x ist eine Formel von $\mathcal{L}$, und
3) jedes freie Vorkommnis einer Variablen in t ist auch in F_t^x überall dort, wo t für x in F eingesetzt worden ist, frei.

Beispiel: y ist *nicht* frei für x in $\exists y\,(x < y)$, weil y in y frei vorkommt, aber das für x eingesetzte y in $\exists y\,(y < y)$ gebunden ist.

Lemma 2: Gilt $\mathrm{Fr}(t, x, F)$, ist $x, \underline{y}$ eine Liste der verschiedenen Variablen, die in F oder t frei vorkommen, und ist $r, \underline{s}$ ein Wert von $x, \underline{y}$, dann gilt

$$(*) \qquad (F_t^x)_{r,\underline{s}}^{x,\underline{y}} \equiv (F_{\underline{s}}^{\underline{y}})_{t^*}^x \quad \text{für} \quad t^* \equiv t_{r,\underline{s}}^{x,\underline{y}}.$$

Beweis: Man betrachte folgendes Diagramm der teils simultanen, teils sukzessiven Substitutionen der freien Vorkommnisse der Variablen: $x, \underline{y}$:

$$\begin{array}{rl} x, \underline{y} & \quad x, \underline{y} \\ t, \underline{y} & \quad x, \underline{s} \\ t^*, \underline{s} & \quad t^*, \underline{s}. \end{array}$$

Satz: Folgende Regeln sind zulässig:

$$\begin{array}{llcll} \text{R6} & & \Rightarrow & \neg\exists.(F_t^x \wedge \neg\exists x\, F), & \text{falls } \mathrm{Fr}(t, x, F) \\ \text{R7} & \neg\exists.(F \wedge G) & \Rightarrow & \neg\exists.(F \wedge \exists x\, G), & \text{falls } \mathrm{N}(x, F). \end{array}$$

Beweise: Ad R6: Sei $\mathrm{Fr}(t, x, F)$. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 2 dürfen wir wie folgt argumentieren:

$$\begin{array}{rll} & \exists.(F_t^x \wedge \neg\exists x\, F) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } r, \underline{s}: & (F_t^x \wedge \neg\exists x\, F)_{r,\underline{s}}^{x,\underline{y}} & \mathrm{P}(\exists) \\ & (F_{\underline{s}}^{\underline{y}})_{t^*}^x, \ \neg\exists x\, F_{\underline{s}}^{\underline{y}} & \mathrm{P}(\wedge), (*) \\ & \exists x\, F_{\underline{s}}^{\underline{y}} & \mathrm{I}(\exists). \end{array}$$

Ad R7: Sei $N(x,F)$. $\underline{y}$ sei eine Liste der verschiedenen in $F \wedge \exists x\, G$ frei vorkommenden Variablen. Dann dürfen wir wie folgt argumentieren:

$$\begin{array}{rll} & \exists \underline{y}\, (F \wedge \exists x\, G), \;\; \neg\exists x, \underline{y}\, (F \wedge G) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } \underline{s}, r: & F^{\underline{y}}_{\underline{s}}, \;\; G^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}} & \\ & (F \wedge G)^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}} & \\ & \exists x, \underline{y}\, (F \wedge G). & \end{array}$$

Zur übersichtlichen Darstellung weiterer Schlussregeln schreiben wir "$\Leftrightarrow$", um je zwei Schlussregeln zusammenzufassen. Ferner verwenden wir die Definition

$$\forall.F \;\; \rightleftharpoons \;\; \neg\exists.\neg F, \quad \text{speziell} \quad \forall.A \;\; \rightleftharpoons \neg\neg A.$$

Satz: Zulässig sind:

$$\begin{array}{lrcl} \text{R8}a & \neg\exists.G,\; \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \Rightarrow & \neg\exists.F \\ \text{R8}b & \neg\exists.\neg G,\; \neg\exists.(F \wedge G) & \Rightarrow & \neg\exists.F \\ \text{R9} & \neg\exists.(G \wedge F) & \Rightarrow & \neg\exists.(F \wedge G) \\ \text{R10} & \neg\exists.[F \wedge (G \wedge H)] & \Leftrightarrow & \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge H] \\ \text{R11}a & \forall.\neg F & \Leftrightarrow & \neg\exists.F \\ \text{R11}b & \neg\neg\neg A & \Leftrightarrow & \neg A \\ \text{R11}c & \forall.(F \to G) & \Leftrightarrow & \neg\exists.(F \wedge \neg G) \\ \text{R11}d & \forall.(F \to \neg G) & \Leftrightarrow & \neg\exists.(F \wedge G) \end{array}$$

Zum Nachweis dafür, dass eine Regel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \neg\mathcal{B}$ zulässig ist, genügt es auch, $\neg\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ durch Anwendungen zulässiger Regeln herzuleiten (denn damit erhält man - wie bisher - einen Widerspruch aus den Annahmen $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$). Wir werden im Folgenden so verfahren.

Ad R8a:

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.G,\; \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \text{Prämissen} \\ \neg\exists.(F \wedge G) & \text{nach R4} \\ \neg\exists.F & \text{nach R5} \end{array}$$

Ad R9:

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.(G \wedge F) & \text{Präm.} \\ \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] & \text{R2} \\ \neg\exists.(F \wedge G) & \text{R8a.} \end{array}$$

Ad R11a($\Rightarrow$):

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.\neg\neg F & \text{Präm.} \\ \neg\exists.(F \wedge \neg F) & \text{R1} \\ \neg\exists.F & \text{R8b.} \end{array}$$

R11b und R11c sind Sonderfälle von R11a.

Ad R11d($\Rightarrow$):

$$\begin{array}{ll}
\forall.(F \to \neg G) & \text{Präm.} \\
\neg\exists.(F \wedge \neg\neg G) & \text{R11c} \\
\neg\exists.(\neg\neg G \wedge F) & \text{R9} \\
\neg\exists.(G \wedge \neg\neg G \wedge F) & \text{R4, 10} \\
\neg\exists.(F \wedge G \wedge \neg\neg G) & \text{R9, 10} \\
\neg\exists.(F \wedge G \wedge \neg G) & \text{R1, 4, 10} \\
\neg\exists.(F \wedge G) & \text{R5.}
\end{array}$$

Die Zulässigkeit der restlichen Regeln erhält man analog. - Auch für die in §3 angegebenen Regeln kann die Zulässigkeit auf diese Weise 'deduktiv' bewiesen werden. Dazu ist noch keine Rechtfertigung der entsprechenden *allgemeinen* Deduktionsmethode erforderlich. Eine solche Rechtfertigung könnte aber nach der Behandlung der arithmetischen Induktion in §4 leicht angegeben werden, und zwar durch Induktion über die Anzahl der Deduktionsschritte.

§3. Ein Zugang zur klassischen Logik

Ungelöste Probleme wie die GOLDBACHsche Vermutung (der Arithmetik) geben uns Beispiele für Aussagen A, für die man bisher weder A noch $\neg A$ behaupten darf und daher im primären Spiel auch noch nicht $A \vee \neg A$ ('Tertium-non-datur') behaupten darf. Dementsprechend hat L.E.J. BROUWER (1908) das Tertium-non-datur "onbetrouwbaar" genannt. Dennoch darf $\neg(A \vee \neg A)$ für *keine* Aussage A behauptet werden. Dies ergibt sich aus der Zulässigkeit der beiden Regeln

$$\begin{array}{lcl}
\neg\,(A \vee \neg A) & \Rightarrow & \neg A \\
\neg\,(A \vee \neg A) & \Rightarrow & \neg\neg A
\end{array}$$

(vgl. R02). Für beliebige Aussagen A (von $\mathcal{L}$) gilt also

$$\neg\neg\,(A \vee \neg A).$$

Somit gibt es Aussagen B, für die man im primären Spiel zwar bereits $\neg\neg B$ behaupten darf, aber B selbst noch nicht behaupten darf. Daher sollte man die Regel

$$\neg\neg B \;\Rightarrow\; B$$

nicht einfach gedankenlos oder schematisch anwenden. Die umgekehrte Regel

$$B \;\Rightarrow\; \neg\neg B$$

ist jedoch nach R1 und R01 zulässig. - Wir können aber auch die vorher angeführte Regel zulässig 'machen' und damit das Tertium-non-datur erhalten, indem wir das primäre Spiel dadurch liberalisieren, dass wir behauptete Gesamtaussagen als Abkürzungen für ihre doppelten Negate verwenden.

