Katenoidähnliche Lösungen geometrischer Variationsprobleme [1]

Steffen Fröhlich

Zusammenfassung

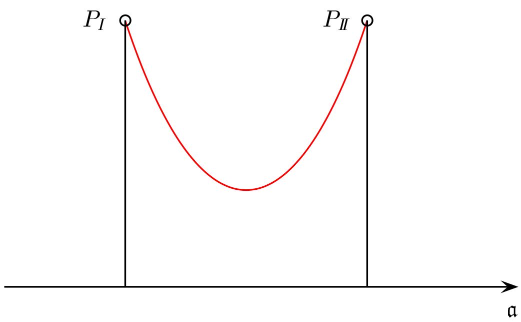
Das klassische Variationsproblem für das Katenoid wird auf weitere Klassen parametrischer Funktionale erweitert. Insbesondere betrachten wir Variationsprobleme mit Volumennebenbedingungen, kristalline Funktionale und Variationsprobleme höherer Ordnung.

1. Das klassische Katenoid

1.1 Problemstellung

In dem im Jahre 1744 erschienenen Werk "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici sensu accepti" Leonhard Eulers finden wir folgendes Variationsproblem:

Gesucht ist diejenige ebene Kurve $\mathfrak{k}$, welche (i) zwei gegebene Punkte P_I und P_{II} über einer Achse $\mathfrak{a}$ verbindet und (ii) nach Rotation um $\mathfrak{a}$ eine Fläche minimalen Inhalts $\mathfrak{A}$ erzeugt.



Wir fragen also nach einer Funktion $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, welche für $x = x_1$ und $x = x_2$ vorgeschriebene Randwerte y_1 bzw. y_2 annimmt, als auch der Ungleichung

$$\mathfrak{A}(y) = 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \le 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} \bar{y}(x)\sqrt{1+\bar{y}'(x)^2}\,dx = \mathfrak{A}(\bar{y}),$$

verglichen mit allen (zulässigen Test-) Funktionen $\bar{y} = \bar{y}(x)$ mit denselben Randwerten, genügt. Integration der zu diesem Variationsproblem gehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung

[1] Zahlreiche äußerst fruchtbare Diskussionen zu diesem hier vorgestellten Themenkomplex verdanke ich Prof. Dr. Karsten Große-Brauckmann.

liefert eine Extremale der Form

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

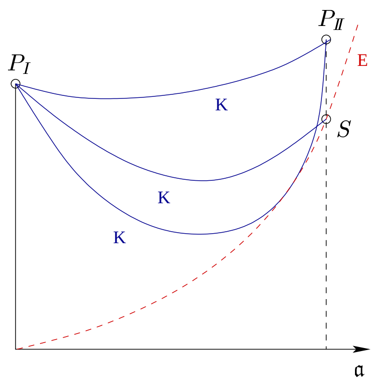
Die reellen Integrationskonstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus den Randbedingungen $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$; vgl. [8], Abschnitt 4 für eine detaillierte Untersuchung.

Die gefundene Lösung $y = y(x)$ heißt eine *Kettenlinie,* dargestellt in der obigen Skizze. Die Fläche, welche durch Rotation dieser Kurve um die Achse $\mathfrak{a}$ entsteht, heißt *Kettenfläche* oder *Katenoid.*

Die Frage nach der Existenz solcher zweifach zusammenhängenden Minimalflächen, welche eine vorgegebene Randkontur einspannen, wird i.a. im Rahmen der direkten Methoden der Variationsrechnung diskutiert. Wir werden hier bekannte Resultate benennen, welche unter Zuhilfenahme der zugehörigen (konform parametrisierten) elliptischen Differentialgleichungssysteme gewonnen werden können. Später lassen sich Regularitätsaussagen treffen. Wir werden diese Systeme und ihre Reduktion auf rotationssymmetrische Flächen angeben.

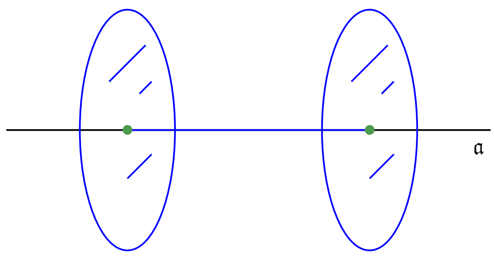
1.2 Schar von Kettenlinien

Die einparametrige Schar der dem Punkt P_I entspringenden Extremalen besitzt eine Einhüllende E, wie untenstehend skizziert. Wächst der Anstieg der Kettenkurven im Punkt P_I von $-\infty$ bis $+\infty$, so wandert der Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinate von P_{II} von $+\infty$ bis S und wieder zurück.



Daraus entnimmt man folgendes: Befindet sich P_{II} oberhalb der Einhüllenden, wie dargestellt, so finden wir wenigstens eine Kettenkurve der oben berechneten Form; tatsächlich existieren genau zwei Lösungen. Im Fall $P_{II} \in E$ gibt es genau eine Kurve von P_I nach P_{II}. Und schließlich besitzt unser Randwertproblem keine Lösung, liegt P_{II} unterhalb der Einhüllenden.

Im letzteren, wie auch im zweiten Fall, ist die Fläche minimalen Inhalts nicht eine zusammenhängende, reguläre Rotationsfläche, sondern diejenige gebrochene Extremale (Goldschmidt-Lösung), welche aus zwei Kreisscheiben in x_1 und x_2 sowie den sie verbindenden Abschnitt der Achse $\mathfrak{a}$ besteht.



Weitergehende Untersuchungen im Rahmen der klassischen Variationsrechnung finden sich in [2], Kapitel IV.

