# Ein normatives Erklärungsmodell für die Eignung klassischer Schlussweisen

von Peter Zahn, TU-Darmstadt, Fachbereich Mathematik, 2001

## Überblick

Zur Rechtfertigung allgemeiner Argumentationsmethoden entwerfen wir in §1 einen Aussagengebrauch mit Hilfe von 'Behauptungsregeln'. Dieser Entwurf, der mit der 'operativen Logik' in [6, 1., 2.] teilweise verwandt ist, soll uns zu zeigen helfen, dass bestimmte allgemeine Schlussregeln zu(ver)lässig sind (§2). - Als Behauptungsregeln wählen wir nur solche Regeln, die mit möglichst unmissverständlichen Worten formuliert werden können. Aus diesem Grunde führen wir zunächst nur die Partikeln $\wedge, \vee, \exists$ und $\neg$ ein. Der sich daraus ergebende Aussagengebrauch möge "primär" heißen. Bei ihm bedeutet $\neg A$, dass es nach bestimmten (den 'internen') Behauptungsregeln verboten ist, $A$ zu behaupten. Der primäre Gebrauch ermöglicht es jedoch noch nicht, mit Hilfe objektsprachlicher Aussagen $\forall x\,[A(x) \rightarrow B(x)]$ mitzuteilen, dass man für beliebige Werte $r$ der Variablen $x$ von $A(r)$ auf $B(r)$ schließen darf.

Aus diesem Grunde liberalisieren wir den primären Aussagengebrauch in §3 nachträglich und rechtfertigen den sich damit ergebenden 'klassischen' Gebrauch dadurch, dass wir u.a. Folgendes zeigen: Für Elementaraussagen stimmt der klassische mit dem primären Gebrauch überein. Es lassen sich Aussagen der Form $\forall x\,[A(x) \rightarrow B(x)]$ definieren, die den oben genannten Zweck 'optimal' erfüllen. Beim Übergang vom primären zum klassischen Aussagengebrauch gehen nur entbehrliche Ausdrucksmittel verloren. - Einzelheiten werden wir in §6 diskutieren.

In §4 behandeln wir insbesondere den Begriff der Unendlichkeit und mit ihm verbundene Probleme am Beispiel der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Die Unendlichkeit von $\mathbb{N}$ wird dabei als eine 'deontische' betrachtet. Sie bedeutet, dass wir niemals verpflichtet sein werden, die Konstruktion natürlicher Zahlen durch Nachfolgerbildung endgültig abzubrechen.

In §5 entwerfen und untersuchen wir einen Gebrauch von Aussagen, in denen Indikatoren (wie z.B. "diese Ameise") oder Gegenstandsvariable an Stelle von Eigennamen vorkommen. Behauptungen solcher Aussagen gelten nur in bestimmten Situationen. Um aus ihnen situationsunabhängig geltende Folgerungen ziehen zu können, führen wir eine Art von Gegenstands-Quantifikation ein.

Nach einer Behandlung von Sprachen höherer Stufen in §7 beziehen wir in §8 noch Gegenstandsvariable in diese Sprachen ein und beschäftigen uns mit einer Quantifikation, die 'zusammengesetzt', d.h. zugleich eine Einsetzungs- und eine Gegenstands-Quantifikation ist. Dazu zeigen wir, dass aufeinander folgende Einsquantoren, von denen - zum Beispiel - einer eine Gegenstandsvariable bindet und der andere eine 'zusammengesetzte' Quantifikation anzeigt, vertauscht werden dürfen.

**Inhalt:** §0. Einleitung
§1. Ein Behauptungsspiel
§2. Zulässigkeit von Schlussregeln
§3. Ein Zugang zur klassischen Logik
§4. Ein Zugang zur Arithmetik
§5. Quantifikation über Gegenstände
§6. Wozu können Behauptungen im klassischen Spiel dienen?
§7. Sprachen höherer Stufen
§8. Einbeziehung von Gegenstandsvariablen in Sprachen höherer Stufen

# §0. Einleitung

Unter einer Behauptung verstehen wir eine Handlung: Man behauptet eine Aussage im Allgemeinen einfach dadurch, dass man sie als selbständigen Satz vor Hörern ausspricht oder für Leser aufschreibt. Auch Feststellungen zählen wir zu den Behauptungen. Es gibt jedoch sprachliche Handlungen der Form von Behauptungen, die nicht als Behauptungen zu verstehen oder nicht ernst gemeint sind, z.B. fingierende oder scherzhafte Äußerungen. Dies kann extra gesagt werden oder aus dem Redezusammenhang oder äußeren Umständen (wie in einer Büttenrede) hervorgehen. Dennoch: Man kann im Allgemeinen entscheiden, ob jemand oder man selbst eine bestimmte Aussage behauptet hat. Denn auch Behauptungen, die unberechtigt sind (wie Lügen) oder einem nicht abgenommen oder geglaubt worden sind, sind dennoch Behauptungen (oder sollen wenigstens hier Behauptungen heißen).

Wie wird nun das *Verständnis* von Behauptungen ermöglicht? Hierzu betrachten wir die Aussage: "Hans hat gestern Abend $39,2°$ Fieber gehabt." Ein Hörer kann dies verstehen, sofern er die Regel kennt, nach der diese Aussage nur nach einer Fiebermessung mit entsprechendem Resultat behauptet werden sollte. - Derartige Beispiele führen uns zu der

**These:** Aussagen werden dadurch verständlich, dass es üblich oder vereinbart ist, deren Behauptungen in regelhafter Weise einzuschränken, nämlich Behauptungen mancher Aussagen endgültig oder nur vorläufig zu unterlassen.

Zur entsprechenden Einschränkung des Behauptens stehen uns jedoch i.Allg. keine formulierten Regeln, sondern nur Gepflogenheiten zur Verfügung. Um Hilfsmittel zum sprachlichen Argumentieren (insbesondere Schlussregeln) zu erhalten, von denen wir zeigen können, dass sie dazu geeignet und zuverlässig sind, entwerfen wir einen Aussagengebrauch durch Aufstellung ausdrücklicher 'Behauptungsregeln' (d.h. Behauptbarkeitskonventionen). Dadurch versuchen wir jedoch *nicht*, den *faktischen* Sprachgebrauch und dessen Argumentationsweisen zu beschreiben oder zu erklären. Unser Ziel ist es vielmehr, eine Argumentationstechnik zu begründen, die vor allem für die wissenschaftliche Praxis möglichst gut geeignet ist, also zuverlässig, möglichst leistungsfähig, unkompliziert, übersichtlich, und leicht handhabbar ist. - Als Behauptungsregeln werden wir nur solche Regeln wählen, die mit möglichst unmissverständlichen Worten formuliert werden können, sodass man 'in möglichst vielen Fällen' nachprüfen kann, ob man eine solche Regel verletzt hat. 'Formale' Kalkülregeln allein würden jedoch nicht als Behauptungsregeln ausreichen; denn nach einem Resultat von GÖDEL gibt es keinen Kalkül, nach dessen Regeln genau diejenigen arithmetischen Aussagen 1. Stufe herleitbar sind, die (nach üblicher Einschätzung) behauptet werden dürfen.

Regeln welcher Art eignen sich nun besonders als Behauptungsregeln? Allgemeine Gebote der Form "Immer dann, wenn $a$ getan worden ist, tue man auch $b$!" haben den Nachteil, dass man i.Allg. keine Gelegenheit hat, sie zu befolgen. Als Beipiel betrachten wir folgende Regel: "Hat man irgend zwei Aussagen $A$ und $B$ behauptet, dann behaupte man auch $A \wedge B$." Da wir nach dieser Regel unendlich viele Behauptungen aufstellen müssten, liegt es nahe, sie durch eine entsprechende Erlaubnis zu ersetzen. Dass eine Handlung erlaubt ist, heißt etwa, dass sie nicht verboten ist oder dass sie nicht verboten werden darf. Eine Handlung zu verbieten, heißt aufzufordern, sie zu unterlassen. (Dass wir im Allgemeinen in der Lage sind, z.B. die meisten biblischen Gebote zu befolgen, liegt daran, dass es sich um Verbotsregeln handelt.) - Diese Bemerkungen sowie die oben genannte These führen uns zu dem Versuch, geeignete *Vorbotsregeln* als Behauptungsregeln aufzustellen.

Z.B. ein Kalkül $K$ ist ein System von Regeln, nach denen es erlaubt ist, bestimmte schematische Operationen mit Schreibfiguren ('Zeichenreihen') schrittweise auszuführen. Das heißt jedoch, dass es im Kontext von $K$ verboten ist, eine Operation auszuführen, wenn dies nicht ausdrücklich nach den Regeln von $K$ erlaubt ist.

**Schlussregeln und Mittel zu ihrer Formulierung:** Zweckdienlich anwendbar sind Schlussregeln, nach denen für gegebene Formeln, etwa $A_1(x), A_2(x)$ und $B(x)$, Folgendes gilt: Wenn man für irgendeinen Wert $r$ der Variablen $x$ die Aussagen $A_1(r)$ und $A_2(r)$ behaupten darf, dann darf man sogleich auch $B(r)$ behaupten. Um mitzuteilen, dass man so schließen darf, wollen wir schreiben:

$$\forall x\,[A_1(x) \wedge A_2(x) \to B(x)].$$

Zu diesem Zweck haben wir die Partikeln $\wedge$ (und), $\to$ (wenn - dann) und $\forall$ (für alle) in geeigneter Weise einzuführen (vgl. [11, p. 104]).

Die entsprechende Behauptbarkeitsbedingung für $A \to B$ besagt, dass man von $A$ auf $B$ schließen darf. Zu ihrer genaueren Formulierung bieten sich jedoch zunächst nur

Worte wie "wenn - dann" an, für die unser Verständnis wenigstens in komplizierteren Zusammenhängen besonders problematisch ist. Daher verzichten wir zunächst auf eine Einführung von Aussagen der Formen $A \to B$ und $\forall x\, A(x)$ für den genannten Zweck. Somit werden in der in §1 eingeführten Sprache zwar Aussagen dieser Formen definierbar sein; sie können aber den angegebenen Zweck erst nach einer nachträglichen Liberalisierung der in §1 aufgestellten Behauptungsregeln erfüllen.

## Anmerkungen zu einigen bekannten Zugängen zur Logik

Die folgenden Ausführungen wenden sich an Leser, die schon bestimmte andere Zugänge zur Logik kennen.

**(1) Zum dialogischen Zugang zur Logik** (vgl. [8, pp. 60ff.]): Wir betrachten materiale Dialogspiele mit der 'effektiven allgemeinen Dialogregel' aus [8, pp. 75-83]. Zu ihrer Rechtfertigung benötigt man unter anderem den Satz: Falls es dialogische Gewinnstrategien für $A$ und für $A \to B$ gibt, dann gibt es auch eine Gewinnstrategie für $B$ ('Modus ponens'). Schon der Versuch, diesen gesamten metasprachlichen Satz dialogisch zu interpretieren, stößt auf Schwierigkeiten. An seiner Stelle beweist man aus technischen Gründen einen allgemeineren 'Schnittsatz'. Dazu braucht man metasprachliche Aussagen, in denen (unter anderem) der Subjunktor ("wenn - dann") und der Allquantor iteriert vorkommen. Deren Gebrauch und Verständnis werden dabei durch sprachliche Gewohnheiten und den 'Sinnzusammenhang' des Beweises ermöglicht. (Zu beachten ist auch, dass die dialogischen Gewinnstrategien beanspruchen, Strategien zu sein, nach denen man Dialoge gegen *beliebige* Opponenten gewinnen kann.) Im Beweis des Schnittsatzes wird schon derart argumentiert, dass dies einer Anwendung gewisser logischer Schlussregeln (neben Induktionsprinzipien) in der Metasprache gleichkommt. Diese Schlussregeln sollen jedoch für die Objektsprache mit Hilfe des Schnittsatzes erst begründet werden.

Um unter anderem den Beweis des Schnittsatzes vereinfachen zu können, hat K. LORENZ in [5] andere dialogische Rahmenregeln zugrundegelegt und dabei konstruktive Ordnungszahlen benutzt. Zum Nachweis dafür, dass jeder einzelne Dialog nach endlich vielen Schritten zu einem Gewinn oder Verlust des Proponenten führt, muss man jedoch auf einen 'vordialogischen' Beweis dafür zurückgreifen, dass diese angeblichen Ordnungszahlen tatsächlich als solche brauchbar sind, d.h. die transfinite Induktion ermöglichen.

Auch in der Beweistheorie (vgl. [12] oder [14]) treten analoge Probleme insbesondere im Zusammenhang mit 'Schnittsätzen' auf.

**(2) Ein intuitionistischer Entwurf** geht von einem Beweisbegriff aus, der induktiv definiert wird (vgl. [1], [3]). Wir formulieren ihn nur für die Subjunktion:

> Ein Beweis für $A \to B$ ist eine 'Konstruktion' $c$, die jeden Beweis von $A$ in einen Beweis von $B$ überführt.

Dass $c$ ein Beweis von $A \to B$ ist, heißt ausführlicher, dass für alle 'Konstruktionen' $p$ gilt: Wenn $p$ ein Beweis von $A$ ist, dann ist $c(p)$ ein Beweis von $B$. Speziell für $0 = 1$ an Stelle von $B$ heisst dies, dass es keinen (d.h. nicht einen) Beweis von $A$ gibt. Wir haben soeben unser Vorverständnis für die Worte "für alle", "wenn - dann" und "nicht" zur Erklärung von $A \to B$ herangezogen. Dies ist jedoch vor allem deshalb problematisch, weil man für komplexe $A$ i.Allg. nicht entscheiden kann, ob eine Konstruktion $p$ ein Beweis von $A$ ist. Daher wurde in [4] die obige Konstruktion $c$ ersetzt durch ein Paar $(c, d)$ mit einer 'Demonstration' $d$, die zeigt, dass $c$ jeden Beweis von $A$ in einen Beweis von $B$ überführt. Dieser Beweisbegriff (der in [1, p. 232] und [13] kritisch untersucht worden ist) ist jedoch recht kompliziert und dennoch etwas problematisch. Wir werden ihn und den zugrundeliegenden Konstruktionsbegriff eliminieren und an Stelle von Beweisen bloß Behauptungen in einem normativen Zusammenhang betrachten.

## Das Problem des Anfangs

Oben haben wir am Beispiel des dialogischen Zugangs auf eine mit ihm verbundene Gefahr eines gewissen Zirkels oder Regresses aufmerksam gemacht. Dahinter steckt das allgemeinere Problem, dass zur Begründung, Rechtfertigung oder zum Zuverlässigkeitsnachweis von Argumentationsregeln i.Allg. bereits zuverlässige Argumentationen benötigt werden. Diesem Problem werden wir teilweise dadurch ausweichen, dass wir in §1 einerseits bestimmte Regeln zur Einschränkung von Behauptungen aufstellen, andererseits aber vereinbaren, dass keine weiteren derartigen Regeln aufgestellt werden sollen. Dann kann man einsehen, dass auch gewisse Umkehrungen jener Regeln gelten. (Dies ist ein Analogon zum 'Inversionsprinzip' in [6, §4]). Bei der Behandlung des arithmetischen Induktionsprinzips in §4 wird uns jedoch das erwähnte Problem des Anfangs begegnen.

In einigen metatheoretischen Argumentationen werden wir von *Annahmen* ausgehen. Dies ist wie folgt oder entsprechend zu verstehen: Dass wir annehmen (oder voraussetzen), $N$ sei irgendetwas mit der Eigenschaft $E$, bedeute, dass wir $N$ daraufhin wie irgendetwas mit $E$ behandeln werden, und zwar derart, dass $N$ dabei offensichtlich durch (eine Bezeichnung von) irgendetwas mit $E$ ersetzt werden darf. (Was dies auch für Annahmen anderer Formen genauer heißt, wird man sich in den einzelnen Argumentationen, in denen wir von Annahmen ausgehen werden, klarmachen können.)

# §1. Ein Behauptungsspiel

## Elementaraussagen und ihr Gebrauch

Die einfachsten Aussagen sind nicht aus anderen Aussagen oder Formeln mit Hilfe von Junktoren, Quantoren oder 'mengensprachlichen' Mitteln (vor allem "$\in \{\ldots\}$") zusammengesetzt. Für solche '**Elementaraussagen**' schreiben wir $E, E_1, \ldots$ . (Auf eine endgültige Definition des Begriffs der Elementaraussagen verzichten wir jedoch.)

Für zahlreiche Elementaraussagen $E$ haben wir gelernt, dass $E$ nur dann behauptet werden darf, wenn wir eine bestimmte sinnliche Wahrnehmung oder Beobachtung gemacht oder ein bestimmtes Resultat einer Handlung (z.B. einer Messung oder Berechnung) erhalten haben, d.h. kurz: wenn $E$ **begründet** (worden) ist. Auch eine behauptete Aussage wie "Ich habe Kopfschmerzen" sollte begründet sein - obwohl wir für sie dem Hörer keinen Beweis mitteilen können.

Was es heißt, eine Elementaraussage sei begründet, ist uns i.Allg. aus Beispielen unserer Sprachpraxis geläufig. Mehr oder weniger präzise erklären kann man dies nur für verschiedene Arten von Elementaraussagen auf verschiedene Weisen. Dazu wären besondere Untersuchungen erforderlich. Statt dessen sei hier einfach vorausgesetzt, dass wir Verfahren beherrschen, die es uns für jede Elementaraussage $E$ jederzeit zu entscheiden gestatten, ob (wir wissen, dass) $E$ bereits begründet ist. D.h., wir schränken den Terminus "Elementaraussage" auf Aussagen dieser Art ein. (Die Ergebnisse unserer Untersuchungen werden schätzungsweise in dem Umfang brauchbar sein, als diese Voraussetzung erfüllt ist. - Ein Verweis auf ein bereits vorhandenes praktisches Know-how ist hier deshalb erforderlich, weil der Versuch einer insgesamt nur sprachlichen Definition für Aussagen der Form "$E$ ist begründet" zu einem unendlichen Regress führen würde.)

Mehrere Elementaraussagen können voneinander abhängen auf Grund von Regeln oder Gepflogenheiten für deren Behauptungen. Beispiele dafür sind folgende Regeln, nach denen wir behaupten dürfen "(Alle) Käfer sind Insekten" und "Käfer sind keine Fliegen": Falls "Dies ist ein Käfer" behauptet werden darf, dann darf auch "Dies ist ein Insekt" behauptet werden, aber nicht "Dies ist eine Fliege" (vgl. 'Prädikatorenregeln' in [8, p. 182]). Somit verweisen Aussagen wie "Käfer sind Insekten" und "Käfer sind keine Fliegen" auf unseren gemeinschaftlichen Sprachgebrauch (vgl. auch [2]). [Wir brauchen uns hier nicht mit der Frage zu beschäftigen, ob Behauptungen solcher Aussagen auch gerechtfertigt werden könnten durch (fingierte) Definitionen wie "Käfer $\rightleftharpoons$ Insekt und geflügelt und mit Flügeldecken und ...". Wir werden jedoch Aussagen kennenlernen, für welche diese Frage zu verneinen ist.]

Im Folgenden setzen wir voraus, dass der Terminus "**Elementarregel**" derart eingeführt ist, dass die Elementarregeln in unserer Sprachgemeinschaft geltende Regeln sind, nach denen Elementaraussagen wie in den soeben angeführten Beispielen voneinander abhängen. Zu den Elementarregeln möge außerdem das Verbot gehören, eine bestimmte Elementaraussage, etwa $\perp$, zu behaupten. $E$ zu **widerlegen** heiße, andere Elementaraussagen derart zu behaupten, dass die Behauptung von $E$ zusammen mit deren Behauptungen eine Elementarregel verletzen würde. Elementaraussagen, die nach den Elementarregeln ohnehin nicht behauptet werden dürfen, mögen ebenfalls als widerlegt gelten. - Wir betrachten vor allem Elementarregeln mit Einzelfällen der Form

$$\text{(ER)} \qquad E_1, \ldots, E_n \;\Rightarrow\; E,$$

in Worten: Es sei verboten, $E_1, \ldots, E_n$ zu behaupten und $E$ zu widerlegen.

