Bemerkungen zu Standardlogiken und zur ‘Kulturalistischen Logikbegründung’ Dirk Hartmanns

von Peter Zahn, TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 2001

Überblick: In §1 (Über Standardlogiken und ihre Rechtfertigungen) gehen wir aus von der Zwecksetzung, sprachliche Mittel zu modellieren, mit denen man formulieren kann, was es heißt, eine Schlussregel sei auf Behauptungen ‘anwendbar’, ‘behauptbarkeitsvererbend’ oder ‘zulässig’. Zu solchen Formulierungen dienen komplexe Aussagen der Form $\bigwedge \underline{x} \left[A_1(\underline{x}) \wedge \ldots \wedge A_n(\underline{x}) \;\rightarrow\; B(\underline{x})\right]$ nach geeigneter Einführung der logischen Partikeln. Diese Zwecksetzung führt wenigstens zur ‘Minimallogik’. Bestimmte Liberalisierungen des Aussagengebrauchs gestatten Anwendungen noch bequemer handhabbarer Logikkalküle.

Um - trotz der prinzipiellen ‘Vagheit’ des Zulässigkeitsbegriffs - den entsprechenden Gebrauch von Aussagen der Formen $A \rightarrow B$ und $\bigwedge x\, A(x)$ zu präzisieren, hat man ihn geringfügigen Einschränkungen unterworfen, z.B. durch Modellierungen dieses Gebrauchs mit Hilfe von ‘Regeln des natürlichen Schließens’ oder von ‘Dialogspielen’. Derartige Modellierungen erweisen sich als zur Erreichung des oben gesetzten Zwecks geeignet.

In §2 (Ist die ‘Standard-Subjunktion’ paradox?) gehen wir ein auf Argumente Hartmanns in [2], nach denen bestimmte Paradoxien, die sich aus einem umgangssprachlichen Verständnis der Subjunktion ergeben, Probleme aufweisen, mit denen die Standardlogiken verbunden sind.

In §3 ziehen wir gewisse Folgebeziehungen in Betracht, die dem umgangssprachlichen Gebrauch von Fügungen wie “wenn - dann” besser entsprechen als die (von Hartmann kritisierte) Standardsubjunktion.

§4 enthält eine Bemerkung darüber, inwiefern die Frage nach der Vollständigkeit eines Logikkalküls auch von praktischem Interesse ist.

§1. Über Standardlogiken und ihre Rechtfertigungen

Verweise auf Abschnitte des genannten Artikels [2] von Dirk Hartmann kennzeichne ich im Folgenden mit einem vorangestellten “H.”. (Dieser Artikel ist von Hartmann inzwischen ‘revisited’ und erweitert worden durch [2*] und [2**].) Als *“Standardlogiken”* bezeichne ich hier kurz die Minimallogik, die Intuitionistische und die Klassische Logik. - Die Überschrift von H. §2 lautet “Das Scheitern der Konstruktiven Logik”. Gemeint ist ein Scheitern bestimmter konstruktiver Begründungs- oder Rechtfertigungsversuche für Standardlogiken. Diese angeblich gescheiterten Versuche sollen nun aber verteidigt werden.

1.1. Vorüberlegungen zur Rechtfertigung von Standardlogiken

Beim Argumentieren kann man gelegentlich spezielle Schlussregeln

$$A_1(\underline{x}), \ldots, A_n(\underline{x}) \;\;\Rightarrow\;\; B(\underline{x}) \tag{1}$$

mit gegebenen Formeln $A_i(\underline{x})$ und $B(\underline{x})$ ($\underline{x} \rightleftharpoons x_1, \ldots, x_k$) zweckdienlich anwenden, indem man, falls für gewisse Werte $\underline{c}$ der Variablen $\underline{x}$ schon die Aussagen $A_1(\underline{c}), \ldots, A_n(\underline{c})$ behauptet worden sind, auf $B(\underline{c})$ schließt. Um anzudeuten, dass man für *beliebige* Werte $\underline{c}$ von $\underline{x}$ so schließen darf, sagen wir, (1) sei *zulässig.* (Vgl. auch [8, S. 104].)

Zwecksetzung: Einführung von Partikeln ($\wedge, \rightarrow, \bigwedge$), mit denen wir dafür, daß (1) zulässig ist, schreiben können

$$\bigwedge \underline{x} \left[A_1(\underline{x}) \wedge \ldots \wedge A_n(\underline{x}) \rightarrow B(\underline{x})\right]. \tag{2}$$

Schon aus der Praxis bringen wir ein gewisses Verständnis dafür mit, was es heißt, (1) sei zulässig. Wir versuchen, dies genauer zu explizieren: Dass (1) zulässig ist, heiße, dass man für beliebige Werte $\underline{c}$ der Variablen $\underline{x}$, falls man $A_1(\underline{c}), \ldots, A_n(\underline{c})$ zu irgendeiner Zeit t behaupten darf, dann auch $B(\underline{c})$ zu t behaupten darf. Statt "zulässig" können wir hiernach auch "behauptbarkeitsvererbend" sagen. - Dass man eine Aussage A zur Zeit t behaupten darf, heiße, dass es nicht (nach den geltenden 'Behauptbarkeitskonventionen') verboten ist, A zu t zu behaupten.

Wie man für eine Aussage A höherer Komplexität verstehen kann, was es heißt, dass A behauptet werden darf, ist bekanntlich problematisch: Es gibt z.B. kein Verfahren, nach dem man für jede arithmetische Aussage 1. Stufe 'mechanisch' entscheiden kann, ob sie behauptet werden darf. (Komplexe arithmetische Aussagen sind i.Allg. nicht 'beweisdefinit' oder 'widerlegungsdefinit'.)

Hinter der angeführten Zwecksetzung steht die allgemeinere, eine Argumentationstechnik bereitzustellen, die vor allem für die wissenschaftliche Praxis möglichst gut geeignet ist, also zuverlässig, möglichst leistungsfähig, unkompliziert, übersichtlich, leicht handhabbar, sowie leicht lehr- und erlernbar ist.

Da es nichts schaden kann, eine ohnehin erlaubte Behauptung mit Hilfe einer Schlussregel zu gewinnen, scheint zunächst nichts dagegenzusprechen, einen Schluss $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B$, dessen Konklusion B behauptet werden darf, als zulässig zu klassifizieren, und zwar unabhängig davon, ob $A_1, \ldots, A_n$ behauptet werden dürfen (vgl. [4, S. 43]). Dementsprechend gehen wir - wenigstens versuchsweise - von folgender Vereinbarung aus: Falls man B zur Zeit t behaupten darf, sei es auch erlaubt zu sagen: "Falls man $A_1, \ldots, A_n$ zu t behaupten darf, dann darf man B zu t behaupten." Diese Vereinbarung könnte jedoch - generell oder nur bei der Verfolgung besonderer Ziele - wieder aufgegeben werden, sofern sich gezeigt hat, dass eine von ihr abweichende Vereinbarung zu einer besser geeigneten Argumentationstechnik führen würde.

* * *

Unter einer ‘materialen’ (oder ‘assertorischen’) Sprache verstehen wir eine (nicht bloß ‘formale’) Sprache, deren geschlossene Formeln Aussagen sind, d.h. bestimmten Behauptbarkeitskonventionen unterliegen, sodass die Behauptungen dieser Aussagen ‘sinnvoll’, wenn auch zum Teil vorläufig oder endgültig unberechtigt sind.