1.3 Das Katenoid als Delaunay-Fläche

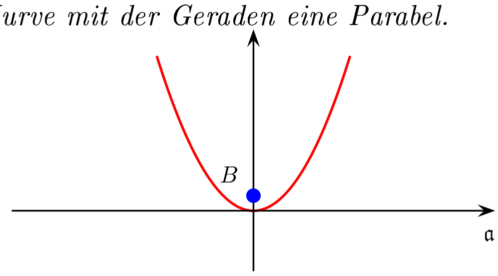
Das Katenoid läßt sich durch folgenden einfachen dynamischen Prozeß erzeugen:

Rollt man eine Parabel auf der Achse $\mathfrak{a}$ ab, so beschreibt ihr Brennpunkt B nach C. Delaunay (1841) eine Kettenlinie als Spurkurve.

Rotation dieser Brennpunktkurve wiederum um die Achse $\mathfrak{a}$ generiert eine Fläche verschwindender mittlerer Krümmung, eben das Katenoid.

Ein gewisse Umkehrung dieses Satzes entnehmen wir [33], Band 1, Abschnitt I.14:

Beim Abrollen der Kettenlinie auf einer Geraden beschreibt der Krümmungsmittelpunkt des Berührungspunktes der Kurve mit der Geraden eine Parabel.



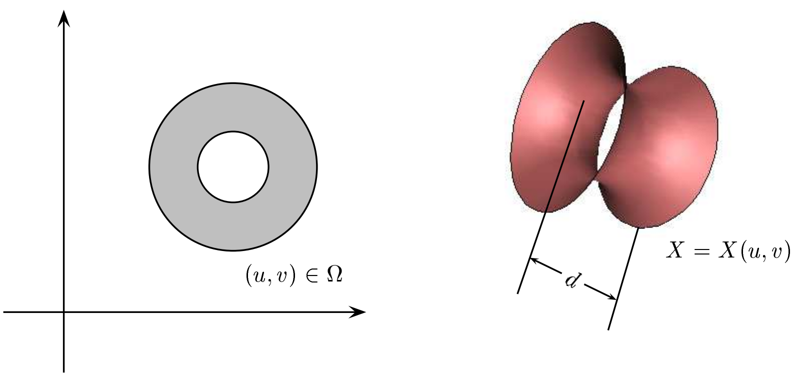
Später werden wir auf das Abrollen allgemeinerer Kegelschnitte zurückkommen und auf diese Weise rotationssymmetrische Flächen konstanter mittlerer Krümmung erzeugen.

1.4 Das Minimalflächensystem

Unsere geometrische Ausgangssituation $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ ist die folgende:

Im Abstand $d > 0$ seien zwei konzentrisch und parallel gelegene Randkreise Γ_1 und Γ_2 vom gemeinsamen Radius $R > 0$ gegeben.

Ferner sei $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ eine differentialgeometrisch reguläre und zusammenhängende Fläche, welche beide Randkreise einspannt und auf einem ringförmigen Parametergebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist.



Das Douglas-Problem (als Verallgemeinerung des Plateauschen Problems; siehe auch [24], Kapitel V und VI) besteht nun darin, eine Fläche dieser Art zu finden, welche gleichsam das Oberflächenfunktional

$$\mathfrak{A}(X) = \iint_{\Omega} |X_u \wedge X_v| \, dudv$$

minimiert. Hierbei ist $\wedge$ das gewöhnliche Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$; die Indizes u und v bedeuten die partiellen Ableitungen nach den entsprechenden Parametern.

Zur Darstellung der Fläche wählen wir ein konformes (d.h. isothermes) Parametersystem $(u, v) \in [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, wobei letzteres Rechteckgebiet aus Ω nach Anwendung der Exponentialabbildung hervorgeht. Die Konformitätsrelationen lauten

$$|X_u|^2 = W = |X_v|^2 \, , \quad X_u \cdot X_v^t = 0$$

mit dem Oberflächenelement $W := |X_u \wedge X_v|$; X^t bedeutet hier den zu $X \in \mathbb{R}^3$ transponierten Vektor (zur Einführung isothermer Parameter in eine Riemannsche Metrik siehe [29]).

Eine konform parametrisierte Lösung des Douglasschen Problems genügt dem (nichtlinearen elliptischen) Minimalflächensystem

$$\triangle X(u, v) = X_{uu}(u, v) + X_{vv}(u, v) = 0.$$

Wir suchen eine Lösung in der Klasse der rotationssymmetrischen Immersionen mit dem Ansatz

$$X(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)).$$

Die hierin auftretenden Funktionen $f = f(u)$ und $g = g(u)$ bestimmen sich daher aus

$$f''(u) = f(u), \quad g''(u) = 0$$

zusammen mit der Konformitätsrelation

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 = f(u)^2\,.$$

Die Meridianfunktion $f = f(u)$ betrachten wir nun näher.

1.5 Bemerkungen zum Minimalflächensystem

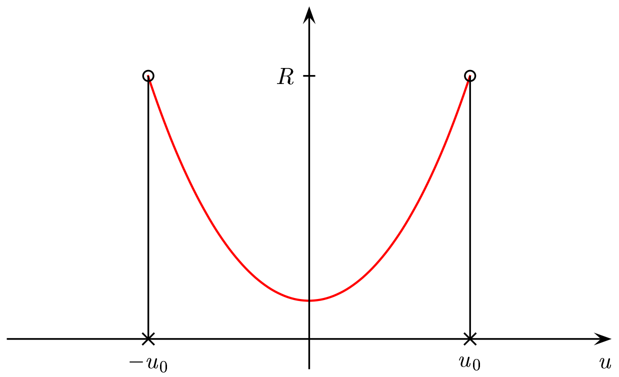
Zur Vereinfachung sei das Randwertproblem

$$f''(u) = f(u) \quad \text{in } (-u_0, u_0), \quad f(-u_0) = R = f(u_0),$$

mit $u_0 > 0$ vorgelegt, welches für alle Randdaten $R > 0$ die Lösung

$$f(u) = \frac{R}{e^{u_0} + e^{-u_0}}\left(e^u + e^{-u}\right) = \frac{2R}{e^{u_0} + e^{-u_0}}\cosh u,$$

besitzt, dargestellt in der folgenden Skizze:



Eine zweimal stetig differenzierbare Lösung unseres Problems ist reell analytisch, konvex, positiv und symmetrisch (bezüglich symmetrischer Randbedingungen), d.h. es gilt

$$f(-\varepsilon) = f(\varepsilon) \quad \text{für alle } \varepsilon \in [0, u_0].$$

Über einen Potenzreihenansatz lassen sich diese Eigenschaften auch unmittelbar aus der Differentialgleichung herleiten: Betrachten wir als Beispiel die ungerade Funktion

$$g(u) := f(u) - f(-u)$$

mit $g''(u) = g(u)$, und setzen entsprechend

$$g(u) = c_1 u + c_3 u^3 + c_5 u^5 + \ldots,$$

so erhalten wir $(k+2)(k+1)c_{k+2} = c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit haben alle Koeffizienten c_k, k ungerade, das gleiche Vorzeichen, *und es ist* $g(u_0) \neq 0$, *falls* $c_1 \neq 0$. Auf Grund der symmetrischen Randbedingung $f(-u_0) = f(u_0)$ gilt aber $g(u_0) = 0$. Widerspruch.

1.6 Das Douglas-Problem

Mit Courant betrachtet man das Energiefunktional

$$\mathfrak{D}_\Omega[X] := \iint\limits_\Omega \{|X_u|^2 + |X_v|^2\}\, dudv.$$

Für das Oberflächenfunktional $\mathfrak{A}[X]$ gilt die Abschätzung

$$2\mathfrak{A}_\Omega[X] \leq \mathfrak{D}_\Omega[X]$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $X = X(u,v)$ konform parametrisiert ist. Wir können also $\mathfrak{D}_\Omega[X]$ minimieren und erhalten so eine (außerhalb der Verzweigungspunkte) konform parametrisierte Minimalfläche.

Wir übernehmen die Notation aus [21]: Es sei $B_r(w) \subset \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe um den Punkt $w \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$. Ferner seien $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ die Klasse der einfach- bzw. zweifach zusammenhängenden, beschränkten und offenen Gebiete. Gemäß dem Riemannschen Abbildungssatz können wir $B_1(0)$ für ein $\Omega \in \mathcal{K}_1$ wählen.

Bezüglich unserer Randkonfiguration $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ unterscheiden wir die Klasse

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\Gamma) := \{(\Omega, X)\ :\ \Omega \subset \mathcal{K}_2\,,\ X \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3),\\ X : \partial\Omega \to \Gamma \text{ schwach monoton}\}\end{aligned}$$

der nichtdegenerierten Immersionen von der Klasse

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^*(\Gamma) := \{(\Omega, X)\ :\ &\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \text{ wobei } \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{K}_1 \text{ disjunkt},\\ &X \in H^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3),\\ &X : \partial\Omega \to \Gamma \text{ schwach monoton}\}\end{aligned}$$

der degenerierten Immersionen.

Da topologisch äquivalente Gebiete in der komplexen Ebene nicht notwendig konform äquivalent sind, betrachten wir stets Paare (Ω, X) von Gebieten und darauf parametrisierten Flächen.

Wir definieren

$$d(\Gamma) := \inf_{(\Omega,X)\in\mathcal{C}(\Gamma)} \mathfrak{D}_\Omega[X], \quad d^*(\Gamma) := \inf_{(\Omega,X)\in\mathcal{C}^*(\Gamma)} \mathfrak{D}_\Omega[X].$$

Gesucht ist nun ein Paar $(\Omega, X) \in \mathcal{C}(\Gamma)$, so daß

$$\mathfrak{D}_\Omega[X] = \inf_{(\Theta,Y)\in\mathcal{C}(\Gamma)} \mathfrak{D}_\Theta[Y].$$

Hinreichend für die Lösbarkeit dieses Variationsproblems ist die Douglassche Bedingung

$$d(\Gamma) < d^*(\Gamma).$$

In der hier betrachteten speziellen Situation wird $d^*(\Gamma)$ realisiert von den beiden durch Γ_1 und Γ_2 aufgespannten Kreisscheiben (der Goldschmidt-Lösung). Es folgt

$$d^*(\Gamma) = \frac{1}{2}\,\pi R^2 + \frac{1}{2}\,\pi R^2 = \pi R^2\,.$$

Zum Vergleich wählen wir den Zylinder der Höhe d und vom Radius R, welcher Γ_1 und Γ_2 einspannt mit der Dirichlet-Energie πdR. *Wegen $d(\Gamma) \leq \pi dR$ ist die Douglas-Bedingung sicher für $d < R$ erfüllt.*

Den folgenden Existenzsatz entnehmen wir [6], Kapitel VI.

Unter der Bedingung $d < R$ besitzt das Douglas-Problem bezüglich der Randkonfiguration Γ eine Lösung $(\Omega, X) \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Ein Minimierer des Variationsproblems ist harmonisch und erfüllt die Konformitätsrelation in Ω. Wir verweisen auf die Ausführungen in [6].

2. Variationsprobleme mit Volumennebenbedingungen

2.1 Das Variationsproblem

Wir betrachten das folgende isoperimetrische Problem:

Gesucht ist diejenige ebene Kurve $\mathfrak{k}$, welche (i) zwei gegebene Punkte P_I und P_{II} über einer Achse $\mathfrak{a}$ verbindet, (ii) nach Rotation um $\mathfrak{a}$ eine Fläche minimalen Inhalts $\mathfrak{A}$ erzeugt und (iii) diese Fläche ein vorgeschriebenes Volumen $\mathfrak{V}_0$ einschließt.