Das **klassische Spiel** sei dementsprechend das Behauptungsspiel, in dem eine Aussage A genau dann behauptet werden darf, wenn $\neg\neg A$ im primären Spiel behauptet werden darf. Zur Rechtfertigung des klassischen Spiels werden wir in §6 u.a. zeigen, dass in ihm das schon im Überblick (Absatz 2) Gesagte gilt, sodass uns die auf S. 3 erläuterten 'Mittel zur Formulierung spezieller Schlussregeln' zur Verfügung stehen. Im diesem Spiel kann (wie wir zunächst beweisen werden) der Kalkül der klassischen Logik angewandt werden, der wegen seiner Symmetrie (im Vergleich mit anderen bekannten Logikkalkülen) besonders übersichtlich und leicht handhabbar ist.

Definition: Eine Schlussregel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ heiße **klassisch zulässig**, wenn $\neg\neg\mathcal{A}_1, \ldots, \neg\neg\mathcal{A}_n \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$ zulässig ist.

3.1. Satz: Falls eine Schlussregel der Form $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$ zulässig ist, dann ist sie auch klassisch zulässig.

Beweis für $n = 2$: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$ sei zulässig, d.h. es gelte

$$\neg\,\exists : (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B}).$$

Zulässig sind dann auch

$$\mathcal{A}_2, \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A}_1 \;\Rightarrow\; \neg\neg\neg\mathcal{A}_1$$

und daher ebenso

$$\neg\neg\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$$
$$\neg\neg\mathcal{A}_1, \neg\neg\mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B} \;\Rightarrow\; \neg\neg\neg\mathcal{B}.$$

Nach unserer Definition $\forall\underline{x}\, F \rightleftharpoons \neg\,\exists\underline{x}\,\neg F$, R11b und R03 ist nun auch

$$\forall\underline{x}\, A\underline{x} \;\Rightarrow\; A\underline{r} \quad \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\text{)}$$

klassisch zulässig. Daher können wir $\forall.F$ etwa als "F ist allgemeingültig" lesen. Dementsprechend schreiben wir Regeln der Form

$$\forall.\mathcal{F}_1, \ldots, \forall.\mathcal{F}_n \;\Rightarrow\; \forall.\mathcal{G}$$

auch abgekürzt so:

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \;\Rightarrow\; \mathcal{G}.$$

3.2 Satz: (Klassisch) zulässig sind:

R12	$\Rightarrow\ F \to F$
R13	$F,\ F \to G\ \Rightarrow\ G$ (*Modus ponens*)
R14	$F \to G,\ G \to H\ \Rightarrow\ F \to H$
R15a	$\Rightarrow\ F \wedge G \to F$
R15b	$\Rightarrow\ F \wedge G \to G$
R16	$H \to F,\ H \to G\ \Rightarrow\ H \to F \wedge G$
R17	$F \wedge G \to H\ \Leftrightarrow\ F \to (G \to H)$
R18	$F\ \Rightarrow\ H \to F$
R19	$F,\ G\ \Leftrightarrow\ F \wedge G$ (drei Regeln)
Definition:	$F \leftrightarrow G\ \rightleftharpoons\ (F \to G) \wedge (G \to F)$.
R20	$\Rightarrow\ F \leftrightarrow \neg\neg F$
R21	$F \to G\ \Leftrightarrow\ \neg G \to \neg F$
R22	$\Rightarrow\ F^x_t \to \exists x\, F$, falls $\mathrm{Fr}(t, x, F)$
R23	$F \to H\ \Rightarrow\ \exists x\, F \to H$, falls $\mathrm{N}(x, H)$
R24	$\Rightarrow\ \forall x\, F \to F^x_t$, falls $\mathrm{Fr}(t, x, F)$
R25	$H \to F\ \Rightarrow\ H \to \forall x\, F$, falls $\mathrm{N}(x, H)$.

Hierzu zeigen wir nur die Zulässigkeit von R16 und geben zu diesem Zweck zunächst eine Herleitung zu folgender Regel an:

R16* $\quad H \to F\ \Rightarrow\ H \to H \wedge F$.

$$\begin{array}{ll}
\forall.\,(H \to F) & \text{Prämisse} \\
\neg\,\exists.\,(H \wedge \neg F) & \text{R11c} \\
\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H \wedge \neg F) & \text{R4, 10} \\
\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H \wedge F) & \text{R1, 9, 10} \\
\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H) & \text{R5} \\
\forall.\,(H \to H \wedge F) & \text{R9, 11c.}
\end{array}$$

Herleitungsskizze zu R16:

$$\begin{array}{rl}
H \to F, \quad H \to G & \text{Prämissen} \\
H \wedge F \to G & \text{R15, 14} \\
H \to H \wedge F \to H \wedge F \wedge G \to F \wedge G & \text{R16* etc.}
\end{array}$$

3.3 Satz: Zulässig sind folgende Regeln zur **Adjunktion** ($\vee$):

R26a	$\Rightarrow\ \neg\,\exists.[F \wedge \neg\,(F \vee G)]$
R26b	$\Rightarrow\ \neg\,\exists.[G \wedge \neg\,(F \vee G)]$
R27	$\Rightarrow\ \neg\,\exists.[\neg F \wedge \neg G \wedge (F \vee G)].$
R28a	$\Rightarrow\ F \to F \vee G$
R28b	$\Rightarrow\ G \to F \vee G$
R29	$F \to H,\ G \to H\ \ \Rightarrow\ \ F \vee G \to H.$

Für R26 - R27 ist die Zulässigkeit leicht einzusehen. Für R28 - R29 lässt sie sich mit Hilfe der vorangehenden Regeln deduktiv beweisen.

Mit Hilfe von R1 - R29 und $\neg\neg A \Rightarrow A$ kann man bekanntlich weitere Schlussregeln der klassischen Logik, insbesondere auch die entsprechenden Regeln des natürlichen Schließens, rechtfertigen.

Zum klassischen Gebrauch von Elementaraussagen

Zu dessen Rechtfertigung benötigen wir:

3.4. Satz: Für Elementaraussagen E sollten wir im primären Spiel $\neg\neg E$ erst dann behaupten, wenn E verankert ist.

Um diesen Satz zu erhalten, ordnen wir jeder Elementaraussage E eine neue 'Hilfsaussage' $-E$ zu. Als zugehörige *externe* Regel vereinbaren wir: Man behaupte $-E$ erst dann, wenn E ausgeschlossen ist, und zwar nach den internen Regeln *mit Ausnahme* der Regel

$$E, -E \Rightarrow \perp,$$

die wir als *interne* Regel ins primäre Spiel aufnehmen. - Man beachte, dass E nur dann nach dieser Regel ausgeschlossen (d.h. $-E$ behauptet) werden darf, wenn E ohne Bezug auf diese Regel ausgeschlossen worden ist.

Zum Beweis von 3.4 benötigen wir einige Vorbereitungen:

Definition: Ein Tupel $(E_1, \ldots, E_n)$ elementarer Aussagen heiße **absolut ausgeschlossen**, wenn es nach den internen Regeln verboten ist, alle Glieder $E_1, \ldots, E_n$ zu behaupten. ("absolut" bedeute hierbei "unabhängig davon, welche Elementaraussagen bereits behauptet worden sind".)

3.5. Lemma: Ist $(E_1, \ldots, E_n)$ absolut ausgeschlossen, dann ist $\perp$ aus $E_1, \ldots, E_n$ nach den internen Regeln herleitbar.

Beweis: Alle absolut ausgeschlossenen Tupel sind nach den folgenden Regeln herleitbar:
1. $\Rightarrow (\perp)$;
2. $(D_1, \ldots, D_m, E) \Rightarrow (D_1, \ldots, D_m, E_1, \ldots, E_n)$,
falls $E_1, \ldots, E_n \Rightarrow E$ eine interne Regel ist;
3. $(D_1, \ldots, D_m) \Rightarrow (E_1, \ldots, E_n)$, falls $\{D_1, \ldots, D_m\} \subseteq \{E_1, \ldots, E_n\}$.
3.5 erhalten wir durch Induktion über die Anzahl der Herleitungsschritte nach diesen Regeln. (Eine Rechtfertigung der arithmetischen Induktion wird in §4 angegeben.)