Im Folgenden entwerfen wir eine materiale Sprache $\mathcal{L}$, deren Elementaraussagen jedoch schon eingeführt seien, und zwar derart, dass diese nur unter bestimmten ‘Umständen’ (z.B. nach bestimmten Wahrnehmungen) behauptet werden dürfen. Dazu setzen wir voraus, dass wir über ein Verfahren oder eine Routine verfügen, die es uns für jede Elementaraussage E von $\mathcal{L}$ jederzeit zu entscheiden gestattet, ob (wir wissen, dass) E bereits behauptet werden darf. Wir sagen dafür, die Bedingung, dass E bereits ‘begründet’ ist, d.h. behauptet werden darf, sei *definit*. Diesen Begriff verwenden wir auch in anderen Fällen analog. Das Wort *“vage”* deute einen Mangel an Definitheit an.

In $\mathcal{L}$ nehmen wir nur solche Elementaraussagen E auf, die folgende Bedingung erfüllen: Falls E einmal behauptet werden darf, dann darf E auch zu jeder späteren Zeit behauptet werden. Das Gleiche gilt daher auch für die im Folgenden eingeführten komplexen Aussagen von $\mathcal{L}$, wie leicht einzusehen sein wird. [Aussagen, in denen Indikatoren (oder indexikalische Ausdrücke) vorkommen, die also nur in bestimmten Situationen bzw. Kontexten behauptet werden dürfen, lassen wir vorläufig außer Betracht.]

Wir schreiben A, B, C bzw. Ax für beliebige Aussagen bzw. Formeln (in denen höchstens eine Variable x frei vorkommt) der jeweils betrachteten Sprache, zunächst also der Sprache $\mathcal{L}$.

Die Konjunktion ($\wedge$) diene vor allem dazu, dass es zur Formulierung von (2) genügt, die Subjunktion ($\rightarrow$) als nur *zweistellige* Verknüpfung einzuführen. Dementsprechend vereinbaren wir: Man behaupte $A \wedge B$ *nur* dann, wenn schon A behauptet worden ist und B behauptet worden ist. Die Behauptung von $A \wedge B$ sei keiner weiteren Einschränkung unterworfen. Statt dessen sagen wir kurz: $A \wedge B$ darf dann und nur dann behauptet werden, wenn A und B behauptet worden sind.

Die Umkehrbarkeit derartiger Regeln zur Einschränkung von Behauptungen ist jedoch i.Allg. nur im Falle der ‘Zirkelfreiheit’ gewährleistet. Hat man z.B. für eine Aussage (etwa $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$) ‘zirkelhaft’ vereinbart, dass sie nur dann behauptet werden darf, wenn sie nicht behauptet werden darf, - so ist diese Regeln *nicht* umkehrbar.

Wegen unserer (fingierten) Vereinbarung zur Konjunktion und entsprechender noch anzuführenden Vereinbarungen zur effektiven Adjunktion und Einsquantifikation dürfen entsprechende Aussagen erst dann behauptet werden, wenn bestimmte andere Aussagen behauptet worden sind. Daher ist es angemessen, in der obigen Explikation zur Zulässigkeit von (1) die Redeweise “man darf A zu t behaupten” zu ersetzen durch “man darf A zu t

behaupten oder zu t beginnen, mehrere geeignete Aussagen unmittelbar nacheinander zu behaupten, sodass dabei zuletzt A behauptet wird". *Hierfür* sagen wir jedoch im Folgenden einfach: "Man darf A zu t behaupten." Die ursprüngliche Bedeutung dieser Redeweise bleibt ungeändert, falls A eine - wie folgt eingeführte - Subjunktion, Negation oder generelle Aussage ist.

Gemäß unserer Zwecksetzung sei die Subjunktion ($\rightarrow$) für diese 'Vorüberlegungen' eingeführt durch die - ziemlich vage - Vereinbarung: $A \rightarrow B$ darf zur Zeit t dann und nur dann behauptet werden, wenn Folgendes gilt: Wenn A zu irgendeiner Zeit t' behauptet werden darf, dann darf B zu $t * t'$ behauptet werden. ($t * t'$ kennzeichne den spätesten der beiden Zeitpunkte t, t'). Die Subjunktion vererbe also die Behauptbarkeit vom Antezedens auf das Sukzedens.

Das hierzu benötigte Verständnis von "wenn - dann" ist problematisch (vor allem für Aussagen A, B höherer Komplexität). In der Praxis erworben werden kann ein solches Verständnis zwar für Aufforderungen u.a. der Form: "Wenn du a tust, dann tue auch b innerhalb der Dauer T." Hierzu können 'Aufforderungs-Befolgungs-Korrektur-Zusammenhänge' dienen (vgl. H. S. 91). Ich sehe jedoch nicht, wie dies zu einem eindeutigen Verständnis der angeführten Vereinbarung zur Subjunktion führt.

Dennoch kann man sich die Zulässigkeit folgender minimallogischen Regeln (die nur die Konjunktion und die Subjunktion betreffen) wenigstens plausibel machen:

$$\begin{array}{rcl}
 & \Rightarrow & A \rightarrow A \\
A,\ A \rightarrow B & \Rightarrow & B \\
A \rightarrow B,\ B \rightarrow C & \Rightarrow & A \rightarrow C \\
 & \Rightarrow & A \wedge B \rightarrow A \\
 & \Rightarrow & A \wedge B \rightarrow B \\
C \rightarrow A,\ C \rightarrow B & \Rightarrow & C \rightarrow A \wedge B \\
A \rightarrow (B \rightarrow C) & \Rightarrow & A \wedge B \rightarrow C. \\
A \wedge B \rightarrow C & \Rightarrow & A \rightarrow (B \rightarrow C).
\end{array}$$

Die Zulässigkeit z.B. der letzten dieser Regeln kann man wie folgt einsehen (wobei ": t" als "zur Zeit t" zu lesen ist):

Angenommen, dass man behaupten darf:		Es genügt, zu zeigen, dass man behaupten darf:	
$A \wedge B \rightarrow C$	$: t$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$: t$
A	$: t'$	$B \rightarrow C$	$: t * t'$
B	$: t''.$	C	$: t * t' * t''.$

Dann darf man behaupten:
$A \wedge B \ : t' * t''$, also auch $C \ : t * t' * t''$.

Zur Verfügung stehen uns hierzu noch keine gerechtfertigten Argumentationsregeln, sondern nur unser unvollkommenes Verständnis des Begriffs der Zulässigkeit und der angeführten Vereinbarungen zur Subjunktion und Konjunktion. Danach genügt die angegebene Argumentation, in der "$A \wedge B \to C$", "A" und "B" wie Aussagen behandelt werden, die zu den angegebenen Zeiten behauptet werden dürfen.

Für generelle Aussagen sei hier vereinbart: $\bigwedge x\, Ax$ darf dann und nur dann zu t behauptet werden, wenn Ac für beliebige Werte c von x zu t behauptet werden darf.

Für den 'Normalfall', dass x unendlich viele (oder wenigstens unüberschaubar viele) Werte hat, stellt sich die Frage, wie wir ein Verständnis der in dieser Festsetzung vorkommenden Redewendung "für beliebige Werte c von x" erworben haben könnten. Wie könnten oder sollten wir feststellen, dass Ac für beliebige Werte c von x zu t behauptet werden darf? Auch diese Behauptbarkeitsbedingung ist etwas vage.

Dennoch läßt sich die Zulässigkeit derjenigen Regeln der Minimallogik, die auch den Allquantor betreffen, plausibel machen. Gleiches gilt für Schlußregeln, welche die übrigen logischen Partikeln betreffen - nachdem diese wie folgt im *'effektiven'* Sinne eingeführt worden sind: $A \vee B$ darf dann und nur dann behauptet werden, wenn A behauptet worden ist oder B behauptet worden ist. - $\bigvee x\, Ax$ darf dann und nur dann behauptet werden, wenn für einen Wert c von x schon Ac behauptet worden ist. - $\neg A \rightleftharpoons A \to \perp$; dabei sei $\perp$ eine Elementaraussage, deren Behauptung (für immer) verboten ist.