Kommentar: Nach (ER) gilt: Falls $E_1, \ldots, E_n$ behauptet worden sind, dann ist es verboten, $E$ zu widerlegen. Falls jedoch $E$ widerlegt worden ist und $E_1, \ldots, E_{n-1}$ behauptet worden sind, dann ist damit $E_n$ widerlegt.

Gelegentlich werden wir auch Elementarregeln ähnlicher Formen heranziehen. Weitere Regeln mögen jedoch nicht zu den Elementarregeln gehören.

**Beispiele: 1.1.** $\perp$ gilt als widerlegt.
**1.2.** $L(s, a)$ bedeute, dass ein Stab $s$ die Länge $a$ (z.B. 24,8 cm) hat. $a \neq b$ bedeute, dass $a$ von der Länge $b$ verschieden ist. (Wir zählen $a = b$ und $a \neq b$ zu den Elementaraussagen.) Elementarregeln seien:

$$\begin{aligned} a = b,\, a \neq b \;&\Rightarrow\; \perp \\ L(s, a),\, L(s, b) \;&\Rightarrow\; a = b. \end{aligned}$$

Falls nun $a \neq b$ und $L(s, a)$ behauptet werden, dann werden dadurch $a = b$ und $L(s, b)$ widerlegt.

Nach der letzten Regel dürfen wir nur *ein* Resultat einer Messung von $s$ behaupten. Zur Beschreibung eines Zweiges, der wachsen kann, oder eines Stabes, dessen Länge sich auf andere Weise ändern kann, wird daher eine andere Formulierung, etwa "$s$ hat die Länge $a$ zur Zeit $t$", besser geeignet sein. Wir haben hier ein Beispiel dafür, dass ggf. erst die Erfahrung (bis auf Weiteres) zeigen kann, ob oder inwieweit sprachliche Regeln oder Gepflogenheiten zweckdienlich sind.

Nun betrachten wir die Elementarregeln der Form (ER) als einen Kalkül, der mit Elementaraussagen operiert. Dabei bezeichne "$\Rightarrow$" die erlaubten Herleitungsschritte. Falls nun $E$ nach diesen Regeln herleitbar ist aus anderen Elementaraussagen, die bereits begründet und danach behauptet worden sind, dann möge auch $E$ als begründet gelten (und daher behauptet werden dürfen). Für widerlegte Elementaraussagen sollte man aber keine Begründung mehr 'akzeptieren'. (Nachträgliche 'Korrekturen' seien jedoch gestattet.)

## Eine materiale Sprache $\mathcal{L}$ 1. Stufe

Wir betrachten zunächst nur solche Formeln (d.h. Aussagen oder Aussageformen), die Elementarformeln sind oder aus ihnen nur mittels $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht), $\exists$ (für ein), Klammern und bestimmten Variablen wie üblich aufgebaut sind, und fassen diese Formeln zu einer (etwas 'ausdrucksarmen') Sprache $\mathcal{L}$ zusammen. Jede Variable habe als Werte bestimmte Konstante, d.h. besondere Schreibfiguren, in denen keine Variablen vorkommen. In die Sprache $\mathcal{L}$ nehmen wir nur solche Elementaraussagen $E$ auf, die folgende Bedingung erfüllen: Falls $E$ einmal behauptet werden darf, dann darf $E$ auch zu jeder späteren Zeit - in beliebigen Situationen und Kontexten - behauptet werden. In $\mathcal{L}$ nehmen wir daher auch nur solche Elementar*formeln* auf, die durch Substitutionen der in ihnen vorkommenden Variablen durch beliebige Werte derselben in Elementaraussagen der soeben genannten Art übergehen. - Jede Variable beginne z.B. mit dem Zeichen $\jmath$ und ende mit $\ell$. Diese beiden Zeichen mögen aber weder im Innern von Variablen noch in Elementarformeln außerhalb von Variablen vorkommen. In den Elementarformeln mögen auch keine Junktoren, Quantoren, Klammern oder Kommata vorkommen. (Diese Vereinbarung läßt sich lockern.) - Zur Abkürzung werden wir gelegentlich Klammern in Formeln (insbesondere Außenklammern) fortlassen.

Erst in §5 werden wir uns mit anderen Aussagen wie "*Dies* ist ein Käfer", die nur in besonderen Situationen (wie beim Zeigen eines bestimmten Tieres) behauptet werden dürfen, beschäftigen. In §4 und §7 werden wir auch andersartige Erweiterungen von $\mathcal{L}$ einführen.

Ist $F$ eine Formel von $\mathcal{L}$ und sind $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 1)$ verschiedene Variable, dann sei auch

$$\exists\, x_1, \ldots, x_n\; F$$

eine Formel von $\mathcal{L}$. (In ihr werden i.Allg. mehrere Variable mit einem Male *gebunden.*) Wir sagen kurz

| | | |
|---|---|---|
| "Formel" | statt | "Formel von $\mathcal{L}$" |
| "Aussage" | statt | "Aussage von $\mathcal{L}$". |

Als 'Metavariable' verwenden wir

| | | |
|---|---|---|
| $E, E_1, \ldots$ | für | Elementaraussagen |
| $F, G, H$ | für | Formeln |
| $A, B, C$ | für | Aussagen |
| $x, y, z$ | für | Variable |
| $\underline{x}$ | für | Listen $x_1, \ldots, x_n$ verschiedener Variablen |
| $\underline{r}$ | für | Listen $r_1, \ldots, r_m$ von Konstanten |
| $A\underline{x}$ oder $A(\underline{x})$ | für | Formeln, in denen höchstens die Variablen $\underline{x}$ frei vorkommen. |

**Definition:** Eine Konstantenliste $\underline{r}$ heiße ein Wert von $\underline{x}$, falls $\underline{r}$ ebensoviele Glieder wie $\underline{x}$ hat (d.h. $m = n$) und $r_i$ ein Wert von $x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. In diesem

Falle bezeichnen wir mit $A\underline{r}$ diejenige Aussage, welche aus der Formel $A\underline{x}$ durch die Substitution von $\underline{x}$ durch $\underline{r}$ entsteht. Bei dieser Substitution ist jedes freie (d.h. nicht gebundene) Vorkommnis von $x_i$ durch $r_i$ zu ersetzen ($i = 1, \ldots, n$). - Wir schreiben

$$\begin{array}{rll} \text{Beg.}E & \text{für:} & E \text{ ist begründet (worden)} \\ \natural\, A & \text{für:} & A \text{ behaupten.} \end{array}$$

(ER) lässt sich nun ausführlicher so schreiben: $\natural\, E_1, \ldots, \natural\, E_n \;\Rightarrow\; \natural\, E\,.$

Trotz ihres formalisierten Aufbaus mit Hilfe von 'Symbolen' (wie $\neg$) ist $\mathcal{L}$ keine formale Sprache im Sinne der mathematischen Logik, sondern eine 'materiale' oder 'assertorische' Sprache. Da wir nämlich einen Aussagengebrauch vereinbaren werden, nach dem einige, aber nicht alle Aussagen von $\mathcal{L}$ behauptet werden dürfen, benötigen wir keine (darüber hinausgehende) Interpretation dieser Aussagen.

## Die Regeln des Behauptungsspiels

Um die Teilnahme am folgenden provisorischen 'Behauptungsspiel' zu erleichtern, lassen wir auch stillschweigende Behauptungen im 'gedanklichen Selbstgespräch' als Behauptungen gelten. - Wir definieren nun das **primäre Spiel** als das Behauptungsspiel, dem die Elementarregeln, die unten angegebenen Behauptungsregeln für komplexe Aussagen, und folgende Regel $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ angehören:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{ext}} \qquad \natural\, E \;\Longrightarrow\; \text{Beg.}E.$$

In Worten: "Behaupte $E$ erst dann, wenn $E$ begründet ist." (Hiermit übernehmen wir nur bereits geltende Regeln und Gepflogenheiten.) - Auch die folgenden Behauptungsregeln sind bedingte, evtl. vorläufige Behauptungsverbote, in denen wir ebenfalls "$\Longrightarrow$" (*langer* Pfeil) für "erst dann, wenn" schreiben.

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{P}(\wedge) & \natural\,(A \wedge B) & \Longrightarrow & \natural\, A \text{ und } \natural\, B \\ \mathrm{P}(\vee) & \natural\,(A \vee B) & \Longrightarrow & \natural\, A \text{ oder } \natural\, B \text{ (oder beides)} \\ \mathrm{P}(\exists) & \natural\,\exists \underline{x}\, A\underline{x} & \Longrightarrow & \text{für einen Wert } \underline{r} \text{ von } \underline{x} : \natural\, A\underline{r} \\ \mathrm{P}(\neg) & \natural\,\neg A & \Longrightarrow & A \text{ ist widerlegt,} \end{array}$$

wobei "$A$ ist widerlegt" bedeute, dass die Behauptung von $A$ sowie beliebige Nacheinanderausführungen von Behauptungen einschließlich $\natural\, A$ (zusammen mit den bereits aufgestellten Behauptungen von Elementaraussagen) eine Elementarregel oder eine Behauptungsregel für komplexe Aussagen verletzen würden. Diese Regeln mögen "**interne Regeln**" heißen.

Die 'externe Regel' $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ sei jedoch *nicht* intern. Daher darf man $\neg E$ i.Allg. nicht bloß deshalb behaupten, weil eine endgültige Verhinderung zur Erlangung einer Begründung von $E$ eingetreten ist.

Das primäre Spiel möge keine weiteren Regeln enthalten. - P($\wedge$) kann auch durch zwei einfachere Regeln ersetzt werden. Die Behauptungsregeln sind mit umgangssprachlichen Mitteln formuliert, die wir exemplarisch erlernt haben. Dies ist für die Regeln P($\wedge$), P($\vee$) und P($\exists$) unproblematisch, weil wir wissen, wie zu beliebiger Zeit und für eine beliebige Aussage $C$, die kein Negat ist, zu entscheiden wäre, ob (wir wissen, dass) die gegenwärtige Behauptung von $C$ die zugehörige Behauptungsregel nicht verletzen würde. (Unter anderem aus diesem Grunde haben wir *nur* die Partikeln $\wedge, \vee, \exists$ und $\neg$ zum Aufbau der komplexen Aussagen von $\mathcal{L}$ zugelassen.) - Zur Erläuterung von P($\neg$) mögen zunächst einige Beispiele dienen:

**Beispiel 1.3:** Für zu Recht behauptete Aussagen $A, B$ und für beliebige $C$ darf man nacheinander auch $A \wedge B$ und $(A \wedge B) \vee C$ behaupten, weil dadurch keine Behauptungsregel verletzt würde. Daher darf $\neg[(A \wedge B) \vee C]$ nicht behauptet werden.

**Beispiel 1.4:** Nicht behauptet werden darf $\exists x\,(Ax \wedge \neg Ax)$, da sonst für einen Wert $r$ von $x$ vorher $Ar \wedge \neg Ar$ und daher nochmals vorher $Ar$ sowie $\neg Ar$ behauptet werden müssten; hierzu müsste aber $Ar$ auch widerlegt sein. Somit darf $\neg \exists x\,(Ax \wedge \neg Ax)$ behauptet werden (weil dadurch P($\neg$) nicht verletzt würde).

**Beispiel 1.5:** $s$ bezeichne einen Holzstab, dessen Länge *schätzungsweise* 25 cm beträgt. $E(s)$ sei eine Abkürzung für "s ist 24,8 cm lang". Dies kann nur durch eine Messung von $s$ mit dem Ergebnis 24,8 cm begründet werden. Wir betrachten jedoch den Fall, dass $s$ vor seiner Messung verbrannt ist.
Nach $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ darf dann $E(s)$ nicht behauptet werden. - Da $E(s)$ aber auch nicht widerlegt werden kann (vgl. Beispiel 1.2), darf auch $\neg E(s)$ nicht behauptet werden. (Nach dem später angeführten Satz 3.4 darf $\neg\neg E(s)$ ebenfalls nicht behauptet werden.)

**Anmerkung** zu P($\neg$): Die bloße Tatsache oder Überzeugung, dass wir niemals fähig oder in der Lage sein werden, bestimmte Handlungen (z.B. mehrere Behauptungen) auszuführen, möge noch nicht berechtigen, zu sagen, dass die Ausführung dieser Handlungen gegebene Regeln verletzen würde.

Trotz dieser Anmerkung bleibt unser Verständnis von P($\neg$) etwas unsicher. Es scheint auch nicht möglich zu sein, eine andere in perfekter Weise nachprüfbare oder operable Behauptbarkeitsbedingung für Negate zu finden, da es (nach einem Satz von GÖDEL) kein effektives Verfahren gibt, nach dem man für beliebige arithmetische Aussagen 1. Stufe entscheiden kann, ob sie behauptet werden dürfen. (Dies ist auch für andere Rekonstruktionen des Sprachgebrauchs relevant.)

Wie in den Beispielen 1.3 und 1.4 können die Behauptungsregeln für komplexe Aussagen umgekehrt werden, weil das primäre Spiel keine anderen Regeln zur Einschränkung von Behauptungen komplexer Aussagen enthält, diese Aussagen *eindeutig* in ihre Komponenten zerlegbar sind [wie $(A \wedge B)$ in $A, \wedge, B$], und weil im primären Spiel der Gebrauch jeder komplexen Aussage zirkelfrei eingeführt ist. Er hängt nämlich nur vom Gebrauch ihrer 'Vorgänger' im Sinne folgender Definition ab.

**Definition:** $C$ heiße ein **Vorgänger** von $D$, falls $C$ *aus* $D$ nach den folgenden Regeln in mindestens einem Schritt hergeleitet werden kann (dabei bezeichne "$\Rightarrow$" die erlaubten Herleitungsschritte, und $\underline{r}$ stehe für Werte von $\underline{x}$):

$$\begin{array}{rclcrcl} A \wedge B & \Rightarrow & A; & \quad & A \wedge B & \Rightarrow & B; \\ A \vee B & \Rightarrow & A; & & A \vee B & \Rightarrow & B; \\ \exists \underline{x}\, A\underline{x} & \Rightarrow & A\underline{r}; & & \neg A & \Rightarrow & A. \end{array}$$

(Danach sind z.B. $A$ und $B$ die 'unmittelbaren Vorgänger' von $A \wedge B$ und von $A \vee B$.) - Die erwähnte Zirkelfreiheit bedeute: Keine Aussage ist ein Vorgänger von sich selbst. (Metasprachliche Aussagen wie diese können im Sinne unseres auf die Metasprache übertragenen Behauptungsspiels verstanden werden.)

Wir verfügen jedoch bisher *weder* über eine Methode zum Beweis der Zirkelfreiheit *aller* Aussagen (von $\mathcal{L}$) *noch* zum Beweis von deren erwähnten eindeutigen Zerlegbarkeit [nach der z.B. $(A \wedge B)$ und $(A \vee B)$ auch *nur* die beiden unmittelbaren Vorgänger $A$ und $B$ haben]. Daher soll hier unter einer Aussage stets eine *zirkelfreie* Aussage verstanden werden, die selbst und deren sämtliche Vorgänger eindeutig zerlegbar oder elementar sind. (Dies ist nur für Aussagen 'höherer' Komplexität problematisch.) - Die Resultate der folgenden Untersuchungen werden sich auch von der Objektsprache $\mathcal{L}$ auf die als 'Untersuchungssprache' benutzte Metasprache übertragen - und daraufhin in weiteren Untersuchungen anwenden lassen. Denn dazu werden wir nur solche metasprachlichen Aussagen benötigen, die wegen ihrer geringen Komplexität offensichtlich zirkelfrei und eindeutig zerlegbar sind. So werden wir insbesondere Mittel (u.a. Induktionsprinzipien) erhalten, mit denen wir in §7 sogar die Zirkelfreiheit aller Aussagen einer wesentlich reichhaltigeren Sprache als $\mathcal{L}$ beweisen können. (Auf den Beweis der eindeutigen Zerlegbarkeit dieser Aussagen werden wir verzichten, da dieser dann nach bekanntem Vorbild oder routinemäßig erfolgen kann.)

Nun betrachten wir folgende '**Inversionsregeln**' (der Behauptungsregeln):

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{I}(\wedge) \qquad & A, B & \Rightarrow & A \wedge B & \\ \mathrm{I}(\vee) & A & \Rightarrow & A \vee B & \\ & B & \Rightarrow & A \vee B & \\ \mathrm{I}(\exists) & A\underline{r} & \Rightarrow & \exists \underline{x}\, A\underline{x} & \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\text{).} \end{array}$$

Diese Regeln haben ersichtlich folgende Eigenschaft: Nach den Behauptungen der Prämissen eines Einzelfalles einer Inversionsregel würde die Behauptung seiner Konklusion die zugehörige Behauptungsregel nicht verletzen. Wie im Beispiel 1.3 dürfen wir dementsprechend ggf. mehrere Aussagen nacheinander behaupten.

Dies zeigt eine enge Verwandtschaft unserer Einführung komplexer Aussagen mit der in [6] angegebenen (vgl. insbesondere [6, §4, §7]), in der unter anderem Kalkülregeln der Formen $\mathrm{I}(\wedge)$, $\mathrm{I}(\vee)$ und $\mathrm{I}(\exists)$ zugrundegelegt worden sind. Diese Regeln haben zwar den Vorteil, dass zu ihrer Formulierung Worte wie "oder" und "es gibt ein" nicht benötigt werden. Gebraucht wird jedoch die zusätzliche Vereinbarung, dass man eine Aussage $A$

(die keine Elementaraussage und kein Negat ist) nur dann behaupten darf, wenn es eine Herleitung von $A$ aus zu Recht behaupteten Elementaraussagen oder Negaten nach den zugrundegelegten Kalkülregeln *gibt*.

Nehmen wir z.B. an, dass eine Erweiterung der Sprache $\mathcal{L}$ eine Aussage $A_0$ (wie z.B. $\{x : x \notin x\} \in \{x : x \notin x\}$) enthält, deren Behauptung durch folgende Regel eingeschränkt ist: $\natural\, A_0 \implies \natural\, \neg A_0$. Dann kann man nicht sowohl diese Regel als auch P($\neg$) umkehren. $A_0$ ist ein Vorgänger von sich selbst.

Eine entsprechende Behauptungsregel für *generelle Aussagen* würde lauten

$$\natural\, \forall \underline{x}\, A\underline{x} \quad \implies \quad \text{für alle Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x} : \natural\, A\underline{r}.$$

Damit wäre jedoch ersichtlich nichts anzufangen, wenn $\underline{x}$ unendlich viele Werte hat. Wir definieren statt dessen

$$\forall \underline{x}\, F \;\rightleftharpoons\; \neg\exists \underline{x}\, \neg F.$$

Ferner definieren wir eine *'Subjunktion'* durch

$$F \to G \;\rightleftharpoons\; \neg\,(F \wedge \neg G).$$

Eine dadurch definierte Aussage $\forall x\,(Ax \to Bx)$ kann jedoch i.Allg. nicht zur Mitteilung dafür dienen, dass man für beliebige Werte $r$ von $x$ von $Ar$ auf $Br$ schließen darf (vgl. §0). Um dies dennoch zu erreichen, werden wir das primäre Spiel in §3 liberalisieren.

Im primären Spiel kann man Definitionen mit Hilfe folgender zusätzlicher Behauptungsregeln anwenden:

$$\natural\, E(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) \implies \natural\, E(r_1, \ldots, r_n),$$

falls $\tilde{r}_1 \rightleftharpoons r_1,\ \ldots,\ \tilde{r}_n \rightleftharpoons r_n$ Definitionen 'neuer' Konstanten $\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n$ sind und keine anderen durch Definitionen eingeführten Konstanten in $E(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n)$ vorkommen.

$$\natural\, \tilde{A} \implies \natural\, A,$$

falls $\tilde{A} \rightleftharpoons A$ eine Definition einer 'neuen' Aussage $\tilde{A}$ ist. - Man sollte jedoch nur solche Definitionen verwenden, für welche diese Regeln auch umkehrbar sind. - Zu iterierten Definitionen gehörige Regeln können schrittweise angewandt werden.

