Über das Friedmannsche Kosmologische Modell

Steffen Fröhlich

Zusammenfassung

In der Relativitätstheorie Einsteins findet die Differentialgeometrie eine ihrer wichtigsten Anwendungen. Das war Grund genug, im Rahmen des Differentialgeometrie-Kolloquiums 2004 in Karlsruhe einige Aspekte dieser Theorie näher zu bringen.

Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Modellbildung der relativistischen Kosmologie. In knapper Form skizzieren wir dabei die Grundlagen der Newtonschen sowie der relativistischen Mechanik. Dieser Weg führt uns zu den Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation, deren Lösungsvielfalt im Falle maximal symmetrischer Räume im Rahmen der Friedmannschen Kosmologie hier angedeutet werden soll.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Teile:

1. Zunächst fassen wir wesentliche Aspekte der Newtonschen Mechanik zusammen. Die zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen werden wir sogleich auf kosmologische Probleme anwenden, ohne jedoch den Gültigkeitsbereich der Theorie kritisch zu hinterfragen. Wir erwarten, daß sich einige dieser Resultate als gewisse Grenzwerte einer allgemeineren Theorie zurückgewinnen lassen.

2. Im zweiten Abschnitt diskutieren wir wichtige Punkte der Speziellen Relativitätstheorie. Bereits die skizzenhaften Herleitungen relativistischer Effekte lassen darauf schließen, daß diese Theorie nicht nur eine Erweiterung der Newtonschen Mechanik für „schnell bewegte“ Bezugssysteme ist, sondern eine Korrektur dieser. Von fundamentaler Bedeutung ist der Begriff der *Eigenzeit,* was deren ausführlichere Darstellung rechtfertigt.

3. In Kapitel 3 behandeln wir die Grundgedanken der relativistischen Gravitationstheorie. Maßgeblich ist das Prinzip der Äquivalenz von schwerer und träger Masse, welches die Gleichheit von Gravitations- und Trägheitskräften nach sich zieht. Insofern wird das bekannte Galileische Relativitätsprinzip erweitert und konsequent umgesetzt. Als Anwendung berechnen wir die Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld. Der in Abschnitt 3.3 vorgeführte Newtonsche Grenzfall erlaubt eine anschauliche Deutung der zugrunde liegenden Metrik. Die Einsteinschen Feldgleichungen selbst können wir hier nur motivieren.

4. Das kosmologische Prinzip unterstellt eine maximale Symmetrie des dreidimensionalen (Unter-)Raumes im Großen. Unter den hier genannten Annahmen, auf welche wir aber nicht detailliert eingehen, gelingt es, die Einsteinschen Feldgleichungen in ein einfach zu handhabendes dynamisches System zu überführen. Wir gelangen so zum Friedmannschen kosmologischen Modell.

Die favorisierte Wahl kosmologischer Modelle ist in starkem Maße abhängig von der experimentellen Wissenschaft. Das Friedmannsche Modell legt lediglich einen theoretisch fundierten Unterbau. Es ist eine der ersten exakten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen im Rahmen der Kosmologie, hat aber bis zum heutigen Tag nichts von seiner Attraktivität verloren.

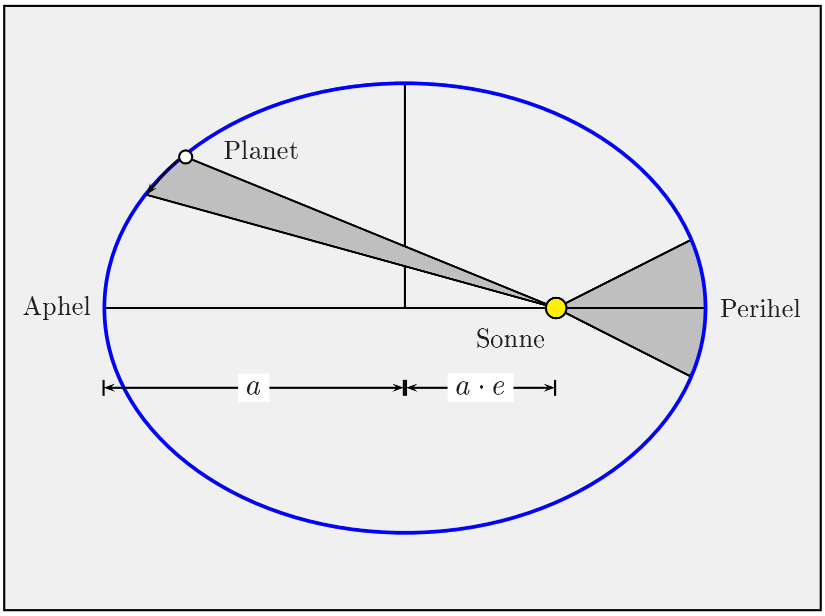
Die vorliegenden Ausführungen basieren vor allem auf das hervorragende Lehrbuch [5].

1 Newtonsche Mechanik

Nicolaus Kopernikus (1473–1543) gilt als Begründer des *heliozentrischen Weltsystems.* Erst in seinem Todesjahr erschien in Nürnberg sein Hauptwerk *De Revolutionibus Orbium Coelestium.* Bereits 1510 versandte Kopernikus wichtige Ergebnisse in Briefform an mehrere namhafte Astronomen ([1], S. 7).

Kopernikus hielt zeitlebens an der „Vollkommenheit der Kreisbewegung“ fest. Erst Johannes Kepler (1571–1630) gelangte zu einer allgemeineren mathematisch-physikalischen Auffassung.

Die nachstehende Skizze dient der Veranschaulichung der nachfolgenden Ausführungen.



1.1 Die drei Keplerschen Gesetze

In der *Astronomia nova* (Prag, 1609) formulierte Kepler seine ersten zwei Gesetze; das dritte Keplersche Gesetz findet sich in den *Harmonices mundi* von 1619 (vgl. [1], Abschnitt 2.1.2).

1. *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*

   Die enormen Schwierigkeiten, welche Kepler auf dem Weg zu diesem und dem folgenden Gesetz der Planetenbewegung meisterte, sind in [13], S. 46ff. trefflichst beschrieben.

2. *Die Verbindungslinie Planet-Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

   Insbesondere ist die Geschwindigkeit eines umlaufenden Körpers im sonnennächsten Punkt (Perihel) am größten, im sonnenfernsten Punkt (Aphel) am kleinsten. Dies steht im Einklang mit dem Energiesatz, wonach die Gesamtenergie des Körpers stets konstant ist.

3. *Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen a.*

   Bezeichnen also a_k und T_k für $k = 1, 2, \ldots$ die großen Bahnhalbachsen bzw. die Umlaufzeiten, so gilt

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \text{const.} \tag{1.1}$$

Kepler leitete diese Gesetze aufbauend auf den (nicht immer verläßlichen) astronomischen Beobachtungen von Kopernikus und de Brahe her. Die ersten beiden Gesetze fand er nach mühevollen trigonometrischen Berechnungen anhand Brahes Marsbeobachtungen.

1.2 Wichtige Planetendaten

Aus Gründen der Vollständigkeit wollen wir hier diejenigen Bahnelemente benennen, welche zu einer vollständigen Beschreibung der Planetenbahnen benötigt werden. Eine detaillierte Diskussion findet sich in [1], Kapitel 2.

1. Große Halbachse a
2. Exzentrität e
3. Neigung der Bahnebene zur Ekliptik i
4. Länge des aufsteigenden Knotens Ω
5. Abstand des Perihels ω
6. Siderische Umlaufzeit P
7. Zeitpunkt des Periheldurchgangs T

Die Elemente a und e bestimmen Größe und Form der Bahn, i und Ω die Bahnebene, ω die Lage der Bahn in ihrer Ebene und P und T den Ablauf der Bewegung.

Im folgenden sind wichtige Bahnelemente widergegeben (entnommen aus [1], Tabelle 2.2, S. 23).

Name	Große Halbachse in AE	Exzentrität	Neigung der Bahnebene in °	Mittlere Bahngeschwindigkeit in $km \cdot s^{-1}$
Merkur	0.387	0.206	7.0	47.9
Venus	0.723	0.007	3.4	35.0
Erde	1.000	0.017	—	29.8
Mars	1.524	0.093	1.8	24.1
Jupiter	5.205	0.048	1.3	13.1
Saturn	9.576	0.055	2.5	9.6
Uranus	19.28	0.047	0.8	6.8
Neptun	30.14	0.010	1.8	5.4
Pluto	39.88	0.248	17.1	4.7

1.3 Die Newtonschen Grundgesetze

Die mathematischen Grundlagen der Mechanik legte Isaac Newton (1642–1727) in seinem 1686 veröffentlichten *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Seine Untersuchungen basieren auf folgende drei Axiome.