Nach der bisherigen - vom fortgeschrittenen Leser zu ergänzenden - Skizze ergibt sich die Plausibilität der Minimallogik daraus, dass wir eine Subjunktion zugrunde gelegt haben, welche die Behauptbarkeit vom Antezedens auf das Sukzedens vererbt. Um die Intuitionistische Logik zu erhalten, fehlt nur noch das 'Ex-falso-quodlibet', d.h. die Regel $\neg A \Rightarrow A \to B$.

Hierzu nehmen wir an, es gelte $\neg A$, d.h. es sei verboten, A zu behaupten. Solange dieses Verbot nicht verletzt worden ist, kann man nicht von der Behauptung von A zur (ggf. ebenfalls verbotenen) Behauptung von B übergehen. Es schadet also nichts, unsere Erklärung der Zulässigkeit und unsere Vereinbarung zur Subjunktion so auszulegen, dass z.B. die Regel $A, \neg A \Rightarrow B$ zulässig genannt werden darf, und $A \to B$ behauptet werden darf, sobald $\neg A$ behauptet werden darf (vgl. [4, p.43]). Damit gelangt man von der Minimallogik zur Intuitionistischen Logik. - Die entsprechende Verwendung (z.B.) von $\perp$ als Aussage, aus der 'Beliebiges folgt', erinnert an die Hinzunahme der leeren Menge zu den 'ursprünglichen' Mengen, wodurch die elementare Mengenalgebra vereinfacht wird.

Zur Negation von Elementaraussagen ist noch Folgendes nachzutragen: Gelegentlich tritt eine endgültige Verhinderung für eine Begründung einer Elementaraussage E ein [z.B. dadurch, dass der (oder ein) Gegenstand, von dem in E die Rede ist, vor seiner Untersuchung vernichtet wird oder verschwindet]. Dies sollte jedoch nicht dazu berechtigen, $\neg E$ zu behaupten. Hierzu fingieren wir die Vereinbarung, dass Behauptungen von Elementaraussagen, die erst 'in sehr ferner Zukunft' erfolgen, mit keinen Begründungsverpflichtungen mehr verbunden, d.h. keinen Einschränkungen mehr unterworfen sind. Es sei jedoch verboten, 'widerlegte' Elementaraussagen zu behaupten (und daher erlaubt, deren Negate zu behaupten). Dazu setzen wir voraus, dass ein definiter Widerlegungsbegriff für Elementaraussagen von $\mathcal{L}$ eingeführt ist. Z.B. gelte $N\varepsilon P$ (bzw. $N\varepsilon' P$) zumindest dann als widerlegt, wenn $N\varepsilon' P$ (bzw. $N\varepsilon P$) begründet und behauptet worden ist. - Eine Widerlegung ist also i.Allg. mehr als das vorläufige oder endgültige Scheitern von Begründungsbemühungen.

Wegen der Vagheit der an die Subjunktion gestellten Forderung, behauptbarkeitsvererbend zu sein, empfiehlt es sich, diese Forderung durch eine 'schärfere' zu ersetzen und somit die Behauptbarkeit von $A \to B$ noch etwas einzuschränken. Dabei ist aber darauf zu achten, dass die Subjunktion behauptbarkeitsvererbend bleibt, d.h. dass die Regel

$$A,\ A \to B \quad \Rightarrow \quad B \quad \text{(Modus Ponens)} \tag{3}$$

zulässig bleibt. - Dementsprechend sollte man bei dem Versuch, die Behauptbarkeitsbedingung für Allaussagen durch eine weniger vage Bedingung zu ersetzen, darauf achten, dass folgende Regel zulässig bleibt:

$$\bigwedge x\, Ax \quad \Rightarrow \quad Ac \tag{4}$$

Die präzisierten Einführungen dieser Aussagen sollten jedoch 'möglichst liberal' sein, d.h. in 'möglichst vielen Fällen', in denen ein Schluss $A \Rightarrow B$ behauptbarkeitsvererbend ist, $A \to B$ zu behaupten gestatten, und 'in möglichst vielen Fällen', in denen man Ac für beliebige Werte c von x behaupten darf, auch $\bigwedge x\, Ax$ zu behaupten gestatten.

Das Folgende leistet schon einen Beitrag zur Rechtfertigung eines *'klassischen'* Aussagengebrauchs: Zur objektsprachlichen Formulierung der Zulässigkeit von Schlussregeln der Form (1) werden Aussagen der Formen $A \vee B$ und $\bigvee x\, Ax$ nicht benötigt. Beim minimallogischen oder intuitionistischen Gebrauch sind auch für andere Zwecke deren Behauptungen im Prinzip überflüssig, da sie durch die Behauptungen von A oder von B bzw. von Ac - für einen Wert c von x - ersetzt werden können. (Das Letzte gilt allerdings nur im Falle der 'Einsetzungsquantifikation'.)

Intuitionistisch gilt z.B. $\neg\neg\,(A \vee B) \leftrightarrow \neg\,(\neg A \wedge \neg B)$. Hiernach liegt es nahe, die Partikeln $\vee$ und $\bigvee$ (anders als oben) im 'klassischen' Sinne einzuführen durch $A \vee B \rightleftharpoons \neg(\neg A \wedge \neg B)$ und $\bigvee x\, F \rightleftharpoons \neg \bigwedge x\, \neg F$. Dies konstituiert den 'klassischen' Gebrauch von Aussagen, die aus stabilen Elementaraussagen mit den eingeführten logischen Partikeln aufgebaut (und daher ebenfalls stabil) sind. (Eine Aussage A heiße stabil, wenn $\neg\neg A \to A$ gilt. In materialen *Dialogspielen* sind alle Elementaraussagen stabil: Ist $\neg\neg E$ gegen jeden Opponenten verteidigbar, so auch E.) Der zugehörige Kalkül der Klassischen Logik erleichtert wegen seiner 'Symmetrie' die Orientierung. (Der klassische Aussagengebrauch ist in [11] auf andere Weise eingeführt.)

Zur Rechtfertigung des klassischen Aussagengebrauchs ist jedoch über das oben Gesagte hinaus zu zeigen, dass durch den damit verbundenen Verzicht auf die effektiv zu gebrauchenden Partikeln $\vee$ und $\bigvee$ nur entbehrliche sprachliche Mittel verloren gehen.

Hierzu betrachten wir zunächst einen 'Lehrsatz' der Form

$$\bigwedge x \in K.\ \bigvee y\, A(x,y) \tag{5}$$

(etwa mit universellen Variablen x, y). Für ihn werden von konstruktivistischer und von intuitionistischer Seite - um einen Nutzen ziehen zu können - ein *direkter* Beweis verlangt, der zeigt, wie man (wenigstens im Prinzip) zu jedem Element c von K eine 'Lösung' d mit $A(c,d)$ finden kann. Da hierzu ein allgemeines 'Lösungsverfahren' V erforderlich ist, kann ein solcher Lehrsatz zur Ankündigung einer genaueren Auskunft dienen, die erst im Beweis angegeben wird und sich so schreiben lässt:

$$\bigwedge x \in K.\ \bigvee y\, (V\!: x \mapsto y)\ \wedge\ \bigwedge x \in K.\ \bigwedge y\, [(V\!: x \mapsto y) \rightarrow A(x,y)] \tag{6}$$

Dabei bedeute $V\!: x \mapsto y$, dass V vorschreibt, nach der Eingabe von x schließlich das Ergebnis y zu liefern.

V würde jedoch i.Allg. für manche $c \in K$ nicht tatsächlich ein Ergebnis liefern, da der dafür benötigte 'Rechenaufwand' die verfügbare Zeit überschreiten würde. Wie ist dann aber die Existenz eines solchen Ergebnisses zu verstehen? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir V als ein System von Regeln, nach denen bestimmte Abfolgen von Handlungsschritten erlaubt (oder sogar geboten), alle weiteren Schritte aber verboten sind. Jeder erlaubte Schritt von V sei durch die Eingabe und die vorherigen Schritte eindeutig bestimmt.