# §2. Zulässigkeit von Schlussregeln

Bei der Behandlung von Schlussregeln beschränken wir uns vorläufig auf solche, deren Konklusionen Negate sind; denn dies ist bequemer und wird für den 'klassischen Aussagengebrauch' ausreichen. Wir betrachten hier also nur Schlussregeln der Form

$$\mathcal{R} : \qquad \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$$

($n \geq 0$) mit Aussageschemata $\mathcal{A}_i$ und $\mathcal{B}$, in denen Metavariable (für Aussagen, Formeln, Variable, Konstante oder andere Terme) vorkommen dürfen - und die nach Ersetzung dieser Metavariablen durch beliebige Werte derselben in Aussagen übergehen. Bei einer solchen Ersetzung möge aus $\mathcal{R}$ ein 'Einzelfall' dieser Regel entstehen.

Dass man eine Regel $\mathcal{R}$ anwenden darf, heißt, dass man für jeden Einzelfall

$$R: \qquad A_1, \ldots, A_n \;\Rightarrow\; \neg B$$

von $\mathcal{R}$, dessen Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ behauptet werden dürfen, auch $\neg B$ behaupten darf, d.h. $B$ nach den internen Regeln *nicht* behaupten darf. (P($\neg$) darf auch umkehrt werden.) Die folgende Zulässigkeit ist jedoch eine etwas stärkere Bedingung:

**Definition:** $\mathcal{R}$ heißt **zulässig**, wenn es nach den internen Regeln für jeden Einzelfall $R$ von $\mathcal{R}$ verboten ist, sowohl $A_1, \ldots, A_n$ als auch $B$ zu behaupten. Diese Bedingung gehört einer Metasprache an und lässt sich formalisieren durch

$$\neg\exists : (\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \mathcal{B}),$$

wobei ":" für eine Liste aller dahinter vorkommenden Metavariablen stehe. Die Formalisierung der Zulässigkeit des Einzelfalles $R$ lautet dementsprechend einfach

$$\neg\,(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B).$$

(Die soeben erwähnte Metasprache ist also eine Erweiterung der Objektsprache $\mathcal{L}$.)

**Definition:** Für Formeln $F$, in denen die verschiedenen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und nur diese Variablen frei vorkommen, definieren wir

$$\begin{array}{rcl} \exists.F & \rightleftharpoons & \exists\, x_1, \ldots, x_n\, F, \\ \text{insbesondere} \quad \exists.A & \rightleftharpoons & A \quad \text{für Aussagen } A \;\; (\text{d.h. } n = 0). \end{array}$$

**Satz:** Folgende Schlussregeln sind zulässig:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{R01} & A,\ \neg\,(A \wedge B) & \Rightarrow & \neg B \\
 & B,\ \neg\,(A \wedge B) & \Rightarrow & \neg A \\
\text{R02} & \neg\,(A \vee B) & \Rightarrow & \neg A \\
 & \neg\,(A \vee B) & \Rightarrow & \neg B \\
\text{R03} & \neg\exists \underline{x}\, A\underline{x} & \Rightarrow & \neg A\underline{r} \quad (\text{für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{R1} & \Rightarrow \quad \neg\exists.(F \wedge \neg F) \\
\text{R2} & \Rightarrow \quad \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] \\
\text{R3}a & \Rightarrow \quad \neg\exists.\{[(F \wedge G) \wedge H] \wedge \neg\,[F \wedge (G \wedge H)]\} \\
\text{R3}b & \Rightarrow \quad \neg\exists.\{[F \wedge (G \wedge H)] \wedge \neg\,[(F \wedge G) \wedge H]\} \\
\text{R4} & \neg\exists.G \quad \Rightarrow \quad \neg\exists.(F \wedge G) \\
\text{R5} & \neg\exists.(F \wedge G),\ \neg\exists.(F \wedge \neg G) \quad \Rightarrow \quad \neg\exists.F
\end{array}$$

Diese Regeln haben die oben angeführte Form $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \neg\mathcal{B}$. Um zu zeigen, dass eine derartige Regel zulässig ist, gehen wir von der Annahme aus, dass Aussagen der Formen

$$\mathcal{B}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$$

behauptet worden sind. Um dies anzudeuten, notieren wir diese Aussageschemata und dahinter "Ann." (für "Annahmen"). Anschliessend notieren wir Schemata für Aussagen, die nach den internen Regeln vorher behauptet worden sein sollten oder deren Behauptungen dann nach den Inversionsregeln die zugehörigen Behauptungsregeln nicht verletzen würden. Ferner notieren wir nötigenfalls Schemata für Negate von Aussagen, die widerlegt sein sollten, und zwar nach bereits als zulässig nachgewiesenen Regeln. Auf diese Weise fahren wir fort, bis wir einen 'Widerspruch' $\mathcal{C}, \neg\mathcal{C}$ erhalten. - Substitutionen der in den betrachteten Formeln von $\mathcal{L}$ frei vorkommenden Variablen durch Werte derselben teilen wir durch * mit.

Ad R01:

$$\begin{array}{ll} A,\ B,\ \neg\,(A \wedge B) & \text{Ann.} \\ A \wedge B & \text{I}(\wedge). \end{array}$$

Ad R03:

$$\begin{array}{ll} A\underline{r},\ \neg\exists\underline{x}A\underline{x} & \text{Ann.} \\ \exists\underline{x}A\underline{x} & \text{I}(\exists). \end{array}$$

Ad R02: Analog. - Ad R1: Vgl. Beispiel 1.4.

Ad R2:

$$\begin{array}{lll} & \exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } {}^*\text{:} & (F^* \wedge G^*) \wedge \neg\,(G^* \wedge F^*) & \text{P}(\exists) \\ & F^* \wedge G^*, \quad \neg\,(G^* \wedge F^*) & \text{P}(\wedge) \\ & F^*,\ G^* & \text{P}(\wedge) \\ & G^* \wedge F^* & \text{I}(\wedge). \end{array}$$

Ad R3: Analog mit Hilfe des Teilschemas:

$$\begin{array}{c} (F^* \wedge G^*) \wedge H^* \\ F^* \wedge G^*,\ \ H^* \\ F^*,\ \ G^*,\ \ H^* \\ F^*,\ \ G^* \wedge H^* \\ F^* \wedge (G^* \wedge H^*). \end{array}$$

Ad R4:

$$\begin{array}{lll} & \exists.(F \wedge G),\ \neg\exists.G & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } {}^*\text{:} & F^* \wedge G^*,\ \ G^*,\ \ \exists.G. & \end{array}$$

Ad R5:

$$\begin{array}{lllll} & \exists.F, & \neg\exists.(F \wedge G), & \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } * : & F^*, & \neg(F^* \wedge G^*), & \neg(F^* \wedge \neg G^*) & \text{P}(\exists), \text{R03} \\ & & \neg G^* & \neg\neg G^* & \text{R01}. \end{array}$$

Unter einem **Term** verstehen wir eine Schreibfigur $t$, in der Variable vorkommen dürfen, und die bei jeder Substitution aller frei vorkommenden Variablen durch Werte derselben in eine Konstante übergeht. Man nennt diese Konstante eine **Belegung** von $t$. - Zur Mitteilung dafür, dass zwei Schreibfiguren $\varrho$ und $\sigma$ gestaltlich gleich sind, schreiben wir kurz: $\varrho \equiv \sigma$.

**Definition:** Für Listen $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 0)$ verschiedener Variablen und Listen $\underline{t} \equiv t_1, \ldots, t_n$ geeigneter Terme entstehe $F^{\underline{x}}_{\underline{t}}$ aus $F$ bei der simultanen Substitution aller freien Vorkommnisse von $x_i$ durch $t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. - Ferner verwenden wir folgende metasprachlichen Aussagen:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{N}(x, F) & \rightleftharpoons & x \text{ kommt in } F \text{ nicht frei vor.} \\ \mathrm{Fr}(t, x, F) & \rightleftharpoons & t \text{ ist frei für } x \text{ in } F, \text{ d.h.} \end{array}$$

1) jede Belegung von $t$ ist ein Wert von $x$,
2) $F^x_t$ ist eine Formel von L, und
3) jedes freie Vorkommnis einer Variablen in $t$ ist auch in $F^x_t$ überall dort, wo $t$ für $x$ in $F$ eingesetzt worden ist, frei.

**Beispiel:** $y$ ist *nicht* frei für $x$ in $\exists y\,(x < y)$, weil $y$ in $y$ frei vorkommt, aber das für $x$ eingesetzte $y$ in $\exists y\,(y < y)$ gebunden ist.

$\mathrm{Fr}(t, x, F)$ ist eine Abkürzung für eine komplexe metasprachliche Formel. Man kann sie so verstehen wie eine entsprechend aufgebaute objektsprachliche Formel im primären Spiel. [Satz 3.4 (s.u.) lässt sich auch in die Metasprache übertragen.]

**Lemma:** Gilt $\mathrm{Fr}(t, x, F)$, ist $x, \underline{y}$ eine Liste der verschiedenen Variablen, die in $F$ oder $t$ frei vorkommen, und ist $r, \underline{s}$ ein Wert von $x, \underline{y}$, dann gilt

$$(*) \qquad (F^x_t)^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}} \equiv (F^{\underline{y}}_{\underline{s}})^x_{t^*} \quad \text{für} \quad t^* \equiv t^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}}.$$

**Beweis:** Man betrachte folgendes Diagramm der teils simultanen, teils sukzessiven Substitutionen der freien Vorkommnisse der Variablen: $x, \underline{y}$:

$$\begin{array}{rl} x, \underline{y} & \quad x, \underline{y} \\ t, \underline{y} & \quad x, \underline{s} \\ t^*, \underline{s} & \quad t^*, \underline{s}. \end{array}$$

**Satz:** Folgende Regeln sind zulässig:

$$\begin{array}{lrcl} \text{R6} & \mathrm{Fr}(t, x, F) & \Rightarrow & \neg\exists.(F^x_t \wedge \neg\exists x\, F). \\ \text{R7} & \mathrm{N}(x, F),\ \neg\exists.(F \wedge G) & \Rightarrow & \neg\exists.(F \wedge \exists x\, G). \end{array}$$

**Beweise:** Ad R6: Sei $\mathrm{Fr}(t, x, F)$. Mit den Bezeichnungen aus obigem Lemma dürfen wir wie folgt argumentieren:

$$\begin{array}{rll} & \exists.(F^x_t \wedge \neg\exists x\, F) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } r, \underline{s}: & (F^x_t \wedge \neg\exists x\, F)^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}} & \mathrm{P}(\exists) \\ & (F^{\underline{y}}_{\underline{s}})^x_{t^*},\ \ \neg\exists x\, F^{\underline{y}}_{\underline{s}} & \mathrm{P}(\wedge), (*) \\ & \exists x\, F^{\underline{y}}_{\underline{s}} & \mathrm{I}(\exists). \end{array}$$

Ad R7: Sei $N(x, F)$. $\underline{y}$ sei eine Liste der verschiedenen in $F \wedge \exists x\, G$ frei vorkommenden Variablen. Dann dürfen wir wie folgt argumentieren:

$$\begin{array}{rll} & \exists \underline{y}\,(F \wedge \exists x\, G),\ \ \neg\exists x, \underline{y}\,(F \wedge G) & \text{Ann.} \\ \text{Für ein } \underline{s}, r: & F^{\underline{y}}_{\underline{s}},\ \ G^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}}, & \\ & (F \wedge G)^{x,\underline{y}}_{r,\underline{s}} & \\ & \exists x, \underline{y}\,(F \wedge G). & \end{array}$$

Zur übersichtlichen Darstellung weiterer Schlussregeln schreiben wir "$\Leftrightarrow$", um je zwei Schlussregeln zusammenzufassen. Ferner verwenden wir die Definition

$$\forall.F \ \ \rightleftharpoons\ \ \neg\exists.\neg F, \quad \text{speziell} \quad \forall.A \ \rightleftharpoons \neg\neg A.$$

**Satz:** Zulässig sind:

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{R}8a & \neg\exists.G,\ \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \Rightarrow & \neg\exists.F \\ \mathrm{R}8b & \neg\exists.\neg G,\ \neg\exists.(F \wedge G) & \Rightarrow & \neg\exists.F \\ \mathrm{R}9 & \neg\exists.(G \wedge F) & \Rightarrow & \neg\exists.(F \wedge G) \\ \mathrm{R}10 & \neg\exists.[F \wedge (G \wedge H)] & \Leftrightarrow & \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge H] \\ \mathrm{R}11a & \forall.\neg F & \Leftrightarrow & \neg\exists.F \\ \mathrm{R}11b & \neg\neg\neg A & \Leftrightarrow & \neg A \\ \mathrm{R}11c & \forall.(F \rightarrow G) & \Leftrightarrow & \neg\exists.(F \wedge \neg G) \\ \mathrm{R}11d & \forall.(F \rightarrow \neg G) & \Leftrightarrow & \neg\exists.(F \wedge G) \end{array}$$

Zum Nachweis dafür, dass eine Regel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \neg\mathcal{B}$ zulässig ist, genügt es auch, $\neg\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ durch Anwendungen zulässiger Regeln herzuleiten (denn damit erhält man - wie bisher - einen Widerspruch aus den Annahmen $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$). Wir werden im Folgenden so verfahren.

Ad R8a:

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.G,\ \neg\exists.(F \wedge \neg G) & \text{Prämissen} \\ \neg\exists.(F \wedge G) & \text{nach R4} \\ \neg\exists.F & \text{nach R5} \end{array}$$

Ad R9:

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.(G \wedge F) & \text{Präm.} \\ \neg\exists.[(F \wedge G) \wedge \neg\,(G \wedge F)] & \text{R2} \\ \neg\exists.(F \wedge G) & \text{R8a.} \end{array}$$

Ad R11a($\Rightarrow$):

$$\begin{array}{ll} \neg\exists.\neg\neg F & \text{Präm.} \\ \neg\exists.(F \wedge \neg F) & \text{R1} \\ \neg\exists.F & \text{R8b.} \end{array}$$

R11b und R11c sind Sonderfälle von R11a.

Ad R11d($\Rightarrow$):

| | |
|---|---|
| $\forall.(F \to \neg G)$ | Präm. |
| $\neg\exists.(F \wedge \neg\neg G)$ | R11c |
| $\neg\exists.(\neg\neg G \wedge F)$ | R9 |
| $\neg\exists.(G \wedge \neg\neg G \wedge F)$ | R4, 10 |
| $\neg\exists.(F \wedge G \wedge \neg\neg G)$ | R9, 10 |
| $\neg\exists.(F \wedge G \wedge \neg G)$ | R1, 4, 10 |
| $\neg\exists.(F \wedge G)$ | R5. |

Die Zulässigkeit der restlichen Regeln erhält man analog. - Auch für die in §3 angegebenen Regeln kann die Zulässigkeit auf diese Weise 'deduktiv' bewiesen werden. Die Frage nach der Reichweite dieser allgemeinen deduktiven Methode wird erst in §4 bei der Behandlung der arithmetischen Induktion aktuell.

# §3. Ein Zugang zur klassischen Logik

Ungelöste Probleme wie die GOLDBACHsche Vermutung (der Arithmetik) geben uns Beispiele für Aussagen $A$, für die man bisher weder $A$ noch $\neg A$ behaupten darf und daher im primären Spiel auch noch nicht $A \vee \neg A$ ('Tertium-non-datur') behaupten darf. Dementsprechend hat L.E.J. BROUWER (1908) das Tertium-non-datur "onbetrouwbaar" genannt. Dennoch darf $\neg(A \vee \neg A)$ für *keine* Aussage $A$ behauptet werden. Dies ergibt sich aus der Zulässigkeit der beiden Regeln

$$\neg\,(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; \neg A$$
$$\neg\,(A \vee \neg A) \;\Rightarrow\; \neg\neg A$$

(vgl. R02). Für beliebige Aussagen $A$ (von $\mathcal{L}$) gilt also

$$\neg\neg\,(A \vee \neg A).$$

Somit gibt es Aussagen $B$, für die man im primären Spiel zwar bereits $\neg\neg B$ behaupten darf, aber $B$ selbst noch nicht behaupten darf. Daher sollte man die Regel

$$\neg\neg B \;\Rightarrow\; B$$

nicht einfach gedankenlos oder schematisch anwenden. Die umgekehrte Regel

$$B \;\Rightarrow\; \neg\neg B$$

ist jedoch nach R1 und R01 zulässig. - Wir können aber auch die vorher angeführte Regel zulässig 'machen' und damit das Tertium-non-datur erhalten, indem wir das primäre Spiel dadurch liberalisieren, dass wir behauptete Gesamtaussagen als Abkürzungen für ihre doppelten Negate verwenden.

Zur Rechtfertigung dieses '**klassischen Aussagengebrauchs**' in §6 werden wir u.a. zeigen, dass für ihn das schon im Überblick (Absatz 2) Gesagte gilt, er also den in §0 unter "Schlussregeln und Mittel zu ihrer Formulierung" erläuterten Zweck erfüllt. Der klassische Aussagengebrauch macht ferner den Kalkül der klassischen Logik verfügbar, der wegen seiner Symmetrie (im Vergleich mit anderen bekannten Logikkalkülen) die Übersicht erleichtert und besonders leicht handhabbar ist.

**Definition:** Eine Schlussregel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ heiße **klassisch zulässig**, wenn

$$\neg\neg\mathcal{A}_1, \ldots, \neg\neg\mathcal{A}_n \;\;\Rightarrow\;\; \neg\neg\mathcal{B}$$

zulässig ist.

**3.1. Satz:** Falls eine Schlussregel der Form $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$ $(n \geq 0)$ zulässig ist, dann ist sie auch klassisch zulässig.

**Beweis** für $n = 2$: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{B}$ sei zulässig, d.h. es gelte

$$\neg\,\exists : (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{B}).$$

Zulässig sind dann auch

$$\mathcal{A}_2, \mathcal{B} \;\;\Rightarrow\;\; \neg\mathcal{A}_1 \;\;\Rightarrow\;\; \neg\neg\neg\mathcal{A}_1$$

und daher ebenso

$$\neg\neg\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \;\;\Rightarrow\;\; \neg\mathcal{B}$$
$$\neg\neg\mathcal{A}_1, \neg\neg\mathcal{A}_2 \;\;\Rightarrow\;\; \neg\mathcal{B} \;\;\Rightarrow\;\; \neg\neg\neg\mathcal{B}.$$

Nach unserer Definition $\forall \underline{x}\, F \rightleftharpoons \neg\,\exists \underline{x}\, \neg F$, R11b und R03 ist nun auch

$$\forall \underline{x}\, A\underline{x} \;\;\Rightarrow\;\; A\underline{r} \quad \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\text{)}$$

klassisch zulässig. Daher können wir $\forall .F$ etwa als "$F$ ist allgemeingültig" lesen. Dementsprechend schreiben wir Regeln der Form

$$\forall .\mathcal{F}_1, \ldots, \forall .\mathcal{F}_n \;\;\Rightarrow\;\; \forall .\mathcal{G}$$

auch abgekürzt so:

$$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{G}.$$

Ferner ziehen wir in den folgenden Regeln R22 - R25 die 'syntaktischen' Prämissen $\mathrm{Fr}(t, x, F)$ und $\mathrm{N}(x, F)$ (wie üblich) nach hinten heraus.