1. *Trägheitsgesetz*

   Ein Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden, sofern er nicht einer äußeren Kraft unterworfen ist.

   Bedeuten m die Masse und $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Körpers, so ist dessen Impuls gemäß $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ definiert.

2. *Impulserhaltung – Grundgesetz der Dynamik*

   Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist proportional der Größe der äußeren, auf ihn wirkenden Kraft $\mathbf{F}$ *und erfolgt in Richtung dieser Kraft.*

   Insbesondere gilt im Falle konstanter Masse

   $$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \tag{1.2}$$

   mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ des Körpers.

3. *Der Satz von Actio und Reactio*

   Die Kräfte, welche zwei Körper aufeinander ausüben, sind ihrer Größe nach gleich und entgegengesetzt.

Eine ausführliche Diskussion dieser Grundgesetze in ihrem historischen Kontext findet sich in [8], insbesondere S. 53ff.

1.4 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Gemäß einer Vermutung des englischen Mathematikers und Architekts Christopher Wren genügt eine Kraft, die in Richtung auf die Sonne wirkt und deren Stärke umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung von der Sonne ist, um alle Planetenbewegungen zu erklären (vgl. für diese und folgende Ausführungen [8], S. 7ff).

Im Jahre 1684 begab sich der Astronom Edmond Halley auf den Weg von London zum Trinity College in Cambridge im Vertrauen, daß der dort wirkende Newton das mathematische Rüstzeug besäße, dieses schwierige Problem anzugehen.

Newton hatte gute Laune. Im übrigen habe er sich diese Frage schon vor einigen Jahren gestellt, und die Antwort darauf sei natürlich eine Kraft, die in Richtung auf die Sonne weist und deren Betrag umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung zur Sonne ist. Nur: Er habe den Beweis seinerzeit in eine Schublade gesteckt, und im Moment könne er sich nicht mehr erinnern, in welche.

Wenige Monate später betraute Newton ein Fellow des Trinity College, Halley ein wenige Seiten dünnes Manuskript zu übergeben, welches die erwähnte Antwort beinhaltet:

Zwei Körper mit den Massen M und m üben aufeinander eine anziehende Kraft aus, die in Richtung der Verbindungslinie wirkt mit dem Betrag

$$F = g\,\frac{mM}{r^2}\,, \quad g \approx (6.673 \pm 0.010) \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\,. \tag{1.3}$$

Die Gravitationskonstante g kann man grundsätzlich *nicht* aus astronomischen Beobachtungen ableiten; vielmehr muß sie durch terrestrische Messungen bestimmt werden. Der hier angegebene Wert wurde [1], Abschnitt 2.3.6 entnommen.

1.5 Die Dynamik des Universums nach Newton

Wir wollen die Newtonsche Mechanik auf das Universum anwenden. Dazu folgen wir den Ausführungen in [1], Abschnitt 13.1.2.

Zur Zeit t betrachten wir eine endliche, expandierende „Weltkugel" vom Radius $R(t)$. Ihre (konstante) Gesamtmasse berechnet sich zu

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi}{3}\, R(t)^3 \varrho(t) \in (0, +\infty) \tag{1.4}$$

mit der variablen Massendichte $\varrho = \varrho(t)$. Ein Massenpunkt auf der Oberfläche dieser Kugel bewegt sich gemäß

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\, g\, \frac{\mathcal{M}}{R^2} \tag{1.5}$$

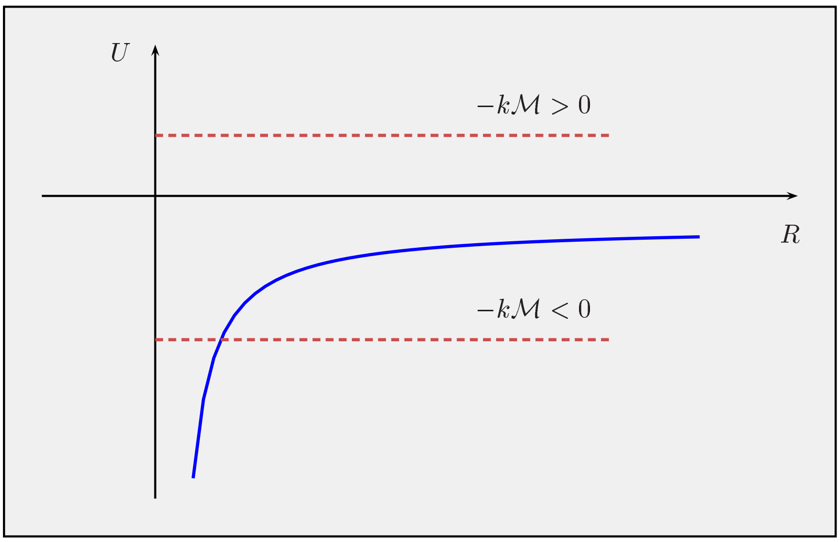
(hierzu verknüpfen wir das zweite Newtonsche Grundgesetz mit dem Gravitationsgesetz). Wir bemerken, daß in diesem Modell *keine* statischen Lösungen $R \equiv \mathrm{const}$ möglich sind. Multiplikation mit $\dot{R} := \frac{dR}{dt}$ und anschließende Integration liefert

$$\frac{\mathcal{M}}{2}\, \dot{R}^2 - g\, \frac{\mathcal{M}^2}{R} = -k\mathcal{M}. \tag{1.6}$$

Wir können diese Gleichung als Energiesatz interpretieren: Mit der kinetischen Energie $E_{kin} := \frac{\mathcal{M}}{2}\, \dot{R}^2$ und der potentiellen Energie $E_{pot} := -g\frac{\mathcal{M}^2}{R}$ erhalten wir

$$E_{kin} + E_{pot} = -k\mathcal{M}. \tag{1.7}$$

Die Dynamik der „Weltkugel" wird durch die Integrationskonstante $k \in \mathbb{R}$ bestimmt. Dazu sei der Verlauf der potentiellen Energie gegen verschiedene Absolutwerte von $-k\mathcal{M}$ skizziert.



Hieraus lesen wir folgende Dynamik ab:

1. $k < 0$: Die „Weltkugel" expandiert stets.
2. $k > 0$: Die Expansion geht in $R = R_{max}$ in eine Kontraktion über.
3. $k = 0$: Die Expansionsgeschwindigkeit geht asymptotisch gegen Null.

1.6 Newtonsche Feldtheorie

Die Bewegung eines Massenpunktes m in Gegenwart von N Massenpunkten m_i an den Orten $\mathbf{x}_i$ wird beschrieben durch

$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -g\sum_{i=1}^{N}\frac{mm_i(\mathbf{x}_i-\mathbf{x})}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}|^3}\,. \tag{1.8}$$

Mit dem Newtonschen Gravitationspotential

$$\Phi(\mathbf{x}) = -g\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|} = -g\int\frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d^3x'\,, \tag{1.9}$$

wobei wir über die einzelnen Beiträge $dm = \varrho(\mathbf{x}')\,d^3x'$ mit der Massendichte ϱ summieren, erhalten wir die *Bewegungsgleichung der Newtonschen Theorie*

$$m\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -m\,\nabla\Phi(\mathbf{x}). \tag{1.10}$$

Schließlich liefert Differentiation des Potentials die *Newtonsche Feldgleichung*

$$\triangle\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi g\varrho(\mathbf{x}). \tag{1.11}$$

Es ist das Ziel, diese Grundgleichungen auf den im folgenden zu besprechenden relativistischen Fall zu übertragen.

2 Elektrodynamik bewegter Körper

Zwischen den Koordinaten $\{\mathbf{x}, t\}$ und $\{\mathbf{x}', t'\}$ zweier Bezugssysteme S bzw. S' bestehe der Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t, \quad t = t'\,. \tag{2.1}$$

Der Ursprung von S' bewegt sich also relativ zu S gleichförmig mit $\mathbf{v}$; zur Zeit $t = 0$ befindet er sich in $\mathbf{x}_0$.

Das Newtonsche Grundgesetz $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ ändert sich unter dieser *Galilei-Transformation* nicht. Zum einen ist die Beschleunigung in beiden Systemen gleich, denn es gilt

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}\big(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t\big) = \frac{d^2\mathbf{x}'}{dt^2}\,. \tag{2.2}$$

Andererseits sind Größe und Richtung der auf ein Teilchen wirkenden Kraft $\mathbf{K}$ unabhängig von der Wahl der $S-$ bzw. $S'-$Koordinaten.