Nun bedeutet die klassische Existenz eines zu einer Eingabe c in V gehörigen Ergebnisses, dass es nach den Regeln von V erlaubt (d.h. nicht verboten) ist, nach der Eingabe von c Schritte zu tun, die schließlich ein Ergebnis liefern.

Da bei jeder Anwendung von V höchstens eine beschränkte Anzahl T von Schritten tatsächlich ausgeführt werden kann, genügt es zur Untersuchung der Erfolgsaussichten unserer Praxis, nur solche Verfahren zu betrachten, die zufolge eines 'Stopp-Befehls' spätestens nach T Schritten abbrechen.

Ist ein Wert c in ein solches Verfahren V eingegeben worden, so kann man spätestens nach T Schritten von V entscheiden, ob $\bigvee y\, (V : c \mapsto y)$ (mit dem effektiven Einsquantor) gilt. Somit kann durch (6) - auch mit dem klassischem Einsquantor - mitgeteilt werden, wie man für beliebige $c \in K$ ein d mit $A(c,d)$ innerhalb der Zeit T finden kann. (Wegen dieser Beschränkung der 'Rechenzeit' erhält man (6) allerdings i.Allg. nur für 'kleinere' Mengen K als ohne diese Beschränkung.)

Ein weiteres den klassischen Einsquantor betreffendes Problem ist verbunden mit dem situationsabhängigen Gebrauch von Aussagen, in denen Indikatoren vorkommen. Indikatoren wie "dieses Tier" dienen als Eigennamen, allerdings nur in be-stimmten

Situationen (z.B. beim Anblick eines gezeigten Tieres). An Stelle derartiger Indikatoren könnte man auch 'Gegenstandsvariable' verwenden, die in diesem Falle frei vorkommen. Gegenstandsvariable können aber auch durch Quantoren gebunden werden (vgl. [6, §26]). - Im Folgenden sei eine Aussage der Form $\bigvee u\, Au$ mit einer Gegenstandsvariablen u im effektiven Sinne zu verstehen; d.h., $\bigvee u\, Au$ darf dann und nur dann behauptet werden, wenn Au bei der Bezeichnung eines Gegenstandes durch u behauptet worden ist.

Anders als die Aussagen der Form $\bigvee x\, Ax$ mit einer Einsetzungsvariablen x sind jedoch Aussagen der Form $\bigvee u\, Au$ mit einer Gegenstandsvariablen u i.Allg. nicht entbehrlich; denn eine Aussage Au, in der u frei vorkommt, gilt i.Allg. nur in einer Situation, in der durch u ein *bestimmter* Gegenstand bezeichnet wird. Wir zeigen, inwieweit dennoch situationsunabhängig gültige Berichte über empirische Daten in klassische Argumentationen einbezogen werden können.

Für solche Berichte eignen sich vor allem Aussagen der Form $B \rightleftharpoons \bigvee \underline{u}\, (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ mit Elementaraussagen $E_i \rightleftharpoons E_i(\underline{u})$ und Gegenstandsvariablen $\underline{u} \rightleftharpoons u_1, \ldots, u_k$. Σ bezeichne eine Liste bereits zu Recht behaupteter Aussagen. (Sie ist im Folgenden mit einem Gedächtnisinhalt vergleichbar.) Wir betrachten $B \in \Sigma$ als eine Elementaraussage, die als begründet gilt, falls B in der Liste Σ steht, und sonst als widerlegt gilt. Durch Nachschauen in Σ kann man entscheiden, ob $B \in \Sigma$ gilt. Die Aussagen der Form $B \in \Sigma$ sind also stabil. Deren Verwendung an Stelle der ursprünglichen Berichte B gestattet somit klassisches Argumentieren. (Den effektiven Einsquantor "$\bigvee$" sollte man dabei nur in den Aussagen der Form $B \in \Sigma$ verwenden, also für den klassischen Einsquantor ein anderes Zeichen, etwa "$\exists$", wählen.)

Der Abschnitt H. §3 a) trägt die Überschrift "Logischer Determinismus". Danach heißt es: "Das "Markenzeichen" der Klassischen Logik ist das "Tertium-non-datur" ($A \vee \neg A$), nach welchem jede Aussage genau einen der beiden Wahrheitswerte "wahr"/ "falsch" besitzt." Folgt aus $A \vee \neg A$ aber tatsächlich, dass A genau einen dieser beiden Wahrheitswerte besitzt? Bei klassischem Aussagengebrauch darf man zwar $A \vee \neg A$ für beliebige A behaupten, darf aber für manche A - wenigstens bisher - weder A noch $\neg A$ behaupten. Dementsprechend gibt es auch kein Verfahren, nach dem man z.B. für beliebige arithmetische Aussagen A 1. Stufe entscheiden kann, welche der beiden Aussagen A, $\neg A$ behauptet werden darf. Eine Antwort auf die Frage, ob dennoch jede derartige Aussage wahr *oder* falsch sei, hängt vor allem davon ab, ob man dabei das Wort "oder" im effektiven oder im klassischen Sinne versteht. - Fragen zum Logischen Determinismus sind in [7, S. 468-478] ausführlich diskutiert. Danach kann ein 'Antirealist' gegen die Klassische Logik nicht mehr die üblichen Realismusbedenken anführen.

1.2. Bemerkungen zu angebotenen methodisch-konstruktiven Logikrechtfertigungen

Nach den bisherigen Plausibilitätsbetrachtungen ergibt sich wenigstens die Minimallogik aus der Zwecksetzung, die Zulässigkeit für Schlußregeln der Form (1) in der Sprache $\mathcal{L}$ formulieren zu können und damit derartige Schlußregeln (neben allgemeineren 'logischen' Regeln) verfügbar zu machen. Die Übergänge zu einem intuitionistischen und zu einem klassischen Aussagengebrauch stellen m.E. bequemer handhabbare Logikkalküle zur Verfügung und erleichtern damit evtl. Argumentationen und z.B. die Auffindung mancher mathematischen Beweise. Dies sollte jedoch nicht überbewertet werden, da z.B. ein indirekter Existenzbeweis weniger Informationen liefert als ein entsprechender direkter Beweis. Damit bilden die Standardlogiken brauchbare und mehr oder weniger bequeme Werkzeuge zum schließenden Argumentieren.

Die Subjunktion sollte jedoch (wie schon erwähnt) auf weniger vage Weise als in 1.1 eingeführt werden. Dazu eignen sich unter anderem die Regeln des natürlichen Schließens (RnS) für materiale Sprachen.

Unter den materialen RnS kommt die Einführungsregel für Allaussagen mit (i. Allg.) unendlich vielen Prämissen vor, nach der man in einer Herleitung aus gegebenen Annahmen Σ zu $\bigwedge x\, Ax$ übergehen darf, wenn man über ein Verfahren verfügt, nach dem man - für beliebige Werte c von x - Ac aus Σ herleiten 'kann'. Wir haben aber kein allgemeines 'Meta-Verfahren', das jedenfalls zu entscheiden gestattet, ob ein Verfahren, das angeblich das Gesagte leistet, dies auch tatsächlich leistet. Somit ist auch diese Einführungsregel für Allaussagen etwas vage.

Um (unter anderem) Einführungsregeln mit unendlich vielen Prämissen zu vermeiden, sind die materialen *Dialogspiele* eingeführt worden. Von einer Gewinnstrategie für eine Aussage A ist allerdings zu verlangen, daß man A gegen *beliebige* Opponenten verteidigen 'kann'. Dass man gegenwärtig über eine entsprechende Gewinnstrategie verfügt, ist dennoch in gewisser Weise widerlegungsdefinit.