**3.2 Satz:** Zulässig sind:

R12 $\quad \Rightarrow\;\; F \to F$

R13 $\quad F,\; F \to G \;\;\Rightarrow\;\; G$ (*Modus ponens*)

R14 $\quad F \to G,\; G \to H \;\;\Rightarrow\;\; F \to H$

R15a $\Rightarrow \ F \wedge G \rightarrow F$

R15b $\Rightarrow \ F \wedge G \rightarrow G$

R16 $H \rightarrow F,\ H \rightarrow G \ \Rightarrow \ H \rightarrow F \wedge G$

R17 $F \wedge G \rightarrow H \ \Leftrightarrow \ F \rightarrow (G \rightarrow H)$

R18 $F \ \Rightarrow \ H \rightarrow F$

R19 $F,\ G \ \Leftrightarrow \ F \wedge G$ (drei Regeln)

**Definition:** $F \leftrightarrow G \ \rightleftharpoons \ (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.

R20 $\Rightarrow \ F \leftrightarrow \neg\neg F$

R21 $F \rightarrow G \ \Leftrightarrow \ \neg G \rightarrow \neg F$

R22 $\Rightarrow \ F^x_t \rightarrow \exists x\, F$, falls $\mathrm{Fr}(t, x, F)$

R23 $F \rightarrow H \ \Rightarrow \ \exists x\, F \rightarrow H$, falls $\mathrm{N}(x, H)$

R24 $\Rightarrow \ \forall x\, F \rightarrow F^x_t$, falls $\mathrm{Fr}(t, x, F)$

R25 $H \rightarrow F \ \Rightarrow \ H \rightarrow \forall x\, F$, falls $\mathrm{N}(x, H)$.

Hierzu zeigen wir nur die Zulässigkeit von R16 und geben zu diesem Zweck zunächst eine Herleitung zu folgender Regel an:

R16* $H \rightarrow F \ \Rightarrow \ H \rightarrow H \wedge F$.

| | |
|---|---|
| $\forall.\,(H \rightarrow F)$ | Prämisse |
| $\neg\,\exists.\,(H \wedge \neg F)$ | R11c |
| $\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H \wedge \neg F)$ | R4, 10 |
| $\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H \wedge F)$ | R1, 9, 10 |
| $\neg\,\exists.\,(\neg\,(H \wedge F) \wedge H)$ | R5 |
| $\forall.\,(H \rightarrow H \wedge F)$ | R9, 11c. |

Herleitungsskizze zu R16:

| | |
|---|---|
| $H \rightarrow F, \quad H \rightarrow G$ | Prämissen |
| $H \wedge F \rightarrow G$ | R15, 14 |
| $H \rightarrow H \wedge F \rightarrow H \wedge F \wedge G \rightarrow F \wedge G$ | R16* etc. |

**3.3 Satz:** Zulässig sind folgende Regeln zur **Adjunktion** ($\vee$):

R26a $\Rightarrow \ \neg\,\exists.[F \wedge \neg\,(F \vee G)]$

R26b $\Rightarrow \ \neg\,\exists.[G \wedge \neg\,(F \vee G)]$

R27 $\Rightarrow \ \neg\,\exists.[\neg F \wedge \neg G \wedge (F \vee G)]$.

R28a $\Rightarrow \; F \to F \vee G$

R28b $\Rightarrow \; G \to F \vee G$

R29 $F \to H,\; G \to H \;\; \Rightarrow \;\; F \vee G \to H.$

Für R26 - R27 ist die Zulässigkeit leicht einzusehen. Für R28 - R29 lässt sie sich mit Hilfe der vorangehenden Regeln deduktiv beweisen.

Bekanntlich kann man weitere Regeln und andere Methoden des klassischen Argumentierens aus R1 - R29 und $\neg\neg A \Rightarrow A$ gewinnen. Wir werden davon im Rahmen der Sprache $\mathcal{L}$, aber auch anderer Sprachen, Gebrauch machen.

## Zum klassischen Gebrauch von Elementaraussagen

Zu dessen Rechtfertigung benötigen wir:

**3.4. Satz:** Folgende Regel darf für Elementaraussagen $E$ im primären Spiel nicht verletzt werden:

$$\natural\, \neg\neg E \;\Longrightarrow\; \text{Beg.}E.$$

Um diesen Satz zu erhalten, ordnen wir jeder Elementaraussage $E$ eine neue 'Hilfsaussage' $-E$ zu. Diese gelte genau dann als *begründet*, wenn $E$ widerlegt worden ist, und zwar nach den Elementarregeln mit Ausnahme der zweiten der folgenden beiden Regeln, die wir in das primäre Spiel aufnehmen:

$$\natural - E \;\Longrightarrow\; \text{Beg.} - E$$

als externe Regel (vgl. $\mathrm{P_{ext}}$), und

$$E, -E \;\Rightarrow\; \bot$$

als Elementarregel. Man beachte, dass $E$ nur dann *nach der letzten Regel* widerlegt (d.h. $-E$ behauptet) werden darf, wenn $E$ ohne Bezug auf diese Regel widerlegt worden ist. (Die Hilfsaussagen $-E$ werden wir nach dem folgenden Beweis nicht weiter in Betracht ziehen.)

**Beweis von 3.4:** Falls $-E$ und $\neg E$ nacheinander behauptet werden, dann wird dadurch (nach der Regel $E, -E \Rightarrow \bot$) $E$ widerlegt, sodass $\natural\, \neg E$ keine interne Regel verletzt. - Nun sollte $\neg\neg E$ erst dann behauptet werden, wenn die Behauptung $\natural\, \neg E$ (auch dann, wenn sie im Anschluss an $\natural - E$ erfolgt) mit der Verletzung einer internen Regel verbunden wäre. Nach dem vorherigen Argument ist dazu eine Widerlegung von $-E$ erforderlich. Da aber $-E$ *nur* nach der Regel $E, -E \Rightarrow \bot$ widerlegt werden kann, muss dazu $E$ behauptet worden sein oder nach den Elementarregeln aus anderen behaupteten Elementaraussagen herleitbar sein. Diese Elementaraussagen sollten aber begründet sein, sodass auch $E$ als begründet gilt.

# §4. Ein Zugang zur Arithmetik

Das Folgende entspricht dem Vorgehen in [6, §13] und [8, II.1]. Als Darstellungen natürlicher Zahlen wählen wir einfach die Schreibfiguren 0, 0I, 0II, 0III, ..., die an primitive Zählzeichen erinnern und im Kalkül K($\mathbb{N}$) mit den folgenden Regeln konstruierbar sind:

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & 0 & \text{(Beginn mit 0)} \\ k & \Rightarrow & k\mathrm{I} & \text{(Übergang von } k \text{ zu } k\mathrm{I}). \end{array}$$

Hierbei darf $k$ jederzeit als Variable für die bereits in K($\mathbb{N}$) konstruierten Figuren verwendet werden. Für Konstante $r$ sei $r \in \mathbb{N}$ zu lesen als "$r$ ist konstruierbar in K($\mathbb{N}$)". Eine Begründung dieser Aussage erfolge durch Konstruktion von $r$ in K($\mathbb{N}$) oder einfach durch Nachschauen, dass $r$ mit 0 beginnt und alle folgenden 'Buchstaben' von $r$ gleich I sind. Wir lassen jedoch auch bestimmte andere 'neue' Zeichen als Abkürzungen oder Kennzeichnungen für Elemente von $\mathbb{N}$ zu (z.B. 3 für 0III, und $357 \rightleftharpoons 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$ nach Einführung der Addition usw.). - In §4 schreiben wir $k, m, n$, $k_0, m_0, x, y$ für beliebige Elemente von $\mathbb{N}$ oder für Variable für Elemente von $\mathbb{N}$.

Die Gleichheit in $\mathbb{N}$ sei die gestaltliche Gleichheit. Dementsprechend bedeute $k_0 = m_0$, dass diese Gleichung herleitbar ist im Kalkül K(=) mit den beiden Regeln

$$\Rightarrow 0 = 0; \quad k = m \;\Rightarrow\; k\mathrm{I} = m\mathrm{I}.$$

Zur Begründung von $k_0 = m_0$ genüge aber auch ein entsprechender Vergleich von $k_0$ und $m_0$ mit positivem Resultat.

Zur Einführung von Aussagen der Formen $r \in \mathbb{N}$ und $r = s$ im Rahmen einer umfangreicheren Sprache $\mathcal{L}$, in der außer den natürlichen Zahlen auch andere Konstante vorkommen dürfen, verwenden wir als Metavariable: $\alpha$ für die (endlich vielen) 'Buchstaben' oder 'atomaren Zeichen' (wie z.B. 0 und I), die in Konstanten von $\mathcal{L}$ vorkommen, $p$ für beliebige 'Worte' aus diesen Buchstaben (Reihen aus diesen Zeichen), und (wie bisher) $r$ und $s$ für Konstante von $\mathcal{L}$. In das primäre Spiel nehmen wir nun folgende **Elementarregeln** auf:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcll}
 & \Rightarrow & 0 \in \mathbb{N} & \alpha \in \mathbb{N} & \Rightarrow & \perp & (\text{für } \alpha \not\equiv 0) \\
p \in \mathbb{N} & \Rightarrow & p\mathrm{I} \in \mathbb{N} & p\mathrm{I} \in \mathbb{N} & \Longrightarrow & p \in \mathbb{N} & \\
 & & & p\alpha \in \mathbb{N} & \Rightarrow & \perp & (\text{für } \alpha \not\equiv \mathrm{I}) \\
 & & & r = s & \Longrightarrow & r \in \mathbb{N} \text{ und } s \in \mathbb{N} & \\
 & \Rightarrow & 0 = 0 & k\mathrm{I} = 0 & \Rightarrow & \perp & \\
 & & & 0 = m\mathrm{I} & \Rightarrow & \perp & \\
k = m & \Rightarrow & k\mathrm{I} = m\mathrm{I} & k\mathrm{I} = m\mathrm{I} & \Longrightarrow & k = m. &
\end{array}$$

Hierbei bedeute "$\Longrightarrow$", dass wir die Prämisse erst nach der Konklusion behaupten dürfen. Somit darf nach den Regeln der rechten Spalte (in denen "$\Rightarrow$" auch durch

"$\Longrightarrow$" ersetzt werden könnte) eine Aussage der Form $p \in \mathbb{N}$ oder $r = s$ erst dann behauptet werden, wenn sie nach den links aufgelisteten Regeln hergeleitet - und damit begründet worden ist. (Daher ist die externe Regel $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ hier entbehrlich. Andererseits kann auch umgekehrt eine Begründung von $p \in \mathbb{N}$ oder $r = s$ als eine abgekürzte Herleitung dieser Aussage nach den links aufgelisteten Regeln aufgefasst werden.)

**Die 'deontische Unendlichkeit' von $\mathbb{N}$:** Wegen Mangels an Zeit und Material kann man nur endlich viele Figuren im Kalkül K($\mathbb{N}$) 'wirklich' konstruieren. Im Kontext von K($\mathbb{N}$) werden wir jedoch *niemals verpflichtet* sein, die Konstruktion natürlicher Zahlen endgültig abzubrechen. Dementsprechend gilt

(*) $$0 \in \mathbb{N} \wedge \forall z \, (z \in \mathbb{N} \to z\mathrm{I} \in \mathbb{N}).$$

**Beweis:** Wir dürfen $\exists z \left(z \in \mathbb{N} \wedge \neg \, (z\mathrm{I} \in \mathbb{N})\right)$ erst dann behaupten, nachdem wir eine Aussage der Form $p \in \mathbb{N}$ behauptet und $p\mathrm{I} \in \mathbb{N}$ widerlegt haben. Dies ist jedoch nach der Regel $p \in \mathbb{N} \Rightarrow p\mathrm{I} \in \mathbb{N}$ verboten. Somit gilt $\neg \exists z \left(z \in \mathbb{N} \wedge \neg \, (z\mathrm{I} \in \mathbb{N})\right)$, also nach R11c auch $\forall z \, (z \in \mathbb{N} \to z\mathrm{I} \in \mathbb{N})$.

Ferner liefert der Konstruktionsprozess in K($\mathbb{N}$) nacheinander lauter *verschiedene* Figuren 0, 0I, 0II .... Diese Tatsachen veranlassen uns zu sagen, $\mathbb{N}$ sei *unendlich.* (Auf damit verbundene Probleme werden wir noch einmal zurückkommen.)

**Prinzip der arithmetischen Induktion:** Zulässig ist die Regel

$$A(0),\ \forall x \, [A(x) \to A(x\mathrm{I})] \ \Rightarrow\ \forall x \, A(x).$$

**Demonstration:** Sei

$$B(k) \rightleftharpoons A(0) \wedge \forall x \, [A(x) \to A(x\mathrm{I})] \to A(k).$$

Es genügt zu zeigen, dass $B(n)$ für beliebige $n$ gilt: Die Regel $B(k) \Rightarrow B(k\mathrm{I})$ ist zulässig (nach R14, R15, R16*, R17 und R24). Gegeben sei nun irgendeine Konstruktion $0, 0\mathrm{I}, 0\mathrm{II}, \ldots, n$ nach den Regeln $\Rightarrow 0$ und $k \Rightarrow k\mathrm{I}$ von K($\mathbb{N}$). Jeder Konstruktionsschritt nach diesen Regeln darf ersetzt werden durch den entsprechenden Behauptungsschritt $\Rightarrow\ \natural\, B(0)$ bzw. $\natural\, B(k) \Rightarrow\ \natural\, B(k\mathrm{I})$. Somit darf man nacheinander $B(0), B(0\mathrm{I}), \ldots, B(n)$ behaupten. Da $B(n)$ aber definitionsgemäß ein Negat ist, darf $B(n)$ auch allein behauptet werden.

Hiermit sollte gezeigt werden, dass $B(n)$ für beliebige $n$ (sogar deduktiv) beweisbar ist. Dieser generelle Sachverhalt ist jedoch nicht *deduktiv* bewiesen worden. Somit liegt der Einwand nahe, dass unsere Demonstration eine Anwendung eines entsprechenden metalogischen Induktionsprinzip enthält, die durch den gegebenen Hinweis auf K($\mathbb{N}$) nur unvollständig gerechtfertigt ist. Daher könnte man zweifeln, ob unsere Demonstration auch für unüberschaubar große Zahlen $n$, die noch nicht konstruiert worden sind, ausreicht. Im Folgenden setzen wir uns jedoch über diesen Zweifel hinweg. Ferner werden wir weitere entsprechende Induktionsprinzipien anwenden.

In gleicher Weise, aber unter Bezugnahme auf den Kalkül K(=) erhält man das *Induktionsprinzip für die Gleichheit in* $\mathbb{N}$, welches besagt, dass folgende Regel zulässig ist:

$$A(0,0),\ \forall x,y\,[A(x,y) \to A(x\mathrm{I},y\mathrm{I})] \ \Rightarrow\ \forall x,y\,[x=y \to A(x,y)].$$

Entsprechend zu (*) erhalten wir $0=0 \wedge \forall x\,(x=x \to x\mathrm{I}=x\mathrm{I})$ und folglich $n=n$ durch arithmetische Induktion. - Ferner gilt

(a) $\neg\,(k\mathrm{I}=0)$
(b) $k\mathrm{I}=m\mathrm{I} \leftrightarrow k=m$
(c) $k=m\ \wedge\ F(k)\ \to\ F(m)$.

Aus (c) folgt die Komparativität $k=m \wedge k=n \to m=n$, und daher auch die Symmetrie und die Transitivität der Gleichheit in $\mathbb{N}$. Diese ist also eine Äquivalenzrelation, in Bezug auf die alle Formeln von $\mathcal{L}$ invariant sind.

Die **Beweise** für (a) und (b) ergeben sich unmittelbar aus den angeführten Elementarregeln. - Zu (c): Sei $e$ eine Variable für die ‘leere Figur’ sowie für alle Figuren, die aus ihr durch Anwendung der Kalkülregel $q \Rightarrow \mathrm{I}q$ konstruierbar sind. Dann gilt $\forall e\,[A(0e) \to A(0e)]$ und

$$\forall x,y\,\{\forall e\,[A(xe) \to A(ye)] \to \forall e\,[A(x\mathrm{I}e) \to A(y\mathrm{I}e)]\}.$$

Damit erhalten wir (c) nach dem Induktionsprinzip für die Gleichheit in $\mathbb{N}$, und zwar *zunächst* für Formeln $F(x)$, in denen außer $x$ keine weiteren Variablen frei vorkommen.

Die **Addition** in $\mathbb{N}$ kann eingeführt werden durch Aufstellung folgender Behauptungsregeln für neue Aussagen:

$$\begin{aligned} \natural\,\mathrm{Add}(k,0,n) &\implies \natural\, n=k \\ \natural\,\mathrm{Add}(k,m\mathrm{I},n) &\implies \natural\,\exists x\,[\mathrm{Add}(k,m,x) \wedge n=x\mathrm{I}]. \end{aligned}$$

Diese Regeln können aufgefasst werden als Sonderfälle von

$$\begin{aligned} \natural\,\underline{r} \in S_0 &\implies \natural\, A(\underline{r}) \\ \natural\,\underline{r} \in S_{m\mathrm{I}} &\implies \natural\, B(\underline{r},m,S_m). \end{aligned}$$

Dabei sei $S \rightleftharpoons |\underline{x}yZ(A(\underline{x}),B(\underline{x},y,Z))$ mit einer Variablen $Z$ für geeignete *Mengen* oder *Relationen.* $A(\ldots)$ und $B(\ldots)$ seien Formeln einer *erweiterten* Objektsprache $\mathcal{L}'$; diese sei die kleinste Sprache, der bestimmte Elementarformeln angehören und die abgeschlossen ist gegen Verknüpfungen mit $\wedge, \vee, \neg, \exists$, und $\in |$ (mit dem ‘Induktionsoperator’ $|$). Variable für Mengen oder Relationen dürfen jedoch in den Formeln von $\mathcal{L}'$ nicht durch $\exists$ gebunden werden. - Die zuletzt angeführten Regeln können auch umgekehrt werden, da die Behauptungen ihrer Prämissen keinen weiteren Einschränkungen zu unterwerfen sind und die Sprache $\mathcal{L}'$ ebenfalls zirkelfrei ist. Dies kann durch Indukion über die skizzierte Konstruktion der Formeln von $\mathcal{L}'$ bewiesen werden (vgl. [16, pp. 426 ff., 452] oder §7). Der Prädikator "Add" stellt eine Funktion "+" dar. (Eine Einführung von Kennzeichnungstermen wie z.B. $s + t$ werden wir erst am Ende von §7 skizzieren.) - Es ist leicht einzusehen, dass alle rekursiven Funktionen in $\mathcal{L}'$ definierbar sind.

Nach dem Vorbild von [7] kann man **konstruktive Analysis** mit reellen Zahlen treiben, die durch in $\mathcal{L}'$ definierbare Cauchyfolgen darstellbar sind. (Wir kommen am Anfang von §7 kurz darauf zurück.)

Obwohl sich die obige Unendlichkeitsaussage (*) auf recht harmlose Weise ergeben hat, sind mit der Unendlichkeit von $\mathbb{N}$ Probleme verbunden. Hierzu betrachten wir z.B. die Potenzfunktion (Pot) natürlicher Zahlen. Die Aussage

$$9^{9^9} \in \mathbb{N}$$

(in der eine iterierte Kennzeichnung vorkommt) kann als Abkürzung folgender Aussage betrachtet werden:

$$\exists x, y\,[\mathrm{Pot}(9, 9, x) \;\wedge\; \mathrm{Pot}(9, x, y) \;\wedge\; y \in \mathbb{N}].$$

Eine Verallgemeinerung hiervon kann auf bekannte Weise durch Induktion bewiesen werden. Wir sind jedoch nicht tatsächlich in der Lage, eine natürliche Zahl $n$ zu konstruieren, für die $9^{9^9} = n$ gilt. Die Existenzaussage $9^{9^9} \in \mathbb{N}$ wird daher im primären Spiel während der gesamten Menschheitgeschichte nicht behauptet werden dürfen. Es würde jedoch keine Behauptungsregel verletzen, nacheinander geeignete Behauptungen und schließlich die von $9^{9^9} \in \mathbb{N}$ aufzustellen. Dementsprechend darf im primären Spiel die doppelte Negation dieser Aussage behauptet werden, die man daher klassisch interpretieren kann.