Die Invarianz des Newtonschen Grundgesetzes unter Galilei-Transformationen ist eine wichtige Symmetrieeigenschaft eben dieses Gesetzes. Sie beinhaltet ebenso das *klassische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten:* Besitzt ein Teilchen im System S' zu einem bestimmten Zeitpunkt die Geschwindigkeit $\mathbf{v}'$, so hat es in S die momentane Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}. \tag{2.3}$$

Eine hervorragende Einführung in dieses und die folgenden noch zu besprechenden Sachgebiete findet sich in [10].

2.1 Das Michelson-Morley-Experiment

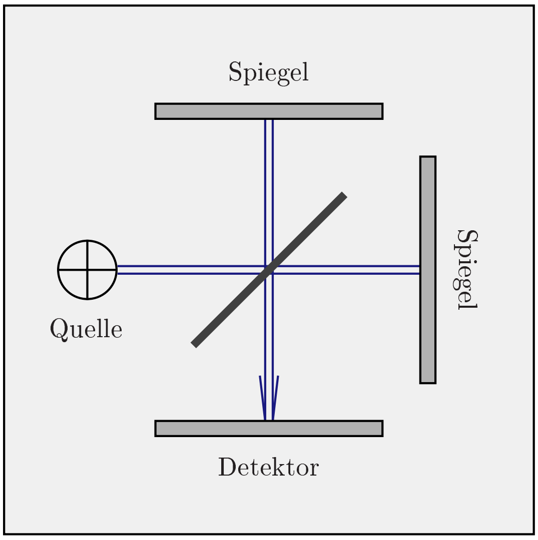
Unter einem Inertialsystem (IS) wollen wir ein Bezugssystem S verstehen, welches sich relativ zum Fixsternhimmel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Nicht-Inertialsysteme bewegen sich zu diesem beschleunigt.

Experimentell läßt sich bestätigen, daß die Beschreibung physikalischer Vorgänge in einem IS unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit welcher sich dieses IS gegenüber dem Fixsternhimmel bewegt. Das ist der Inhalt des Galileischen Relativitätsprinzips:

Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

Vor 1905 galten die oben eingeführten Galilei-Transformationen als die richtige Transformation zwischen IS. Die Maxwellsche Elektrodynamik ist in diesem Sinne nicht „relativistisch“. Daher vermutete man, ruhende und bewegte IS durch Experimente zur Lichtausbreitung unterscheiden zu können. Das Michelson-Morley-Experiment (Albert A. Michelson, 1852–1931; Edward Morley, 1833–1923) war angelegt, eine solche „Anisotropie“ nachzuweisen.

Auf einem starren Rahmen befinden sich eine Lichtquelle, ein halbdurchlässiger Spiegel, zwei Spiegel sowie ein Detektorschirm. Dabei sei die Verbindung des halbdurchlässigen Spiegels mit einem der Spiegel parallel zur Bahngeschwindigkeit der Erde montiert. Die Überlagerung beider auf den Schirm auftreffenden Lichtstrahlen erzeugt ein Interferenzmuster, welches sich gegenüber dem Muster verschoben zeigen sollte, welches entsteht, dreht man die gesamte Anordnung um 90°, so daß die Verbindung des halbdurchlässigen Spiegels mit dem zweiten Spiegel parallel zur Erdbewegung um die Sonne liegt.



Tatsächlich wurde keine Verschiebung beobachtet.

Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen gleichförmig zueinander bewegten Bezugssystemen gleich. Ihr numerischer Wert beträgt etwa (vgl. [1])

$$c = 2.997 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s} \, . \tag{2.4}$$

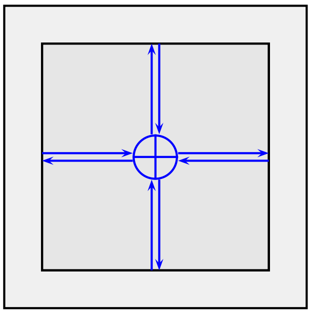
Albert Einstein (1879–1955) formulierte daher ein modifiziertes Relativitätsprinzip:

In allen IS haben die physikalischen Grundgesetze dieselbe Form.

Die Galilei-Transformationen können demnach nicht richtig sein. Vielmehr müssen sie durch die anschließend zu diskutierenden Lorentz-Transformationen ersetzt werden. In diesem neuen Sinne erweist sich die Maxwellsche Elektrodynamik als die relativistisch richtige Theorie.

2.2 Bewegte Maßstäbe verkürzen sich

Mit [7] betrachten wir einen Kasten der Länge 2ℓ, in dessen Mitte sich eine Lichtquelle befindet:



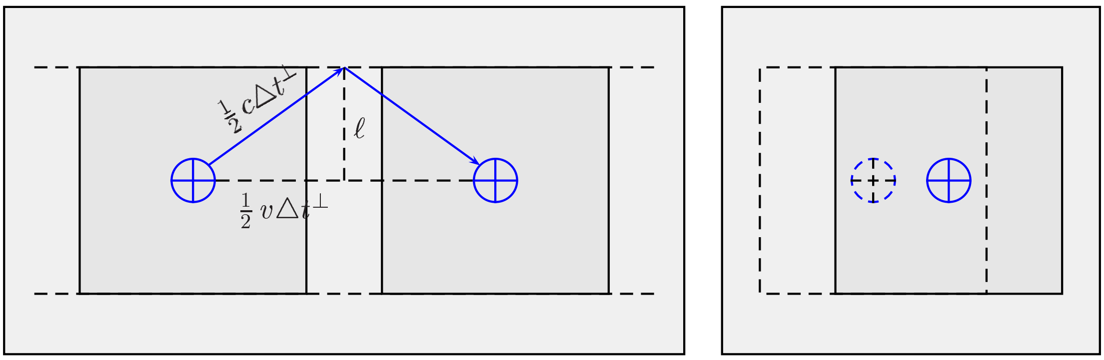
Zur Zeit t_0 werden in den markierten Richtungen ein Photon ausgesandt und dann an den Wänden reflektiert. Zur Zeit $t_1 > t_0$ treffen alle vier Photonen gleichzeitig auf die Quelle auf. Es gilt

$$\triangle t' := t_1 - t_0 = \frac{2\ell}{c}\,. \tag{2.5}$$

Nun aus der Sicht eines mit konstanter, in x-Richtung weisender Geschwindigkeit $v > 0$ bewegten Beobachters.

1. *Das nach oben ausgesandte Photon* benötigt eine Zeit $\triangle t^{\perp}$, um zur Quelle zurückzukehren. Nun bewegt sich Licht stets mit konstanter Geschwindigkeit c. Dem nachstehenden Bild links entnehmen wir

$$\left(\frac{1}{2}\,c\triangle t^{\perp}\right)^2 = \ell^2 + \left(\frac{1}{2}\,v\triangle t^{\perp}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \triangle t^{\perp} = \gamma\,\frac{2\ell}{c} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2.6}$$



2. *Das nach links ausgesandte Photon* benötigt eine Zeit $\triangle t^{\|}$, um zur Quelle zurückzukehren. (Zur Veranschaulichung betrachten wir die Zeit t_A, die das nach links emittierte Photon benötigt, um auf die linke Wand aufzutreffen, und die Zeit t_B, die das nach rechts emittierte Photon benötigt, um auf die rechte Wand aufzutreffen.)

(a) Weg von der Quelle zur Wand:

Die linke Wand hat sich um die Strecke vt_A nach rechts bewegt. Das Photon legt den Weg ct_A zurück. Der Abstand der Lichtquelle zur linken Wand ist genau ℓ, so daß gilt

$$\ell = vt_A + ct_A \quad \text{bzw.} \quad t_A = \frac{\ell}{c+v}\,. \tag{2.7}$$

(b) Weg zurück von der Wand zur Quelle:

Die rechte Wand hat sich um die Strecke vt_B nach rechts bewegt. Die vom Photon zurückgelegte Strecke ist $ct_B > \ell$, so daß folgt

$$\ell = ct_B - vt_B \quad \text{bzw.} \quad t_B = \frac{\ell}{c-v}\,. \tag{2.8}$$

Aus Symmetriegründen ist die Summe der Einzelzeiten die gesuchte Gesamtzeit:

$$\triangle t^{||} = t_A + t_B = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \gamma^2\,\frac{2\ell}{c}\,. \tag{2.9}$$

Wir vergleichen nun $\triangle t^{\perp}$ und $\triangle t^{||}$ und stellen für $v > 0$ fest

$$\triangle t^{\perp} = \gamma\,\frac{2\ell}{c} < \gamma^2\frac{2\ell}{c} = \triangle t^{||}\,. \tag{2.10}$$

Das kann nicht richtig sein! Das Auftreffen der vier Photonen ist nach dem Relativitätsprinzip *ein* physikalischer Vorgang, der nicht vom Beobachtungzustand abhängen kann. Einstein schlug nun folgende Lösung vor:

Die Länge des Kastens ist geschwindigkeitsabhängig.