Gesucht ist also eine Profilkurve $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, welche das Oberflächenfunktional

$$\mathfrak{A}(y) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

unter der Volumennebenbedingung

$$\mathfrak{V}_0 = \pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2\, dx$$

mit einer vorgeschriebenen Konstanten $\mathfrak{V}_0 \in \mathbb{R}$ minimiert. Das entstehende Variationsproblem

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ 2y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} - \lambda y(x)^2 \right\} dx \longrightarrow \text{extr!}$$

mit einem Lagrange-Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ führt uns auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

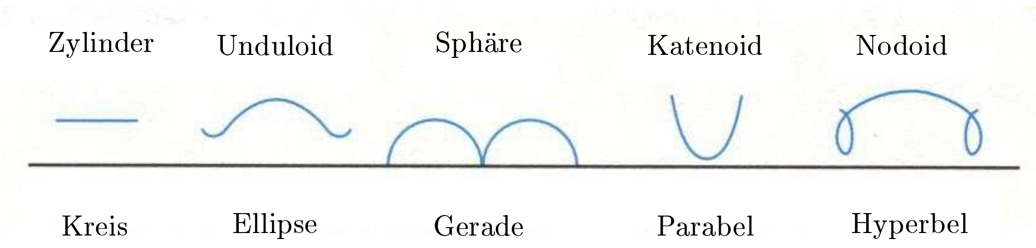
$$y(x)^2 - \frac{2y(x)}{\lambda\sqrt{1 + y'(x)^2}} = -\frac{C}{\lambda}, \quad \lambda \neq 0,$$

mit einer reellen Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$. Wir verweisen den Leser auf [27], Abschnitt 8.5 für eine detaillierte Herleitung dieser Gleichung.

2.2 Konstante mittlere Krümmung: Delaunay-Flächen

Rollt man einen Kegelschnitt entlang einer Geraden ab und rotiert anschließend diejenige Kurve, welche ein Brennpunkt des Kegelschnittes beim Abrollen erzeugt, um diese Gerade, so entsteht eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung: Eine Ebene, eine Sphäre, ein Zylinder, ein Katenoid, ein Unduloid oder ein Nodoid.

Die nachstehende Abbildung skizziert die Brennpunktkurven der benannten Flächen. Wie auch die folgende Charakterisierung, ist sie nach [34], Kapitel III entnommen.



(a) Beim Abrollen einer Ellipse mit Hauptachsen $0 < a < b < \infty$ durchlaufen beide Brennpunkte sinusförmige Kurven, welche je bei Rotation um die Achse ein *Unduloid* erzeugen.

(b) Der Mittelpunkt eines Kreises (d.h. $a = b$) erzeugt beim Abrollen eine Gerade; bei Rotation entsteht ein *Zylinder*.

(c) Für $0 < a < \infty$, $b = 0$ degeneriert die Ellipse zu einer Geraden mit Brennpunkten an beiden Enden; als Rollkurve erhalten wir eine Aufeinanderfolge von sich gegenseitig berührenden Halbkreisen, welche bei Rotation die *Sphäre* entstehen lassen.

(d) Es sei $a = \infty$, $b = 0$; die Rollkurve ist ein Kreisbogen im Unendlichen; Rotation liefert die *Ebene.*

(e) Die Kettenlinie entsteht beim Abrollen einer Parabel; anschließende Rotation liefert das *Katenoid.*

(f) Rotation der beim Abrollen der Hyperbel entstehenden Rollkurve eines Brennpunktes ergibt das *Nodoid.*

2.3 Bemerkungen zum H-Flächensystem

Wählen wir mit $(u,v) \in \Omega$ konforme Parameter, so genügt die Immersion $X = X(u,v)$ vorgeschriebener mittlerer Krümmung $H = H(x,y,z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dem elliptischen System

$$\triangle X(u,v) = 2H(X)X_u(u,v) \wedge X_v(u,v).$$

Der rotationssymmetrische Ansatz

$$X(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

führt auf das nichtlineare gekoppelte System

$$\begin{aligned} f''(u) &= f(u) - 2f(u)g'(u)H(u), \\ g''(u) &= 2f(u)f'(u)H(u). \end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall konstanter mittlerer Krümmung: Sei ohne Einschränkung $H = -1$. Dann erhalten wir nach Integration der zweiten Gleichung und Einsetzen in die erste Gleichung

$$f''(u) = (1+2C)f(u) - 2f(u)^3$$

mit einer Integrationskonstanten $C \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt ferner

$$f'(u)^2 = (1+2C)f(u)^2 - f(u)^4\,,$$

falls $f'(u) \neq 0$. Aus diesen letzten beiden Gleichungen entnimmt man reelle Analytizität der Meridianfunktion f, ihre Positivität (die zweite Gleichung liefert unmittelbar C^0-Schranken an die Lösung f) sowie Symmetrie bezüglich symmetrischen Randwerten

$$f(u_1) = R = f(u_2), \quad f'(u_1) = 0 = f'(u_2).$$

Ausführliche Untersuchungen zum konform parametrisierten System vorgeschriebener konstanter mittlerer Krümmung findet man in [36] und [37].

2.4 Das Douglas-Problem

Das Douglas-Problem für Immersionen konstanter mittlerer Krümmung $H_0 \in \mathbb{R}$, d.h. kritische Punkte des parameterinvarianten Funktionals

$$\mathfrak{E}_\Omega[X] := \iint\limits_\Omega \left\{X_u^2 + X_v^2 + \frac{4}{3}\,H_0\,X\cdot(X_u\wedge X_v)^t\right\} dudv,$$

wurde erstmals von H. Werner in [38] gelöst.

Wie im vorigen Kapitel definieren wir

$$d(\Gamma) := \inf_{(\Omega,X)\in\mathcal{C}(\Gamma)} \mathfrak{E}_\Omega[X], \quad d^*(\Gamma) := \inf_{(\Omega,X)\in\mathcal{C}^*(\Gamma)} \mathfrak{E}_\Omega[X].$$

Dann gilt der folgende Satz (siehe [38]):

Es seien die Randkurven Γ_1 *und* Γ_2 *enthalten in einer Kugel vom Radius* 1, *und es gelte* $|H_0| < \frac{1}{2}$. *Schließlich sei die Douglas-Bedingung*

$$d(\Gamma) < d^*(\Gamma)$$

erfüllt. Dann besitzt das Douglas-Problem bezüglich $\mathfrak{E}_\Omega[X]$ *eine Lösung* $(\Omega, X) \in \mathcal{C}(\Gamma)$.