Ein allgemeineres Problem ist mit Aussagen der Form $\forall x \in K.\, \exists y\, A(x, y)$ verbunden. Günstigenfalls kann man eine derartige Aussage *direkt* beweisen, indem man ein 'effektives Verfahren' $V$ angibt und Folgendes zeigt:

(**) $$\forall x \in K.\, \exists y\, (V\!:x \mapsto y) \;\wedge\; \forall x \in K.\, \forall y\, [(V\!:x \mapsto y) \rightarrow A(x, y)].$$

Dabei bedeute $V\!:x \mapsto y$, dass $V$ vorschreibt, nach der Eingabe von $x$ schließlich das Ergebnis $y$ zu liefern.

(**) zeigt, wie man 'im Prinzip' zu jedem $k \in K$ ein $m$, für das $A(k, m)$ klassisch gilt, finden kann. Für 'sehr große' $k$ würde $V$ jedoch i.Allg. nicht tatsächlich ein Ergebnis $m$ liefern, da uns für Anwendungen von $V$ nur eine beschränkte Zeit zur Verfügung steht. Wie ist dann aber die Existenz eines solchen Ergebnisses verstehen? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir $V$ als ein System von Regeln, nach denen bestimmte Abfolgen von Handlungsschritten erlaubt (oder sogar geboten) und alle weiteren Schritte verboten sind. Jeder erlaubte Schritt von $V$ sei durch die Eingabe und die vorhergehenden Schritte eindeutig bestimmt. Wir zählen die Regeln von $V$ zu den internen Regeln des primären Spiels.

Nun bedeutet die klassische Existenz eines zu einer Eingabe $k$ in $V$ gehörigen Ergebnisses, dass es nach den Regeln von $V$ nach Eingabe von $k$ erlaubt (d.h. nicht verboten) ist, Schritte zu tun, die schließlich ein Ergebnis liefern.

Da bei jeder Anwendung von $V$ höchstens eine beschränkte Anzahl $T$ von Schritten tatsächlich ausgeführt werden kann, genügt es zur Untersuchung der Erfolgsaussichten unserer Praxis, nur solche Verfahren zu betrachten, die zufolge eines 'Stopp-Befehls' spätestens nach $T$ Schritten abbrechen.

Nach Eingabe eines Wertes $k$ in ein solches Verfahren $V$ darf man spätestens nach $T$ Schritten von $V$ im primären Spiel behaupten:

$$\exists y\,(V\!:\!k \mapsto y) \vee \neg\exists y\,(V\!:\!k \mapsto y).$$

Im Falle $\neg\neg\exists y\,(V : k \mapsto y)$ darf man also danach sogar $\exists y\,(V : k \mapsto y)$ behaupten. Somit kann durch (**) mitgeteilt werden, wie man für beliebige $k \in K$ ein $m$, für das $A(k, m)$ klassisch gilt, innerhalb der Zeit $T$ finden kann. (Wegen der Beschränkung der Rechenzeit von $V$ erhält man (**) allerdings i.Allg. nur für 'kleinere' Mengen $K$ als ohne diese Beschränkung.)

# §5. Quantifikation über Gegenstände

Aussagen wie "Alle Ameisen sind sterblich" oder "Einige Äpfel sind rot" haben die Form "Alle P sind Q" bzw. "Einige P sind Q", oder in 'symbolischer' Schreibweise $\forall u\,(Pu \to Qu)$ bzw. $\exists u\,(Pu \wedge Qu)$. Der Gebrauch solcher Aussagen kann jedoch nicht wie bisher rekonstruiert werden, da wir nicht genügend Eigennamen für Ameisen oder Äpfel als Werte der Variablen $u$ zur Verfügung haben. Daher betrachten wir auch Aussagen wie "Dies ist eine Ameise" oder "Diese Ameise hat nur fünf Beine", in denen **Indikatoren** wie "dies" oder "diese Ameise" vorkommen. Derartige Indikatoren werden nur vorübergehend wie Eigennamen für Gegenstände (z.B. Körper oder Ereignisse) verwendet.

Unter einer **Denotation** eines Indikators durch einen Gegenstand verstehen wir eine Benennung (Bezeichnung) dieses Gegenstandes mit dem erwähnten Indikator, die jedoch nur in einer speziellen Situation (oder einem speziellen Kontext) gelten soll. Eine solche Denotation kann z.B. durch *Zeigen* auf einen Gegenstand und gleichzeitiges Aussprechen des Indikators erfolgen.

Manchmal kann ein Gegenstand keinem Hörer gezeigt werden. Falls aber jemand für sich selbst z.B. festgestellt hat: "Diese Ameise hat nur fünf Beine", dann darf er jedem Hörer sagen, dass es eine Ameise *gibt*, die nur fünf Beine hat. Dementsprechend ist es auch für die folgenden Untersuchungen unerheblich, ob die Gegenstände, über die gesprochen wird, 'an sich existieren' oder ob sie erst vom Sprecher oder Hörer 'erzeugt' worden sind (wie z.B. Sternbilder) oder in anderer Weise von ihnen 'abhängen'. - Die vorläufig noch zu ‘anspruchsvolle’ Rede von Denotationen als *Funktionen* (Abbildungen) von Indiktatormengen in Gegenstandsmengen werden wir vermeiden.

Denotationen verschiedener Indikatoren treten ggf. durch Zeigehandlungen an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten in Kraft und gelten dann nur in getrennten Situationen. Für sprachliche Darstellungen verschiedener Denotationen lassen sich jedoch sprachliche Kontexte (an Stelle von Situationen) herstellen, in denen sie gemeinsam gelten. [Eine sprachliche Darstellung einer Denotation kann gegeben sein durch eine Beschreibung oder Kennzeichnung (etwa mit Angaben des Akteurs und der Zeit) der einzelnen Zeigehandlung (oder einer anderen aufmerksamkeitszuführenden Handlung), durch die sie (die Denotation) in Kraft getreten ist, und durch Anführung des zugehörigen Indikators.] Mehrere sprachlich dargestellte Denotationen verschiedener Indikatoren können also prinzipiell jederzeit und überall gemeinsam wieder in Kraft treten. Für in der Erinnerung ‘aufbewahrte’ Denotationen gilt dies nur in ‘recht beschränktem Umfang’. (In §8 werden wir daher sprachlich dargestellte Denotationen betrachten.)

An Stelle von Indikatoren verwenden wir ‘**Gegenstandsvariable**’ (für gewisse Sorten von Gegenständen). Diese Variablen sind zu unterscheiden von den bisher betrachteten ‘Einsetzungsvariablen’, deren freie Vorkommnisse durch Konstante (oder insbesondere Eigennamen) ersetzbar sind (vgl. [9, §26]). Wir erweitern nun die Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass in ihren Formeln auch Gegenstandsvariable frei oder gebunden vorkommen dürfen. - Da Gegenstandsvariable vorübergehend wie Eigennamen für Gegenstände verwendbar sein sollen, lassen wir zu, dass sie auch in Aussagen frei vorkommen. Aussagen seien also Formeln, in denen *höchstens* Gegenstandsvariable (also keine Einsetzungsvariablen) frei vorkommen. In Konstanten (von $\mathcal{L}$) mögen jedoch (hier in §5) *keine* Gegenstandsvariablen vorkommen. (In §8 werden wir diese Einschränkung sprengen.) - Als Metavariable verwenden wir: $u, v$ für Gegenstandsvariable, und $\underline{u}, \underline{v}$ für Listen verschiedener Gegenstandsvariablen (ggf. auch für die ‘leere Liste’).

Eine Denotation einer einzigen Gegenstandsvariablen heiße *singulär*. Durch verschiedene Vollzüge von ‘Nennhandlungen’ erfolgte singuläre Denotationen seien zu unterscheiden. Angenommen, $u_1, \ldots, u_k$ seien verschiedene Gegenstandsvariable. Da-für, dass $\gamma_i$ für jedes $i = 1, \ldots, k$ eine singuläre Denotation von $u_i$ ist, sagen wir auch, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ sei eine Denotation von $u_1, \ldots, u_k$ - oder einer Permutation davon. Alle im Folgenden betrachteten Denotationen seien auf diese Weise zusammengesetzt aus endlich vielen singulären Denotationen verschiedener Gegenstandsvariablen.

Ist nun $\gamma$ eine Denotation von $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_k$, und ist $\delta \rightleftharpoons (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ eine weitere Denotation, dann entstehe $\gamma\delta$ aus $\gamma$ durch Hinzufügen derjenigen $\delta_i$, die keine Denotationen je eines Gliedes von $\underline{u}$ sind. (Kurz: $\gamma\delta$ stimme für die Variablen $\underline{u}$ mit $\gamma$ und sonst mit $\delta$ überein.)

In der Metasprache (Einführungs- bzw. Untersuchungssprache) verwenden wir somit u.a. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$ als Gegenstandsvariable für singuläre Denotationen

- oder einzelne Vollzüge derselben. (Damit übertragen wir den bereits in der Umgangssprache erlernten 'korrekten' Gebrauch von Indikatoren auf die soeben angeführten Gegenstandsvariablen.) - Ferner schreiben wir $\gamma, \delta$ für singuläre oder zusammengesetzte Denotationen.

Kontexte von Behauptungen können situativ (Situationen) oder sprachlich sein. Sprachliche Kontexte werden wir jedoch erst in §8 genauer betrachten. - Das Kürzel "in $\delta$" stehe für "in einem Kontext, in dem $\delta$ gilt (d.h. alle Glieder von $\delta$ gelten)". - "$\natural\, A|\delta$" stehe für "$A$ in $\delta$ behaupten". Dabei sei $\delta$ eine Denotation wenigstens aller in $A$ frei vorkommenden Gegenstandsvariablen. (Anderenfalls sei $\natural\, A|\delta$ verboten.) - "Beg.$E|\delta$" ("$E$ ist in $\delta$ begründet") sei entsprechend zu verstehen.

Nun dehnen wir das primäre Spiel dadurch aus, dass wir dessen Regeln (s. §1) auf derartige Behauptungen wie folgt übertragen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ | $\natural\, E\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | Beg.$E\|\delta$ |
| P($\wedge$) | $\natural\,(A \wedge B)\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | $\natural\, A\|\delta$ und $\natural\, B\|\delta$ |
| P($\vee$) | $\natural\,(A \vee B)\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | $\natural\, A\|\delta$ oder $\natural\, B\|\delta$ |
| P($\exists$) | $\natural\,\exists \underline{x}\, A\underline{x}\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | für einen Wert $\underline{r}$ von $\underline{x}$ : $\natural\, A\underline{r}\|\delta$ |
| P($\exists$ den) | $\natural\,\exists \underline{u}\, A\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | für eine Denotation $\gamma$ von $\underline{u}$ : $\natural\, A\|\gamma\delta$ |
| P($\neg$) | $\natural\,\neg A\|\delta$ | $\Longrightarrow$ | $A$ ist in $\delta$ widerlegt. |

(Auch das Wort "widerlegt" sei wie bisher zu verstehen.) - Das primäre Spiel möge außerdem bestimmte Elementarregeln für Behauptungen der Form $\natural\, E|\delta$ enthalten; es enthalte jedoch keine weiteren Regeln für komplexe Aussagen. Daher dürfen die angeführten Behauptungsregeln für komplexe Aussagen *umgekehrt* werden.

P($\exists$ den) dient zur Einführung einer Art von 'Gegenstands-Quantifikation' (vgl. [9, §26]). Sie ist u.a. deshalb für die Praxis wichtig, weil es für eine Existenzaussage $\exists \underline{u}\, A$, in der keine Gegenstandsvariablen mehr frei vorkommen, nicht vom Kontext abhängt, ob sie behauptet werden darf.

Hinweise wie "$|\delta$" auf Kontexte von Behauptungen werden wir gelegentlich fortlassen. Wenn wir auf diese Weise über *verschiedene* Behauptungen oder Widerlegungen reden, setzen wir voraus, dass sie alle im selben Kontext erfolgen.

Zu R1 - R29 analoge Regeln sind auch für die Gegenstands-Quantifikation zulässig. Als Beispiele angeführt seien folgende zu R6 und R7 analoge Regeln:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \neg\exists.\, \exists \underline{u}, v\,(F \wedge \neg\exists v\, F); \\ \neg\exists.\, \exists \underline{u}, v\,(F \wedge G) &\Rightarrow \neg\exists.\, \exists \underline{u}\,(F \wedge \exists v\, G), \quad \text{falls } N(v, F). \end{aligned}$$

Dabei kann in jedem Einzelfall die Liste $\underline{u}, v$ auch durch eine Permutation derselben ersetzt werden. Da Konstante (d.h. Werte von Einsetzungsvariablen) auch keine Gegenstandsvariablen enthalten sollen, darf man sogar aufeinanderfolgende Einsquantoren, von denen einer eine Einsetzungsvariable und der andere eine Gegenstandsvariable bindet, vertauschen.

**5.1. Satz:** $E_1(\underline{x}), \ldots, E_n(\underline{x})$ und $E(\underline{x})$ seien elementare Formeln, in denen höchstens die Einsetzungsvariablen $\underline{x}$ und evtl. einige Gegenstandsvariable $\underline{u}$ vorkommen. $E_1(\underline{x}), \ldots, E_n(\underline{x}) \Rightarrow E(\underline{x})$ sei eine Elementarregel, nach der man für keinen Wert $\underline{r}$ von $\underline{x}$ im selben Kontext sowohl die Aussagen $E_1(\underline{r}), \ldots, E_n(\underline{r})$ behaupten als auch $E(\underline{r})$ widerlegen darf. (Diese Regel kann auch mit Hilfe von Metavariablen an Stelle von $\underline{x}$ formuliert werden.) Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$$\forall \underline{x}\, \forall \underline{u}\, \big[E_1(\underline{x}) \wedge \ldots \wedge E_n(\underline{x}) \rightarrow E(\underline{x})\big].$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von (*) in §4 (zur deontischen Unendlichkeit von $\mathbb{N}$).

Eine *Gleichung* $u = v$ zwischen Gegenstandsvariablen (oder Eigennamen) kann zu der Mitteilung dienen, dass $u$ und $v$ im gegenwärtigen Kontext denselben Gegenstand bezeichnen. (Um zu entscheiden, ob dies zutrifft, braucht man i.Allg. die praktischen Fähigkeiten, Gegenstände von ihrer Umgebung abzugrenzen, wiederzuerkennen und voneinander zu unterscheiden.) - Um zu erreichen, dass $u = v \wedge Eu \rightarrow Ev$ für Elementaraussagen $Eu$ gilt, genügt es,

$$u = v,\, Eu \;\Rightarrow\; Ev$$

als Elementarregel aufzustellen. $Eu$ darf insbesondere eine Gleichung $u = w$ sein. Ferner gelte $u = u$ als begründet. Das Gleichheitszeichen stellt dabei also eine *Äquivalenzrelation* dar. Dies mag als ideale Norm zum Identifizieren von Gegenständen dienen. - Durch Induktion über die Komplexität der Aussagen $Au$ (von $\mathcal{L}$) erhalten wir sogar $u = v \wedge Au \rightarrow Av$.

Ist $\delta$ eine singuläre Denotation von $u$, dann sei $\delta[u/v]$ die 'Ankündigung', im Kontext von $\delta$ gelegentlich auch $v$ für $u$ zu sagen (oder zu schreiben). Wir zählen sie zu den Denotationen. Deren Gebrauch sei festgelegt durch die Elementarregel:

$$\Rightarrow u = v|(\delta, \delta[u/v]).$$

('Realistisch' gesprochen soll also im Kontext von $\delta[u/v]$ mit $v$ derselbe Gegenstand bezeichnet werden wie in $\delta$ mit $u$.) - Als weitere Elementarregel verwenden wir:

$$\natural\, E|\gamma \;\Rightarrow\; \natural\, E|\delta,$$

falls $\gamma$ und $\delta$ - für jede in $E$ vorkommende Gegenstandsvariable - dieselbe singuläre Denotation enthalten.

**5.2. Satz:** $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_k$ und $\underline{v} \equiv v_1, \ldots, v_k$ seien disjunkte Listen verschiedener Gegenstandsvariablen. Dann kann jede Denotation $\delta$ von $\underline{u}$ auf die Glieder von $\underline{v}$ fortgesetzt werden, und zwar derart, dass $u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ bei der so fortgesetzten Denotation behauptet werden darf. Für jede Aussage $A$, in der die Glieder von $\underline{v}$ nicht vorkommen, gilt in jedem Kontext

$$\exists \underline{u}\, A \;\leftrightarrow\; \exists \underline{v}\, A^{\underline{u}}_{\underline{v}} \quad \text{und} \quad \forall \underline{u}\, A \;\leftrightarrow\; \forall \underline{v}\, A^{\underline{u}}_{\underline{v}}.$$

**Beweis:** $\delta$ hat die Form $(\delta_1, \ldots, \delta_k)$, wobei $\delta_i$ eine singuläre Denotation von $u_i$ ist $(i = 1, \ldots, k)$. Ferner sei $\delta' \rightleftharpoons (\delta_1, \ldots, \delta_k, \delta_1[u_1/v_1], \ldots, \delta_k[u_k/v_k])$. Dann gilt $u_i = v_i$ in $\delta'$ und daher $A \leftrightarrow A\frac{\underline{u}}{\underline{v}}$ in jedem Kontext, in dem $\delta'$ für $\underline{u}, \underline{v}$ gültig ist. Nun kann man R22 - R25 und R14 anwenden. [Denn im primären Spiel ist es in keinem Kontext verboten (gewesen), singuläre Komponenten von $\delta'$ zu vollziehen.]

Der folgende Satz 5.3 soll zur Rechtfertigung des klassischen Aussagengebrauchs in §6 beitragen. Dazu bilden wir für jede der bisherigen Aussagen $B$ die neuen Aussagen $+B$ und $- + B$, und stellen folgende Regeln auf:

P(+) $\qquad \natural + B \Longrightarrow \natural B,$
P(+, −) $\qquad \natural + B,\ \natural - +B \Rightarrow \natural \bot$

als interne Regeln, sowie

$\mathrm{P_{ext}}(-)$ $\qquad \natural - +B \Longrightarrow B$ ist widerlegt

als externe Regel. Deren rechte Seite ist damit äquivalent, dass $+B$ widerlegt ist, und zwar nach den internen Regeln mit Ausnahme von P(+, −). - Analog zum Beweis von 3.4 (mit $+B$ statt $E$) ergibt sich nun, dass man im primären Spiel $\neg\neg + B$ erst dann behaupten darf, wenn $B$ behauptet worden ist. Somit erhalten wir insbesondere:

**5.3. Satz:** $E_1, \ldots, E_n$ seien Elementaraussagen mit $n \geq 1$. Dann sollte man im primären Spiel $\neg\neg + \exists \underline{u}\, (E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ in einem Kontext $\delta$ nur dann behaupten, wenn für eine Denotation $\gamma$ von $\underline{u}$ schon $E_1, \ldots, E_n$ in $\gamma\delta$ begründet gewesen sind.

Zwar darf man im primären Spiel auch die Regel $B \Rightarrow +B$ (die Umkehrung von P(+)) anwenden. Dies ist aber nur der externen Regel $\mathrm{P_{ext}}(-)$ zu verdankten. Dementsprechend ist die Regel $B \Rightarrow +B$ nicht klassisch zulässig (wie das Beispiel $B \equiv A \vee \neg A$ zeigt), und man darf $B \rightarrow +B$ i.allg. nicht behaupten.