Sei ℓ_{Ruh} die vom bewegten Zustand aus gemessene Kastenlänge in Richtung der y-Achse, entlang welcher keine Bewegung stattfindet, und sei ℓ_{Bew} die Länge des Kastens in Bewegungsrichtung. Nun müssen die Zeiten $\triangle t^{\perp}$ und $\triangle t^{||}$ gleich sein, d.h. wir *fordern*

$$\triangle t^{\perp} = \triangle t^{||} \quad \text{bzw.} \quad \gamma\,\frac{2\ell_{Ruh}}{c} = \gamma^2\,\frac{2\ell_{Bew}}{c} \quad \text{bzw.} \quad \ell_{Bew} = \gamma^{-1}\,\ell_{Ruh}\,. \tag{2.11}$$

Bewegte Maßstäbe verkürzen sich.

2.3 Die Lorentz-Transformationen

Diese letzte Beziehung zwischen ℓ_{Ruh} und ℓ_{Bew} ist relativistisch korrekt. Sie ist eine Konsequenz der die Galilei-Transformationen verallgemeinernden Lorentz-Transformationen:

Es seien $\{\mathbf{x}, t\}$ und $\{\mathbf{x}', t'\}$ Koordinaten zweier Inertialsysteme S und S'. Dabei bewege sich - von S aus gesehen - S' mit konstanter Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse. Dann gelten

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - \frac{xv}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2.12}$$

Detaillierte Herleitungen dieser Identitäten finden sich u.a. in [5], [6] und [10].

2.4 Minkowskiabstand und Eigenzeit

Wir denken uns ein vierdimensionales Koordinatensystem mit drei räumlichen Achsen x, y, z und einer zeitlichen Achse t.

Den *Minkowskiabstand* s_{12} zweier Ereignisse $\{\mathbf{x}_1, t_1\}$ und $\{\mathbf{x}_2, t_2\}$ definieren wir gemäß

$$s_{12} := c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \,. \tag{2.13}$$

Zwei durch ein Lichtsignal verbundene Ereignisse besitzen den Minkowskiabstand Null. Dessen Invarianz unter Lorentz-Transformationen in diesem speziellen Fall ist durch das Michelson-Morley-Experiment untermauert (die Invarianz dieses Abstandes für materielle Teilchen läßt sich ebenso experimentell bestätigen).

Ein Beobachter schaue auf seine ruhende Uhr. Zwei aufeinanderfolgende Ticks sind Ereignisse mit den Koordinatendifferenzen $\triangle \mathbf{x} = 0$ und $\triangle t > 0$, wobei $\triangle t = t_2 - t_1$ die Zeiteinheit der Uhr ist. Für den Minkowskiabstand beider Ereignisse gilt

$$\triangle s = \sqrt{c^2 \triangle t - (\triangle \mathbf{x})^2} = c \triangle t. \tag{2.14}$$

Die Größe $\triangle t = c^{-1} \triangle s$ heißt die *Eigenzeit* der Uhr. Sie hängt *nicht* vom gewählten Bezugssystem ab, vielmehr ist sie bis auf den Faktor c^{-1} gleich dem invarianten Minkowskiabstand.

In dieser Situation bestimmen wir nun die Anzeige τ einer mit konstanter Geschwindigkeit v bewegten Uhr. In S ruhende Uhren zeigen die Zeitspanne $t_2 - t_1$ an. In S' zeigt die bewegte Uhr die Zeit an, wie in *diesem* System ruhende Uhren. Differentiation der vierten Gleichung in (2.12) liefert damit für die Eigenzeit der bewegten Uhr

$$d\tau = dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \gamma^{-1}\, dt \quad \text{bzw.} \quad \tau = \int_{t_1}^{t_2} \gamma^{-1}\, dt. \tag{2.15}$$

Die bewegte Uhr zeigt in der Zeitspanne $t_2 - t_1$ die Zeit τ an. Sie geht also langsamer.

Mit dem invarianten Wegelement

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\, dt^2 - d\mathbf{x}^2 \tag{2.16}$$

erkennen wir auch hier die *Invarianz* der Eigenzeit: Aus (2.15) folgt nämlich

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 = \frac{1}{c^2}\,(c^2\, dt^2 - d\mathbf{x}^2) = \frac{1}{c^2}\, ds^2 \,. \tag{2.17}$$

Die Anzeige der Uhr hängt nicht vom Bezugssystem ab. Jeder Beobachter kann die Zeit τ in seinem System messen, wobei aber t_1, t_2 und v vom gewählten System abhängen.

2.5 Relativistische Dynamik

Wir benutzen die Indexschreibweise $x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.[1]

Die relativistische Verallgemeinerung der Geschwindigkeit $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ ist die 4-*Geschwindigkeit*

$$u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tau} \,. \tag{2.18}$$

[1] Griechische Indizes durchlaufen die Zahlen $0, 1, 2, 3$; lateinische Indizes durchlaufen $1, 2, 3$.

Beachte, daß $d\tau$ invariant ist, so daß sich u^α wie dx^α transformiert. Die relativistische Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{du^\alpha}{d\tau} = F^\alpha . \tag{2.19}$$

Hierbei ist $m > 0$ die im Ruhsystem bestimmte Masse. Der Grenzfall $v \ll c$ gibt unter geeigneter Wahl der Lorentzkraft F^α das Newtonsche Grundgesetz (1.2).

Der relativistische Impuls $p^\alpha = mu^\alpha$ berechnet sich mit (2.18) und (2.17) zu

$$p^\alpha = \gamma m(c, \mathbf{v}) = (c^{-1} E_{rel}, \mathbf{p}_{rel}) \tag{2.20}$$

unter Benutzung von

$$E_{rel} := \gamma mc^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_{rel} = \gamma m \mathbf{v}. \tag{2.21}$$

Wir können für im Betrag kleine Geschwindigkeiten $\mathbf{v}$ wie folgt entwickeln:

$$E_{rel} = mc^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \dots \tag{2.22}$$

mit der Ruhenergie $E_{rel,0} := mc^2$ (vgl. auch [4]).

2.6 Relativistische Hydrodynamik

Wir betrachten eine *ideale Flüssigkeit,* beschrieben durch eine Massendichte $\varrho(\mathbf{x}, t)$, ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ und einen isotropen Druck $P(\mathbf{x}, t)$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Massenelement $\triangle m$ lautet

$$\triangle m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \triangle \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \tag{2.23}$$

mit der Massendichte $\varrho := \frac{\triangle m}{\triangle V}$, $\triangle V$ das zum Massenelement gehörige Volumenelement, und der Kraftdichte $\mathbf{f} := \frac{\triangle \mathbf{F}}{\triangle V}$. Mit

$$d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) dt \tag{2.24}$$

folgt die *Eulergleichung*

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mathbf{f}_0 , \tag{2.25}$$

falls wir $\mathbf{f}$ aufteilen in den inneren Druckgradienten ∇P sowie in sonstige äußere Kräfte $\mathbf{f}_0$. Zusätzlich fügen wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.26}$$

hinzu, die die Massenerhaltung ausdrückt, sowie eine Zustandsgleichung zwischen ϱ und P, z.B. $\varrho = \text{const}$ für inkompressible Flüssigkeiten, oder $P = c\varrho$ für ein ideales Gas.

Die relativistische Verallgemeinerung von (2.25) und (2.26) führt im kräftefreien Fall $\mathbf{f}_0 = 0$ auf die *Kontinuitätsgleichung für Energie und Impuls*

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.27}$$

mit dem *Energie-Impuls-Tensor der Hydrodynamik*

$$T^{\alpha\beta} := \left(\varrho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} P. \tag{2.28}$$

Unter Benutzung der Einsteinschen Summenkonvention führen wir hier mit (2.16) das metrische Element $\eta_{\alpha\beta}$ gemäß $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ ein; es gilt $\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ mit dem Kronecker-Symbol δ^γ_α. Unter Berücksichtigung äußerer Kräfte (z.B. Gravitation) ist die rechte Seite in (2.27) durch eine 4-Kraft f^α zu ergänzen.