Hartmann kritisiert den dialogischen Zugang in H. §2 b) mit den Worten: "... ist zunächst festzustellen, dass die Dialogische Logik dem Anspruch nach tatsächlich die vernünftige Reglementierung des Argumentationshandelns in Form eines dialogischen Disputs zweier Kontrahenten (Proponent und Opponent) um die Wahrheit einer Aussage zum Ziel hat. Jedoch verfehlt der spieltheoretische Zugang mit seiner Terminologie von "Angriff", "Verteidigung", "Gewinn" und "Verlust" dieses Ziel bereits im Ansatz."

Der Hauptzweck der materialen Dialogspiele ist es jedoch, zu einer 'dialogdefiniten' Festlegung der Behauptbarkeit (via Gewinnstrategie) zu gelangen, mit deren Hilfe sich dann gewisse Schlußregeln als zulässig erweisen. Die oben erwähnte Terminologie ("Angriff", "Verteidigung" usw.) wurde nur didaktisch zur Erleichterung eines ersten Verständniserwerbs benutzt. Sie sollte daher m.E. nicht zur Kritik am dialogischen Zugang herangezogen, sondern möglichst durch eine angemessenere Terminologie ersetzt werden. (Statt “Angriff”/“Verteidigung” ist in [3] “Anfrage”/“Antwort” vorgeschlagen worden. Für “Gewinn” und “Verlust” fallen mir keine eindeutig passenderen Worte der Umgangssprache ein. Die Situation ist ähnlich wie in der Mathematik. Dort hat man sich notgedrungen daran gewöhnt, Metaphern wie “Gruppe”, “Ring”, “Körper”, “natürlich”, “rational” usw. recht sorglos zu verwenden.)

Da die Rahmenregeln für Dialogspiele nicht von vornherein offensichtlich aus einer Zwecksetzung hervorgehen, sondern wohl eher durch ‘Versuch und Irrtum’ aufgefunden worden sind, seien folgende allgemeine Bemerkungen über zweckrationales Planen eingefügt. Dieses kann in *manchen* Fällen nach folgendem Schema verlaufen:
1. Vorgabe eines Zweckes.
2. Suche nach Mitteln zu dessen Erreichung (evtl. mit Hilfe heuristischer Vorüberlegungen unter partieller Vorwegnahme von 3. oder 4.).
3. Untersuchung, wie ein so gefundenes, vermutlich taugliches Mittel funktioniert.
4. Rechtfertigung desselben durch den Nachweis, daß es zur Erreichung des gegebenen Zweckes geeignet ist.

Oft kann die Suche (2.) nur wenig systematisch, etwa durch ‘Versuch und Irrtum’ erfolgen, sodass die Rechtfertigung erst ex post gegeben werden kann.

Nach einer dialogischen Einführung der Behauptbarkeit setzt der Nachweis der Zulässigkeit weiterer Schlußregeln einen Zulässigkeitsbeweis für den Modus Ponens voraus, nach dem die Subjunktion behauptbarkeitsvererbend ist. Dieser Beweis kann aber nicht mit dialogischen Methoden (auf einer Metaebene) gelingen. (Wir betrachten hier nur Dialogspiele mit der effektiven allgemeinen Dialogregel wie in [5, S. 75].) Aus technischen Gründen empfiehlt es sich, einen Beweis für einen allgemeineren ‘Schnittsatz’ (statt für den Modus Ponens) zu führen. Zur seiner Mitteilung braucht man metasprachliche Aussagen, in denen Worte wie “wenn - dann” und “für alle” zum Teil iteriert vorkommen. Deren Gebrauch und Verständnis werden dabei durch unsere Kenntnis sprachlicher Gepflogenheiten und den ‘Sinnzusammenhang’ ermöglicht. In diesen Beweisen wird schon derart argumentiert, dass dies zum Teil einer Anwendung minimallogischer Regeln und Induktionsprinzipien gleichkommt. - Wer dennoch einen Beweis des Schnittsatzes akzeptiert, sollte m.E. nicht von einem Scheitern der dialogischen Logikbegründung sprechen, da der Schnittsatz garantiert, dass die Schlussregel (3) (Modus Ponens) zulässig ist, und offenbar auch (4) zulässig ist.

Im Bezug auf unsere in 1.1 angeführte Zwecksetzung (zu (1) und (2)) ist die ‘Güte’ eines Systems von Rahmenregeln für Dialoge vor allem danach zu beurteilen, ob $A \to B$ für ‘möglichst viele’ Aussagenpaare A, B verteidigbar ist, für die B verteidigbar ist, falls A verteidigbar ist. (Man kann jedoch nicht vorab garantieren, dass hiernach von zwei vorgelegten Systemen von Rahmenregeln eines eindeutig besser als das andere ist.)

Besonders zu betrachten sind jedoch noch Elementaraussagen (Primaussagen) und ihre Negate: In [5, S. 65] lautet die *Gewinnregel:* "Der Proponent hat gewonnen, wenn er eine angegriffene Primaussage (...) verteidigt hat oder wenn der Opponent eine angegriffene Primaussage nicht verteidigt." Betrachten wir jedoch eine Elementaraussage E über einen Gegenstand, der vor seiner Untersuchung vernichtet worden ist! Dann sollte $\neg E$ nicht einfach deshalb verteidigbar sein, weil E 'bloß faktisch' von keinem Opponenten verteidigt werden kann. - Daher sei folgende Regelung vorgeschlagen: Gegeben seien bestimmte konventionelle 'Elementarregeln' mit Sonderfällen der Form $E_1, \ldots, E_n \Rightarrow E$ (mit Elementaraussagen $E_1, \ldots, E_n, E$). Dazu mögen u.a. Prädikatorenregeln sowie $N\varepsilon P, N\varepsilon' P \Rightarrow \perp$ gehören. Nun sei vereinbart: P (der Proponent) darf die von O (dem Opponenten) gesetzten Elementaraussagen nicht angreifen. Statt dessen darf P eine von ihm gesetzte Elementaraussage dadurch verteidigen, dass er sie 'bestätigt' *oder* nach den Elementarregeln herleitet aus Elementaraussagen, die O gesetzt hat oder P verteidigt. Eine Elementaraussage bestätigen darf nur, wer eine 'Begründung' für sie kennt, d.h. weiß, dass er sie (auch außerhalb des Dialogs) bereits behaupten darf. (Eine 'Begründung' kann in manchen Fällen dem Dialogpartner nicht aufgewiesen oder mitgeteilt werden.) - $\neg A$ sei wieder eine Abkürzung von $A \rightarrow \perp$.

Nachdem P z.B. $\neg(N\varepsilon P)$ als These gesetzt und O diese durch $N\varepsilon P$ angegriffen hat, kann P $\perp$ setzen und ggf. durch eine 'Begründung' von $N\varepsilon' P$ nach der Elementarregel $N\varepsilon P, N\varepsilon' P \Rightarrow \perp$ verteidigen. - Nimmt man $\perp \Rightarrow E$ zu den Elementarregeln hinzu, so wird z.B. $E_1 \wedge \neg E_1 \rightarrow E$ verteidigbar. - Neben weiteren Details ist noch zu auszuführen, dass der Beweis des Schnittsatzes durch diese geänderten Vereinbarungen nicht gestört wird.

§2. Ist die 'Standard-Subjunktion' paradox?

Als Beispiele für Probleme, mit denen die Standardlogiken (über ihre Theorembestände) verbunden sind, werden in H. folgende Paradoxien besprochen.