Der von Werner eingeschlagene Weg verlangt nach a priori-Abschätzungen des Gradienten einer Lösung $X = X(u, v)$ des H-Flächensystems bis zum Rand des Definitionsgebiets, was die Restriktion $|H_0| < \frac{1}{2}$ nach sich (vgl. hierzu auch [12] sowie [30]).

3. Variationsprobleme höherer Ordnung

3.1 Das Helfrich-Funktional

Zur mathematischen Beschreibung der Elastizität gewisser Lipid-Moleküle wurde in [13] ein Funktional höherer Ordnung der Form

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \{\beta(H - H_0)^2 + \gamma K\}\, d\mathcal{S}$$

vorgeschlagen. Hierbei bedeuten H die mittlere und K die Gaußsche Krümmung der (idealisierten) Molekülschicht $\mathcal{S}$, $H_0 \in \mathbb{R}$ heißt ihre Spontankrümmung, und $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sind weitere, dem Problem zu entnehmende reelle Konstanten.

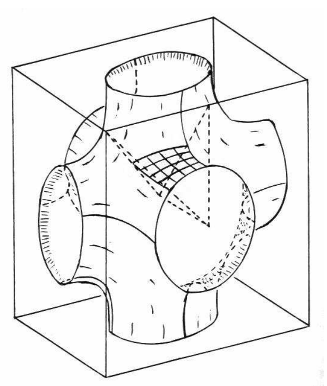
3.2 Untersuchungen von Nitsche

In Verallgemeinerung betrachtet J.C.C. Nitsche in [25] und [26] Randwertprobleme für Variationsfunktionale der Form

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \{\alpha + \beta(H - H_0)^2 - \gamma K\}\, d\mathcal{S}$$

auf einer zweidimensionalen Fläche $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. Die Lösungen werden sukzessive approximiert: Zunächst im Fall $H_0 = 0$ ausgehend von einem Fundamentalbereich der Schwarzschen P-Fläche, später im allgemeinen Fall unter der Voraussetzung hinreichend kleiner Randdaten und kleiner Spontankrümmung H_0.

Das nachfolgende Bild ist [25] entnommen: Die hier skizzierte Schwarzsche P-Fläche baut sich aus 48 Kopien des hervorgehobenen Fundamentalbereichs auf.



3.3 Minimalflächen und das Willmore-Funktional

Wir betrachten speziell das Willmore-Funktional

$$\mathfrak{W}_\Omega[X] := \iint\limits_\Omega H^2 W\, dudv,$$

d.h. $\alpha, \gamma = 0$, $\beta = 1$ und $H_0 = 0$.

Sofern zu einer gegebenen Randkontur eine minimale Immersion existiert, ist diese wegen $H = 0$ auch ein absolutes Minimum des Variationsproblems

$$\mathfrak{W}_\Omega[X] \longrightarrow \text{extr!}$$

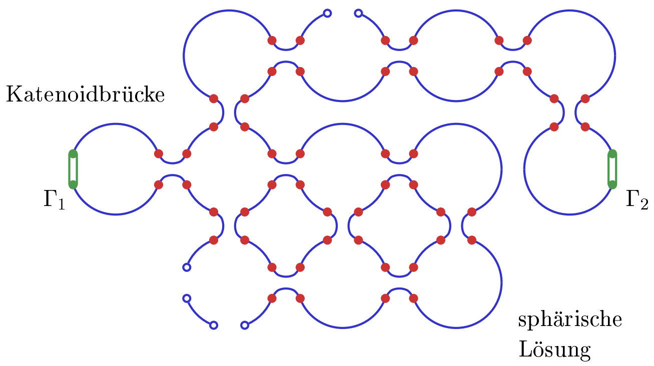
Insbesondere finden wir zu jeder einfach geschlossenen (rektifizierbaren) Jordankurve Γ im $\mathbb{R}^3$ eine einspannende Minimalfläche (siehe z.B. [24] für eine ausführliche Diskussion des Plateau-Problems für Minimalflächen) und somit auch eine Lösung des Willmore-Variationsproblems.

Besteht Γ hingegen aus mehreren, einander disjunkten Randbögen, so ist das Douglas-Problem für das Oberflächenfunktional, wie oben ausgeführt, nicht notwendig lösbar. Numerische Untersuchungen belegen jedoch eine stabilisierende Wirkung des Willmore-Funktionals (vgl. die Berechnungen im folgenden Abschnitt). In dem von uns betrachteten speziellen Randwertproblem vom Katenoid-Typ finden wir stets Lösungen des zum Willmore-Funktional zugehörigen, unter Verwendung konformer Parameter formulierten Euler-Lagrangeschen Systems

$$\triangle H - 2H(H^2 - K)W = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

nämlich zunächst alle sphärische Kappen, welche $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ einspannen (man beachte $H = \text{const}$ und $H^2 = K$). Gebrochene disjunkte (Goldschmidt-)Lösungen sind wieder die Ränder Γ_1 und Γ_2 einspannenden ebenen Kreisscheiben (und den sie verbindenden Abschnitt der Rotationsachse) sowie alle eingepassten sphärischen Kappen.

Zusammenhängende gebrochene (d.h. den Euler-Lagrange-Gleichungen im klassischen Sinne nicht genügende) Lösungen lassen sich aus einer Sequenz beliebiger Sphären und an deren Polen (im Sinne stetiger Differenzierbarkeit) glatt angesetzten Katenoidbrücken mit $H = 0$ realisieren.



3.4 Das Willmore-System

Erneut wählen wir für den rotationssymmetrischen Ansatz

$$X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

konforme Parameter $(u, v) \in \Omega$.