Beweis von 3.4: Falls $-E$ und $\neg E$ nacheinander behauptet werden, dann wird dadurch (nach der Regel $E, -E \Rightarrow \perp$) E ausgeschlossen, sodass $\natural \neg E$ keine interne Regel verletzt. - Nun sollte $\neg\neg E$ erst dann behauptet werden, wenn die Behauptung $\natural \neg E$ (auch dann, wenn sie im Anschluss an $\natural -E$ erfolgt) mit der Verletzung einer internen Regel verbunden wäre. Nach dem vorherigen Argument muss dazu $-E$ ausgeschlossen sein. Daher gibt es nach 3.5 bereits behauptete Elementaraussagen $E_1, \ldots, E_n$ derart, dass $\perp$ aus $E_1, \ldots, E_n$ und $-E$ nach den internen Regeln herleitbar ist. Die behaupteten Aussagen $E_1, \ldots, E_n$ sollten natürlich verankert und nicht ausgeschlossen sein. $E, -E \Rightarrow \perp$ ist aber die einzige interne Regel, in der $-E$ vorkommt. Daher muß E aus den verankerten Aussagen $E_1, \ldots, E_n$ nach den internen Regeln herleitbar sein, sodass auch E als verankert gilt.

(Die Hilfsaussagen $-E$ ziehen wir fortan nicht mehr in Betracht.)

§4. Ein Zugang zur Arithmetik

Das Folgende entspricht dem Vorgehen in [7, §13] und [9, II.1]. Als Darstellungen natürlicher Zahlen wählen wir einfach die Schreibfiguren $0, 0', 0'', 0''', \ldots$, die im Kalkül K($\mathbb{N}$) mit den folgenden Regeln konstruierbar sind:

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & 0 & \text{(Beginn mit 0)} \\ k & \Rightarrow & k' & \text{(Übergang von } k \text{ zu } k'). \end{array}$$

Für k darf hierbei jederzeit irgendeine bereits in K($\mathbb{N}$) konstruierte Figur eingesetzt werden. Für Konstante r der Objektsprache $\mathcal{L}$ stehe $r \in \mathbb{N}$ für "r ist konstruierbar in K($\mathbb{N}$)". Wir lassen jedoch auch bestimmte andere 'neue' Zeichen als Abkürzungen oder Kennzeichnungen für Elemente von $\mathbb{N}$ zu (z.B. 3 für $0'''$, und $357 \rightleftharpoons 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$ nach Einführung der Addition usw.). - Hier in §4 schreiben wir k, m, n, k_0, m_0 für beliebige Elemente von $\mathbb{N}$, x, y für Variable für Elemente von $\mathbb{N}$, und z für Variable für Elemente von $\mathbb{N}$ und evtl. weitere Konstante.

Die Gleichheit in $\mathbb{N}$ sei die gestaltliche Gleichheit. Dementsprechend bedeute $k_0 = m_0$, dass diese Gleichung herleitbar ist im Kalkül K(=) mit den beiden Regeln

$$\Rightarrow 0 = 0; \quad k = m \Rightarrow k' = m'.$$

Zur Verankerung von $k_0 = m_0$ genüge aber auch ein entsprechender Vergleich von k_0 und m_0 mit positivem Resultat.

Die 'deontische Unendlichkeit' von $\mathbb{N}$: Wegen Mangels an Zeit und Material kann man nur endlich viele Figuren im Kalkül K($\mathbb{N}$) 'wirklich' konstruieren. Im Kontext von K($\mathbb{N}$) werden wir jedoch *niemals verpflichtet* sein, die Konstruktion natürlicher Zahlen endgültig abzubrechen. Ferner erhalten wir nach den Regeln von K($\mathbb{N}$) nacheinander lauter *verschiedene* Figuren $0, 0', 0'', \ldots$. Daher sagen wir, $\mathbb{N}$ sei *unendlich.*

Aus 'externen Gründen' ist es unmöglich, die Regeln von K($\mathbb{N}$) unendlich oft anzuwenden. Daher können wir keine unendlich langen Figuren, die mit $\ldots'''$ enden, konstruieren. Solche Figuren sollten jedoch durch *interne* Regeln aus $\mathbb{N}$ ausgeschlossen werden. Daher ersetzen wir K($\mathbb{N}$) durch die folgenden Γ-Regeln und dementsprechend auch die Regeln von K(=) durch die folgenden Δ-Regeln.

Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}$ der bisher betrachteten Art. Wir erweitern sie durch die Einführung neuer Aussagen der Formen $\Gamma|p|$, $r \in \mathbb{N}$, $\Delta|p = q|$ und $r = s$. Dabei seien Γ, $|$, $\in$, $\mathbb{N}$, Δ und $=$ (ausführlicher $=_{\mathbb{N}}$) neue Symbole, r, s stehen für beliebige Konstante von $\mathcal{L}$, und p, q für beliebige Reihen von Einzelzeichen, die in Konstanten von $\mathcal{L}$ vorkommen. Die so erweiterte Sprache sei $\mathcal{L}'$. Um den Gebrauch der neuen Aussagen von $\mathcal{L}'$ festzulegen, fügen wir folgende Behauptungsregeln zu den **internen Regeln** des primären Spiels:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\Gamma|0| & \Rightarrow & \bot & \Delta|0=0| & \Rightarrow & \bot \\
\Gamma|p'| & \Rightarrow & \Gamma|p| & \Delta|p'=q'| & \Rightarrow & \Delta|p=q| \\
r \in \mathbb{N} & :\Rightarrow & \neg\Gamma|r| & r = s & :\Rightarrow & \neg\Delta|r=s|.
\end{array}$$

(Wir haben hier das Behauptungszeichen $\natural$ fortgelassen.)

Erläuterungen: Nach den Γ-Regeln ist es gerade verboten, $\Gamma|0|$, $\Gamma|0'|$, $\Gamma|0''|$, ... zu behaupten. Daher dürfen wir $0 \in \mathbb{N}$, $0' \in \mathbb{N}$, $0'' \in \mathbb{N}$, ..., aber keine anderen Aussagen der Form $r \in \mathbb{N}$ behaupten. [Ein unendlich langes 'Zahlzeichen' Ω, das (wie oben erwähnt) mit $\ldots'''$ endet, kann nicht von Ω' unterschieden werden, sodass $\Gamma|\Omega|$ nicht ausgeschlossen ist, also $\Omega \in \mathbb{N}$ nicht behauptet werden darf. Wir werden jedoch keinen weiteren Gebrauch von diesen informellen Bemerkungen machen.] - Auf ähnliche Weise ist es nach den Δ-Regeln gerade verboten, $\Delta|0 = 0|$, $\Delta|0' = 0'|$, $\Delta|0'' = 0''|$, ... zu behaupten. Daher dürfen wir $0 = 0$, $0' = 0'$, $0'' = 0''$, ..., aber keine anderen Gleichungen zwischen Elementen von $\mathbb{N}$ behaupten.

Sätze:

(a) $\forall z\,(z \in \mathbb{N} \leftrightarrow z' \in \mathbb{N})$ (Unendlichkeit von $\mathbb{N}$).

(b) $\forall x, y\,(x = y \leftrightarrow x' = y')$

(c) $\forall x\,\neg\,(x' = 0)$, $\forall y\,\neg\,(0 = y')$

Beweis: (a)($\leftarrow$) Wir sollten $\exists z\,(\neg\,(z \in \mathbb{N}) \wedge z' \in \mathbb{N})$ nur dann behaupten, wenn für ein r sowohl $r \in \mathbb{N}$ ausgeschlossen als auch $r' \in \mathbb{N}$ behauptet worden ist. Dazu sollte

$\Gamma|r'|$ ausgeschlossen sein, was nur nach der Regel $\Gamma|r'| \Rightarrow \Gamma|r|$ möglich ist, sodass auch $\Gamma|r|$ ausgeschlossen sein muss (Inversion). Dann darf aber $r \in \mathbb{N}$ behauptet werden, obwohl diese Aussage ausgeschlossen ist. Hiermit haben wir die Annahme $\exists z\,(\neg\,(z \in \mathbb{N}) \wedge z' \in \mathbb{N})$ zu einem Widerspruch geführt; daher gilt ihr Negat und somit (a)($\leftarrow$). Die Aussagen (a)($\rightarrow$), (b) und (c) können auf ähnliche Weise bewiesen werden.

