Susanne Prediger:

„Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen?“

Ein Dialog von der geometrischen Deutung eines Lösungsverfahrens für Lineare Gleichungssysteme bis zum „Sinn des sinnlosen Umformens“

Erscheint in: Praxis der Mathematik in der Schule 2003

Zusammenfassung: Ausgangspunkt des im Artikel beschriebenen Dialogs ist die Frage eines Schülers nach der geometrischen Interpretation des Additionsverfahrens für Lineare Gleichungssysteme. Die Klärung dieser Frage eröffnet das Feld für die Diskussion einer wichtigen Grundidee der Mathematik, der Idee der Beschreibungswechsel, hier zwischen Geometrie und Algebra. Von da aus ist es im Dialog mit dem Lernenden kein weiter Weg mehr zum Gespräch über den „Sinn des sinnlosen Umformens“, einer Leitidee der Algebra. Mit dem Dialog soll gezeigt werden, dass im ernsthaften und tiefgehenden Verfolgen von Schülerfragen interessante Lernchancen stecken, die wir nicht verschenken sollten.

1. Das Ausgangsproblem

> „Jetzt haben wir in der Schule gelernt, dass wir uns so ein Lineares Gleichungssystem vorstellen können als Schnitt von Geraden. Aber was bedeutet es dann, wenn ich zwei Gleichungen dieses Systems addiere, um eine Variable wegzukriegen?“

Mit dieser Frage kam der vierzehnjährige Sohn eines Bekannten, nennen wir ihn Lars, nach Hause, und in der Tat, die Frage nach der geometrischen Veranschaulichung der elementaren Umformungen von Gleichungssystemen ist eine für ihn zwar naheliegende, aber gar nicht so leicht zu beantwortende Frage.

Zunächst muss man sich mal die Frustration dieses Jungen deutlich machen: Nun hat er gelernt, stets nach Veranschaulichungen und Bedeutungen von mathematischen Begriffen und Verfahren zu fragen, und die Gleichungssysteme an sich wurden im Unterricht sehr schön sowohl durch anwendungsorientierte Beispiele als auch von der geometrischen Seite her motiviert. Ein Blick in neuere Schulbücher zeigt eine Vielfalt überzeugender Möglichkeiten. Lars hat auch die Erfahrung gemacht, dass man mit der geometrischen Deutung der Lösung bestimmter linearer Gleichungssysteme als Durchschnitt von Geraden auch die möglichen Lösungsmengen sehr bequem geometrisch charakterisieren kann: Es können nämlich bei Systemen mit zwei Unbekannten als Lösungsmenge die leere Menge, ein einzelner Punkt oder eine Gerade vorkommen, sonst nichts.

Darum ist es für Lars nachvollziehbarerweise unbefriedigend, nicht auch den Weg hin zu dieser Lösung geometrisch verstehen zu können. Deshalb überlege ich, wie man ihm eine solche Deutung ermöglichen könnte:

2. Geometrische Deutung des Additionsverfahrens bei linearen Gleichungen

Was also bedeutet es geometrisch, wenn man die Gleichungsterme zweier Geradengleichungen addiert? Um uns diesem Problem zu nähern, betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel und untersuchen das folgende Lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ -x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Durch Addition der ersten Zeile mit der zweiten Zeile erhält man die Geradengleichung $3y = 6$, so dass sich als Lösung des Gleichungssystems der Punkt $P := (2,2)$ ergibt.

Geometrisch interpretiert haben wir diesen Punkt somit als Schnittpunkt der beiden Geraden g und h aus Abbildung 1 ermittelt. Was aber ist nun die geometrische Deutung der Operation „Addiere die Gleichungsterme zweier Geradengleichungen in Normalenform“?

Zunächst kann man feststellen, dass eine geometrische Interpretation der durchgeführten Addition insofern widerständig ist, als die ermittelte Geradengleichung nicht invariant ist gegenüber Veränderung der Darstellung von h: Denn je nachdem, ob man von der Geradengleichung $-x + 2y = 2$ oder $-2x + 4y = 4$ ausgeht, erhält man als Ergebnis eine andere Gerade. Eine direkte geometrische Interpretation der Operation „Addiere die Gleichungsterme“ kann es deshalb nicht geben.