## Womit wir hätten beginnen müssen

Schon in §1 haben wir darauf hingewiesen, dass die Behauptungsregeln für komplexe Aussagen nur insofern umkehrbar sind (vgl. Inversionsregeln), als diese Aussagen *eindeutig* in ihre Komponenten (ggf. Teilaussagen) zerlegbar sind. Weitere 'syntaktische' Formeleigenschaften, die Substitutionen betreffen, haben wir in §2 stillschweigend benutzt, um z.B. in den Zulässigkeitsbeweisen für die Regeln R1 - R3 zu 'Widersprüchen' der Form $F^*, \neg F^*$ zu gelangen. Eine diese Eigenschaften lautet: Für jede Substitution $*$ von Einsetzungsvariablen durch Werte derselben gilt im Falle $F \equiv G$ auch $F^* \equiv G^*$. Hierbei dienen die Buchstaben $F, G$ als *Gegenstandsvariable* für Vorkommnisse von Formeln an beliebigen Stellen - auch außerhalb solcher 'Gleichungen'. - Um derartige syntaktische Formeleigenschaften für alle Formeln von $\mathcal{L}$ beweisen zu können, muss man vor allem die gestaltliche Gleichheit von (Schreib-)Figuren ('Zeichenreihen') untersuchen. Sie kann in gleicher Weise eingeführt werden wie die Gleichheit in $\mathbb{N}$ (s. §4) oder nach dem Vorbild von [6, §5, §9]. Dabei und in den anschließenden Untersuchungen hat man jedoch *Gegenstandsvariable* für Vorkommnisse von Figuren zu verwenden. - Wir verzichten auf den Nachweis der erwähnten Formeleigenschaften, skizzieren aber die Einführung der Figurengleichheit, die wir dazu in die Objektsprache verlagern (wobei wir dennoch das Zeichen "$\equiv$" beibehalten):

Unter einem 'Buchstaben' bzw. einem 'Wort' verstehen wir hier ein *Vorkommnis* einer zusammenhängenden 'atomaren' Figur bzw. einer Reihe solcher atomaren Figuren, das an einer bestimmten Stelle aufgeschrieben ist. Buchstaben zählen wir zu den Worten. $a_1^\circ, \ldots, a_k^\circ$ seien Eigennamen verschiedener gegebener 'Originalbuchstaben'. Kopien von Originalbuchstaben seien diejenigen Buchstaben, die je einem Originalbuchstaben gestaltlich gleichen. Als Gegenstandsvariable verwenden wir jetzt

| | | |
|---|---|---|
| $a, b$ | für | Kopien von Originalbuchstaben |
| $t, u, v, w$ | für | Worte aus Kopien von Originalbuchstaben. |
| $v \equiv^\circ a_i^\circ$ | heiße: | $v$ ist gestaltlich gleich $a_i^\circ$ $\quad (i = 1, \ldots, k)$ |
| $v = ta$ | heiße: | $v$ besteht aus $t$ und $a$ in dieser Reihenfolge. |

Wir nehmen an, dass wir über Verfahren verfügen, nach denen man für jede Aussage der Form $v \equiv^\circ a_i^\circ$ oder $v = ta$ jeweils entscheiden kann, ob sie behauptet werden darf.

Wie in §4 können wir eine Folge von Relationen $(\equiv_m)$ einführen, indem wir folgende Behauptungsregeln aufstellen:

$$\begin{aligned} \natural\, v \equiv_0 w \quad &\Longrightarrow \quad \natural\, (v \equiv^\circ a_1^\circ \ \wedge\ w \equiv^\circ a_1^\circ) \ \vee\ \ldots\ \vee\ (v \equiv^\circ a_k^\circ \ \wedge\ w \equiv^\circ a_k^\circ) \\ \natural\, v \equiv_{n+1} w \quad &\Longrightarrow \quad \natural\, \exists t, a, u, b\, (v = ta \ \wedge\ w = ub \ \wedge\ t \equiv_n u \ \wedge\ a \equiv_0 b). \end{aligned}$$

Diese Regeln sind umkehrbar, da keine weiteren Behauptungsregeln für Aussagen der Form $v \equiv_m w$ aufgestellt werden sollen. - Schließlich definieren wir

$$v \equiv w \ \rightleftharpoons\ \exists \kappa \in \mathbb{N}.\, v \equiv_\kappa w \ \rightleftharpoons\ \exists \kappa\, (\kappa \in \mathbb{N} \ \wedge\ v \equiv_\kappa w).$$

Die oben erwähnten syntaktischen Formeleigenschaften betreffen vor allem die gestaltliche Gleichheit von Bestandteilen der Objektsprache. Zu deren Untersuchung benötigt man nur endlich viele metasprachliche Aussagen, deren Längen und Komplexität somit insgesamt beschränkt sind. Daher erübrigt sich eine vorherige allgemeine Metametatheorie über die syntaktischen Eigenschaften der heranzuziehenden Metasprache.

# §6. Wozu können Behauptungen im klassischen Spiel dienen?

Das **klassische Spiel** sei das Behauptungsspiel, in dem eine Aussage $A$ von $\mathcal{L}$ genau dann behauptet werden darf, wenn $\neg\neg A$ im primären Spiel behauptet werden darf.

Die Regeln R1 - R29 (s. §2 und §3) einschließlich $\neg\neg A \Rightarrow A$ und analoge Regeln für Aussagen, in denen Gegenstandsvariable vorkommen, sind auch im klassischen Spiel zulässig. Danach dürfen wir in diesem Spiel die klassische Logik anwenden. - Wir stellen nun Zwecke zusammen, denen Behauptungen verschiedenartiger Aussagen im klassischen Spiel dienen können, und zeigen, dass beim Übergang vom primären zum klassischen Spiel nur entbehrliche sprachliche Mittel fortfallen.

Nach dem Satz 3.4 (der auch für Elementaraussagen $E$ mit Gegenstandsvariablen gilt), darf die Regel

$$\natural\, E \implies \text{Beg.}E$$

im klassischen Spiel nicht verletzt werden. Daher kann auch die 'klassische' Behauptung von $E$ dem Hörer oder Leser als Ersatz für eine unmittelbare Kenntnis einer Begründung von $E$ dienen, also etwa als Ersatz für eine Wahrnehmung oder Beobachtung oder das Resultat einer Untersuchung von Gegenständen.

Nach R01 und R03 haben im klassischen Spiel die Regeln

$$\begin{array}{rcl} A,\ A \to B & \Rightarrow & B \\ \forall \underline{x}\, A\underline{x} & \Rightarrow & A\underline{r} \quad \text{(für Werte } \underline{r} \text{ von } \underline{x}\text{)} \end{array}$$

die Eigenschaft, dass ihre Prämissen erst dann behauptet werden dürfen, wenn die zugehörige Konklusion ebenfalls schon behauptet werden darf. Somit gilt für das klassische Spiel:

$\natural\,(A \to B)$ kann dem Adressaten als die Empfehlung dienen, bei 'Bedarf' $B$ dann zu behaupten (evtl. nur sich selbst gegenüber), wenn $A$ behauptet werden darf.

$\natural\,\forall \underline{x}\, A\underline{x}$ kann für 'beliebig viele' Werte $\underline{r}$ von $\underline{x}$ als Ersatz für $\natural\, A\underline{r}$ dienen.

Dementsprechend kann $\natural\,\forall \underline{u}\, A|\delta$ als Ersatz für $\natural\, A|\gamma\delta$ dienen, und zwar für beliebige Denotationen $\gamma$ von $\underline{u}$.

Die Konjunktion ermöglicht übersichtlichere Notationen, z.B. $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \to B$ für $A_1 \to [A_2 \to (A_3 \to B)]$.

Im primären Spiel kann die Behauptung einer Adjunktion $A \vee B$ durch die kürzere Behauptung $\natural\, A$ oder $\natural\, B$ ersetzt werden. Die Behauptung einer Einsaussage $\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ ist in diesem Spiel ebenfalls entbehrlich, da sie durch die Behauptung von $A\underline{r}$ - für einen Wert $\underline{r}$ von $\underline{x}$ - ersetzt werden kann. Es schadet also nichts, dass Gesamtaussagen dieser Formen beim Übergang vom primären zum klassischen Spiel als ihre doppelten Negate zu interpretieren sind.

Das soeben für $\exists \underline{x}\, A\underline{x}$ Gesagte gilt jedoch nicht für Aussagen der Form $\exists \underline{u}\, A$ mit Gegenstandsvariablen $\underline{u}$; denn Aussagen $A$, in denen Gegenstandsvariable (Indikatoren) frei vorkommen, dürfen i.Allg. nur in bestimmten Situationen behauptet werden. Viele empirisch erhaltene Daten können aber in 'situationsunabhängigen' Aussagen der Form $\exists \underline{u}\,(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ zusammengefasst werden. Daher haben wir den Satz 5.3 angeführt, nach dem wir auch der *klassischen* Behauptung von $+\exists \underline{u}\,(E_1 \wedge \ldots \wedge E_n)$ entnehmen können, dass die Aussagen $E_1, \ldots, E_n$ für eine Denotation von $\underline{u}$ begründet gewesen sind. Dies zeigt, inwieweit der klassische Aussagengebrauch ausreicht, um über empirische Daten zu berichten.

Von konstruktivistischer und intuitionistischer Seite werden z.B. für Aussagen der Form $\forall x \in K.\, \exists y\, A(x, y)$ *direkte* Beweise verlangt, bei denen je ein 'Lösungsverfahren' $V$ angegeben und gezeigt wird, dass man mittels $V$ zu jedem $x \in K$ ein $y$ mit $A(x, y)$ finden 'kann'. Am Ende von §4 haben wir gezeigt, dass dieses Beweis-Resultat - für klassisch zu verstehende $A(x, y)$ - ggf. in der Form (**) wiedergegeben werden kann. (Zur Formulierung von (**) ist allerdings die vorher benutzte Sprache i.Allg. durch die Aufnahme der Formel $V : x \mapsto y$ zu erweitern.) - Eine Verallgemeinerung des zu diesem Thema Gesagten muss noch ausgearbeitet werden.

Der im klassischen Spiel verfügbare Kalkül der klassischen Logik ermöglicht es in manchen Fällen, Argumentationen, insbesondere mathematische Beweise zu vereinfachen. Dies sollte jedoch nicht überbewertet werden, da ein direkter Beweis für eine Existenzaussage i.Allg. mehr 'Informationen' liefert als ein indirekter Beweis. Andererseits kann - wie gesagt - das Ergebnis eines direkten Beweises für die Praxis auch mit klassischen Mitteln formuliert werden. - Für Zwecke, die hier nicht berücksichtigt worden sind, könnte allerdings ein stärker eingeschränkter Gebrauch von Behauptungen geeigneter als der klassische Gebrauch sein.

## Behauptungen unter Hypothesen

In der Alltagssprache und in empirischen Wissenschaften argumentiert man notgedrungen noch 'liberaler' als in unserem klassischen Spiel. Dabei verwendet man allgemeine Hypothesen oder Vermutungen, die jedoch oft nicht einmal genannt werden. Ist $H$ die Gesamthypothese, d.h. die Konjunktion aller aktuellen Hypothesen, so liegt es nahe,

(H) $\qquad B \quad$ als Abkürzung für $\quad H \rightarrow B$

zu verwenden. Zulässige Schlussregeln bleiben dabei zulässig; denn (wie leicht zu zeigen ist) gilt Folgendes im klassischen Spiel:

Für jede zulässige Schlussregel $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; \mathcal{B}$ ist auch
$H \rightarrow \mathcal{A}_1,\, \ldots,\, H \rightarrow \mathcal{A}_n \;\Rightarrow\; H \rightarrow \mathcal{B}$ zulässig.

Hierbei stehen $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}$ für Aussageschemata, in denen Metavariable für Aussagen, Formeln, Konstante, Einsetzungsvariable, Gegenstandsvariable oder Terme vorkommen dürfen. Das Abkürzungsschema (H) wird jedoch ungeeignet, sobald $H$ widerlegt worden ist. Bei der Verwendung (wahrscheinlich) falscher Hypothesen (z.B.

Vereinfachungen von Vermutungen) könnte man, falls keine Missverständnisse zu befürchten sind, besser

$$B \quad \text{als Abkürzung für} \quad H \wedge T \prec B$$

benutzen. Diese Aussage bedeute, dass $B$ nach den Schlussregeln der klassischen *Logik* aus $H$ und bestimmten 'Tatsachen' $T$ (d.h. bereits behaupteten Aussagen aus einer bestimmten Klasse) herleitbar ist (vgl. z.B. [8, p. 111]).

Gelegentlich sind wir z.B. davon überzeugt, dass wir nach Ausführung einer bestimmten Handlung $a$ und im Verlauf einer anschließenden Zeitspanne $\sigma$ einen bestimmten Zweck $e_1$ *oder* einen bestimmten anderen Zweck $e_2$ erreichen würden. Wir zeigen, dass es dann zu empfehlen ist, so zu handeln, als ob die entsprechende Hypothese $\forall\tau\,(A^{\tau-\sigma} \to +(E_1^\tau \vee E_2^\tau))$ (mit $\tau$ für Zeitpunkte) im klassischen Spiel behauptet werden darf. In diesem Spiel gilt nach dieser Hypothese: Falls $A^{\tau-\sigma}$ behauptet werden darf, dann darf $+(E_1^\tau \vee E_2^\tau)$ ebenfalls behauptet werden; dazu muss aber (nach einem zu 5.3 analogen Satz) schon $E_1^\tau$ oder $E_2^\tau$ begründet sein. (Diese Begründungen werden also nach der genannten Hypothese 'vorweggenommen', falls $A^{\tau-\sigma}$ schon früher als $\tau$ behauptet wird.)

# §7. Sprachen höherer Stufen

Nun soll gezeigt werden, dass sich das primäre und das klassische Spiel auch auf Aussagen höherer Stufen fortsetzen lassen, und dass man auch mit diesen Aussagen klassisch argumentieren darf. Dazu konstruieren wir ein 'Modell' für eine Art verzweigter Typentheorie (vgl. z.B. [6], [10], [12], [15]). Als Schichten- oder Stufenzahlen lassen wir auch transfinite Ordnungszahlen zu.

Für die 'konstruktive' oder 'prädikative Analysis' nach dem Vorbild von [7] reichen allerdings solche reelle Zahlen aus, die darstellbar sind durch rationale Cauchyfolgen 1. Stufe. Im Bereich dieser reellen Zahlen konvergiert jede reelle Cauchyfolge, *die darstellbar ist durch eine entsprechende rationale Doppelfolge 1. Stufe.* Dementsprechend kann man 'konstruktive Analysis' bereits in Sprachen niedriger Stufen treiben. (Dazu eigenen sich solche Funktionen $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^j$, für die stets $f \circ (\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ eine reelle Folge *der erwähnten Art* ist, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ *derartige* Folgen mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)\colon \mathbb{N} \to A$ sind.)

Eingeführt seien schon gewisse Elementarformeln sowie Variable und Terme, die in ihnen vorkommen. Damit seien auch folgende Figurenmengen eingeführt:

$\mathcal{V}_0$ = Menge aller Variablen 0. Stufe,
$\mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$ = Menge aller 'Originalterme' (0. Stufe),
$\mathcal{E}$ = Menge aller Elementarformeln.

("aller" heiße dabei "aller in Betracht zu ziehenden".) Es gelte $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$. $\mathcal{V}_0$ darf

Variable verschiedener Sorten enthalten, und enthalte für jede dieser Sorten (abzählbar-)unendlich viele Variable. (Zu "endlich/unendlich" s. z.B. [8, p.167f.].) Konstante (bzw. Aussagen) seien Terme (bzw. Formeln), in denen keine Variablen frei vorkommen. Ferner sei

$\mathcal{C}_0$ = Menge aller Konstanten 0. Stufe ($\subset \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$).

Für $w \in \mathcal{V}_0$ sei $\mathcal{C}(w) \subseteq \mathcal{C}_0$ die Menge aller Werte von $w$. Zwei Variable $w, x \in \mathcal{V}_0$ seien genau dann von gleicher Sorte, wenn $\mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(x)$. - Alle bisher erwähnten Mengen seien entscheidbar. - Wir verwenden also u.a. $\in, \subset, \subseteq$ sowie $\underline{\wedge}$, $\underline{\vee}$, $\underline{\rightarrow}$, $\underline{\leftrightarrow}$, $\underline{\forall}$ und $\underline{\exists}$ als metasprachliche Partikeln. An Stelle von $\underline{\wedge}$ schreiben wir gelegentlich das Komma.

Für die Metasprache setzen wir damit auch gewisse *mengensprachliche* Partikeln als bekannt voraus. Die in den folgenden Untersuchungen tatsächlich benutzten einzelnen metasprachlichen Aussagen sind jedoch nur von sehr geringer Komplexität, sodass sie mit keinen Problemen (z.B. dem der Zirkelfreiheit) verbunden sind, die wir für die aufzubauende Objektsprache erst lösen wollen.

$\Phi$ sei jetzt ein beliebiges Element von $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}} \cup \mathcal{E}$. Wir definieren:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_0(\Phi) & \rightleftharpoons & \text{Menge aller in } \Phi \text{ (frei) vorkommenden Variablen.} \\ * \in \mathcal{S}_0(\Phi) & \rightleftharpoons & * \text{ ist eine Substitution der Variablen } w \text{ aus } \mathcal{V}_0(\Phi) \text{ durch} \\ & & \text{Werte } w^* \text{ derselben - also mit } \underline{\forall}\, w \in \mathcal{V}_0(\Phi).\, w^* \in \mathcal{C}(w). \\ \mathcal{T}(w) & \rightleftharpoons & \{r \in \mathcal{T}_{\mathrm{Or}} : \underline{\forall} * \in \mathcal{S}_0(r).\, r^* \in \mathcal{C}(w)\} \quad \text{für} \quad w \in \mathcal{V}_0. \end{array}$$

Also ist $\mathcal{T}(w) \cap \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(w)$ für $w \in \mathcal{V}_0$.

$(\Omega, <)$ sei eine schon eingeführte geordnete Menge, welche $\mathbb{N}$ in der üblichen Reihenfolge als Anfangsstück enthält und (wenigstens die im Folgenden durchgeführten) Anwendungen der (ggf. transfiniten) Induktion gestattet. Die Elemente von $\Omega$ nennen wir Ordnungszahlen. $\Omega$ enthalte mit jedem Element $k$ den Nachfolger $k\mathrm{I}$ (wir schreiben auch $k+1$). Für je zwei Elemente $k, l \in \Omega$ sei entscheidbar, ob $k < l$ gilt. Ferner sei für jedes $k \in \Omega$ entscheidbar, ob $k$ eine Limeszahl (d.h. $> 0$ und kein Nachfolger) ist. Die Gleichheit ($=$) in $\Omega$ sei die gestaltliche Gleichheit ($\equiv$). Beispiele für $\Omega$ sind $\mathbb{N}$ sowie die Menge aller Ordnungszahlen der Gestalt $\omega^k \cdot n_k + \omega^{k-1} \cdot n_{k-1} + \ldots + \omega \cdot n_1 + n_0$ mit $k, n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n_k > 0$ für $k > 0$. Dabei ist $\omega \cdot 1 + 0$ die kleinste Limeszahl, und eine Nachfolgerzahl liegt genau im Falle $n_0 > 0$ vor.

Wir schreiben $i, j$ für beliebige Elemente von $\mathbb{N}^+ \rightleftharpoons \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $k, l, m, n$ für beliebige Elemente von $\Omega$. $\mathcal{V}_0$ enthalte abzählbar-unendlich viele Variable für die Elemente von $\Omega$. Zur Mitteilung beliebiger dieser Variablen verwenden wir $\lambda, \mu, \nu$. Es ist also $\mathcal{C}(\mu) = \Omega$. $\mathcal{T}(\Omega) \rightleftharpoons \mathcal{T}(\mu)$ enthalte außer den Elementen von $\Omega$ und den Variablen für diese Elemente (nur) noch die Terme der Gestalt $\mu\mathrm{I}, \mu\mathrm{II}, \mu\mathrm{III}, \ldots$. Die Gleichungen $(q = r)$ und Ungleichungen $(q < r)$ mit Elementen $q, r$ von $\mathcal{T}(\Omega)$ zählen wir zu $\mathcal{E}$. (Wir lassen zu, dass auch Formeln der Gestalt $(s \in \mathbb{N})$ und $(s \in \Omega)$ mit geeigneten Termen $s, t$ zu $\mathcal{E}$ gehören.) - $\mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ sei analog zu $\mathcal{T}(\Omega)$ eingeführt.

Für Terme aus $\mathcal{T}_{\rm Or}$ und Elementaraussagen sei ferner Folgendes vorausgesetzt:

**V1:** $s \in \mathcal{T}_{\rm Or},\ w \in \mathcal{V}_0,\ r \in \mathcal{T}(w) \ \underline{\rightarrow}\ s^w_r \in \mathcal{T}_{\rm Or}$. ($s^w_r$ sei wie in §2 definiert.)
**V2:** $E \in \mathcal{E},\ w \in \mathcal{V}_0,\ r \in \mathcal{T}(w) \ \underline{\rightarrow}\ E^w_r \in \mathcal{E}$.