Zur Veranschaulichung betrachten wir ein in einem (endlichen) Volumen V abgeschlossenes System. Integration von (2.27) liefert unter Benutzung des Gaußschen Integralsatzes

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \int\limits_V T^{\alpha 0}\, d^3\mathbf{x} = - \int\limits_V \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}\, d^3\mathbf{x} = \int\limits_{\partial V} T^{\alpha i}\, dS_i = 0 \tag{2.29}$$

(beachte, daß das System innerhalb von V liegt). Das ist der *Energie-Impuls-Erhaltungssatz:*

$$P^\alpha := \frac{1}{c} \int\limits_V T^{\alpha 0}\, d^3\mathbf{x} = \text{const.} \tag{2.30}$$

P^α stellt den 4-Impuls des durch $T^{\alpha\beta}$ beschriebenen Feldes dar; insbesondere bedeuten cP^0 die Energie und die räumliche Größe P^i den Impuls des Feldes.

Ausführliche Berechnungen zum Energie-Impulstensor und dessen Interpretation finden sich in [5], Kapitel 6ff. Hieraus sind die vorstehenden Bemerkung entnommen.

3 Allgemeine Relativitätstheorie

3.1 Einsteins Äquivalenzprinzip

Galileis Aussage „Alle Körper fallen gleich schnell“ bedeutet, daß das Verhältnis

$$\frac{m_{\text{schwer}}}{m_{\text{träge}}} \tag{3.1}$$

von schwerer und träger Masse für alle Körper gleich ist. Wir wählen die zugehörigen Einheiten derart, daß $m_s = m_t$ gilt.

Die vorrelativistische Mechanik geht stets von dieser Gleichheit aus. Dann gilt aber auch

Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften.

Das ist die zentrale Aussage des *Äquivalenzprinzips.*

Dann lassen sich aber auch Schwerefelder durch einen geeigneten Übergang in ein beschleunigtes Koordinatensystem (lokal) eliminieren. Einstein formulierte:

In einem frei fallenden Koordinatensystem laufen alle physikalischen Prozesse so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei.

Dieses Postulat heißt *Einsteinsches Äquivalenzprinzip.*

In einem die Erde umkreisenden Satellitenlabor verlaufen die Bewegungen wenigstens für kurze Zeit so, als wäre kein Gravitationsfeld der Erde vorhanden. Die Vorgänge verlaufen wie in einem Inertialsystem. Da ein Satellitenlabor aber gegenüber dem Fixsternhimmel beschleunigt ist, stellt es gewissermaßen nur ein *Lokales Inertialsystem* dar. Einsteins Äquivalenzprinzip lautet dann:

In einem Lokalen IS gelten die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie.

Ein Beobachter im Satellitenlabor erfährt die physikalischen Vorgänge nach den Gesetzen der Speziellen Relativitätstheorie. Für einen Beobachter auf der Erde hingegen bewegt sich der Satellit im Gravitationsfeld der Erde. Aufgrund der Beschleunigung treten Trägheitskräfte auf, welche sich im freien Fall mit den Gravitationskräften exakt aufheben.

3.2 Bewegung im Gravitationsfeld

Das Äquivalenzprinzip erlaubt das Aufstellen relativistischer Gesetze mit Gravitation. Ausgehend von den Gesetzen ohne Gravitation im Satellitenlabor führt eine Koordinatentransformation z.B. zu einem Laborsystem auf der Erde zum relativistischen Gesetz mit Gravitation.

Ein kräftefreier Massenpunkt im Satellitenlabor bewege sich gemäß

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0 \tag{3.2}$$

mit der durch $ds^2 = c^2\, d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$ gegebenen Eigenzeit. Eine Transformation $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$ auf Koordinaten x^μ bedeutet für das Wegelement

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\mu dx^\nu =: g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu\,. \tag{3.3}$$

Setzen wir ferner diese Transformation in die Bewegungsgleichung (3.2) ein, so folgt mit

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\,, \quad \Gamma^\kappa_{\mu\nu} := \frac{g^{\kappa\lambda}}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right), \tag{3.4}$$

die *Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld.* Das ist zugleich die Bestimmungsgleichung einer *geodätischen Linie* in dem mit der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ ausgestatteten Raum.

Zur Deutung der Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ betrachten wir einen Koordinatenwechsel in ein rotierendes Koordinatensystem:

$$x = x'\cos(\omega t') - y'\sin(\omega t'), \quad y = y'\sin(\omega t') + y'\cos(\omega t'), \quad z = z', \quad t = t' \tag{3.5}$$

mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Wir berechnen

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]\, dt'^2 + 2\omega y'\, dx' dt' - 2\omega x'\, dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aus der letzten Zeile lassen sich die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ ablesen. Nun tritt in einem rotierenden Bezugssystem eine Zentrifugalkraft mit dem Potential

$$\Phi = -\frac{\omega^2}{2}\,(x'^2 + y'^2) \tag{3.7}$$

auf. Der Vergleich mit (3.6) zeigt

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}\,. \tag{3.8}$$

Es liegt also nahe, die $g_{\mu\nu}$ als Beschleunigungspotentiale anzusehen. Dem Äquivalenzprinzip zufolge stellen sie dann die relativistischen Gravitationspotentiale dar.

3.3 Der Newtonsche Grenzfall

Mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ betrachten wir die Störung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,. \tag{3.9}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v^i \ll c$ (d.h. unter Vernachlässigung von $\frac{dx^i}{d\tau}$) erhalten wir aus der Bewegungsgleichung (3.4)

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} \approx -\Gamma^\kappa_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\,. \tag{3.10}$$

Für *zeitunabhängige* Felder berechnen wir in dieser Näherung

$$\Gamma^\kappa_{00} = -\frac{g^{\kappa i}}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\frac{\eta^{\kappa i}}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \tag{3.11}$$

bzw.

$$\Gamma^0_{00} = 0, \quad \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\,. \tag{3.12}$$

Damit schreibt sich (3.10) in der Form

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}\,. \tag{3.13}$$

Diese Näherung stimmt mit (1.10) überein, wählt man (vgl. auch (3.8))

$$g_{00}(\mathbf{x}) = 1 + \frac{2\Phi(\mathbf{x})}{c^2}\,, \quad \frac{|\Phi|}{c^2} \ll 1. \tag{3.14}$$

Für das letztstehende Verhältnis geben wir folgende Abschätzungen an: $\frac{|\Phi|}{c^2} \approx 7\cdot 10^{-10}$ für die Erde, $\frac{|\Phi|}{c^2} \approx 4\cdot 10^{-6}$ für die Sonne (für diese Ausführungen vgl. [5], Kapitel 11).

3.4 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips lassen sich bereits wichtige physikalische Vorhersagen treffen, wie z.B. die Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld fallender Uhren oder die Bewegung von Probemassen im zentralsymmetrischen, statischen Feld. Hierzu zählt auch die Periheldrehung der Planeten im Sonnensystem (vgl. [6]).

Kosmologische Untersuchungen lassen sich nur unter Bezug einer allgemeinen Feldtheorie realisieren. Wir führen dazu die Einsteinschen Feldgleichungen ein.

In Abschnitt 3.2 hatten wir die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ bereits als Gravitationspotentiale gedeutet. Nach Multiplikation der Bewegungsgleichung (3.4) mit der Masse m eines Probekörpers lassen sich die Christoffel-Symbole $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ der Gravitationskraft zuordnen (vgl. (2.19)).

Die folgenden Überlegungen sind [5], Kapitel 21 entnommen. Wir gehen aus von der Newtonschen Feldgleichung (1.11). Im Falle kleiner Geschwindigkeiten $v^i \ll c$ hatten wir dabei in (3.14) den Zusammenhang $g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ hergestellt. Den Energie-Impuls-Tensor aus (2.28) entwickeln wir gemäß

$$T^{00} \approx \varrho c^2 + P - P = \varrho c^2\,, \quad \frac{T^{0i}}{\varrho c^2} \ll 1, \quad \frac{T^{ij}}{\varrho c^2} \ll 1. \tag{3.15}$$

Mit $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}T^{\gamma\delta}$ und damit $T_{00} \approx T^{00}$ erhalten wir mit (1.11) in der genannten Näherung

$$\triangle g_{00} = \frac{2}{c^2}\triangle\Phi = \frac{8\pi g}{c^4}\varrho c^2 = \frac{8\pi g}{c^4}T_{00}\,. \tag{3.16}$$

Verallgemeinernd läßt sich nun

$$\Box\, g_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi g}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad \text{mit } \Box := \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \tag{3.17}$$

ansetzen. Diese Gleichung enthält noch keinen Energiebeitrag des Gravitationsfeldes selbst. Mit einem unbekannten kovarianten, d.h. im Riemannschen Sinne forminvarianten Tensor $G_{\mu\nu}$ setzen wir nun

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi g}{c^4}T_{\mu\nu}\,. \tag{3.18}$$

Der Wechsel zu den Indizes μ, ν soll genau diese, die Forminvarianz der Gesetze gegenüber Lorentz-Transformationen in der Speziellen Relativitätstheorie verallgemeinernde Invarianz gegenüber allgemeinen, nichtlinearen Koordinatentransformationen andeuten (vgl. auch Abschnitt 4.3).