Durch Ausprobieren mit verschiedenen, die beiden Geraden beschreibenden Gleichungen kann Lars leicht sehen, dass alle Gleichungen, die als Summe entstehen, zumindest eine gemeinsame Charakteristik haben: Sie gehen alle durch den Schnittpunkt P von g und h. Damit kommen wir zur folgenden Deutung: Die Summe zweier Geradengleichungen beschreibt stets eine Gerade, die durch den Schnittpunkt der Ausgangsgeraden läuft, d.h. man dreht quasi die beiden Geraden um ihren Schnittpunkt in eine andere Gerade. Die Frage, wie man geschickt addiert, um eine Variable dabei zu eliminieren, stellt sich dann so: Welche Gleichungen muss ich addieren, damit die entstehende Gerade (durch den Schnittpunkt und) parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen verläuft? Die in Abbildung 1 eingezeichnete Gerade k entsteht z.B. durch Addition der Ausgangsgleichungen

$x + y = 4$ und $-x + 2y = 2$,

aber auch durch

$2x + 2y = 8$ und $-2x + 4y = 4$.

Nachdem wir die Situation so weit durchdrungen haben, packt uns der Ehrgeiz, als Verallgemeinerung die analoge Frage für den 3x3-Fall zu klären: Wir betrachten also ein weder über- noch unterbestimmtes System von drei linearen Gleichungen I, II und III mit drei Variablen, die die Ebenen E_1, E_2

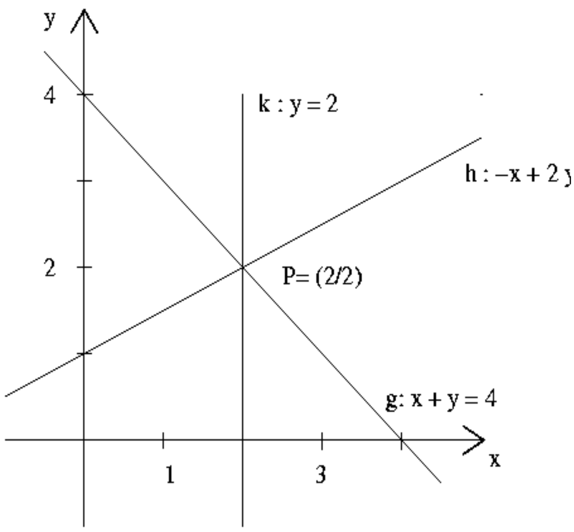

Abbildung 1

und E_3 des IR^3 beschreiben. (Lars muss ich das kurz erläutern, aber den Übergang ins Dreidimensionale geht er erstaunlich leicht mit, denn durch die Geometrie der Körper ist er in seinem Mathematikunterricht darauf gut vorbereitet.) Jeweils zwei von den drei Ebenen schneiden sich in den Schnittgeraden g_{12}, g_{23}, g_{13}, alle drei schneiden sich im Schnittpunkt S = (1,0,3), der als Lösung des linearen Gleichungssystems berechnet werden kann durch folgende Zeilenadditionen (und anschließender Rückeinsetzung):

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 0 + 3y + 2z = 6 \\ 0 + 3y + 4z = 12 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 1{:=}\ \mathrm{I} \\ 2{:=}\ \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ 3{:=}\ 3\,\mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 0 + 3y + 2z = 6 \\ 0 + 0 - 2z = -6 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 2\text{-}3 \end{array}$$

Was passiert hier mit den Ebenen? Im ersten Vereinfachungsschritt wird die Ebenengleichung II durch die Summe von I und II ersetzt. Die neue Gleichung 2 beschreibt diejenige Ebene, die parallel zur x-Achse verläuft und durch die Schnittgerade g_{12} geht (und somit auch durch den Schnittpunkt S). Analog beschreibt die Gleichung 3 die Ebene, die durch g_{13} (und S) geht und parallel verläuft zur x-Achse. Durch Subtraktion der Ebenengleichungen 2 und 3 erhält man schließlich eine Gleichung, die zur derjenigen Ebene gehört, die durch S geht und parallel ist zur x- und y-Achse.

Wiederum kann man die Subtraktion der Ebenengleichung quasi als Drehung der Ebenen um ihre Schnittgerade deuten: Man dreht bei je zwei Ebenen um die jeweiligen Schnittgeraden auf Ebenen, die parallel zu einer Koordinatenachse sind (so steht es auch in einer knappen Bemerkung von Tietze in [7], S. 64, wie ich später feststelle), und schließlich die gedrehten Ebenen um den gemeinsamen Schnittpunkt so, dass sie parallel zu zwei Koordinatenachsen werden. Auf diese Weise kann man die z-Koordinate von S ermitteln und sukzessive die anderen Koordinaten bestimmen.