Das Differentialgleichungssystem

$$\triangle X = 2H X_u \wedge X_v$$

sowie die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\triangle H - 2H(H^2 - K)W = 0$$

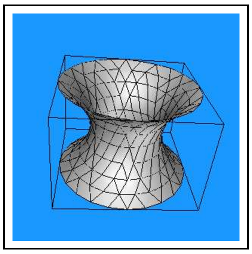
bezüglich des Willmore-Funktionals schreiben sich dann in der Form

$$\begin{aligned} f''(u) &= f(u) - 2f(u)g'(u)H(u), \\ g''(u) &= 2f(u)f'(u)H(u), \\ H''(u) &= -2\frac{H(u)}{f(u)^2}\left\{f(u)^2 H(u) - g'(u)\right\}^2 . \end{aligned}$$

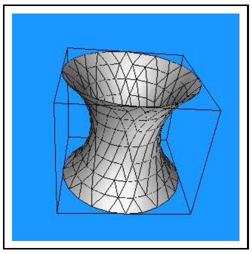
Obigen Gleichungen entnehmen wir sukzessiv höhere Regularität einer immergierten Lösung X : Ausgehend von $X \in C^{4+\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\alpha \in (0,1)$, haben wir $H, K \in C^{2+\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$. Das Differentialgleichungssystem für $\triangle H$ liefert $H \in C^{4+\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$, woraus wiederum $X \in C^{6+\alpha}(\Omega, \mathbb{R})$ folgt usw.

3.5 Numerische Resultate

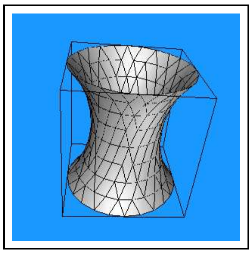
Die Randkonfiguration im folgenden besteht aus zwei parallelen Ringen Γ_1, Γ_2 vom gemeinsamen Radius $R = 1$, deren Abstand d schrittweise vergrößert wird. Die Berechnungen der jeweiligen kritischen Punkte des Willmore-Funktionals wurden mit dem Surface Evolver von K. Brakke [3] durchgeführt.



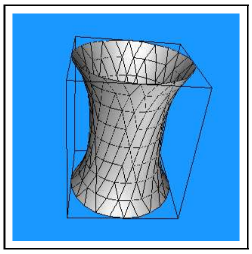
$d = 1.4$



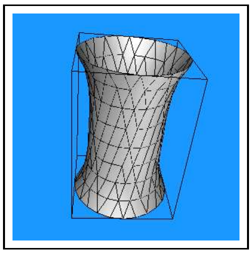
$d = 1.8$



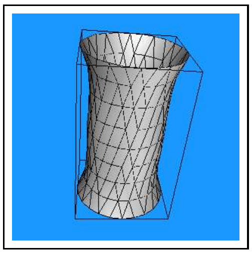
$d = 2.2$



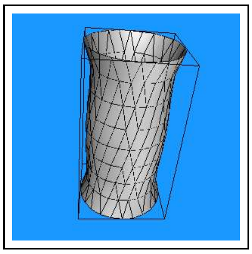
$d = 2.6$



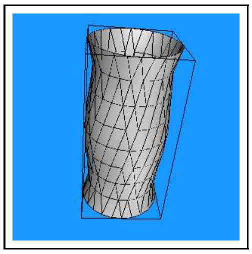
$d = 3.0$



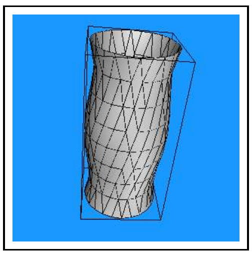
$d = 3.4$



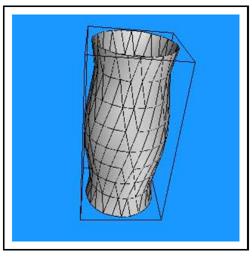
$d = 3.8$



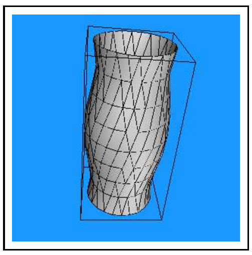
$d = 4.2$



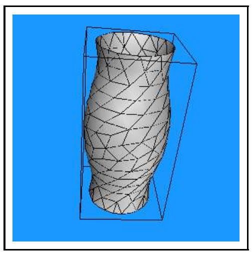
$d = 4.4$



$d = 4.6$



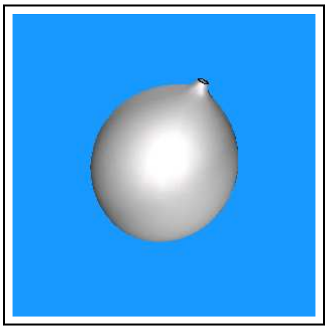
$d = 4.8$



$d = 5.0$

Im Grenzfall $d \to \infty$ konvergiert die numerisch berechnete Lösung außerhalb einer Umgebung des Randes gegen die Sphäre. An den Randkurven selbst verschwindet die mittlere Krümmung (als freie Randbedingung), so daß die Lösung dort negativ gekrümmt ist (vgl. [35], Abschnitt 6.3).

Die Berechnung einer minimierenden Immersion für $R = 1$ und $d = 40$ zeigt das folgende Bild:



3.6 Elastische Kurven in der hyperbolischen Ebene

Für kompakte Immersionen (ohne Rand) wurde in [39] die Invarianz des Willmore-Funktionals unter Anwendung konformer Abbildungen bewiesen; vgl. hierzu auch [40], Abschnitt 7.3.

In Verallgemeinerung erhalten wir die Identität

$$\iint\limits_{\bar{M}} \bar{H}^2\, d\bar{S} + \int\limits_{\partial\bar{M}} \bar{\kappa}_g\, d\bar{s} = \iint\limits_{M} H^2\, dS + \int\limits_{\partial M} \kappa_g\, ds$$

für konform äquivalente Immersionen $M, \bar{M}$, immergiert in Riemannschen Räumen, deren Schnittkrümmungen jeweils entlang M bzw. $\bar{M}$ verschwinden, den mittleren Krümmung $H, \bar{H}$ der Immersionen und den geodätischen Krümmungen $\kappa_g, \bar{\kappa}_g$ ihrer Randkurven.

Den Ausführungen in [22] und [23] folgend, stellt in unserem Fall die Meridiankurve eines Willmore-Katenoids gleichzeitig eine elastische Kurve in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ dar, falls die Randwinkel dieser Kurve festgelegt werden.