Prinzip der arithmetischen Induktion: Zulässig ist die Regel

$$A(0),\ \forall x\,[A(x) \rightarrow A(x')] \ \Rightarrow\ \forall x\, A(x).$$

Beweis: Gegeben sei eine Formel $A(x)$. Da die durch p bezeichneten Figuren im Allgemeinen keine Werte von Variablen sind, verwenden wir jetzt neue Aussagen $\Lambda|p|$ an Stelle von $p \in \mathbb{N} \wedge A(p)$ und beschränken deren Behauptungen durch die Regeln $\Lambda|p| :\Rightarrow \neg\Gamma|p|$ und $\Lambda|k| :\Rightarrow A(k)$ für $k \in \mathbb{N}$. (Somit haben wir $\Lambda|k| \leftrightarrow A(k)$. Ferner beachte man, dass x eine Variable nur für Elemente von $\mathbb{N}$ ist.) - Vorausgesetzt seien nun $A(0), \forall x\,[A(x) \rightarrow A(x')$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist es nach den Regeln $\Gamma|0| \Rightarrow \perp$ und $\Gamma|p'| \Rightarrow \Gamma|p|$ verboten, $\Gamma|n|$ zu behaupten. Auf gleiche Weise ist es nach den klassisch zulässigen Regeln $\neg\Lambda|0| \Rightarrow \perp$ und $\neg\Lambda|p'| \Rightarrow \neg\Lambda|p|$ verboten, $\neg\Lambda|n|$, d.h. $\neg A(n)$, zu behaupten. Damit erhalten wir $\neg\exists x \neg A(x)$.

Das mit "Auf gleiche Weise" beginnende Argument hat zwar die Form einer Induktion auf einer Metaebene; es ist jedoch begründet durch die Tatsache, dass wir außer den Γ-Regeln *keine weiteren Regeln* vereinbart haben, nach denen Behauptungen von Aussagen der Form $\Gamma|q|$ einzuschränken sind.

In gleicher Weise, aber unter Bezugnahme auf die Δ-Regeln erhält man das **Induktionsprinzip für die Gleichheit in $\mathbb{N}$**, welches besagt, dass folgende Regel zulässig ist:

$$A(0,0),\ \forall x,y\,[A(x,y) \rightarrow A(x',y')] \ \Rightarrow\ \forall x,y\,[x = y \rightarrow A(x,y)].$$

Mit dessen Hilfe erhalten wir $r = s \rightarrow r \in \mathbb{N} \wedge s \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

(d) $\qquad \forall x,y\,(x = y \wedge A(x) \ \rightarrow\ A(y).$

Beweis: Sei e eine Variable für die 'leere Figur' sowie für alle Figuren, die aus ihr durch Anwendung der Kalkülregel $q \Rightarrow {}'q$ konstruierbar sind. Dann gilt $\forall e\,[A(0e) \rightarrow A(0e)]$ und

$$\forall x,y\,\{\forall e\,[A(xe) \rightarrow A(ye)] \ \rightarrow\ \forall e\,[A(x'e) \rightarrow A(y'e)]\}.$$

Damit erhalten wir (d) nach dem Induktionsprinzip für die Gleichheit in $\mathbb{N}$.

Aus (b) folgt $\forall x\,(x = x)$ durch arithmetische Induktion. Aus (d) folgt die Komparativität $\forall x,y,z\,(x = y \wedge x = z \rightarrow y = z)$, und daher auch die Symmetrie und die Transitivität der Gleichheit in $\mathbb{N}$. Diese ist also eine Äquivalenzrelation, in Bezug auf die alle Formeln von $\mathcal{L}$ invariant sind.

Die **Addition** in $\mathbb{N}$ kann eingeführt werden durch Aufstellung folgender Behauptungsregeln für neue Aussagen:

$$\begin{aligned} \natural\, \mathrm{Add}(k,0,n) \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, n = k \\ \natural\, \mathrm{Add}(k,m',n) \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, \exists x\, [\mathrm{Add}(k,m,x) \wedge n = x']. \end{aligned}$$

Diese Regeln können aufgefasst werden als Sonderfälle von

$$\begin{aligned} \natural\, \underline{r} \in S_0 \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, A(\underline{r}) \\ \natural\, \underline{r} \in S_{m'} \quad &:\Rightarrow \quad \natural\, B(\underline{r}, m, S_m). \end{aligned}$$

Dabei sei $S \rightleftharpoons |\underline{x}yZ(A(\underline{x}), B(\underline{x}, y, Z))$ mit einer Variablen Z für geeignete *Mengen* oder *Relationen*. $A(\ldots)$ und $B(\ldots)$ seien Formeln einer *erweiterten* Objektsprache $\mathcal{L}''$; diese sei die kleinste Sprache, die $\mathcal{L}'$ umfasst und abgeschlossen ist gegen Verknüpfungen mit $\wedge, \vee, \neg, \exists$, und $\in |$ (mit dem 'Induktionsoperator' $|$). Variable für Mengen oder Relationen dürfen jedoch in den Formeln von $\mathcal{L}''$ zwar durch den Induktionsoperator, aber nicht durch Quantoren gebunden werden. - Die zuletzt angeführten Regeln können auch umgekehrt werden, da die Behauptungen ihrer Prämissen keinen weiteren Einschränkungen unterworfen sind und die Sprache $\mathcal{L}''$ ebenfalls zirkelfrei ist. Dies kann durch Indukion über die skizzierte Konstruktion der Formeln von $\mathcal{L}''$ bewiesen werden (vgl. [18, pp. 426 ff., 452] oder [19]). Der Prädikator "Add" stellt eine Funktion "+" dar. (Zur Einführung von Kennzeichnungstermen wie z.B. $s + t$ siehe [7], [9] oder [19].) - In bekannter Weise sind alle rekursiven Funktionen in $\mathcal{L}''$ definierbar.

Nach dem Vorbild von [8], [16] oder [17] kann man **konstruktive Analysis** mit reellen Zahlen treiben, die durch in $\mathcal{L}''$ definierbare rationale Cauchyfolgen darstellbar sind.

Obwohl sich obige Aussage (a)($\rightarrow$), nach der $\mathbb{N}$ unendlich ist, auf recht harmlose Weise ergeben hat, sind mit der Unendlichkeit von $\mathbb{N}$ Probleme verbunden. Hierzu betrachten wir z.B. die Potenzfunktion (Pot) natürlicher Zahlen. Die Aussage

$$9^{9^9} \in \mathbb{N}$$

(in der eine iterierte Kennzeichnung vorkommt) kann als Abkürzung folgender Aussage betrachtet werden:

$$\exists x, y\, [\mathrm{Pot}(9,9,x) \;\wedge\; \mathrm{Pot}(9,x,y) \;\wedge\; y \in \mathbb{N}].$$

Eine Verallgemeinerung hiervon kann auf bekannte Weise durch Induktion bewiesen werden. Wir können jedoch nicht tatsächlich eine natürliche Zahl n, für die $9^{9^9} = n$ gilt, nach den Regeln von K($\mathbb{N}$) konstruieren. Die Existenzaussage $9^{9^9} \in \mathbb{N}$ wird daher im primären Spiel während der gesamten Menschheitgeschichte nicht behauptet werden dürfen. Es würde jedoch keine Behauptungsregel verletzen, nacheinander geeignete Behauptungen und schließlich die von $9^{9^9} \in \mathbb{N}$ aufzustellen. Dementsprechend darf im primären Spiel die doppelte Negation dieser Aussage behauptet werden, die man daher klassisch interpretieren kann.

Ein allgemeineres Problem ist mit Aussagen der Form $\forall x \in K.\, \exists y\, A(x,y)$ verbunden. Günstigenfalls kann man eine derartige Aussage *direkt* beweisen, indem man ein 'effektives Verfahren' V angibt und Folgendes zeigt:

$$(*) \qquad \forall x \in K.\, \{\exists y\, (V\!:x \mapsto y) \;\wedge\; \forall y\, [(V\!:x \mapsto y) \to A(x,y)]\}.$$

Dabei bedeute $V\!:x \mapsto y$, dass V vorschreibt, nach der Eingabe von x schließlich das Ergebnis y zu liefern.

(*) zeigt, wie man 'im Prinzip' zu jedem $k \in K$ ein m, für das $A(k,m)$ klassisch gilt, finden kann. Für 'sehr große' k würde V jedoch i.Allg. nicht tatsächlich ein Ergebnis m liefern, da uns für Anwendungen von V nur eine beschränkte Zeit zur Verfügung steht. Wie ist dann aber die Existenz eines solchen Ergebnisses verstehen? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir V als ein System von Regeln, nach denen bestimmte Abfolgen von Handlungsschritten erlaubt (oder sogar geboten) und alle weiteren Schritte verboten sind. Jeder erlaubte Schritt von V sei durch die Eingabe und die vorhergehenden Schritte eindeutig bestimmt. Wir zählen die Regeln von V zu den internen Regeln des primären Spiels.