2.1. Zum Bestätigungsparadox (Rabenparadox)

Naturwissenschaftliche 'Gesetzesaussagen' der Form $\bigwedge x\,(Ax \rightarrow Bx)$ können i.Allg. nicht endgültig verifiziert, sondern nur vorläufig bestätigt werden. Was dies heißt, ist zunächst nicht ganz klar. In H. §3. b) wird folgender Bestätigungsbegriff betrachtet: "Hat eine Gesetzesaussage G die Form $\bigwedge x\,(Ax \rightarrow Bx)$, dann lauten die drei Forderungen wie folgt:
i) Eine Bestätigungsinstanz für G soll dann vorliegen, wenn für einen Gegenstand c mit A auch B gilt. $Ac \wedge Bc$ ist also eine Bestätigung für G.
ii) Ein Sachverhalt, der das Antezedens der generalisierten Subjunktion nicht erfüllt,

soll nicht als Bestätigung für G gewertet werden.
iii) Logisch äquivalente Gesetze sollen die gleichen Bestätigungsinstanzen besitzen." Dabei sei "logisch äquivalent" im Sinne der Klassischen Logik zu verstehen. Das Bestätigungsparadox besteht darin, daß sich nach i) und iii) auch $\neg Ac \wedge \neg Bc$ als Bestätigung für G erweist [da G äquivalent zu $\bigwedge x\,(\neg Bx \to \neg Ax)$ ist], im Widerspruch zu ii). Dass dieses Paradox nur dann zum Problem wird, wenn man den Induktionsbegriff über den Bestätigungsbegriff klären will, hat Hartmann selbst am Ende von H. §3 b) erwähnt. Gezeigt ist nur, daß der Bestätigungsbegriff mit der Forderung iii) für die klassisch-logische Äquivalenz ungeeignet ist. Dies spricht aber nicht gegen die sonstige Brauchbarkeit der Klassischen Logik.

Ferner läßt sich erraten, dass die Forderung ii) auch für das Sukzedens an Stelle des Antezedens gelten soll, also der Bestätigungsbegriff symmetrisch sein soll. Dann ist jede Bestätigung für $\bigwedge x\,(Ax \to Bx)$ auch eine Bestätigung für $\bigwedge x\,(Bx \to Ax)$, und dies gilt unabhängig davon, für welche Logik iii) gefordert wird. Ist aber ein derart symmetrischer Bestätigungsbegriff überhaupt zweckdienlich?

* * *

Die im folgenden diskutierten Paradoxien (sowie eine Variante des Bestätigungsparadox) entstehen nach Hartmann schon bei Zugrundelegung der Intuitionistischen Logik (H. §4) oder sogar der Minimallogik (H. §5).

2.2. Zur "Paradoxie der Dispositionstermini"

Unter dieser Überschrift wird in H. §4 b) der Begriff der Wasserlöslichkeit definiert durch $\mathrm{WL}(x) \rightleftharpoons \bigwedge t\,(\mathrm{W}xt \to \mathrm{L}xt)$ ("x ist wasserlöslich genau dann, wenn für alle Zeitpunkte t gilt, wenn x zu t in Wasser gegeben wird, dann löst sich x auf"). Im Rahmen der Intuitionistischen Logik ist danach ein Gegenstand, der nie in Wasser gelegt wird, wasserlöslich. Spricht dies aber gegen die Intuitionistische Logik oder gegen die angegebene Definition der Wasserlöslichkeit? Wie könnte dieser Begriff evtl. angemessener eingeführt werden?

Hierzu erinnern wir uns zunächst daran, dass eine Elementaraussage der Form "Der Stab s hat die Länge a" durch eine Messung von s mit dem Ergebnis a zu begründen ist - und durch eine Messung mit einem anderen Ergebnis zu widerlegen ist. Dementsprechend sei nun vorgeschlagen, $\mathrm{WL}(c)$ als eine Elementaraussage aufzufassen, die dadurch zu begründen bzw. widerlegen ist, dass man den Gegenstand c in Wasser tut und sieht, dass er sich aufzulösen beginnt bzw. dies nicht tut. Dazu kann man noch folgende 'Prädikatorenregeln' (die einem 'Bedeutungspostulat' von Carnap entsprechen) aufstellen: $\mathrm{W}c, \mathrm{WL}(c) \Rightarrow \mathrm{L}c$ und $\mathrm{W}c, \mathrm{L}c \Rightarrow \mathrm{WL}(c)$.

'Theoretisch' ist allerdings die Komplikation denkbar, daß sich c in Wasser einmal aufzulösen beginnt und ein andermal nicht. Für diesen Fall könnte man vereinbaren, nur das zuerst eingetretene dieser Ergebnisse zu akzeptieren. Statt dessen kann man zunächst eine Elementaraussage $\mathrm{WL}(c,t)$ ("c ist wasserlöslich zur Zeit t") einführen, die dadurch zu begründen bzw. widerlegen ist, dass man c zu t in Wasser daraufhin prüft, ob sich c aufzulösen beginnt. Wieder ist es angebracht, noch Prädikatorenregeln aufstellen, die zu den zuletzt angeführten analog sind. $\mathrm{WL}(c)$ ist dann zu definieren als $\bigwedge t\, \mathrm{WL}(c,t)$. Eine derartige Aussage kann freilich nur als Vermutung oder Hypothese aufgestellt werden.

Zur Diskussion gestellt sei noch eine andersartige Definition der Wasserlöslichkeit (die von [6, S. 26f.] etwas abweicht). Gegeben sei eine physikalische Theorie T oder ein System T von Vermutungen, die etwa aus der Alltagserfahrung entstanden sind. Der Prädikator "wasserlöslich" (WL) sei definiert durch

$$\mathrm{WL}(c) \rightleftharpoons \bigvee Z \,\varepsilon\, \mathcal{B}.\, \{c \,\varepsilon\, Z \wedge [T \prec \bigwedge x \,\varepsilon Z.\ \bigwedge t\, (\mathrm{W}xt \to \mathrm{L}xt)]\}.$$

Dabei stehe $\mathcal{B}$ für "Beschaffenheit", "Zustand" oder "Mechanismus" - was genauer zu spezifizieren wäre. $c \,\varepsilon\, Z$ sei etwa zu lesen als "c hat die Beschaffenheit Z". $T \prec A$ heiße, dass A aus T nach den Regeln (z.B.) der Intuitionistischen Logik herleitbar ist. ($T \prec A$ lässt sich als eine elementare Aussage auffassen.) Nun nehmen wir etwa an, Z_o sei eine neu entdeckte Beschaffenheit von Körpern auf dem Mond, für die wir vermuten, dass niemals ein Stück Z_o in Wasser gelangen werde: $\bigwedge x \,\varepsilon\, Z_o.\ \bigwedge t\, \neg \mathrm{W}xt$. Falls diese Vermutung *nicht* aus T logisch folgt, entsteht keine Paradoxie. Es wäre also ggf. zu untersuchen, welchem Zweck (wie z.B. dem Verständnis physikalischer Vorgänge) es evtl. dienen könnte, die genannte Vermutung in T aufzunehmen - oder ob es nicht besser wäre, dies nicht zu tun.

2.3. "Paradoxie der irrealen Konditionalsätze"

Diese Paradoxie wird in H. §4 c) u.a. am Beispiel folgenden irrealen Konditionalsatzes Satzes behandelt: "Wenn (A) es nicht so geschneit hätte, dann wäre (B) ich noch rechtzeitig angekommen." Dieser Satz wird mit Hilfe des Subjunktors "$\to$" für "wenn - dann" in der Form $(A \to B) \wedge \neg A \wedge \neg B$ interpretiert. Damit erhält man das in der Tat paradoxe Ergebnis, dass ein irrealer Konditionalsatz bereits dann wahr ist, wenn dessen Antezedens und Sukzedens beide falsch sind.