Damit haben wir also eine gewisse Interpretation der Zeilenumformungen auf geometrischer Ebene gefunden, unsere Ausgangsfrage hat eine sinnvolle Antwort: Durch das Addieren von linearen Gleichungen versucht man, die Geraden bzw. Ebenen so zu drehen, dass man Parallelen zu den Koordinatenachsen bzw. Ebenen erhält, die durch die Lösungspunkte gehen. Für über- oder unterbestimmte Gleichungssysteme lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, die hier nicht ausgeführt werden müssen.

Obwohl Lars nun wahrscheinlich längst einigermaßen zufrieden gestellt gewesen wäre, möchte ich aber nicht auf dieser Stufe stehen bleiben. Auch wenn es immer einen gewisse Gewinn bringt, sich mathematische Operationen zu veranschaulichen, bleibt festzuhalten, dass eine wesentliche

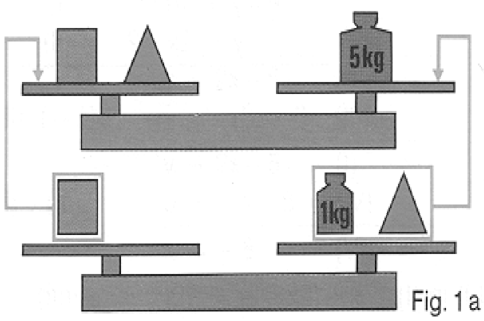

Abbildung 2 (Waagenmodell aus [2], S. 13)

Frage auf geometrischer Ebene im Grunde nicht beantwortet werden kann, sondern nur „experimentell ermittelt“ wurde: Warum beschreibt denn die Summe zweier Geradengleichungen wirklich immer eine Gerade, die durch den Schnittpunkt der Ausgangsgeraden geht? Um dies zu begründen, ist es notwendig, die geometrische Ebene zu verlassen und auf algebraischer Ebene zu argumentieren, wie etwa in Lars’ Schulbuch (Lambacher Schweizer):

> „Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystemes ändert sich nicht, wenn man eine der Gleichungen durch die ‚Summe’ dieser Gleichungen und einer anderen des Systems ersetzt. Diese Umformung eines Gleichungssystemes ist also eine Äquivalenzumformung.“ ([2], S.10)

Bedauerlich ist in dem Schulbuch, dass während der Einführung des Verfahrens mit keiner Silbe *begründet* wird, warum die Addition eine Äquivalenzumformung ist. Erst drei Seiten später ist in einem Bild das Waagenmodell angedeutet, wenn auch nicht erklärt (siehe Abbildung 2).

Mit Lars kläre ich das Stichwort Äquivalenzumformung im Zusammenhang mit dem Waagenmodell und in Bezug auf unsere Geraden: Wenn sich die Lösungsmenge durch Zeilenaddition nicht ändert, dann müssen die durch Addition der Gleichungen entstehenden Geraden alle durch den Schnittpunkt verlaufen.

Insgesamt müssen wir uns also eingestehen, dass wir für unsere geometrische Interpretation nicht ohne algebraische Argumente auskommen. Spätestens dies ist aber die Stelle, um mit Lars die Gesprächsebene zu wechseln und an eine allgemeinere Thematik zu kommen, die er anhand seiner Frage lernen kann:

3. Das Zusammenspiel von Algebra und Geometrie und die Idee des Beschreibungswechsel

Da wir auch in der geometrischen Interpretation nicht ohne algebraische Argumentation auskommen, kann ich nun mit Lars ein Gespräch darüber beginnen, wie praktisch es doch eigentlich ist, dass wir beim Lösen von Gleichungssystemen auf der algebraischen Ebene bleiben *können,* obwohl es auf der anderen Seite Sinn macht, sowohl den Input als auch den Output geometrisch zu interpretieren. Für die Berechnung der Lösung selbst ist die algebraische Ebene eine große Entlastung, denn hier können Lösungsverfahren quasi mechanisch aktiviert werden, ohne sie in jedem Schritt für die geometrische Ebene interpretieren zu müssen. Wir kommen so auf die Leitidee der analytischen Geometrie, zwischen geometrischer und algebraischer Ebene je nach Bedarf hin- und herzuwechseln. Warum klappt das? Wozu ist das gut? Was sich Lars in diesem Gespräch erarbeitet, ist der Grundgedanke der Analytischen Geometrie, der etwa in einem Oberstufenbuch zur Analytischen Geometrie des Cornelsen Verlags so erläutert wird:

> „1. Den geometrischen Objekten (z.B. Punkten, Geraden) werden arithmetische Objekte (also Zahlen, Zahlenpaare usw.) eineindeutig zugeordnet.
> 2. Den geometrischen Beziehungen - z.B. Inzidenz, Kongruenz, Anordnung von Punkten auf einer Geraden - werden arithmetische Beziehungen - z.B. Gleichheit, Größerbeziehungen von Zahlen - eineindeutig zugeordnet.
> 3. Genau dann, wenn zwei geometrische Objekte in einer geometrischen Beziehung zueinander stehen, dann stehen die zugeordneten arithmetischen Objekte in der zugeordneten arithmetischen Beziehung. [...]
>
> Der Vorteil der analytischen Methode gegenüber der synthetischen besteht darin, dass man mit Zahlen rechnen kann. Jedes geometrische Problem lässt sich in der analytischen Geometrie - wenigstens grundsätzlich - rechnerisch behandeln. In der synthetischen Geometrie gibt es einen Kalkül von vergleichbarer Leistungsfähigkeit nicht.“ ([1], S.7)

Ausgehend von der Beobachtung, dass sich die Mathematiker Lars’ Ausgangsfrage im Allgemeinen gar nicht stellen, weil die Zeilenumformungen (z.B. mit dem Waagenmodell) auf algebraischer Ebene viel besser zu verstehen sind, haben wir uns mit der Grundidee der analytischen Geometrie beschäftigt, wie sie von Tietze unter der Überschrift „Geometrisieren algebraischer Sachverhalte und Algebraisieren geometrischer Sachverhalte“ beschrieben hat ([7], S. 60).

Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht nur für die analytische Geometrie zentral, sondern eine allgemeine Strategie in vielen Bereichen der Mathematik: Das Wechseln von Sichtweisen, Wechseln von Beschreibungen mit dem Ziel, je nach Zweck die angemessenste Beschreibungsebene nutzen zu können. Diese Strategie ist Lars ja auch innerhalb der Schulmathematik schon an verschiedenen Stellen begegnet:

- Wechsel bei Zahldarstellungen zwischen Dezimalsystem und Binärsystem
- Kürzen und Erweitern von Brüchen (ohne diesen Beschreibungswechsel lassen sich Brüche gar nicht addieren)
- Das Lösen von Gleichungssystemen selbst ist auch ein Wechsel von Beschreibungen, denn die Lösungsmenge ist durch die angegebenen Gleichungen ja auch bereits exakt beschrieben, man will nur übergehen zu einer expliziteren Beschreibung.
- usw.

Auch außerhalb der Mathematik wechselt man je nach Situation und verfolgtem Zweck zwischen verschiedenen Beschreibungen, wie die folgenden Beispiele andeuten sollen (mehr dazu in [4]):

- Längenmessungen nimmt man mit verschiedenen Einheiten vor, je nachdem, ob man etwa Entfernungen von Städten oder Größen von Ameisen beschreiben will (Millimeter, Kilometer, Meilen). Wie wichtig es ist, auch die Beschreibungswechsel zu beherrschen, ist spätestens seit der Marsmission deutlich geworden, die daran gescheitert ist, dass die Entfernungsberechnungen teils mit Kilometern teils mit Meilen durchgeführt wurden...
- Musiker arbeiten mit verschiedenen Notenschlüsseln, um die Beschreibungen der Töne den Stimmlagen der jeweiligen Instrumente anpassen zu können (Violin-Schlüssel, Bassschlüssel, usw.).

- Städte haben Namen, Postleitzahlen, Telefonvorwahlen, Autokennzeichen usw. Für den Wechsel der Beschreibung braucht man Tabellen oder Datenbanken.
- Es gibt auch Beschreibungswechsel, für die man explizit nicht will, dass sie leicht nachzuvollziehen sind, z.B. die Zuordnung von Matrikel-Nummern zu Studierenden, die man nutzt, um quasi anonym Klausurergebnisse auszuhängen. Hier ist es gewollt, dass die Rückübersetzung der Beschreibung der Prüflinge durch Nummern in Namen nicht von jedem vollzogen werden kann.