Nun bedeutet die klassische Existenz eines zu einer Eingabe k in V gehörigen Ergebnisses, dass es nach den Regeln von V nach Eingabe von k erlaubt (d.h. nicht verboten) ist, Schritte zu tun, die schließlich ein Ergebnis liefern.

Da bei jeder Anwendung von V höchstens eine beschränkte Anzahl T von Schritten tatsächlich ausgeführt werden kann, genügt es zur Untersuchung der Erfolgsaussichten unserer Praxis, nur solche Verfahren $V = V(T)$ zu betrachten, die zufolge eines 'Stopp-Befehls' spätestens nach T Schritten abbrechen. Bei der Anwendung eines solchen Verfahrens auf einen Eingabewert k erhalten wir nach $\leq T$ Schritten entweder eine Ausgabe oder das Ergebnis, dass keine Ausgabe existiert. Somit kann durch (*) mitgeteilt werden, wie man für beliebige $k \in K$ ein m, für das $A(k,m)$ klassisch gilt, innerhalb der Zeit T finden kann. (Wegen der Beschränkung der Rechenzeit von $V(T)$ erhält man (*) allerdings i.Allg. nur für 'kleinere' Mengen K als ohne diese Beschränkung.)

§5. Quantifikation über Gegenstände

Aussagen wie "Alle Ameisen sind sterblich" oder "Einige Äpfel sind rot" haben die Form "Alle P sind Q" bzw. "Einige P sind Q", oder in 'symbolischer' Schreibweise $\forall u\, (Pu \to Qu)$ bzw. $\exists u\, (Pu \wedge Qu)$. Der Gebrauch solcher Aussagen kann jedoch nicht wie bisher rekonstruiert werden, da wir nicht genügend Eigennamen für Ameisen oder Äpfel als Werte der Variablen u zur Verfügung haben. Daher betrachten wir auch Aussagen wie "Dies ist eine Ameise" oder "Diese Ameise hat nur fünf Beine", in denen **Indikatoren** wie "dies" oder "diese Ameise" vorkommen. Derartige Indikatoren werden nur vorübergehend wie Eigennamen für Gegenstände (z.B. Körper oder Ereignisse) verwendet.

Unter einer **Denotation** eines Indikators durch einen Gegenstand verstehen wir eine Benennung (Bezeichnung) dieses Gegenstandes mit dem erwähnten Indikator, die jedoch nur in einer speziellen Situation (oder einem speziellen Kontext) gelten soll. Eine solche Denotation kann z.B. durch *Zeigen* auf einen Gegenstand und gleichzeitiges Aussprechen des Indikators erfolgen.

Manchmal kann ein Gegenstand keinem Hörer gezeigt werden. Falls aber jemand für sich selbst z.B. festgestellt hat: "Diese Ameise hat nur fünf Beine", dann darf er jedem Hörer sagen, dass es eine Ameise *gibt*, die nur fünf Beine hat. Dementsprechend ist es auch für die folgenden Untersuchungen unerheblich, ob die Gegenstände, über die gesprochen wird, 'an sich existieren' oder ob sie erst vom Sprecher oder Hörer 'erzeugt' worden sind (wie z.B. Sternbilder) oder in anderer Weise von ihnen 'abhängen'. - Die vorläufig noch zu 'anspruchsvolle' Rede von Denotationen als *Funktionen* (Abbildungen) von Indiktatormengen in Gegenstandsmengen werden wir vermeiden.

Denotationen verschiedener Indikatoren treten ggf. durch Zeigehandlungen an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten in Kraft und gelten dann nur in getrennten Situationen. Für sprachliche Darstellungen verschiedener Denotationen lassen sich jedoch sprachliche Kontexte (an Stelle von Situationen) herstellen, in denen sie gemeinsam gelten. [Eine sprachliche Darstellung einer Denotation kann gegeben sein durch eine Beschreibung oder Kennzeichnung (etwa mit Angaben des Akteurs und der Zeit) der einzelnen Zeigehandlung (oder einer anderen aufmerksamkeitszuführenden Handlung), durch die sie (die Denotation) in Kraft getreten ist, und durch Anführung des zugehörigen Indikators.] Mehrere sprachlich dargestellte Denotationen verschiedener Indikatoren können also prinzipiell jederzeit und überall gemeinsam wieder in Kraft treten. Für in der Erinnerung 'aufbewahrte' Denotationen gilt dies nur in 'recht beschränktem Umfang'.

An Stelle von Indikatoren verwenden wir '**Gegenstandsvariable**' (für gewisse Sorten von Gegenständen). Diese Variablen sind zu unterscheiden von den bisher betrachteten 'Einsetzungsvariablen', deren freie Vorkommnisse durch Konstante (oder insbesondere Eigennamen) ersetzbar sind (vgl. [10, §26]). Wir betrachten nun eine Sprache $\mathcal{L}$, in deren Formeln auch Gegenstandsvariable frei oder gebunden vorkommen dürfen. - Da Gegenstandsvariable vorübergehend wie Eigennamen für Gegenstände verwendbar sein sollen, lassen wir zu, dass sie auch in Aussagen frei vorkommen. Aussagen seien also Formeln, in denen *höchstens* Gegenstandsvariable (also keine Einsetzungsvariablen) frei vorkommen. In Konstanten (von $\mathcal{L}$) mögen jedoch (hier in §5) *keine* Gegenstandsvariablen vorkommen. (In [19, §4] wird diese Einschränkung gesprengt.) - Als Metavariable verwenden wir: u, v für Gegenstandsvariable, und $\underline{u}, \underline{v}$ für Listen verschiedener Gegenstandsvariablen (ggf. auch für die 'leere Liste').

Eine Denotation einer einzigen Gegenstandsvariablen heiße **singulär**. Durch verschiedene Vollzüge von 'Nennhandlungen' erfolgte singuläre Denotationen seien zu unterscheiden. Angenommen, $u_1, \ldots, u_k$ seien verschiedene Gegenstandsvariable. Dafür, dass γ_i für jedes $i = 1, \ldots, k$ eine singuläre Denotation von u_i ist, sagen wir auch, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ sei eine Denotation von $u_1, \ldots, u_k$. Alle im Folgenden betrachteten

Denotationen seien auf diese Weise zusammengesetzt aus je endlich vielen singulären Denotationen verschiedener Gegenstandsvariablen.

Ist nun γ eine Denotation von $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_k$, und ist $\delta \rightleftharpoons (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ eine weitere Denotation, dann entstehe $\gamma\delta$ aus γ durch Hinzufügen derjenigen δ_i, die keine Denotationen je eines Gliedes von $\underline{u}$ sind. (Kurz: $\gamma\delta$ stimme für die Variablen $\underline{u}$ mit γ und sonst mit δ überein.)

In der Metasprache (Einführungs- bzw. Untersuchungssprache) verwenden wir somit u.a. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$ als Gegenstandsvariable für *singuläre* Denotationen - oder einzelne Vollzüge derselben. Damit übertragen wir den bereits in der Umgangssprache erlernten 'korrekten' Gebrauch von Indikatoren auf diese Gegenstandsvariablen. - Ferner schreiben wir γ, δ für singuläre oder zusammengesetzte Denotationen.

Kontexte von Behauptungen können situativ (Situationen) oder sprachlich sein. Auf sprachliche Kontexte gehen wir hier jedoch nicht weiter ein. - Das Kürzel "in δ" stehe für "in einem Kontext, in dem δ gilt (d.h. in dem alle Glieder von δ gelten)". - "$\natural\, A|\delta$" stehe für "A in δ behaupten". Dabei sei δ eine Denotation wenigstens aller in A frei vorkommenden Gegenstandsvariablen. (Für andere δ sei $\natural\, A|\delta$ verboten.)