Das hier im Hintergrund stehende Symmetrieprinzip trägt den Namen *Kovarianzprinzip* (vgl. auch [5], Kapitel 19):

Gesetze im Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}(x)$ sind kovariante Gleichungen, die sich ohne Gravitationsfeld (also für $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$) auf die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie reduzieren.

Vom Riemann-Tensor $G_{\mu\nu}$ verlangt man folgende Eigenschaften:

1. $G_{\mu\nu}$ bildet sich linear aus den ersten und quadratisch aus den zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$.

2. $G_{\mu\nu}$ ist symmetrisch und divergenzfrei:

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} \quad \text{und} \quad {G_{\mu\nu}}^{;\nu} = 0 \tag{3.19}$$

   mit der durch $;\nu$ gekennzeichneten kovarianten Ableitung und nachträglicher Summation. Damit ist auch $T_{\mu\nu}$ divergenzfrei, was Energie- und Impulserhaltung ausdrückt.

3. Für ein schwaches, stationäres Feld muß sich im Grenzfall

$$G_{00} \approx \triangle g_{00} \tag{3.20}$$

   ergeben.

Diese Forderungen legen den Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$, wie eine längere Rechnung zeigt, eindeutig fest:

$$G_{\mu\nu} = -\left(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu}\right) \quad \text{bzw.} \quad R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi g}{c^4}\, T_{\mu\nu}\,. \tag{3.21}$$

Diese Gleichungen heißen *Einsteinsche Feldgleichungen der Gravitation.*

Hierbei gewinnt man den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ und den Krümmungsskalar R aus dem Riemannschen Krümmungstensor

$$R^{\varrho}{}_{\mu\lambda\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\varrho}_{\sigma\lambda} \tag{3.22}$$

durch folgende Spurbildungen:

$$R_{\mu\nu} = R^{\varrho}{}_{\mu\varrho\nu} \quad \text{sowie} \quad R = R^{\mu}{}_{\mu}\,. \tag{3.23}$$

Die Feldgleichungen lassen sich durch Einfügen eines in $g_{\mu\nu}$ linearen Termes modifizieren:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi g}{c^4}\, T_{\mu\nu}\,, \tag{3.24}$$

denn $g_{\mu\nu}$ ist selbst divergenzfrei. Da sich zumindest der Newtonsche Grenzfall von (3.21) in unserem Sonnensystem bewährt hat, muß die *kosmologische Konstante* Λ in (3.24) sehr klein sein. Beobachtungen an Supernovae und an der kosmologischen Hintergrundstrahlung ergeben einen Parameter

$$\Lambda \approx +10^{-52}\, m^{-2}\,. \tag{3.25}$$

Der zusätzliche Λ-Term wird also die Dynamik (großräumiger) kosmologischer Modelle wesentlich beeinflussen.

4 Das Friedmannsche Modell

4.1 Das kosmologische Prinzip

Unsere Sonne ist eine von mehreren hundert Milliarden Sternen des Milchstraßensystems, unserer Galaxis. Etwa 6000 dieser Sterne sind bereits mit bloßem Auge sichtbar. Die Galaxie besitzt einen Durchmesser von etwa 100.000 Lichtjahren.

Die Milchstraßensystem gehört zu einem selbstständigen Galaxienhaufen mit dem Namen Lokale Gruppe. Dieser besteht möglicherweise aus mehr als 30 Galaxien. Hierzu gehört auch der etwa zwei Millionen Lichtjahre entfernte Andromedanebel mit einem Durchmesser von 160.000 Lichtjahren.

Sechzig Millionen Lichtjahre entfernt finden wir den Virgo-Haufen, eine weitere Ansammlung von etwa 200 stark leuchtenden Galaxien.

Der Virgo-Haufen wiederum ist Zentrum eines lokalen Superclusters, einer Ansammlung von etwa hundert Galaxienhaufen, wozu auch die Lokale Gruppe zählt.

In weit größeren Maßstäben erkennt man zwei Galaxienansammlungen in Form großer Mauern, welche sich über mehr als 700 bzw. 1000 Millionen Lichtjahre erstrecken.

Dem zu diskutierenden Modell liegt folgendes von A. Einstein postulierte *kosmologische Prinzip* zu Grunde:

Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig.

Eine detaillierte Diskussion des kosmologischen Prinzips findet sich in [14].

4.2 Die Robertson-Walker-Metrik

Dem kosmologischen Prinzip zufolge suchen wir dreidimensionale Räume konstanter Krümmung. Nach H.P. Robertson und A.G. Walker machen wir dann folgenden Ansatz:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2\right) \right). \tag{4.1}$$

Hierin sind r, ϑ, φ dimensionslose und zeitunabhängige Koordinaten. Diese Koordinaten werden auf „typische“, d.h. radial frei fallende Galaxien mit Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi) = \text{const}$ angewandt, wobei sich die radiale Geschwindigkeit allein aus der Zeitabhängigkeit von $R(t)$ bestimmt. Die mit einer solchen Galaxie verbundene Uhr zeigt die Zeit t an.

Die Dynamik dieses Lösungsansatzes der Feldgleichungen wird also ausschließlich durch den Skalenfaktor $R(t)$ bestimmt, welcher die Dimension einer Länge hat. Den Parameter k schränken wir auf die Werte 0, $+1$ und -1 ein.

Zum Vergleich betrachten wir das Wegelement der zweidimensionalen Kugeloberfläche

$$ds^2 = R(t)^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) = R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2\,d\varphi^2\right) \tag{4.2}$$

mit der Setzung $r = \sin\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi]$. Für $k = +1$ ist die Analogie zu (4.1) offensichtlich.

Der räumliche Anteil

$$R(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2\right)\right) \tag{4.3}$$

in (4.1) entspricht im Falle $k = 0$ der Metrik eines Euklidischen Raumes. Für $k = +1$ erhalten wir die metrische Form der Sphäre mit den Winkelkoordinaten ϑ und φ, und $k = -1$ führt schließlich auf den Raum konstanter Krümmung $-\frac{1}{R(t)^2}$.

4.3 Friedmannsche Weltmodelle

Die in (4.1) gegebene Metrik dient im folgenden als Lösungsansatz für die Einsteinschen Feldgleichungen (3.24) mit kosmologischer Konstante. Wir übernehmen weiter den Energie-Impuls-Tensor aus (2.28) in kovarianter Darstellung:

$$T_{\mu\nu} = \left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} P. \tag{4.4}$$

Dabei sind die Vierergeschwindigkeiten u^μ wie folgt zu verstehen: In jedem Punkt des mit den Koordinaten x^μ ausgestatteten Riemannschen Raumes gibt es eine Transformation $x^\mu = x^\mu(\xi^\alpha)$ auf Koordinaten ξ^α eines Lokalen Inertialsystems. Dann definieren wir durch

$$u^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} u^\alpha \tag{4.5}$$

die zur bekannten Vierergeschwindigkeit u^α zugehörige, im Riemannschen Sinne forminvariante Vierergeschwindigkeit. Entsprechend definieren wir kontravariante Tensoren höhere Stufe und kovariante Tensoren durch Überschieben mit dem metrischen Tensor.