Dieses Suchen von ähnlichen Vorgehensweisen in außermathematischen Bereichen hat Lars einen Aha-Effekt gebracht, mit dem er den Wechsel von Beschreibungen nicht nur als eine mathematische Strategie in allen möglichen Bereichen, sondern auch als Alltagsstrategie einordnen kann (ausführlicher in [4]). Daher bin ich nun mit diesem Gespräch ziemlich zufrieden und hätte dies für einen guten Abschluss gehalten.

Aber nun ist wiederum Lars nicht ganz zufrieden, denn auch, wenn er den Wechsel von Beschreibungsebenen als effektive Strategie begriffen hat, irgendwie fühlt er sich durch die „Rechnerei“ auf der algebraischen Seite betrogen. So ganz richtige Mathematik kann das doch nicht sein, bohrt er weiter, wenn Veranschaulichung nicht vorgesehen ist. Sinnloses Umformen mag ein gutes Werkzeug sein, aber doch keine anständige Mathematik. Ich horche auf, denn hiermit eröffnet Lars ein Diskussionsfeld über ein weiteres Grundprinzip der Mathematik: regelgeleitetes Operieren ohne permanente Rückinterpretation.

4. Vom Sinn des sinnlosen Umformens

Einmal nachgebohrt, was Lars daran genau nicht behagt, fängt er an loszupoltern: Seit der achten Klasse geht ihm das schon auf den Wecker, immer diese doofe Umformerei erst von Termen, dann von Gleichungen und nun von Gleichungssystemen. Immer würden sie so doof herumrechnen, man müsste gar nicht mehr richtig denken, sondern einfach nur alle Spielregeln einhalten, dann wäre man plötzlich gut in Mathe! Und er hätte doch immer gesagt bekommen, Mathematik sei kreatives Denken!

Natürlich muss ich Lars in seinem Frust Recht geben; die Kritik der Didaktiker an zu viel Kalkülorientierung im Mathematikunterricht ist ja schon ein solches Allgemeingut, dass man darauf (zumindest hier in diesem Rahmen) nicht weiter eingehen muss.

Lars beschimpft aber nicht nur den Unterricht, sondern wichtige Aspekte der Algebra als Fachgebiet selbst, deshalb sehe ich mich gezwungen, etwas zu ihrer Ehrenrettung zu unternehmen und Lars doch vom „Sinn des sinnlosen Umformens“ zu überzeugen. Hinter dem, was Lars als ehrenrührige Unterforderung seiner geistigen Kapazität ablehnt, steckt nämlich die für die Mathematik insgesamt zentrale *Idee des operativen Symbolgebrauchs*, deren historische Entwicklung Sybille Krämer überzeugend herausgearbeitet hat. Sie fasst die Idee in ihrem Schlusswort auf folgende Weise zusammen:

> „Der Kerngedanke des operativen Symbolismus ist der schematische, interpretationsfreie Umgang mit schriftlichen Symbolen: Während ich Muster von Zeichenreihen durch schematische Anwendung vorgegebener Regeln bilde und umbilde, brauche ich nicht daran zu denken, was diese Zeichenreihen bedeuten. Die Grundidee der Formalisierung besteht darin, das Manipulieren von Symbolreihen von ih-

> rer Interpretation abzutrennen. Solches Vorgehen ist ein Kunstgriff, eine ‚techné', die zum Ziel hat, den Verstand zu entlasten von den Mühen der Interpretation." ([5], S. 176)

Die Erfahrung, dass es entlastend ist, algebraische Umformungen machen zu können, ohne jeden Schritt (geometrisch) interpretieren zu müssen, hat Lars selbst am Beispiel der LGS gemacht. Länger diskutieren muss ich mit Lars aber, dass dies allgemein von hohem Wert ist, weil man ohne die Verpflichtung zur permanenten Interpretation jedes einzelnen Schrittes nicht nur ohne große Mühe Erkenntnisse generieren kann, sondern auch wirklich weiter kommt, als wenn man diese Entlastung des Denkens nicht in Anspruch nimmt. Lars muss sich an diese Idee erst gewöhnen, indem wir andere Beispiele aus dem Bereich der elementaren Algebra durchdiskutieren: Stellt man aus einem realen Problem eine Gleichung auf und löst dann die Gleichung nach anderen Variablen auf, um dem Problem näher zu kommen, so muss man nicht an jeder Stelle versuchen, die Umformungsschritte in bezug auf das Sachproblem zu interpretieren, sie also „sinnvoll" werden zu lassen, auch wenn es theoretisch möglich wäre. Statt dessen erlaubt man sich, vorübergehend ohne Bezug zur Sachsituation umzuformen und erst schließlich am Ende das Ergebnis wieder in Zusammenhang mit dem Ausgangsproblem zu setzen. Nachdem wir dies an Beispielen durchgespielt haben, sieht Lars, wie mächtig diese Vorgehensweise ist: „Mensch, dann hat das sinnlose Umformen ja doch einen Sinn: Es macht mir das Leben viel leichter!" Endlich sind wir beide einmal zum gleichen Zeitpunkt der Meinung, dass das Gespräch damit einen schönen Abschluss gefunden hat.