Nun dehnen wir das primäre Spiel dadurch aus, dass wir dessen Regeln (s. §1) auf derartige Behauptungen wie folgt übertragen:

$$\begin{array}{llcl}
\mathrm{P}(\wedge) & \natural\,(A \wedge B)|\delta & :\Rightarrow & \natural\, A|\delta \text{ und } \natural\, B|\delta \\
\mathrm{P}(\vee) & \natural\,(A \vee B)|\delta & :\Rightarrow & \natural\, A|\delta \text{ oder } \natural\, B|\delta \\
\mathrm{P}(\exists) & \natural\,\exists \underline{x}\, A\underline{x}|\delta & :\Rightarrow & \text{für einen Wert } \underline{r} \text{ von } \underline{x} : \natural\, A\underline{r}|\delta \\
\mathrm{P}(\exists\,\mathrm{den}) & \natural\,\exists \underline{u}\, A|\delta & :\Rightarrow & \text{für eine Denotation } \gamma \text{ von } \underline{u} : \natural\, A|\gamma\delta \\
\mathrm{P}(\neg) & \natural\,\neg A|\delta & :\Rightarrow & A \text{ ist in } \delta \text{ ausgeschlossen.}
\end{array}$$

(Auch das Wort "ausgeschlossen" sei wie bisher zu verstehen.) Das primäre Spiel enthalte außerdem entsprechende (externe sowie interne) Regeln für Elementaraussagen; es enthalte jedoch keine weiteren Regeln für komplexe Aussagen. Daher dürfen die angeführten (internen) Regeln für komplexe Aussagen *umgekehrt* werden.

$\mathrm{P}(\exists\,\mathrm{den})$ dient zur Einführung einer Art von 'Gegenstands-Quantifikation' (vgl. [10, §26]). Sie ist u.a. deshalb für die Praxis wichtig, weil es für eine Existenzaussage $\exists \underline{u}\, A$, in der keine Gegenstandsvariablen mehr frei vorkommen, nicht vom Kontext abhängt, ob sie behauptet werden darf.

Hinweise wie "$|\delta$" auf Kontexte von Behauptungen werden wir gelegentlich fortlassen. Wenn wir auf diese Weise über *verschiedene* Behauptungen oder Ausschließungen reden, setzen wir voraus, dass sie alle im selben Kontext erfolgen.

Zu R1 - R29 analoge Regeln sind auch für die Gegenstands-Quantifikation zulässig. Als Beispiele angeführt seien folgende zu R6 und R7 analoge Regeln:

$$\begin{array}{rcl}
 & \Rightarrow & \neg\exists.\, \exists \underline{u}, v\, (F \wedge \neg\exists v\, F); \\
\neg\exists.\, \exists \underline{u}, v\, (F \wedge G) & \Rightarrow & \neg\exists.\, \exists \underline{u}\, (F \wedge \exists v\, G), \quad \text{falls } N(v, F).
\end{array}$$

Dabei kann in jedem Einzelfall die Liste $\underline{u}, v$ auch durch eine Permutation derselben ersetzt werden. Da in Konstanten weder Einsetzungs- noch Gegenstandsvariable (frei) vorkommen sollen, darf man sogar aufeinanderfolgende Einsquantoren, von denen einer eine Einsetzungsvariable und der andere eine Gegenstandsvariable bindet, vertauschen. (Ein allgemeineres Resultat zur Vertauschbarkeit von Quantoren ist in [19, §4] zu finden. Dies steht nicht tatsächlich im Widerspruch zu [10, §18].)

Eine *Gleichung* $u = v$ zwischen Gegenstandsvariablen (oder Eigennamen) kann zu der Mitteilung dienen, dass u und v im gegenwärtigen Kontext denselben Gegenstand bezeichnen. (Um zu entscheiden, ob dies zutrifft, braucht man i.Allg. die praktischen Fähigkeiten, Gegenstände von ihrer Umgebung abzugrenzen, wiederzuerkennen und voneinander zu unterscheiden.) - Um zu erreichen, dass $u = v \wedge Eu \rightarrow Ev$ für Elementaraussagen Eu gilt, genügt es,

$$u = v,\, Eu \;\Rightarrow\; Ev$$

als interne Regel aufzustellen. Eu darf insbesondere eine Gleichung $u = w$ sein. Ferner gelte $u = u$ als verankert. Das Gleichheitszeichen stellt dabei also eine *Äquivalenzrelation* dar. Dies mag als ideale Norm zum Identifizieren von Gegenständen dienen. - Durch Induktion über die Komplexität der Aussagen Au (von $\mathcal{L}$) erhalten wir sogar $u = v \wedge Au \rightarrow Av$.

Ist δ eine singuläre Denotation von u, dann sei $\delta[u/v]$ (für $v \not\equiv u$) die 'Ankündigung', im Kontext von δ gelegentlich auch v für u zu sagen (oder zu schreiben). Wir zählen sie zu den Denotationen von v. Deren Gebrauch sei festgelegt durch die interne Regel:

$$\Rightarrow u = v|(\delta, \delta[u/v]).$$

('Realistisch' gesprochen soll also im Kontext von $\delta[u/v]$ mit v derselbe Gegenstand bezeichnet werden wie in δ mit u.) - Als weitere interne Regel verwenden wir:

$$\natural\, E|\gamma \;\Rightarrow\; \natural\, E|\delta,$$

falls γ und δ - für jede in E vorkommende Gegenstandsvariable - dieselbe singuläre Denotation enthalten.

5.1. Satz: $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_k$ und $\underline{v} \equiv v_1, \ldots, v_k$ seien disjunkte Listen verschiedener Gegenstandsvariablen. Dann kann jede Denotation δ von $\underline{u}$ auf die Glieder von $\underline{v}$ fortgesetzt werden, und zwar derart, dass $u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ bei der so fortgesetzten Denotation behauptet werden darf. Für jede Aussage A, in der die Glieder von $\underline{v}$ nicht vorkommen, gilt in jedem Kontext

$$\exists \underline{u}\, A \;\leftrightarrow\; \exists \underline{v}\, A^{\underline{u}}_{\underline{v}} \quad \text{und} \quad \forall \underline{u}\, A \;\leftrightarrow\; \forall \underline{v}\, A^{\underline{u}}_{\underline{v}}.$$

Beweis: δ hat die Form $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$, wobei δ_i eine singuläre Denotation von u_i ist ($i = 1, \ldots, k$). Ferner sei $\delta' \rightleftharpoons (\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta_1[u_1/v_1], \ldots, \delta_k[u_k/v_k])$. Dann gilt

$u_i = v_i$ in δ' und daher $A \leftrightarrow A^{\underline{u}}_{\underline{v}}$ in jedem Kontext, in dem δ' für $\underline{u}, \underline{v}$ gültig ist. Nun kann man R22 - R25 und R14 anwenden. [Denn im primären Spiel ist es in keinem Kontext verboten, die zu δ' gehörigen singulären Denotationen auszuführen.]

Der folgende Satz 5.2 soll zur Rechtfertigung des klassischen Aussagengebrauchs in §6 beitragen. Dazu bilden wir für jede der bisherigen Aussagen B die neuen Aussagen $+B$ und $-+B$, und stellen folgende Regeln auf:

P(+) $\qquad \natural + B \;:\Rightarrow\; \natural B,$
P(+, −) $\qquad \natural + B,\ \natural - +B \;\Rightarrow\; \natural \perp$

als interne Regeln, sowie

$\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}(-)$ $\qquad \natural - +B \;:\Rightarrow\;$ B ist ausgeschlossen

als externe Regel. Deren rechte Seite ist damit äquivalent, dass $+B$ ausgeschlossen ist, und zwar nach den internen Regeln mit Ausnahme von P(+, −). - Analog zum Beweis von 3.4 (mit $+B$ statt E) ergibt sich nun, dass man im primären Spiel $\neg\neg + B$ erst dann behaupten darf, wenn B behauptet worden ist. Somit erhalten wir insbesondere:

5.2. Satz: $E_1, \ldots, E_n$ seien Elementaraussagen mit $n \geq 1$. Dann sollte man im primären Spiel $\neg\neg + \exists\underline{u}\,(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ in einem Kontext δ nur dann behaupten, wenn für eine Denotation γ von $\underline{u}$ schon $E_1, \ldots, E_n$ in $\gamma\delta$ verankert sind.

Zwar darf man im primären Spiel auch die Regel $B \Rightarrow +B$ (die Umkehrung von P(+)) anwenden. Dies ist aber nur der externen Regel $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}(-)$ zu verdanken. Dementsprechend ist die Regel $B \Rightarrow +B$ nicht klassisch zulässig (wie das Beispiel $B \equiv A \vee \neg A$ zeigt), und man darf $B \rightarrow +B$ i.Allg. nicht behaupten.