'Realistischer' ist jedoch vielleicht folgende Interpretation des angeführten Konditionalsatzes, die zu keiner Paradoxie führt: "(i) Ich hatte erwartet, noch rechtzeitig anzukommen. Aber (ii) es hatte geschneit. Daher (iii) bin ich nicht mehr rechtzeitig gekommen." Statt (i) könnte es ggf. ausführlicher heißen: "Ich hatte *gefolgert*, dass ich noch rechtzeitig ankomme, und zwar aus den vor meiner Abfahrt vorgelegenen Umständen und unter anderem der Vorstellung normaler Verkehrsverhältnisse - ohne

Schnee. Diese Folgerung erfolgte auf gewohnte - nicht nur mit Worten, sondern auch mit anschaulichen Vorstellungen operierende - Weise." (i) folgt aber ersichtlich nicht aus (ii).

In anderen Fällen mag es angemessener sein, einen irrealen Konditionalsatz in der Form $(C \wedge A \prec B) \wedge \neg A \wedge \neg B$ mit einer Konjunktion C aus gewissen 'Tatsachen und Vermutungen' wiederzugeben. Dabei bezeichne "$\prec$" eine (z.B.) logische Herleitbarkeits-Beziehung.

2.4. Zur "Paradoxie der Verpflichtung"

A heiße Rauben, und B heiße Morden. Da aus $\neg A$ in der Intuitionistischen Logik folgt $A \to B$, erhalten wir aus dem Gebot $\Delta!\neg A$ nach den Regeln der Modallogik auch das Gebot $\Delta!(A \to B)$. Hieraus wird in H. §4 d) 'gefolgert', dass es geboten sei, einen Beraubten zu ermorden. Dieses in der Tat paradoxe Ergebnis - nämlich nach dem Tun von A das Inkrafttreten von $\Delta!B$ - würde man jedoch erst nach folgender Regel (angenommen, man hätte sie) erhalten:

$$\Delta!(A \to B),\ A \ \Rightarrow\ \Delta!B.$$

Um das Gebot $\Delta!(A \to B)$ in Worten wiederzugeben, fällt uns vielleicht folgende Formulierung ein: "Falls A getan wird, dann tue man auch B." Der alltagssprachlich geschulte 'gesunde Menschenverstand' könnte dies jedoch eher im Sinne von $A \to \Delta!B$ (miss-)verstehen. Denn wozu sollte jemand das Gebot $\Delta!(A \to B)$ äußern, wenn feststeht, dass A zu unterlassen ist? (Der Schluss von $\Delta!(A \to B)$ auf $A \to \Delta!B$ entspricht somit einer 'konversationellen Implikatur'.)

Im vorliegenden Falle haben wir die beiden Gebote $\Delta!(A \to B)$ und $\Delta!\neg B$. Danach darf man nicht morden und somit auch nicht rauben. Wer aber raubt und daraufhin, um das erste Gebot nicht zu verletzen, mordet, verletzt das zweite Gebot und tut Schlimmeres. $\Delta!(A \to B)$ sollte also nicht heißen, dass nach Ausführung von A jedenfalls B zu tun sei, sondern, dass man A nur dann tun soll, falls man auch B tun will und kann; anderenfalls hat man A zu unterlassen - oder man hätte A unterlassen sollen.

Dementsprechend sollte ein Verbot $\Delta!\neg(C \wedge D)$ nicht heißen, dass man nach dem Tun von C jedenfalls D zu unterlassen hat, sondern zum Beispiel nur, daß man C hätte unterlassen sollen, falls sich später das Tun von D als erwünscht oder gar geboten herausstellt (vgl. [10, S. 439]). Derartige Ge- oder Verbote können zum - revidierbaren - Planen unseres Tuns und Unterlassens dienen.

Wie Hartmann anmerkt, beruhen die in H. §4 geschilderten Paradoxien der Intuitionistischen Logik ausnahmslos auf der logischen Wahrheit des Ex-falso-quodlibet. Um die Paradoxie der Verpflichtung zu erhalten, braucht man jedoch gar keine formale Logik als gegeben vorauszusetzen. Statt dessen genügt der Verweis auf die Möglichkeit, eine behauptbarkeitsvererbende Aussagenverknüpfung ($\to$) einzuführen (z.B. auch durch $A \rightarrow B \rightleftharpoons \neg A \vee B$), die das Ex-falso-quodlibet erfüllt. Dies sei noch illustriert:

Die diskutierte sowie eine ähnliche Paradoxie ergeben sich auch wie folgt: Die Einführung der Adjunktion (z.B.) im effektiven Sinne (s. 1.1) rechtfertigt u.a. die Regel

$$\Delta!A \;\Rightarrow\; \Delta!(A \vee B).$$

Wer nämlich das Gebot $\Delta!A$ befolgt, tut A, wofür wir auch sagen dürfen, er tue $A \vee B$ und befolge damit das Gebot $\Delta!(A \vee B)$. Da man nicht rauben soll, soll man nicht rauben - oder aber morden. Dies ist leicht in dem Sinne misszuverstehen, dass es nach einem Raub geboten sei, auch zu morden. - Da man seinen Nächsten lieben soll, soll man ihn erst recht lieben oder ermorden (Paradoxie von Alf Ross). Soll man also seinen nicht geliebten Nächsten ermorden?

Zur Erklärung dafür, weshalb ein Gebot der Form $\Delta!(A \vee B)$ missverstanden werden und somit zu einer Paradoxie führen kann, brauchen wir aber gar keinen Logikkalkül heranzuziehen. Statt dessen genügen Hinweise auf die Einführung der effektiven Adjunktion und auf eine Negationseinführung, nach der man nicht sowohl A als auch $\neg A$ behaupten darf. Letztlich entscheidend ist aber Folgendes: Um zu veranlassen, dass eine *bestimmte* der beiden Handlungen A, B getan wird, ist das Gebot $\Delta!(A \vee B)$ nicht geeignet. Daher äußert man ein solches Gebot normalerweise nur, um zu sagen, dass man (bzw. eine bestimmte Person) A oder B *nach eigener Wahl* tun soll.

* * *

In H. §5 werden entsprechende Paradoxien, die sich schon aus der Minimallogik ergeben, behandelt. Insbesondere wird als 'zweites Lewissches Paradox' unter H. (§5-8) angeführt: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$. Wahres *folgt* demnach aus Beliebigem. Dies klingt u.a. deshalb paradox, weil man das Wort "folgt" im Sinne von "folgt logisch" oder "ist erschließbar" missverstehen kann. Es gilt aber i.Allg. nicht $A \rightarrow (B \prec A)$.

§3. Subjunktion und Umgangssprache

Hartmanns 'Kulturalistische Relevanzlogik' sollte zur Rekonstruktion, Explikation und Verbesserung der faktischen Argumentationspraxis dienen und (durch Vermeidung irrelevanter Annahmen) zu einer Angleichung des Subjunktors an den umgangssprachlichen Gebrauch von "wenn - dann" und entsprechenden Fügungen führen. (Dadurch sollten auch bestimmte Paradoxien vermieden werden.)

Eine 'Standard-Subjunktion' dient zur Formulierung ihrer - mehr oder weniger großzügig zu verstehenden - Eigenschaft, die Behauptbarkeit vom Antezedens auf das

Sukzedens zu vererben. Damit weicht der Gebrauch eines ‘Standard-Subjunktors’ vom alltagssprachlichen Gebrauch entsprechender Worte wie “wenn - dann”, “folgt” u.a. ab. Diese werden außerhalb der Mathematik und Standardlogik nur selten wie in ihnen der Subjunktor verwendet. (Daher müssen Mathematikstudenten den klassischen Subjunktor erst mühsam verstehen erlernen.)

Die Standardlogiken enthalten u.a. Schlussregeln (insbesondere $B \Rightarrow A \to B$ und ggf. $\neg A \Rightarrow A \to B$), mit denen man *entbehrliche* Folgerungen ziehen kann; diese richten aber beim korrektem Schließen keinen Schaden an. Wegen ihrer Entbehrlichkeit sind diese Folgerungen in der Umgangssprache jedoch missverständlich oder sie wirken paradox. (Entbehrliches oder dessen Zulassung kann in manchen Fällen dennoch hilfreich sein. Erinnert sei z.B. an die Einführung *unendlich vieler* natürlicher Zahlen, von denen fast alle für die numerische Praxis entbehrlich sind, sowie an die Einführung der - im Prinzip ebenfalls entbehrlichen - rationalen Zahlen. Durch diese Einführungen wird die arithmetische Theorie jeweils einfacher, übersichtlicher, bequemer anwendbar und leichter lehr- und erlernbar gemacht.)