Wir kommen nun zur Auswertung der Einsteinschen Feldgleichungen. Nach dem kosmologischen Prinzip sind Massendichte ϱ und Druck P räumlich homogen: $\varrho = \varrho(t)$ und $P = P(t)$. „Typische" Galaxien, welche wir in dieses Modell aufnehmen, kennzeichnen sich durch $x^i = \text{const}$ aus. Mit $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = 0$ und $g_{00} = 1$ haben wir

$$(u^\mu) = (u_\mu) = (c, 0, 0, 0). \tag{4.6}$$

Aus (4.1) und (4.4) folgt

$$(T_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}\left(\varrho c^2, \frac{PR^2}{1-kr^2}, PR^2 r^2, PR^2 r^2 \sin^2\vartheta\right). \tag{4.7}$$

Eine längere Rechnung zeigt: Für die 00-Komponente der Feldgleichungen gilt

$$\frac{3}{c^2}\frac{d^2R}{dt^2} - \Lambda R = -\frac{4\pi g}{c^4}(\varrho c^2 + 3P)R\,, \tag{4.8}$$

für die räumlichen Komponenten ergibt sich die eine Gleichung

$$\frac{R}{c^2}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 2k - \Lambda R^2 = \frac{4\pi g}{c^4}(\varrho c^2 - P)R^2\,. \tag{4.9}$$

Diese Gleichungen werden noch durch eine thermodynamische Zustandsgleichung ergänzt, z.B.

$$\begin{aligned} &P = 0 \quad \text{als nichtrelativistische Näherung unseres heutigen Universums,}\\ &P = \frac{\varrho c^2}{3} \quad \text{für ein strahlungsdominiertes Universum.} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Wir setzen (4.8) in (4.9) ein und erhalten

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + k - \frac{1}{3}\Lambda R^2 = \frac{8\pi g}{3c^2}\varrho R^2\,. \tag{4.11}$$

Wir differenzieren diese Gleichung und subtrahieren hiervon (4.8) multipliziert mit $\frac{2}{3c}\frac{dR}{dt}$:

$$\frac{1}{c}\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{3}{Rc}\frac{dR}{dt}\left(\varrho + \frac{P}{c^2}\right). \tag{4.12}$$

Damit können wir (4.10) präzisieren:

$$\begin{aligned} \varrho_{mat}(t) R(t)^3 &= \text{const} \quad \text{für } P = 0, \\ \varrho_{str}(t) R(t)^4 &= \text{const} \quad \text{für } P = \frac{\varrho_{str} c^2}{3} \,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

In (4.11) setzen wir nun $\varrho = \varrho_{mat} + \varrho_{str}$. Unter der Annahme, daß Strahlung und Materie nicht koppeln, ist diese Annahme zulässig. Mit den Abkürzungen

$$K_{mat} = \frac{8\pi g}{3c^2}\, \varrho_{mat} R^3 = \text{const}\,, \quad K_{str} = \frac{8\pi g}{3c^2}\, \varrho_{str} R^4 = \text{const} \tag{4.14}$$

läßt sich (4.11) in die folgende Form überführen:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{K_{str}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{1}{3}\,\Lambda R^2 = -k. \tag{4.15}$$

Das ist das gesuchte *Friedmann-Modell* des Universums.

Führen wir das Potential

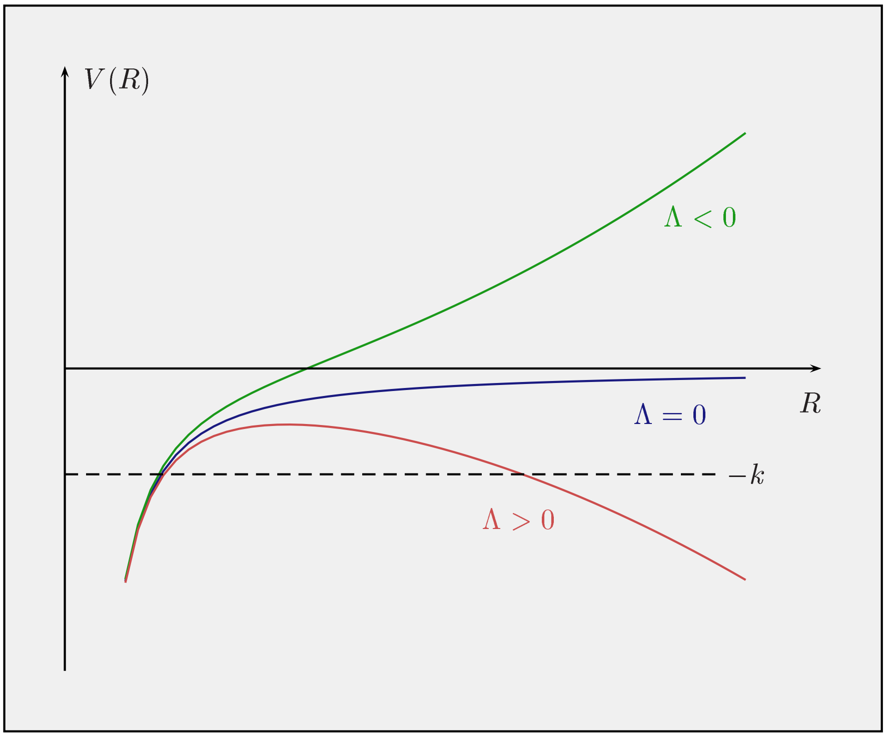
$$V(R) := -\frac{K_{str}}{R^2} - \frac{K_{mat}}{R} - \frac{1}{3}\,\Lambda R^2 \tag{4.16}$$

ein, so können wir auch

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + V(R) = -k \tag{4.17}$$

schreiben. Wir beachten, daß in $V'(R)$ der Term ΛR^2 nach Differentiation negatives Vorzeichen hat im Gegensatz zu den zwei ersten Summanden. Im Falle $\Lambda > 0$ trägt der kosmologische Term also zu einer *Expansion* bei.

Im folgenden ist der Verlauf des Potentials $V(R)$ für verschiedene kosmologische Parameter Λ skizziert. Hierin ist $k > 0$ angenommen.



Setzen wir $K_{str} = 0$ und $\Lambda = 0$, so geht (4.15) über in

$$\frac{\mathcal{M}}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - g\,\frac{\mathcal{M}^2}{R} = \text{const} \tag{4.18}$$

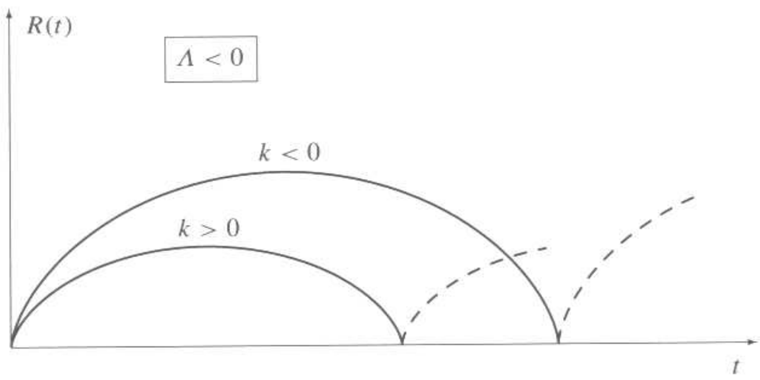
mit der Gesamtmasse $\mathcal{M}$ aus (1.4). Wir bemerken die formale Ähnlichkeit des Friedmann-Modells mit dem Newtonschen Modell aus (1.6).

Beispiel: Das Einstein-de Sitter-Universum

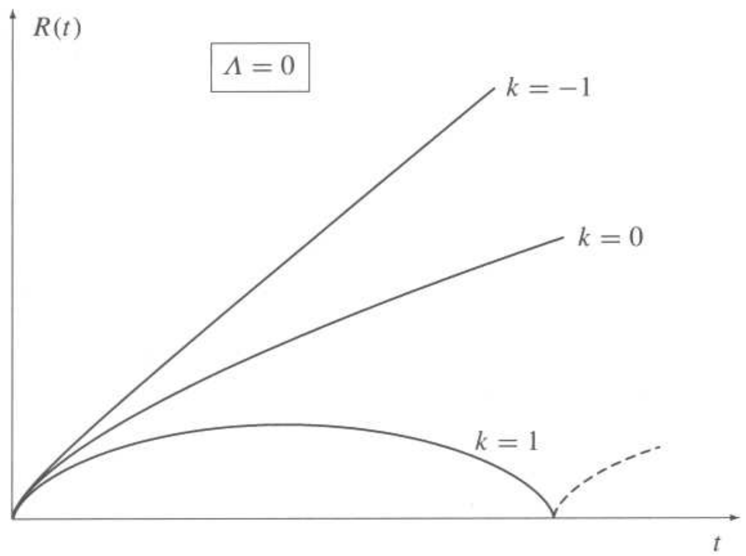
Dieses Modell geht aus dem Friedmann-Modell mit den Parametern $\Lambda = 0$ und $k = 0$ heraus. Aus obiger Skizze lesen wir ab, daß die Geschwindigkeit der Expansion asymptotisch gegen Null geht, d.h. es gilt

$$\frac{dR}{dt} \longrightarrow 0 \quad \text{für } R \to \infty. \tag{4.19}$$

Die folgenden Skizzen sind [5], Kapitel 52 entnommen.



Für $\Lambda < 0$ geht die Expansion in eine Kontraktion über.