Wir werden weitere Mengen $\mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ und $\mathcal{F}_n$ für $n \in \Omega$ einführen:
$\mathcal{T}_n$ = Menge aller 'einfachen' Terme $n$. Stufe,
$\overline{\mathcal{T}}_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^+} \mathcal{T}^j_n \cup \overline{\mathcal{V}}$ (mit einer Menge $\overline{\mathcal{V}}$ von Variablen (s.u.))
$\mathcal{F}_n$ = Menge aller Formeln $n$. Stufe.
Wir setzen
$\mathcal{T} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\Omega} \mathcal{T}_n; \quad \overline{\mathcal{T}} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\Omega} \overline{\mathcal{T}}_n.$
Dementsprechend sei $\mathcal{C}_n$, $\overline{\mathcal{C}}_n$, $\mathcal{C}$ bzw. $\overline{\mathcal{C}}$ die Menge aller *Konstanten* aus $\mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$, $\mathcal{T}$ bzw. $\overline{\mathcal{T}}$. Somit ist $\overline{\mathcal{C}}_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^+} \mathcal{C}^j_n$.

Zur angekündigten Einführung von $\mathcal{T}_n$ und $\overline{\mathcal{T}}_n$ setzen wir voraus, dass bereits (je abzählbar unendlich viele) weitere Variable zweier Sorten zur Verfügung stehen, die wir als (Einsetzungs-) Variable für Elemente von $\mathcal{C}$ bzw. $\overline{\mathcal{C}}$ (also für Konstante beliebiger Stufen) verwenden werden. Diese Variablen mögen weder in den Termen aus $\mathcal{T}_{\rm Or}$ noch in den Formeln aus $\mathcal{E}$ vorkommen. Sei
$\mathcal{V}$ = Menge aller Variablen für Elemente von $\mathcal{C}$,
$\overline{\mathcal{V}}$ = Menge aller Variabeln für Elemente von $\overline{\mathcal{C}}$,
$\mathcal{W} \rightleftharpoons \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}; \quad \overline{\mathcal{W}} \rightleftharpoons \mathcal{W} \cup \overline{\mathcal{V}}.$
Dabei sei $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V} = \emptyset$, $\mathcal{V}_0 \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$ und $\mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}} = \emptyset$. Ferner sei
$\mathcal{A}_n$ = Menge aller Aussagen $n$. Stufe ($\subset \mathcal{F}_n$).
Wir schreiben kurz $\underline{s}$ bzw. $(\underline{s})$ für Listen $s_1, \ldots, s_j$ bzw. Tupel $(s_1, \ldots, s_j)$ von einfachen Termen $s_i$. Ferner schreiben wir z.B. $s_1, \ldots, s_j \in \mathcal{T}_n$ statt $(s_1, \ldots, s_j) \in \mathcal{T}^j_n$.

Für beliebige Variable (aus $\overline{\mathcal{W}}$) schreiben wir $w, x, y, z, x_1, x_2, \ldots$ . Speziell für Variable aus $\overline{\mathcal{V}}$ schreiben wir auch $\overline{x}, \ldots$ . Verschieden bezeichnete Variable seien jeweils verschieden. Dementsprechend verstehen wir unter einer Liste $\underline{x}$ von Variablen stets eine Liste von verschiedenen Variablen. ("$\underline{x}$" ist von "$\overline{x}$" zu unterscheiden.)

Zunächst betrachten wir nur den Fall, dass in den Originaltermen und den Elementarformeln (und daher auch in den Termen und Formeln beliebiger Stufen) keine Gegenstandsvariablen vorkommen.

**Induktive Definitionen von $\mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ und $\mathcal{F}_n$ ($n \in \Omega$):**
(Meta-) Aussagen der Formen ($s \in \mathcal{T}_n$), ($s \in \overline{\mathcal{T}}_n$) und ($F \in \mathcal{F}_n$) seien durch deren Herleitungen nach den folgenden '$\mathcal{T}, \mathcal{F}$-Regeln' zu begründen. (Dabei bezeichne $\Rightarrow$ die erlaubten Herleitungsschritte, und hinter dem Worte "falls" stehen ggf. die zugehörigen 'Anwendungsbedingungen'.)

$$
\begin{array}{rcll}
 & \Rightarrow & s \in \mathcal{T}_n & (\text{falls } s \in \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}) \\
 & \Rightarrow & z \in \mathcal{T}_n & (\text{falls } z \in \mathcal{V}) \\
F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & \{\overline{x}\,\varepsilon\,\overline{C}_m \colon F\} \in \mathcal{T}_n & (\text{falls } m < n) \\
F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (\mathrm{J}\overline{x}\,\varepsilon\,\overline{C}_m, \mu, z \colon F)(q) \in \mathcal{T}_n & (\text{falls } m < n,\ z \in \mathcal{V},\ q \in \mathcal{T}(\Omega)\,) \\
 & \Rightarrow & \overline{x} \in \overline{\mathcal{T}}_n & \\
s_1, \ldots, s_j \in \mathcal{T}_n & \Rightarrow & (s_1, \ldots, s_j) \in \overline{\mathcal{T}}_n & \\
 & \Rightarrow & E \in \mathcal{F}_n & (\text{falls } E \in \mathcal{E}) \\
F, G \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (F \wedge G), (F \vee G) \in \mathcal{F}_n & (\text{zwei Regeln}) \\
F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (\neg F) \in \mathcal{F}_n & \\
F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (\exists x\,\varepsilon\,C_m.\, F) \in \mathcal{F}_n & (\text{falls } m < n,\ x \in \mathcal{W}) \\
s \in \overline{\mathcal{T}}_n,\ t \in \mathcal{T}_n & \Rightarrow & (s\,\varepsilon\,t) \in \mathcal{F}_n & \\
t \in \mathcal{T}_n,\ F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (\exists \overline{x}\,\varepsilon\,t.\, F) \in \mathcal{F}_n & \\
s \in \overline{\mathcal{T}}_n,\ F \in \mathcal{F}_n & \Rightarrow & (\exists x\,\varepsilon\,\pi_m(s,p).\, F) \in \mathcal{F}_n & (\text{falls } m < n,\ x \in \mathcal{V},\ p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)) \\
s, t \in \mathcal{T}_n & \Rightarrow & (s =_0 t) \in \mathcal{F}_n & \\
s \in \overline{\mathcal{T}}_n & \Rightarrow & (s\,\varepsilon\,C^p_q) \in \mathcal{F}_n & (\text{falls } p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+),\ q \in \mathcal{T}(\Omega)).
\end{array}
$$

Somit ist insbesondere $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_{\mathrm{Or}} \cup \mathcal{V}$; ferner ist $\mathcal{T} \cap \overline{\mathcal{T}} = \emptyset$. - Wir schreiben $p$ bzw. $q$ für beliebige Elemente aus $\mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ bzw. $\mathcal{T}(\Omega)$, $r, s, t$ für beliebige Terme (d.h. Elemente von $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}}$), $F, G, H$ für beliebige Formeln (d.h. Elemente von $\mathcal{F} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\Omega} \mathcal{F}_n$), $a, b, c, d$ für beliebige Konstante (d.h. Elemente von $\mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{C}}$), $A, B$ für beliebige Aussagen (d.h. Elemente von $\mathcal{A} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\Omega} \mathcal{A}_n$) und z.B. $A(x_1, \ldots, x_j)$ für Formeln, in denen höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_j$ frei vorkommen. - Für $j \in \mathbb{N}^+$ und $m \in \Omega$ werden wir $C^j_m$ als objektsprachliches Zeichen für $\mathcal{C}^j_m$ verwenden. Es ist jedoch (wie auch $C_m$ und $\overline{C}_m$) keine Konstante. Allgemeiner sind Figuren der Gestalt $C^p_q$ - sowie $\pi_m(s,p)$ keine Terme. - Mit Hilfe von Termen der Gestalt $(\mathrm{J}\overline{x}\ \varepsilon\ \overline{C}_m, \mu, z :\ A(\overline{x}, \mu, z))(\nu)$ werden wir 'Relationenfolgen' darstellen können. (J: 'Induktionsoperator', vgl. §4.) Die Formeln der Gestalten $(\exists \overline{x}\,\varepsilon\,t.\, F)$, $(s =_0 t)$, $(s \in C^p_q)$ und $(\exists x\ \varepsilon\ \pi_m(s,p).\, F)$ werden uns zur Definition von 'Gleichheitsrelationen' auf $\mathcal{C}$ und auf $\overline{\mathcal{C}}$ dienen. - *Gebundene* Vorkommnisse von Variablen seien $x$ in $(\exists x\,\varepsilon\,C_m.\, F)$ und in $(\exists x\ \varepsilon\ \pi_m(s,p).\ F)$, $\overline{x}$ in $\{\overline{x}\ \varepsilon\ \overline{C}_m :\ F\}$ und in $(\exists \overline{x}\ \varepsilon\ t.\ F)$ sowie $\overline{x}, \mu, z$ in $(\mathrm{J}\overline{x}\ \varepsilon\ C_m, \mu, z :\ F)$. Alle weiteren Vorkommnisse von Variablen in Formeln oder Termen seien *frei*, d.h. nicht gebunden. - Klammern in (oder 'um') Formeln werden wir gelegentlich fortlassen.

Um Behauptungsregeln für die Aussagen aus $\mathcal{A}$ übersichtlich formulieren zu können, benutzen wir einige **Definitionen**:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{C}_m(x) & \rightleftharpoons & \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{C}(x) & \text{für } \ x \in \mathcal{V}_0 \\ \mathcal{C}_m & \text{für } \ x \in \mathcal{V} \\ \overline{\mathcal{C}}_m & \text{für } \ x \in \overline{\mathcal{V}} \end{array} \right. \\
(c_1, \ldots, c_j) \in \mathcal{C}_m(x_1, \ldots, x_k) & \rightleftharpoons & j = k \ \underline{\wedge}\ \underline{\forall} i \leq j.\ c_i \in \mathcal{C}_m(x_i).
\end{array}
$$

Für $\Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}$ und $\mathcal{U} \in \{\mathcal{V}_0, \mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}\}$ sei

$$\mathcal{U}(\Phi) \rightleftharpoons \text{Menge aller in } \Phi \text{ frei vorkommenden Variablen aus } \mathcal{U}.$$

Ein Term $s$ bzw. eine Formel $F$ heiße *invariant* bezüglich einer Äquivalenzrelation $(\approx)$ auf $\mathcal{C}_n$, wenn (etwas vorausgreifend formuliert) für alle $\underline{c}, \underline{d} \in \mathcal{C}_n(\underline{w})$ mit $\{\underline{w}\} = \{w_1, \ldots, w_j\} = \overline{\mathcal{W}}(s)$ bzw. $\overline{\mathcal{W}}(F)$ (und für Substitutionen $\frac{\underline{w}}{\underline{c}}$ und $\frac{\underline{w}}{\underline{d}}$ wie in §2) gilt:

$$\begin{array}{lll} \underline{c} \approx \underline{d} & \to & s\frac{\underline{w}}{\underline{c}} \approx s\frac{\underline{w}}{\underline{d}} \qquad \text{bzw.} \\ \underline{c} \approx \underline{d} & \to & (F\frac{\underline{w}}{\underline{c}} \leftrightarrow F\frac{\underline{w}}{\underline{d}}). \end{array}$$

Dabei sei: $\quad (\underline{c}) \approx (\underline{d}) \;\rightleftharpoons\; \underline{c} \approx \underline{d} \;\rightleftharpoons\; c_1 \approx d_1 \wedge \ldots \wedge c_j \approx d_j.$

**Voraussetzung:** $(\approx_0)$ sei eine (bereits eingeführte) Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}_0$, bezüglich der alle Elemente von $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$ und alle Elementarformeln invariant sind. Für jedes $w \in \mathcal{V}_0$ sei der Wertebereich $\mathcal{C}(w)$ invariant, d.h. für alle $c, d$ mit $c \approx_0 d$ und $c \in \mathcal{C}(w)$ gelte auch $d \in \mathcal{C}(w)$. - Für $k, l \in \Omega$ gelte: $k \approx_0 l \leftrightarrow k = l$.

Für Elementaraussagen (aus $\mathcal{E}$) mögen bereits bestimmte Konventionen zur Einschränkung von deren Behauptungen gelten. Für weitere Aussagen stellen wir u.a. folgende (interne) *Behauptungsregeln* auf:

$$\begin{array}{rcl} \natural\,(A \wedge B) & \Longrightarrow & \natural\,A \text{ und } \natural\,B \\ \natural\,(A \vee B) & \Longrightarrow & \natural\,A \text{ oder } \natural\,B \\ \natural\,\neg A & \Longrightarrow & A \text{ widerlegt (vgl. §1)} \\ \natural\,\exists x\,\varepsilon\,C_m.\,A(x) & \Longrightarrow & \text{für ein } c: \ \natural\,c \in \mathcal{C}_m(x),\ \natural\,A(c) \\ \natural\,c\,\varepsilon\,\{\overline{x}\,\varepsilon\,\overline{C}_m\colon A(\overline{x})\} & \Longrightarrow & \natural\,c \in \overline{\mathcal{C}}_m,\ \natural\,A(c), \end{array}$$

für $R(\nu) \rightleftharpoons (\mathrm{J}\overline{x}\,\varepsilon\,\overline{C}_m, \mu, z\colon A(\overline{x}, \mu, z))(\nu) \in \mathcal{T}$:

$$\begin{array}{rcl} \natural\,(\underline{c}, k)\,\varepsilon\,R(l) & \Longrightarrow & \natural\,(\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m,\ \natural\,k < l,\ \natural\,A((\underline{c}), k, R(k)) \\ \natural\,\exists \overline{x}\,\varepsilon\,b(\overline{x}).\,A(\overline{x}) & \Longrightarrow & \text{für ein } c: \ \natural\,c\,\varepsilon\,b(c),\ \natural\,A(c) \\ \natural\,\exists x\,\varepsilon\,\pi_m((c_1, \ldots, c_j), i).\,A(x) & \Longrightarrow & \natural\,c_i \in \mathcal{C}_m,\ \natural\,A(c_i) \qquad (\text{falls } i \leq j) \\ \natural\,\exists x\,\varepsilon\,\pi_m((c_1, \ldots, c_j), i).\,A(x) & \Longrightarrow & \natural\,\bot \qquad (\text{falls } i > j) \\ \natural\,\exists x\,\varepsilon\,\pi_m(s, i).\,A(x) & \Longrightarrow & \natural\,\bot \qquad (\text{falls } \mathcal{V}(s) = \{x\}) \\ \natural\,c =_0 d & \Longrightarrow & \natural\,c, d \in \mathcal{C}_0,\ \natural\,c \approx_0 d \\ \natural\,c\,\varepsilon\,C_m^j & \Longrightarrow & \natural\,c \in \mathcal{C}_m^j. \end{array}$$

Für $a \notin \mathcal{C}_m(\overline{x}, \mu)$ und $R(l)$ wie soeben gelte $(a\,\varepsilon\,R(l))$ als widerlegt, darf also nicht behauptet werden. Für $d \in \mathcal{C}_0$ gelte $(c\,\varepsilon\,d)$ ebenfalls als widerlegt. - Behauptungen von 'Hilfsaussagen' der Formen $(c \in \mathcal{C}_m(x))$, $(c \in \overline{\mathcal{C}}_m)$, $(k < l)$, $(c \in \mathcal{C}_m)$ und $(c \in \mathcal{C}_m^j)$ bedürfen selbstverständlich einer Begründung. - Behauptungen von Aussagen aus $\mathcal{A}$ werden keinen weiteren Einschränkungen unterworfen.

Um einsehen zu können, dass die aufgelisteten Behauptungsregeln *umkehrbar* sind, beweisen wir die *Zirkelfreiheit* aller Aussagen von $\mathcal{A}$. Dazu legen wir einen etwas liberalisierten Begriff der Zirkelfreiheit zugrunde:

**Definitionen:** Eine Aussage $C$ heiße ein *Vorgänger* von $D$, falls $C$ *aus* $D$ nach den folgenden Kalkülregeln in mindestens einem Schritt herleitbar ist. (Dabei bezeichne "$\Rightarrow$" wieder die erlaubten Herleitungsschritte):

$$\begin{array}{rcll} A \wedge B & \Rightarrow & A,\ B & \text{(zwei Regeln)} \\ A \vee B & \Rightarrow & A,\ B & \text{(zwei Regeln)} \\ \neg A & \Rightarrow & A & \\ \exists x \,\varepsilon\, C_m.\, A(x) & \Rightarrow & A(c), & \text{falls } c \in \mathcal{C}_m(x) \\ c \,\varepsilon\, \{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m : A(\overline{x})\} & \Rightarrow & A(c), & \text{falls } c \in \overline{\mathcal{C}}_m, \end{array}$$

für $R(\nu) \rightleftharpoons (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon A(\overline{x}, \mu, z))(\nu) \in \mathcal{T}$:

$$(\underline{c}, k) \,\varepsilon\, R(l) \quad \Rightarrow \quad A((\underline{c}), k, R(k)), \qquad \text{falls } (\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m \text{ und } k < l,$$

für Terme $b(\overline{x})$ der Gestalt $\{\overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_m \colon G\}$ bzw. $(\mathrm{J}\overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon G)(l)$:

$$\begin{array}{rcll} \exists\overline{x} \,\varepsilon\, b(\overline{x}).\, A(\overline{x}) & \Rightarrow & c \,\varepsilon\, b(c),\ A(c), & \text{falls } c \in \overline{\mathcal{C}}_m \text{ bzw. } \mathcal{C}_m(\overline{y}, \mu) \\ \exists x \,\varepsilon\, \pi_m((c_1, \ldots, c_j), i).\, A(x) & \Rightarrow & A(c_i), & \text{falls } i \leq j,\ c_i \in \mathcal{C}_m \\ c =_0 d & \Rightarrow & c \approx_0 d, & \text{falls } c, d \in \mathcal{C}_0. \end{array}$$

In jedem Einzelfall dieser Regeln heiße die Konklusion ein *unmittelbarer Vorgänger* - kurz: u.Vg. - ihrer Prämisse, allerdings ggf. nur unter der Voraussetzung, dass die hinter dem Worte "falls" stehenden 'Hilfsaussagen' zutreffen. Diese Hilfsaussagen werden jedoch nicht als Vorgänger betrachtet. Diejenigen Aussagen, die nicht als Prämissen von Einzelfällen dieser Regeln vorkommen, mögen keine Vorgänger haben.