Für eine Rekonstruktion umgangssprachlicher Argumentationsformen sind gewisse Schwierigkeiten zu überwinden: Das Wort “folgt” dient dabei oft nicht als Subjunktor, sondern zum Verweis auf einen ‘Folgerungszusammenhang’, der aber i.Allg. nicht (oder nicht allein) durch *logisches* Folgern entsteht. In manchen Fällen liegen solchem ‘Folgern’ nicht einmal sprachliche Regeln oder Gepflogenheiten zugrunde, sondern es wird von anschaulichen Vorstellungen geleitet. So könnte z.B. Klein-Susi in [2*, (§20-10)] sagen: “Stell dir vor, dass die Mama einkäuft! Dann kann sie doch nicht im Garten sein.” - Beim ‘Folgern’ werden ggf. nicht genannte Tatsachen, Vermutungen oder Hypothesen als zusätzliche ‘Prämissen’ benutzt. Die Verfügbarkeit dieser Hilfsmittel zum ‘Folgern’ hängt aber von den Situationen, in denen wir uns gerade befinden, ab. Somit hängt auch der gewöhnliche Gebrauch des Wortes “folgt” von diesen wechselnden Situationen ab.

Gelegentlich wird “wenn - dann” so gebraucht, wie wir es soeben für das Wort “folgt” skizziert haben (vgl. 2.3), drückt in diesem Falle also keine Subjunktion aus. Daher ist auch der alltägliche Gebrauch von “wenn - dann” situationsabhängig und bleibt manchmal etwas unklar.

In [2*, (§1-1)] wird folgende Aussage betrachtet: “Wenn der Geist unabhängig vom Körper existieren kann, dann hat der Materialismus recht”. Dafür, dass dies *falsch* ist, wird in [2*, (§1-2)] als Formalisierung $\neg(D \to M)$ angegeben. Ein weiterer Formalisierungsvorschlag sei $\neg(D \wedge X \prec M)$ [wobei X und die Folgerungsbeziehung $(\prec)$ noch spezifiziert werden müssen]. In Betracht zu ziehen sind aber auch die Aussage “Wenn der Geist unabhängig vom Körper existieren kann, dann hat der Materialismus nicht Recht” sowie als Vorschläge zu ihrer Formalisierung: $D \to \neg M$ und $D \wedge X \prec \neg M$.

Die geniale Kulturleistung, die zu den Standardlogiken - insbesondere zur Intuitionistischen und zur Klassischen Logik - geführt hat, besteht gerade in der Zulassung 'irrelevanter' Argumentationen: Zwar kann deren Vermeidung in vielen alltäglichen Situationen vor Mißverständinissen schützen; viele komplizierte Folgerungszusammenhänge (z.B. in mathematischen Beweisen) lassen sich jedoch durch 'irrelevante' Argumentationen vereinfachen und übersichtlicher machen. Dabei können 'künstlich' eingeführte sprachliche Hilfsmittel (vor allem der klassische Subjunktor), die Anwendungen möglichst einfacher 'logischer' Regeln gestatten, hilfreich sein.

§4. Bemerkungen zur Vollständigkeit von Logikkalkülen

In H. §18 wird zur Vollständigkeit von Logikkalkülen folgendes angemerkt: "Traditionell wird die Vollständigkeit von Kalkülen mit modelltheoretischen Verfahren bewiesen, die auch "semantische" Verfahren heißen. Das kommt daher, dass sie mit Wahrheitswertbelegungen für Formeln arbeiten und dass Gottlob Frege (...) die Bedeutung einer Aussage gerade in ihrem Wahrheitswert gesehen hat. ... Wenn man die "semantische" Logikkonzeption mit ihrer Auszeichnung der Klassischen Logik nicht schon teilt, wird man daher auch den "semantischen" Vollständigkeitsbeweisen nicht viel abgewinnen können."

Formale Logikkalküle dienen jedoch vor allem dazu, *allgemeine* Folgerungszusammenhänge zwischen Aussagen nachzuweisen. Als Anwendungsbeispiel sei die mathematische Gruppentheorie genannt, in der entsprechende Aussagen für alle Gruppen *mit einem Male* bewiesen werden. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach der Vollständigkeit eines Logikkalküls K durchaus sinnvoll und von praktischem Interesse, und zwar unabhängig von Wahrheitswertbelegungen. Für vollständige K gilt insbesondere: Eine Formel der zugehörigen formalen Sprache S ist in K herleitbar, wenn sie unter jeder 'Interpretation' behauptet werden darf. Der Interpretationsbegriff braucht dazu auf keine sprachunabhängigen Gegenstände (aus einem 'Bedeutungsgarten') bezogen zu werden. Es kommt nur darauf an, dass eine Interpretation jeder Formel von S auf geeignete Weise eine bestimmte *Aussage* einer materialen Sprache zuordnet, d.h. einer Sprache, die mit Behauptbarkeitskonventionen für ihre Aussagen versehen ist. Von (darüber hinausgehenden) Bedeutungen dieser Aussagen (z.B. Wahrheitswerten) oder ihrer Bestandteile braucht beim Thema "Vollständigkeit eines Logikkalküls" nicht die Rede zu sein.

L i t e r a t u r

[1] Carnap, R.: *Testability and meaning.* Philosophy of Science 3 (1936), S. 419-471; 4 (1937), S. 1-40.

[2] Hartmann, Dirk: *Kulturalistische Logikbegründung.* In: Hartmann, D., und Janich, P.: *Die Kulturalistische Wende.* Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1998, S. 57-128.

[2*] Hartmann, Dirk: *Kulturalistische Logikbegründung - "revisited".* (Unveröffentlicht?)

[2**] Hartmann, Dirk: *On Inferring.* mentis Paderborn 2003.

[3] Haas, Gerrit: *Hypothesendialoge, konstruktiver Sequenzenkalkül und die Rechtfertigung von Dialograhmenregeln.* In: Gethmann, C.F. (Hg.): *Theorie des wissenschaftlichen Argumentierens.* Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1980. S. 136-161.

[4] Kambartel, F.: *Formalistische und sophistische Elemente in der "dialogischen Logik".* In: Gethmann, C. F. (Hg.): *Logik und Pragmatik.* Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1982. S. 41-52.

[5] Lorenzen, P.: *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie.* B.I., Mannheim 1986.

[6] Quine, W.V.O.: *Die Wurzeln der Referenz.* Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1989.

[7] Siegwart, Geo: *Vorfragen zur Wahrheit. Ein Traktat über kongnitive Sprachen.* Oldenbourg-Verlag, München 1997.

[8] Schroeder-Heister, P.: *Popper's Theory of Deductive Inference and the Concept of a Logical Constant.* History and Philosophy of Logic, 5 (1984), S. 79-110.

[9] Stekeler-Weithofer, P.: Systeme der Logik - Elemente einer Kritik der formalen Vernunft -, 3. Teil, Heft 2: *Kalkültheoretische Anhänge.* In: Sonderforschungsbereich 99, Universität Konstanz.

[10] Zahn, P.: *Gedanken zur pragmatischen Begründung von Logik und Mathematik.*, In: H.Stachowiak (Hg): *Pragmatik IV*, Meiner, Hamburg 1993. S. 424-455.

[11] Zahn, P.: *Ein normatives Erklärungsmodell für die Eignung klassischer Schlussweisen.* TU-Darmstadt, Preprint Nr. 2177, 2001.