Womit wir hätten beginnen müssen

In §1 hatten wir die Umkehrbarkeit der Behauptungsregeln unter anderem damit begründet, dass die komplexen Aussagen eindeutig in ihre Komponenten (ggf. Teilaussagen) zerlegbar sind. Ferner haben wir 'syntaktische' Formeleigenschaften, die Substitutionen betreffen, in §2 stillschweigend benutzt, um z.B. in den Zulässigkeitsbeweisen für die Regeln R1 - R3 zu 'Widersprüchen' der Form $F^*, \neg F^*$ zu gelangen. Eine diese Eigenschaften lautet: Für jede Substitution $*$ von Einsetzungsvariablen durch Werte derselben gilt im Falle $F \equiv G$ auch $F^* \equiv G^*$. Hierbei dienen die Buchstaben F, G als *Gegenstandsvariable* für Vorkommnisse von Formeln an beliebigen Stellen - auch außerhalb solcher 'Gleichungen'. - Um derartige syntaktische Formeleigenschaften für alle Formeln von $\mathcal{L}$ beweisen zu können, muss man vor allem die gestaltliche Gleichheit von (Schreib-)Figuren ('Zeichenreihen') untersuchen. Sie kann in ähnlicher Weise eingeführt werden wie die Gleichheit in $\mathbb{N}$ (s. §4) oder nach dem Vorbild von [7, §5, §9]. Dabei und in den anschließenden Untersuchungen hat man jedoch *Gegenstandsvariable* für Vorkommnisse von Figuren zu verwenden. - Wir verzichten auf den Nachweis der erwähnten Formeleigenschaften, skizzieren aber die Einführung der Figurengleichheit, die wir dazu in eine Objektsprache verlagern (wobei wir dennoch das Zeichen "$\equiv$" beibehalten):

Unter einem 'Buchstaben' bzw. einem 'Wort' verstehen wir hier ein *Vorkommnis* einer zusammenhängenden 'atomaren' Figur bzw. einer Reihe solcher atomaren Figuren, das an einer bestimmten Stelle aufgeschrieben ist. Buchstaben zählen wir zu den Worten. Ein Buchstabe a heiße eine Kopie eines Buchstabens b genau dann, wenn a gestaltlich gleich b ist. - Gegeben seien k verschiedene Buchstaben, die wir 'Originalbuchstaben' nennen. $o_1, \ldots, o_k$ seien Kopien derselben. Wir verwenden sie als Eigennamen der Originalbuchstaben. Als Gegenstandsvariable verwenden wir jetzt

$$\begin{array}{rll} a, b & \text{für} & \text{Kopien von Originalbuchstaben} \\ t, u, v, w & \text{für} & \text{Worte aus Kopien von Originalbuchstaben.} \end{array}$$

Seien $v \equiv^\circ o_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $v \doteq ta$ Elementaraussagen mit folgender Bedeutung:

$$\begin{array}{rll} v \equiv^\circ o_i & \text{heiße:} & v \text{ ist gestaltlich gleich } o_i \quad (i = 1, \ldots, k) \\ v \doteq ta & \text{heiße:} & v \text{ besteht aus } t \text{ und } a \text{ in dieser Reihenfolge.} \end{array}$$

Ferner bezeichne '$=$' wieder die Identität der bezeichneten Gegenstände und '$\neq$' deren Verschiedenheit. Wir nehmen an, dass wir über Verfahren verfügen, nach denen man für jede Aussage der Form $v \equiv^\circ o_i$, $v \doteq ta$, $v = w$ oder $v \neq w$ in jeder Situation entscheiden kann, ob sie (den angegebenen Interpretationen gemäß) verankert ist. - Als interne Regeln wählen wir (wobei wir das Behauptungszeichen $\natural$ und Hinweise auf Denotationen fortlassen):

$$\begin{array}{rcl} & \Rightarrow & v = v \quad \text{(wie bisher)} \\ v = w,\ Ev & \Rightarrow & Ew \qquad \text{(wie bisher)} \\ v = w,\ v \neq w & \Rightarrow & \perp \\ v \equiv^\circ o_i,\ v \equiv^\circ o_j & \Rightarrow & \perp \quad \text{(falls } 1 \leq i < j \leq k \\ v \equiv^\circ o_i,\ v \doteq ta & \Rightarrow & \perp \\ b \doteq ta & \Rightarrow & \perp \\ v \doteq ta,\ v \doteq ub & \Rightarrow & t = u,\ a = b \quad \text{(zwei Regeln)} \\ v \doteq ta,\ w \doteq ta & \Rightarrow & v = w \end{array}$$

Nun führen wir Relationen $(\equiv_m)$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $(\equiv)$ ein, indem wir folgende internen Regeln aufstellen:

$$\begin{array}{rcl} v \equiv_0 w & :\Rightarrow & (v \equiv^\circ o_1^\circ \ \wedge\ w \equiv^\circ o_1^\circ) \ \vee\ \ldots\ \vee\ (v \equiv^\circ o_k^\circ \ \wedge\ w \equiv^\circ o_k^\circ) \\ v \equiv_{n+1} w & :\Rightarrow & \exists t, a, u, b\ (v \doteq ta \ \wedge\ w \doteq ub \ \wedge\ t \equiv_n u \ \wedge\ a \equiv_0 b) \\ v \equiv w & :\Rightarrow & \exists \kappa\ (\kappa \in \mathbb{N} \ \wedge\ v \equiv_\kappa w). \end{array}$$

(Diese Regeln werden missverständlich, falls eines der Symbole (außer $o_1, \ldots, o_k$), das wir für ihre Formulierungen benutzt haben, einem Originalbuchstaben gestaltlich gleich ist. In diesem Falle muss es in diesen Formulierungen durch ein anderes ersetzt werden.)

Die letzten drei Regeln sind *umkehrbar*, da keine weiteren Behauptungsregeln für Aussagen der Formen $v \equiv_m w, v \equiv w$ aufgestellt werden. Daher ergibt sich mittels arithmetischer Induktion, dass man $\forall v\,(v \equiv v)$ behaupten darf.

Die oben erwähnten syntaktischen Formeleigenschaften betreffen vor allem die gestaltliche Gleichheit von Bestandteilen der Objektsprache. Zu deren Untersuchung benötigt man nur endlich viele metasprachliche Aussagen, deren Längen und Komplexität somit insgesamt beschränkt sind. Daher erübrigt sich eine vorherige allgemeine Metametatheorie über die syntaktischen Eigenschaften der heranzuziehenden Metasprache.

§6. Wozu können Behauptungen im klassischen Spiel dienen?

Wir stellen nun Zwecke zusammen, denen Behauptungen verschiedenartiger Aussagen im klassischen Spiel dienen können, und zeigen, dass beim Übergang vom primären zum klassischen Spiel nur entbehrliche sprachliche Mittel fortfallen.

Nach dem Satz 3.4 (der auch für Elementaraussagen E mit Gegenstandsvariablen gilt), sollte man - auch im klassischen Spiel - eine Elementaraussage E erst dann behaupten, wenn E verankert ist. Daher kann auch die 'klassische' Behauptung von E dem Hörer oder Leser als Ersatz für eine unmittelbare Kenntnis einer Verankerung von E dienen, also etwa als Ersatz für eine Wahrnehmung oder Beobachtung oder das Resultat einer Untersuchung von Gegenständen.

Nach R01 und R03 sind die Regeln

$$\begin{array}{rcl} A,\ A \to B & \Rightarrow & B \\ \forall \underline{x}\ A\underline{x} & \Rightarrow & A\underline{r} \quad \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\,) \end{array}$$

klassisch zulässig. Somit gilt für das klassische Spiel:

$\natural\,(A \to B)$ kann dem Adressaten als die Empfehlung dienen, bei 'Bedarf' B dann zu behaupten (evtl. nur sich selbst gegenüber), wenn A zu Recht behauptet worden ist.

$\natural\,\forall \underline{x}\, A\underline{x}$ kann für 'beliebig viele' Werte $\underline{r}$ von $\underline{x}$ als Ersatz für $\natural\, A\underline{r}$ dienen.

Dementsprechend kann $\natural\,\forall \underline{u}\, A|\delta$ als Ersatz für $\natural\, A|\gamma\delta$ dienen, und zwar für beliebige Denotationen γ von $\underline{u}$.

Die Konjunktion ermöglicht übersichtlichere Formulierungen, z.B. $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \to B$ für $A_1 \to [A_2 \to (A_3 \to B)]$.