3.7 Existenz

In [31] und [32] wird das Funktional $\mathfrak{W}[X]$ in der Klasse kompakter Flächen (ohne Rand), insbesondere der Tori im $\mathbb{R}^3$ minimiert. Diese Aufgabe ist als *Willmore-Problem* bekannt (siehe auch [40], Kapitel 7).

Existenzresultate zu Randwertproblemen allgemeiner Variationsprobleme höherer Ordnung finden sich erstmals bei Nitsche in den bereits vorgestellten Arbeiten [25] und [26]. Das hier betrachtete katenoidähnliche Problem für allgemeine Variationsfunktionale läßt sich auf vergleichbare Weise durch sukzessive Approximation lösen, ausgehend von einer Lösung der Minimalflächengleichung, und wird in einer Folgearbeit diskutiert.

Da zusammenhängende Minimalflächen, wie gezeigt, nur für hinreichend kleine Abstände d bei festen Radien R der Ränder existieren, insbesondere für $d < R$, verbleibt die Frage nach der Existenz in den Fällen $d \gg R$.

4. Kristalline Variationsprobleme

4.1 Einleitung zum Variationsproblem

Diejenige Arbeit, welche benötigt wird, um ein Kristallfragment $\mathfrak{K}$ entlang einer vorgegebenen Ebene E zu schneiden, ist insbesondere abhängig von der Richtung dieser Ebene bezüglich der Lage der Elementarzelle des Kristalls. Dem Fragment können wir entlang der Schnittebene eine Energiedichte $F = F(N)$ zuordnen, wobei N den Einheitsnormalenvektor zu E bezeichnet.

Für die gesamte Oberflächenenergie des Fragments erhalten wir so einen Ausdruck der Form

$$\iint\limits_{\partial\mathfrak{K}} F(N)\, dA$$

mit dem Oberflächenelement dA (vgl. die Ausführungen in [1]).

4.2 Flächen vom Mittleren-Krümmungs-Typ

Das obige Funktional läßt sich in eine Klasse allgemeinerer Variationsfunktionale

$$\iint_{\Omega} F(X, X_u \wedge X_v)\, dudv$$

einordnen, von denen wir aus den vorigen Betrachtungen bereits zwei wichtige Beispiele kennen.

(i) *Minimalflächen*
Die Bestimmung einer Fläche minimalen Inhalts, eingespannt in einer vorgegebenen Randkontur, führt auf die Minimierung des Funktionals

$$\iint_{\Omega} |X_u \wedge X_v|\, dudv.$$

Es gilt $F(X, Z) = |Z|$.

(ii) *Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung*
In [15] wird bemerkt, daß die Eulerschen Gleichungen des Funktionals

$$\iint_{\Omega} \left\{|X_u \wedge X_v| + Q(X) \cdot (X_u \wedge X_v)^t\right\} dudv$$

mit der Vektorfunktion

$$Q(x, y, z) = 2\left(\int_0^x H(\tau, y, z)\, d\tau, \int_0^y H(x, \tau, z)\, d\tau\right)$$

genau dem H-Flächensystem $\triangle X = 2HX_u \wedge X_v$ entsprechen. Immersionen vorgeschriebener konstanter mittlerer Krümmung $H_0 \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus der Variation des Funktionals

$$\iint_{\Omega} \left\{|X_u \wedge X_v| + \frac{2}{3} H_0\, X \cdot (X_u \wedge X_v)^t\right\} dudv.$$

Wir minimieren also den gewöhnlichen Flächeninhalt unter der Volumennebenbedingung

$$\frac{2H_0}{3} \iint_{\Omega} X \cdot (X_u \wedge X_v)^t\, dudv = 1.$$

(iii) *Flächen vom Minimalflächentyp*
Wir haben bereits kristalline Funktionale der Form

$$\iint_{\Omega} F(X_u \wedge X_v)\, dudv$$

kennengelernt. Die Dichtefunktion muß, um die Parameterinvarianz zu garantieren, der Homogenitätsrelation

$$F(\lambda Z) = \lambda F(Z) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0,$$

genügen. Die Lösungen der zum Variationsproblem zugehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichungen sind in ihren analytischen wie geometrischen Eigenschaften den klassischen Minimalflächen eng verwandt (ausführliche Untersuchungen finden sich in [9] und [10]).

(iv) *Flächen vorgeschriebener gewichteter mittlerer Krümmung*

Bei der Untersuchung allgemeiner Funktionale der Form

$$\iint_\Omega F(X, X_u \wedge X_v)\, dudv$$

spielt der spezielle Fall

$$\iint_\Omega \left\{ F(X_u \wedge X_v) + \frac{2}{3} H_0\, X \cdot (X_u \wedge X_v)^t \right\} dudv$$

auf Grund der Nähe einerseits zu Flächen vom Minimalflächentyp als auch zu Flächen vorgeschriebener konstanter mittlerer Krümmung eine besondere Rolle.

Der Lösung des Plateauschen Problems bez. obigen Funktionals widmen sich [17] und [18].

4.3 Das Douglas-Problem

In [21] wurde das Douglas-Problem für das allgemeine Funktional

$$\mathfrak{F}_\Omega[X] := \iint_\Omega F(X, X_u \wedge X_v)\, dudv$$

untersucht. Für den uns interessierenden Fall $\Gamma = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ finden wir in [21] folgenden Satz:
Die Dichtefunktion $F = F(X, Z)$, $Z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(i) *erfülle die Homogenitätsrelation $F(X, \lambda Z) = \lambda F(X, Z)$ für alle positiven $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(ii) *sei positiv im Sinne, daß $m_1|Z| \leq F(X, Z) \leq m_2|Z|$ mit reellen Konstanten $0 < m_1 \leq m_2 < +\infty$ gelte;*

(iii) *sei bezüglich Z für alle $X \in \mathbb{R}^3$ konvex.*

Es sei die Douglas-Bedingung

$$d(\Gamma) < d^*(\Gamma)$$

bezüglich des gewöhnlichen Dirichlet-Integrals erfüllt. Dann besitzt das Douglas-Problem zur Randkonfiguration Γ eine Lösung $(\Omega, X) \in \mathcal{C}(\Gamma)$, und X ist fast überall auf Ω konform parametrisiert.