Die Fälle $k = 1$, $k = 0$ und $k = -1$ entsprechen im analogen Zweikörperproblem der Ellipsen-, der Parabel- und der Hyperbelbahn. Das Modell $\Lambda = 0$, $k = 0$ heißt *Einstein-de Sitter-Universum.*

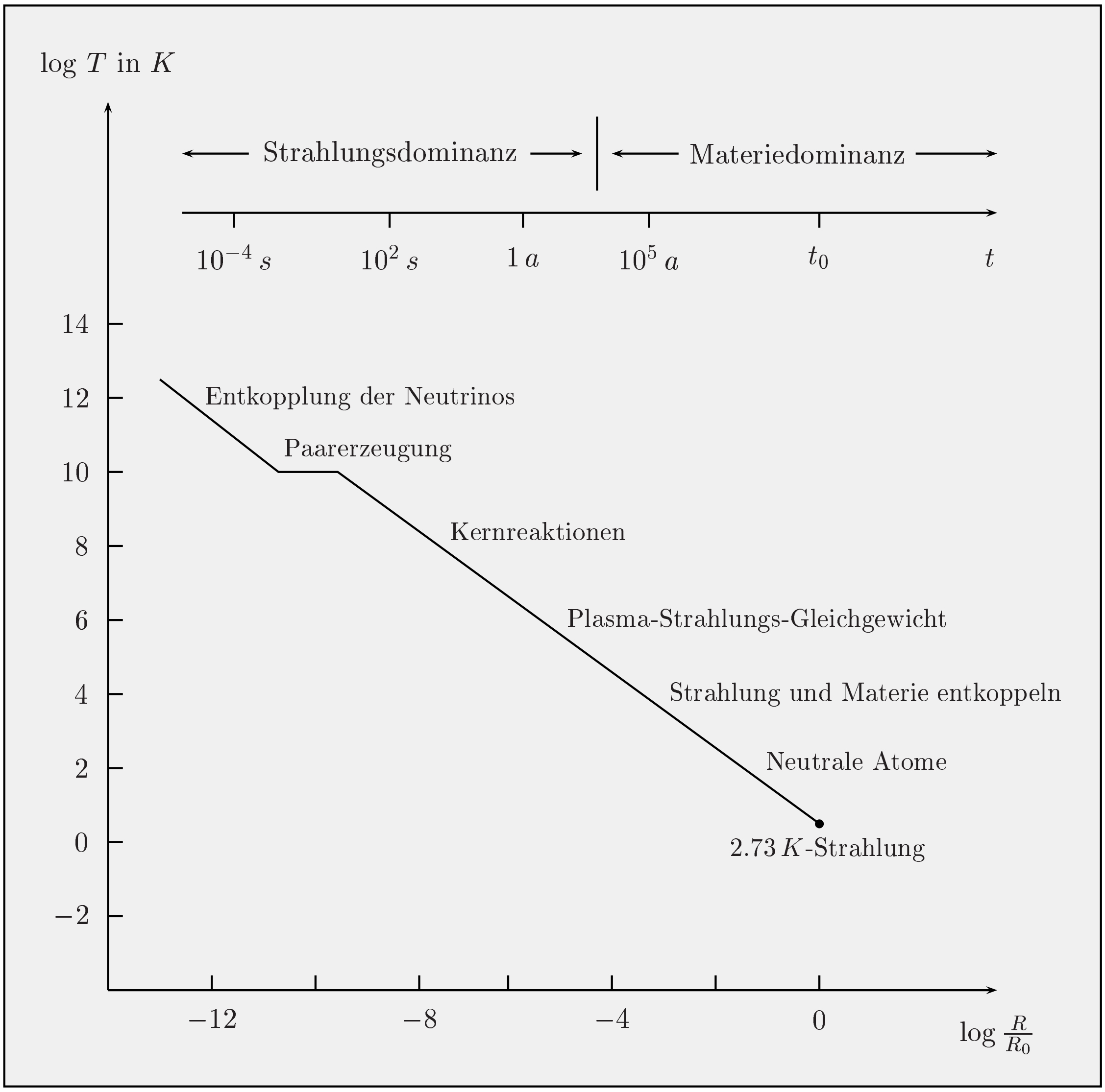
4.4 Das Kosmologische Standartmodell

Der belgische Priester, Physiker und Mathematiker Georges-Henri Lemaitre (1894–1966) gilt als der Begründer der Expansions-Theorie. Diese Dynamik des Universums im Rahmen der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie führte ihn umgekehrt zu einer Singularität $R(t) \to 0$ für $t \to 0$ für den Skalenfaktor $R(t)$ der Robertson-Walker-Metrik (vgl. [12]).

Zusammen mit den zugehörigen Bewegungsgleichungen für $R(t)$ spricht man vom *kosmologischen Standartmodell* (ohne Inflation).

Bei Annäherung an die Singularität $R = 0$ werden die Aussagen im Rahmen dieser Theorie zunehmend spekulativ.

Die folgende Skizze ist nach [5], Kapitel 54 entnommen. Sie stellt die Temperatur des Universums in Abhängigkeit von seiner relativen Grösse $\frac{R}{R_0}$ dar; dabei ist R_0 der heutige Wert.



In den 70er Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts wurde das Standartmodell durch einen inflationären Term erweitert: Demnach soll sich innerhalb des Zeitraums $10^{-36}\,s$ bis $10^{-33}\,s$ nach der Singularität $t = 0$ das Universum exponentiell ausgedehnt haben (siehe hierzu [9] und [11]).

Ein ähnliches Szenario wurde bereits von de Sitter vorgeschlagen, wobei jetzt der kosmologische Term Λ die wesentliche Rolle spielt. Demnach sollte Λ aus verschiedenen Gründen, auf die wir nicht eingehen, zeitabhängig sein. Ist Λ nun groß genug, so daß Materie- und Strahlungsdruck vernachlässigt werden können, so läßt das Friedmann-Modell eine exponentielle Lösung des Skalenfaktors zu.

Setzen wir nämlich $\varrho_{mat} \approx 0$, $\varrho_{str} \approx 0$ und $k \approx 0$ in (4.15) ein, so folgt

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{3}\Lambda \equiv H \tag{4.20}$$

mit der *Hubble-Zahl* H. Mit $\triangle t = 10^{-33}\,s$ erhalten wir näherungsweise

$$\frac{R(10^{-36}\,s + 10^{-33}\,s)}{R(10^{-36}\,s)} = e^{H\triangle t}\,. \tag{4.21}$$

Gegenwärtige Modelle favorisieren $H \approx 10^{35}\,s^{-1}$, womit das Skalenverhältnis etwa e^{100} beträgt (vgl. [1], Abschnitt 13.3.4).

Literatur

[1] Baschek, B.; Unsöld, A.: *Der Neue Kosmos.* Springer-Verlag, 2002.

[2] Bellone, E.: *Galilei: Leben und Werk eines unruhigen Geistes.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Biographie **1,** 1998.

[3] Bergia, S.: *Einstein: Das neue Weltbild der Physik.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Biographie **4,** 1999.

[4] Einstein, A.: *Elementary derivation of the equivalence of mass and energy.* Bull. (New Series) Amer. Math. Soc. **37,** No. 1, 39–44, 2000.

[5] Fliessbach, T.: *Allgemeine Relativitätstheorie.* Spektrum Akademischer Verlag, 2003.

[6] Goenner, H.: *Spezielle Relativitätstheorie und die klassische Feldtheorie.* Spektrum Akademischer Verlag, 2004.

[7] Gron, O.; Hervik, S.: *Einstein's general theory of relativity.* Internetdatei *www.fys.uio.no/∼sigbjorh/gravity.pdf*

[8] Guicciardini, N.: *Newton: Ein Naturphilosoph und das System der Welten.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Biographie **3,** 2001.

[9] Guth, A.: *Die Geburt des Kosmos aus dem Nichts.* Knaur Taschenbücher, 2002.

[10] Haake, F.: *Einführung in die Theoretische Physik.* Weinheim: Physik-Verlag, 1983.

[11] Hu, W.; White, M.: *Die Symphonie der Schöpfung.* Spektrum der Wissenschaft 5/2004, 48–55.

[12] Lemaitre, A.G.: *The expanding universe.* Gen. Rel. Grav. **29,** No. 5, 641–680, 1997.

[13] Lombardi, A.M.: *Johannes Kepler: Einsichten in die himmlische Harmonie.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Biografie **4,** 2000.

[14] Strauss, M.A.: *Galaktische Wände und Blasen.* Spekrum der Wissenschaft 6/2004, 60–67.