Im primären Spiel kann die Behauptung einer Adjunktion $A \vee B$ durch die kürzere Behauptung $\natural\, A$ oder $\natural\, B$ ersetzt werden. Die Behauptung einer Existenzaussage

$\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ ist in diesem Spiel ebenfalls entbehrlich, da man an ihrer Stelle auch $A\underline{r}$ - für einen Wert $\underline{r}$ von $\underline{x}$ - behaupten kann. Beim Übergang vom primären zum klassischen Spiel gehen also keine wesentlichen Ausdrucksmöglichkeiten dadurch verloren, dass behauptete Aussagen der Formen $A \vee B$ und $\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ als ihre doppelten Negate zu interpretieren sind.

Das soeben für $\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ Gesagte gilt jedoch nicht für Aussagen der Form $\exists \underline{u}\, A$ mit Gegenstandsvariablen $\underline{u}$; denn Aussagen A, in denen Gegenstandsvariable (Indikatoren) frei vorkommen, dürfen i.Allg. nur in bestimmten Situationen behauptet werden. Viele empirisch erhaltene Daten können aber in 'situationsunabhängigen' Aussagen der Form $\exists \underline{u}\, (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ zusammengefasst werden. Daher haben wir den Satz 5.2 angeführt, nach dem wir auch der *klassischen* Behauptung von $+\exists \underline{u}\, (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ entnehmen können, dass die Aussagen $E_1, \ldots, E_n$ für eine Denotation von $\underline{u}$ verankert sind. Dies zeigt, inwieweit der klassische Aussagengebrauch ausreicht, um über empirische Daten zu berichten.

Von konstruktivistischer und intuitionistischer Seite werden z.B. für Aussagen der Form $\forall x \in K.\, \exists y\, A(x, y)$ *direkte* Beweise verlangt, bei denen je ein 'Lösungsverfahren' V angegeben und gezeigt wird, dass man mittels V zu jedem $x \in K$ ein y mit $A(x, y)$ finden 'kann'. Am Ende von §4 haben wir gezeigt, dass dieses Beweis-Resultat - für klassisch zu verstehende $A(x, y)$ - ggf. in der Form (*) wiedergegeben werden kann. (Zur Formulierung von (*) ist allerdings die vorher benutzte Sprache i.Allg. durch die Aufnahme der Formel $V : x \mapsto y$ zu erweitern.) - Eine Verallgemeinerung des zu diesem Thema Gesagten muss noch ausgearbeitet werden.

Der im klassischen Spiel verfügbare Kalkül der klassischen Logik ermöglicht es in vielen Fällen, mathematische Beweise und andere Argumentationen zu vereinfachen. Zu beachten ist allerdings, dass ein direkter Beweis für eine Existenzaussage i.Allg. mehr 'Informationen' liefert als ein indirekter Beweis. Andererseits können diese Informationen (wie soeben erläutert) auch mit klassischen Mitteln formuliert werden. - Für Zwecke, die hier nicht berücksichtigt worden sind, könnte allerdings ein stärker eingeschränkter Gebrauch von Behauptungen geeigneter als der klassische Gebrauch sein.

Behauptungen unter Hypothesen

Im Folgenden beziehen wir uns stets auf unser klassisches Spiel. In ihm darf man generelle Aussagen erst dann behaupten, wenn dies nach den internen Regeln gerechtfertigt ist. 'Empirische Gründe' reichen zu einer derartigen Rechtfertigung nicht aus. Daher argumentiert man in der Alltagssprache und in empirischen Wissenschaften notgedrungen noch 'liberaler' als im klassischen Spiel. Dabei verwendet man allgemeine Hypothesen oder Vermutungen, die jedoch oft nicht einmal genannt werden. Ist H die Gesamthypothese, d.h. die Konjunktion aller aktuellen Hypothesen, so liegt es nahe,

(H) $\qquad B \quad \text{als Abkürzung für} \quad H \to B$

zu verwenden. Zulässige Schlussregeln bleiben dabei zulässig; denn für jede zulässige Schlussregel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ ist (wie man leicht zeigen kann) auch

$$H \to \mathcal{A}_1,\ \ldots,\ H \to \mathcal{A}_n \ \Rightarrow\ H \to \mathcal{B}$$

zulässig. [In den Aussageschemata $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}$ dürfen auch Metavariable für Indikatoren (Gegenstandsvariable) vorkommen.]

Das Abkürzungsschema (H) wird jedoch ungeeignet, sobald H ausgeschlossen worden ist. Bei der Verwendung (wahrscheinlich) falscher Hypothesen (z.B. Vereinfachungen von Vermutungen) könnte man, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, besser

$$B \quad \text{als Abkürzung für} \quad H \wedge T \prec B$$

benutzen. Diese Aussage bedeute, dass B nach den Schlussregeln der klassischen *Logik* aus H und bestimmten 'Tatsachen' T (d.h. bereits behaupteten Aussagen aus einer bestimmten Klasse) herleitbar ist (vgl. z.B. [9, p. 111], [20]).

Gelegentlich sind wir z.B. davon überzeugt, dass man nach Ausführung einer bestimmten Handlung a und im Verlauf einer anschließenden Zeitspanne σ einen bestimmten Zweck e_1 *oder* einen bestimmten anderen Zweck e_2 erreichen würde. Wir zeigen, dass es dann zu empfehlen ist, so zu handeln, als ob die entsprechende Hypothese $\forall\tau\,(A^{\tau-\sigma} \to +(E_1^\tau \vee E_2^\tau))$ (mit τ für Zeitpunkte) im klassischen Spiel behauptet werden darf: In diesem Spiel gilt nach dieser Hypothese: Falls $A^{\tau-\sigma}$ zu Recht behauptet worden ist, dann darf auch $+(E_1^\tau \vee E_2^\tau)$ behauptet werden; dazu muss aber (nach einem zu 5.2 analogen Satz) schon E_1^τ oder E_2^τ verankert sein. (Diese Verankerung wird also durch die genannte Hypothese 'vorweggenommen', falls $A^{\tau-\sigma}$ schon früher als τ behauptet wird.)

L i t e r a t u r

[1] Dalen, D. van: Intuitionistic Logic. In: D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. III, 1986, 225-339.

[2] Dummet, M.: The Logical Basis of Metaphysics; London 1991.

[3] Kambartel, F.: Notwendige Geltung. Zum Verständnis des Begrifflichen. In P. Janich (Hg.): Entwicklungen der methodischen Philosophie, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1992.

[4] Kolmogoroff, A.N.: Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Mathematische Zeitschrift Bd. 25 (1932), 58ff.

[5] Kreisel, G.: Mathematical logic. In T.L. Saaty (ed.), Lectures on Modern Mathematics III, Wiley & Sons, New York 1965, 95-195.

[6] Lorenz, K.: On the Criteria for the Choice of the Rules of Dialogic Logic.

In: Studies in Language Companion Series, Vol. 8, Amsterdam: Benjamins 1982, 145-157.
[7] Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Springer, Berlin 1955.
[8] -: Differential und Integral. Akad. Verlagsges. Frankfurt a.M. 1965.
[9] -: Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. B.I., Mannheim 1986.
[10] Quine, W.V.O.: Die Wurzeln der Referenz. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1989.
[11] Schroeder-Heister, P.: Popper's Theory of Deductive Inference and the Concept of a Logical Constant. History and Philosophy of Logic, 5 (1984), 79-110.
[12] Schütte, K.: Proof Theory. Springer, Berlin 1977.
[13] Sundholm, G.: Constructions, proofs and the meanings of the logical constants. J. Phil. Logic **12**, 1983, 151-172.
[14] Tennant, N.: Antirealism and Logic. Truth as Eternal; Oxford 1987.
[15] Troelstra, A.S., Schwichtenberg, H.: Basic Proof Theory. Cambridge University Press 1996.
[16] Weyl, H.: Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918, repr. Leipzig 1932 und New York o.J. 1960.
[17] Zahn, P.: Ein konstruktiver Weg zur Maßtheorie und Funktionalanalysis. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1978.
[18] -: Gedanken zur pragmatischen Begründung von Logik und Mathematik: In: H. Stachowiak (Hg.): Pragmatik IV, Meiner, Hamburg 1993, 424-455.
[19] -: A Normative Model of Classical Reasoning in Higher Order Languages, Synthese (2006), 148: 309 - 343.
[20] -: On the Use of Hypotheses in Cumulative Type Theory (Enlarged Version) TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik, Preprint Nr. 2428 (2005).