Detaillierte Ausführungen, insbesondere zu speziellen Regularitätseigenschaften minimierender Lösungen, finden sich in den zitierten Originalarbeiten.

Literatur

[1] Almgren, F.; Taylor, J.E.: *Optimal geometry in equilibrium and growth.* Preprint, Rutgers University.

[2] Bliss, G.A.: *Variationsrechnung.* B.G. Teubner, 1932.

[3] Brakke, K.A.: *The surface evolver.* Experimental Mathematics **1,** 141–165, 1992.

[4] Bryant, R.; Griffiths, P.: *Reduction for constrained variational problems and $\int \kappa^2/2\, ds$.* Amer. J. Math. **108,** 525–570, 1986.

[5] Courant, R.: *Soap films experiments with minimal surfaces.* 1928.

[6] Courant, R.: *Dirichlet's principle, conformal mappings, and minimal surfaces.* Interscience publ., Inc., 1950.

[7] Eells, J.: *The surfaces of Delaunay.* Math. Int. **9,** 53–57, 1987.

[8] Fomin, S.V.; Gelfand, I.M.: *Calculus of variations.* Prentice Hall, Inc., 1994.

[9] Fröhlich, S.: *Curvature estimates for μ-stable G-minimal surfaces and theorems of Bernstein type.* Analysis **22,** 109–130, 2002.

[10] Fröhlich, S.: *On twodimensional immersions that are stable for parametric functionals of constant mean curvature type.* Preprint, TU-Darmstadt, 2003.

[11] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer, 2001.

[12] Heinz, E.: *On certain nonlinear differential equations and univalent mappings.* Journal d'Analyse Math. **5,** 197–272, 1956.

[13] Helfrich, W.: *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible experiments.* Z. Naturforsch. **28c,** 693–703, 1973.

[14] Hildebrandt, S.: *On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature.* Comm. Pure Appl. Math. **XXIII,** 97–114, 1970.

[15] Hildebrandt, S.: *Über einen neuen Existenzsatz für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.* Math. Z. **119,** 267–272, 1971.

[16] Hildebrandt, S.: *Maximum principles for minimal surfaces and surfaces of constant mean curvature.* Math. Z. **128,** 253–269, 1972.

[17] Hildebrandt, S.; von der Mosel, H.: *Plateau's problem for parametric double integrals: I. Existence and regularity in the interior.* Preprint, Universität Bonn.

[18] Hildebrandt, S.; von der Mosel, H.: *Plateau's problem for parametric double integrals: II. Regularity at the boundary.* Preprint, Universität Bonn.

[19] Hildebrandt, S.; Tromba, A.: *The parsimonious universe.* Springer-Verlag, 1996.

[20] Kühnel, W.: *Differentialgeometrie.* vieweg studium. vieweg, 1999.

[21] Kurzke, M.; von der Mosel, H.: *The Douglas problem for parametric double integrals.* Preprint.

[22] Langer, J.; Singer, D.A.: *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space.* Bull. London Math. Soc. **16,** 531–534, 1984.

[23] Langer, J.; Singer, D.A.: *The total squared curvature of closed curves.* J. Differential Geometry **20,** 1–22, 1984.

[24] Nitsche, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **199,** Springer, 1973.

[25] Nitsche, J.C.C.: *Periodical surfaces that are extremal for energy functionals containing curvature functions.* In: Statistical thermodynamics and differential geometry of microstructured materials, H.T. Davis, J.C.C. Nitsche (Ed.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications **51,** Springer, 69–98, 1993.

[26] Nitsche, J.C.C.: *Boundary value problems for variational integrals involving surface curvatures.* Quart. Appl. Math. **LI,** No. 2, 353–387, 1993.

[27] Oprea, J.: *Differential geometry and its applications.* Prentice Hall, Inc., 1997.

[28] Sauvigny, F.: *Curvature estimates for immersions of minimal surface type via uniformization and theorems of Bernstein type.* manuscripta math. **67,** 69–97, 1990.

[29] Sauvigny, F.: *Introduction of isothermal parameters into a Riemannian metric by the continuity method.* Analysis **19,** No.3, 235–242, 1999.

[30] Sauvigny, F.: *Analysis 6.* Vorlesungsskript, BTU Cottbus, Wintersemester 1994/95.

[31] Schmidt, M.U.: *A proof of the Willmore conjecture.* Preprint, SFB 288 "Differentialgeometrie und Quantenmechanik", FU Berlin, 2002.

[32] Simon, L.: *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional.* Commun. Anal. Geom. **1,** No.2, 281–326, 1993.

[33] Strubecker, K.: *Differentialgeometrie.* Sammlung Göschen, Walter de Gruyter & Co., 1964.

[34] Thompson, D'A.W.: *On growth and form.* Cambridge University Press, 1961.

[35] von der Mosel, H.: *Geometrische Variationsprobleme höherer Ordnung.* Bonner math. Schriften **293,** 1996.

[36] Wente, H.C.: *Constant mean curvature surfaces of annular type.* Preprint, 2000.

[37] Wente, H.C.: *Explicit solutions to the H-surface equation on tori.* Michigan Math. J. **49,** 501–517, 2001.

[38] Werner, H.: *Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung.* Math. Annalen **133,** 303–319, 1957.

[39] White, J.H.: *A global invariant of conformal mappings in space.* Proc. Amer. Math. Soc. **38,** 162–164.

[40] Willmore, T.J.: *Riemannian geometry.* Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1993.

Steffen Fröhlich
Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik, AG 4
Differentialgeometrie und Geometrische Datenverarbeitung
Schloßgartenstraße 7
D-64289 Darmstadt
Germany
e-mail: sfroehlich@mathematik.tu-darmstadt.de