5. Fazit

Ziehen wir Bilanz aus diesem Gespräch mit Lars: Sein Bedürfnis nach einer geometrischen Interpretation der Umformung von Gleichungssystemen ist nachvollziehbar und auch zu befriedigen, weil man eine geometrische Deutung der Zeilenaddition finden kann. Diese zu suchen, war mir wichtig, obwohl mir klar war, dass sie nicht wirklich überzeugen kann. Ein Anliegen war es mir dennoch, um seine Frage wirklich beantworten zu können, ihn also in seinen Interessen ernst zu nehmen. Gleichwohl wollte ich hier nicht stehen bleiben, denn seine Frage eröffnete in paradigmatischer Weise das Feld für eine Grundidee der Mathematik, die Idee der Beschreibungswechsel. Diese Idee hat gerade in dem Zusammenspiel zwischen Geometrie und Algebra eine bereichsspezifische Ausformung, die für das Gebiet der Analytischen Geometrie absolut tragend ist. Von da aus war es kein weiter Weg mehr zur Idee des interpretationsfreien Symbolgebrauchs als Leitidee der elementaren Algebra und als wichtiges Charakteristikum der Mathematik.

Insgesamt schreibe ich über diesen Dialog vor allem deswegen, weil ich aufzeigen möchte, dass es auch im täglichen Unterrichtsgesprächen viele dieser Art Fragen gibt, auf die man schon aus Gründen des Ernstnehmens von Schüler-Anliegen Antworten suchen muss. Wirklich bildend wird die Lernsituation aber erst dann, wenn die Lehrkraft erkennt, dass manche Fragen im Grunde an der Hauptidee dieses mathematischen Bereiches vorbei gehen, weil sie die Grundidee ignorieren. Dies dann zu explizieren, birgt Lernchancen in sich, die wir konsequenter nutzen sollten (mehr über das Chancen nutzen in [6]). Natürlich werden wir uns ab und zu auch ein „So genau wollte ich es gar nicht wissen." von den Schüler/innen einfangen, aber dieses Risiko sollten wir eingehen!

Das hier beschriebene Gespräch mit Lars ist in diesem konkreten Ablauf ein Konstrukt, das aus verschiedenen realen Begebenheiten zusammengesetzt ist, insbesondere ist die Ausgangsfrage wirklich vom Sohn eines Kollegen. Lars' weitere Fragen nach Veranschaulichung, Sinn und Bedeutung mathematischen Tuns sind so, wie sie uns Lernende in der unterrichtlichen Praxis an Schule und Hochschule täglich stellen, wenn wir sensibel hinhören. Wenn wir die Fragen wirklich ernst nehmen, sind wir oft in ähnlichen Situationen, die solch gute Chancen bieten, über die zentralen Ideen der Mathematik etwas zu lernen. Allerdings gilt es, diese Chancen überhaupt zu identifizieren, um sie dann zu nutzen!

Literatur

[1] Cornelsen Mathematik Sekundarstufe 12 (1992): Analytische Geometrie und Lineare Algebra, Cornelsen Verlag, Düsseldorf.

[2] Lambacher Schweizer Klasse 9 (1992): Klett Verlag, Stuttgart.

[3] Lengnink, Katja / Prediger, Susanne (2000): Mathematisches Denken in der Linearen Algebra, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 32 (4), S. 111-122.

[4] Lengnink, Katja / Prediger, Susanne / Wille, Rudolf (2002): Allgemeine Lineare Algebra. Ein Lehrbuch, erscheint im Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal.

[5] Krämer, Sybille (1988): Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

[6] Prediger, Susanne (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz, in: Journal für Mathematikdidaktik 22(2), S. 123-144.

[7] Tietze, Uwe-Peter / Klika, Manfred / Wolpers, Hans (Hrsg.) (2000): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 2: Didaktik der analytischen Geometrie und Linearen Algebra, Vieweg, Braunschweig.