Eine Aussage heiße *zirkelfrei*, wenn sie kein Vorgänger von sich selbst ist

Zum schon angekündigten Beweis der Zirkelfreiheit aller Aussagen benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Zunächst definieren wir

$$\mathcal{T}_n(w) \quad \rightleftharpoons \quad \begin{cases} \mathcal{T}(w) & \text{für } w \in \mathcal{V}_0 \\ \mathcal{T}_n & \text{für } w \in \mathcal{V} \\ \overline{\mathcal{T}}_n & \text{für } w \in \overline{\mathcal{V}}. \end{cases}$$

**Lemma 7.1:** $s \in \mathcal{T}_n,\ w \in \overline{\mathcal{W}},\ r \in \mathcal{T}_n(w) \ \underset{\rightarrow}{\rightharpoonup}\ s^w_r \in \mathcal{T}_n.$
$s \in \overline{\mathcal{T}}_n,\ w \in \overline{\mathcal{W}},\ r \in \mathcal{T}_n(w) \ \underset{\rightarrow}{\rightharpoonup}\ s^w_r \in \overline{\mathcal{T}}_n.$
$F \in \mathcal{F}_n,\ w \in \overline{\mathcal{W}},\ r \in \mathcal{T}_n(w) \ \underset{\rightarrow}{\rightharpoonup}\ F^w_r \in \mathcal{F}_n.$

**Ergänzung:** $w \in \overline{\mathcal{W}},\ r \in \mathcal{T}_n(w) \ \underset{\rightarrow}{\rightharpoonup}\ q^w_r \in \mathcal{T}(\Omega).$

**Beweis:** Sei $w \in \overline{\mathcal{W}}$, $r \in \mathcal{T}_n(w)$, und $*$ bezeichne die Substitution von $w$ durch $r$.
Zunächst zur *Ergänzung*: Generell vorausgesetzt ist: $q \in \mathcal{T}(\Omega)$. Für $w \notin \overline{\mathcal{W}}(q)$ ist $q^* \equiv q \in \mathcal{T}(\Omega)$. Nun sei $w \in \overline{\mathcal{W}}(q)$. Dann ist $q \in \{w, w\mathrm{I}, w\mathrm{II}, \ldots\}$ und $\mathcal{C}(w) = \Omega$, also $w \in \mathcal{V}_0$, $r \in \mathcal{T}_n(w) = \mathcal{T}(w) = \mathcal{T}(\Omega)$, also $r \in \Omega$ oder $r \in \{\mu, \mu\mathrm{I}, \mu\mathrm{II}, \ldots\}$ mit

$\mathcal{C}(\mu) = \Omega$. Daraus ergibt sich leicht: $q^* \in \mathcal{T}(\Omega)$.
Nun beweisen wir Lemma 7.1 durch Induktion nach den $\mathcal{T}, \mathcal{F}$-Regeln (d.h. über den Aufbau der Terme und Formeln): ("I.V." bedeute "Induktionsvoraussetzung".) Für beliebige Elemente $\Phi$ von $\mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ folgern wir $\Phi^* \in \mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ aus der

I.V.: $s^* \in \mathcal{T}_n$ bzw. $s^* \in \overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $F^* \in \mathcal{F}_n$ gilt für alle Terme $s$ und Formeln $F$, für die $(s \in \mathcal{T}_n)$ bzw. $(s \in \overline{\mathcal{T}}_n)$ bzw. $(F \in \mathcal{F}_n)$ nach den $\mathcal{T}, \mathcal{F}$-Regeln hergeleitet sein muss, bevor $(\Phi \in \mathcal{T}_n)$, $(\Phi \in \overline{\mathcal{T}}_n)$ oder $(\Phi \in \mathcal{F}_n)$ hergeleitet werden kann.

▷ Sei $\Phi \in \mathcal{T}_{\text{or}} \subset \mathcal{T}_n$. Für $w \in \mathcal{V}_0$ ist $r \in \mathcal{T}(w)$, also (nach **V1**) $\Phi^* \in \mathcal{T}_{\text{or}}$.
Für $w \notin \mathcal{V}_0$ kommt $w$ nicht in $\Phi$ vor; daher ist $\Phi^* \equiv \Phi \in \mathcal{T}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv z \in \mathcal{V} \subset \mathcal{T}_n$. Für $w \equiv z$ ist $z^* \equiv r \in \mathcal{T}_n(w) = \mathcal{T}_n$.
Für $w \not\equiv z$ ist $z^* \equiv z \in \mathcal{T}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon F)(q) \in \mathcal{T}_n$ mit $F \in \mathcal{F}_n$, $m < n$ und (I.V.) $F^* \in \mathcal{F}_n$.
Für $w \notin \{\overline{x}, \mu, z\}$ ist $\Phi^* \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon F^*)(q^*) \in \mathcal{T}_n$ (da $q^* \in \mathcal{T}(\Omega)$).
Für $w \in \{\overline{x}, \mu, z\}$ ist $\Phi^* \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon F)(q^*)$, also ebenfalls $\Phi^* \in \mathcal{T}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv (s_1, \ldots, s_j) \in \overline{\mathcal{T}}_n$ mit $s_1, \ldots, s_j \in \mathcal{T}_n$ und (I.V.) $s_1^*, \ldots, s_j^* \in \mathcal{T}_n$.
Dann ist $\Phi^* \equiv (s_1^*, \ldots, s_j^*) \in \overline{\mathcal{T}}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv (s \,\varepsilon\, C_q^p)$ mit $s \in \overline{\mathcal{T}}_n$. Nach I.V. ist $s^* \in \overline{\mathcal{T}}_n$. Ferner ist $q^* \in \mathcal{T}(\Omega)$, ebenso $p^* \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ und daher $\Phi^* \equiv (s^* \,\varepsilon\, C_{q^*}^{p^*}) \in \mathcal{F}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv (\exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s, p).\, F) \in \mathcal{F}_n$ mit $m < n$, $s \in \overline{\mathcal{T}}_n$, $p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ und $F \in \mathcal{F}_n$.
Für $w \equiv x$ ist $\Phi^* \equiv \Phi \in \mathcal{F}_n$. Nun sei $w \not\equiv x$. Nach I.V. ist $s^* \in \overline{\mathcal{T}}_n$ und $F^* \in \mathcal{F}_n$, ferner $p^* \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$. Somit ist $\Phi^* \equiv (\exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s^*, p^*).\, F^*) \in \mathcal{F}_n$.

Die übrigen Induktionsschritte verlaufen analog. $\square$

Die soeben vorgestellte Beweismethode durch Induktion nach den $\mathcal{T}, \mathcal{F}$-Regeln lässt sich in ähnlicher Weise rechtfertigen wie die arithmetische Induktion.

**Definitionen:** Sei $\Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}^{\text{zf}} & \rightleftharpoons & \text{Menge aller zirkelfreien Aussagen.} \\
* \in \mathcal{S}_n(\Phi) & \rightleftharpoons & * \text{ ist eine Substitution der Variablen } w \text{ aus } \overline{\mathcal{W}}(\Phi) \\
 & & \text{durch Konstante } w^* \text{ aus } \mathcal{C}_n(w) \text{ mit} \\
 & & \underline{\forall}\, w \in \mathcal{V}(\Phi).\ \underline{\forall}\ a \in \overline{\mathcal{C}}_n.\ (a \,\varepsilon\, w^*) \in \mathcal{A}^{\text{zf}} \\
F \in \mathcal{F}_n^{\text{zf}} & \rightleftharpoons & \underline{\forall} * \in \mathcal{S}_n(F).\ F^* \in \mathcal{A}^{\text{zf}}. \\
* \in \mathcal{S}_n & \rightleftharpoons & \underline{\exists} \Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}.\ * \in \mathcal{S}_n(\Phi).
\end{array}$$

**Bemerkung:** Nach Lemma 7.1 gilt:

$$\begin{array}{rcl}
s \in \mathcal{T}_n,\ * \in \mathcal{S}_n(s) & \underline{\rightarrow} & s^* \in \mathcal{C}_n. \\
s \in \overline{\mathcal{T}}_n,\ * \in \mathcal{S}_n(s) & \underline{\rightarrow} & s^* \in \overline{\mathcal{C}}_n. \\
F \in \mathcal{F}_n,\ * \in \mathcal{S}_n(F) & \underline{\rightarrow} & F^* \in \mathcal{A}_n.
\end{array}$$

**Lemma 7.2:** $\quad * \in \mathcal{S}_n,\ c \in \mathcal{C}_m(x),\ \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_m^{\text{zf}},\ m < n \ \underline{\rightarrow}\ \binom{x}{c}^* \in \mathcal{S}_n.$

Dabei bezeichne $\binom{x}{c}^*$ die Substitution, bei der die Variable $x$ durch $c$ ersetzt wird und die sonst mit $^*$ übereinstimmt. Bei der Anwendung dieser Substitution auf einen Term $t$ entstehe der Term $t\binom{x}{c}^*$.

**Beweis:** Sei $* \in \mathcal{S}_n,\ c \in \mathcal{C}_m(x),\ \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_m^{\mathrm{zf}},\ m < n$, ferner $w \in \mathcal{V}$ mit $w^* \in \mathcal{C}_n$, und $a \in \overline{\mathcal{C}}_n$. Wir haben zu zeigen, dass $(a\ \varepsilon\ w\binom{x}{c}^*) \in \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$ gilt (vgl. die Def. von $\mathcal{S}_n(\Phi)$). Für $w \not\equiv x$ ist $(a\ \varepsilon\ w\binom{x}{c}^*) \equiv (a\ \varepsilon\ w^*) \in \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$. Nun sei $w \equiv x$, also $(a\ \varepsilon\ w\binom{x}{c}^*) \equiv (a\ \varepsilon\ c)$. Für $a \in \overline{\mathcal{C}}_n \backslash \overline{\mathcal{C}}_m$ hat $(a\ \varepsilon\ c)$ keine Vorgänger (wegen $c \in \mathcal{C}_m$), ist also zirkelfrei. Für $a \in \overline{\mathcal{C}}_m$ ist $(a\ \varepsilon\ c) \in \mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$. $\square$

**Satz 7.1:** Alle Aussagen aus $\mathcal{A}$ sind zirkelfrei.

**Beweis:** Wir zeigen durch 'geschachtelte Induktion', dass $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ für alle $n \in \Omega$ gilt: Dazu gehen wir aus von der

I.V.1: Für alle $m < n$ ist $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_m^{\mathrm{zf}}$.

Daraus folgern wir $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ durch Induktion nach den $\mathcal{T},\mathcal{F}$-Regeln. Für beliebige Formeln $H \in \mathcal{F}_n$ folgern wir zu diesem Zweck $H \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ aus I.V.1 und der weiteren

I.V.2: $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ für alle Formeln $F$, für die $(F \in \mathcal{F}_n)$ nach den $\mathcal{T},\mathcal{F}$-Regeln hergeleitet sein muss, bevor $(H \in \mathcal{F}_n)$ hergeleitet werden kann.

Sei $H \in \mathcal{F}_n$ und $* \in \mathcal{S}_n(H)$. Wir haben zu zeigen, dass $H^*$ zirkelfrei ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass alle u.Vg. von $H^*$ zirkelfrei sind.

▷ Für $H \in \mathcal{E}$ ist $H^* \in \mathcal{E} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$.

▷ Sei $H \in \{(F \wedge G), (F \vee G)\}$ mit $F, G \in \mathcal{F}_n$. Nach I.V.2 gilt $F, G \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$, also $F^*, G^* \in \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$ und daher $H^* \in \{(F^* \wedge G^*), (F^* \vee G^*)\} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$.

▷ Sei $H \equiv (\neg F)$ mit $F \in \mathcal{F}_n$. Nach I.V.2 gilt $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ und daher $H^* \equiv (\neg F^*) \in \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$.

▷ Sei $H \equiv (\exists x\ \varepsilon\ C_m. F)$ mit $m < n$ und $F \in \mathcal{F}_n$. Nach I.V.2 gilt $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$. Jeder u.Vg. von $H^*$ hat die Form $F\binom{x}{c}^*$ mit $c \in \mathcal{C}_m(x)$, ist also zirkelfrei, da $\binom{x}{c}^* \in \mathcal{S}_n$ nach Lemma 7.2 und I.V.1 gilt. Daher ist auch $H^*$ zirkelfrei.

▷ Sei $H \equiv (s\ \varepsilon\ t)$ mit $s \in \overline{\mathcal{T}}_n,\ t \in \mathcal{T}_n$. Nach Lemma 7.1 ist daher $s^* \in \overline{\mathcal{C}}_n$.
Fall 1: Sei $t \in \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$. Dann ist $t^* \in \mathcal{C}_0$, sodass $H^* \equiv (s^*\ \varepsilon\ t^*)$ keine u.Vg. hat.
Fall 2: Sei $t \in \mathcal{V}$. Wegen $* \in \mathcal{S}_n(H)$ und $s^* \in \overline{\mathcal{C}}_n$ ist $H^* \equiv (s^*\ \varepsilon\ t^*) \in \mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$.
Fall 3: $t \equiv (\mathrm{J}\overline{x}\ \varepsilon\ \overline{C}_m, \mu, z \colon F)(q)$ mit $F \in \mathcal{F}_n$ und $m < n$. Nach I.V.2 ist $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$. Sei $t^* \equiv R(q^*) \rightleftharpoons (\mathrm{J}\overline{x}\ \varepsilon\ \overline{C}_m, \mu, z \colon A(\overline{x}, \mu, z))(q^*)$. Wir nehmen nun an, $((\underline{c}, h)\ \varepsilon\ R(k))$ sei zirkelfrei für alle $(\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m$ und alle $h < k$. Für alle $(\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m$ gilt dann $\binom{\overline{x},\ \mu,\ z}{(\underline{c}), k, R(k)}^* \in \mathcal{S}_n$ wegen $\overline{x}, \mu \notin \mathcal{V}$. Wegen $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ folgt daraus für alle $(\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m$ die Zirkelfreiheit von $F\binom{\overline{x},\ \mu,\ z}{(\underline{c}), k, R(k)}^*$, d.i. $A((\underline{c}), k, R(k))$, und daher von $((\underline{c}, k)\ \varepsilon\ R(l))$. Da man für alle $k, l \in \Omega$ so schließen darf, erhalten wir mittels Induktion über $\Omega$ insbesondere, dass $H^* \equiv (s^*\ \varepsilon\ R(q^*))$ zirkelfrei ist.
Noch einfacher zu behandeln ist der restliche Fall 4: $t \equiv \{\overline{x}\ \varepsilon\ \overline{C}_m \colon F\}$.

▷ Sei $H \equiv (\exists \overline{x} \; \varepsilon \; t.\, F)$ mit $t \in \mathcal{T}_n$ und $F \in \mathcal{F}_n$. Nach I.V.2 ist $F \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$. Wie im Falle "$H \equiv (s \; \varepsilon \; t)$" erhält man auch $(\overline{x} \; \varepsilon \; t) \in \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$. Jeder u.Vg. von $H^*$ hat die Form $(\overline{x} \; \varepsilon \; t)(\frac{\overline{x}}{c})^* \equiv (c \; \varepsilon \; t(\frac{\overline{x}}{c})^*)$ oder $F(\frac{\overline{x}}{c})^*$, wobei $t(\frac{\overline{x}}{c})^*$ die Form $\{\overline{y} \; \varepsilon \; \overline{C}_m \ldots\}$ oder $(\mathrm{J}\overline{y} \; \varepsilon \; \overline{C}_m \ldots)(q)$ hat und $c \in \overline{\mathcal{C}}_m$ gilt. (Sonst hat $H^*$ keine u.Vg.) Für $\overline{x} \notin \overline{\mathcal{W}}(t)$ ist $t(\frac{\overline{x}}{c})^* \equiv t^* \in \mathcal{C}_n$, also $m < n$. Für $\overline{x} \in \overline{\mathcal{W}}(t)$ ist $t \notin \mathcal{T}_0$, sodass auch $t \, (\in \mathcal{T}_n)$ die angeführte Form hat und daher ebenfalls $m < n$ ist. Somit ist jedenfalls $c \in \overline{\mathcal{C}}_n$, also $(\frac{\overline{x}}{c})^* \in \mathcal{S}_n$ (da $\overline{x} \notin \mathcal{V}$). Daher sind die angeführten (d.h. alle) u.Vg. von $H^*$ zirkelfrei.

▷ Für $H \equiv (\exists x \; \varepsilon \; \pi_m(s,p).\, F)$ kann man wie im obigen Falle "$H \equiv (\exists x \; \varepsilon \; C_m.\, F)$" argumentieren.

▷ Sei $H \equiv (s =_0 t)$ mit $s, t \in T_n$. $H^*$ hat nur dann einen u.Vg., nämlich $(s^* \approx_0 t^*)$, wenn $s^*, t^* \in \mathcal{C}_0$ gilt. Für Aussagen der Form $(c \approx_0 d)$ mit $c, d \in \mathcal{C}_0$ sei aber die Zirkelfreiheit vorausgesetzt.

▷ Für $H \equiv (s \; \varepsilon \; C_q^p)$ mit $s \in \mathcal{T}_n$ hat $H^* \equiv (s^* \; \varepsilon \; C_{q^*}^{p^*})$ keine u.Vg.

Wir haben gezeigt, dass $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_n^{\mathrm{zf}}$ für alle $n \in \Omega$ gilt. Daraus folgt insbesondere, dass alle Aussagen zirkelfrei sind. $\square$

In diesem Beweis von Satz 7.1 haben wir von $\mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$ (der Zirkelfreiheit) nur die Tatsache benutzt, dass $\mathcal{A}^{\mathrm{zf}}$ im folgenden Sinne progressiv ist: Eine Teilmenge $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ heiße *progressiv*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt: Gilt $A \in \mathcal{X}$ für alle u.Vg. $A$ einer beliebigen Aussage $B$ $(\in \mathcal{A})$, dann gilt auch $B \in \mathcal{X}$. - Damit haben wir:

**Satz 7.2:** Jede progressive Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist gleich $\mathcal{A}$.

Dabei verstehen wir unter einer Teilmenge von $\mathcal{A}$ eine Menge, die dargestellt ist durch eine Schreibfigur $\mathcal{X}$ derart, dass für jede Aussage $A$ $(\in \mathcal{A})$ die Figur $(A \in \mathcal{X})$ als (Meta-) Aussage eingeführt ist. Wir brauchen hier nicht weiter festzulegen, was dies heißt, da wir Satz 7.2 nur auf wenige einzelne Teilmengen von $\mathcal{A}$ anwenden werden.

Nach Satz 7.1 sind alle Behauptungsregeln umkehrbar, sodass wir (nach unseren Ausführungen aus §2 und §3) mit allen Aussagen aus $\mathcal{A}$ (im zugehörigen klassischen Spiel) klassisch argumentieren dürfen.

Im Folgenden definieren wir für jedes $n \in \Omega$ eine Äquivalenzrelation $(=_n)$, bezüglich der - wie gezeigt werden soll - alle Terme und Formeln invariant sind. Dazu sind einige Vorbereitungen erforderlich:

**Definitionen:** "$\rightarrow$" und "$\leftrightarrow$" seien wie früher definiert. Für $x \in \mathcal{V}_0$ und $s, t \in \mathcal{T}$ sei gesetzt:

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x \,\varepsilon\, C_n .\, F & \rightleftharpoons & \neg\, \exists x \,\varepsilon\, C_n .\, \neg F \\
\exists x\, F & \rightleftharpoons & \exists x \,\varepsilon\, C_0 .\, F \\
\forall x\, F & \rightleftharpoons & \forall x \,\varepsilon\, C_0 .\, F \\
\forall \overline{x}\, (\bar{x} \,\varepsilon\, s \;\rightarrow\; F) & \rightleftharpoons & \neg\, \exists \overline{x} \,\varepsilon\, s .\, \neg F \\
\forall \overline{x}\, (\overline{x} \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, t) & \rightleftharpoons & \forall \overline{x}\, (\overline{x} \,\varepsilon\, s \;\rightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, t) \;\wedge\; \forall \overline{x}\, (\overline{x} \,\varepsilon\, t \;\rightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, s) \\
s \,\varepsilon\, C_q & \rightleftharpoons & (s) \,\varepsilon\, C_q^1 \\
s \asymp t & \rightleftharpoons & \forall \bar{x}\, (\overline{x} \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, t) \;\wedge\; \neg\, (s \,\varepsilon\, C_0) \;\wedge\; \neg\, (t \,\varepsilon\, C_0) \\
s \sim t & \rightleftharpoons & \forall \mu\, (s \,\varepsilon\, C_\mu \;\leftrightarrow\; t \,\varepsilon\, C_\mu) \\
s = t & \rightleftharpoons & s =_0 t \;\vee\; (s \asymp t \;\wedge\; s \sim t) \\
s =_n t & \rightleftharpoons & s = t \;\wedge\; s, t \,\varepsilon\, C_n \qquad (\text{für } n > 0) \\
s \,\varepsilon\, t & \rightleftharpoons & (s) \,\varepsilon\, t
\end{array}
$$

**Lemma 7.3:** $c \,\varepsilon\, C_m \;\wedge\; c =_n d \;\rightarrow\; c =_m d.$

Der Beweis ist trivial.

**Definition:** Für $s, t \in \overline{\mathcal{T}}$ setzen wir mit Hilfe von Variablen $x, y, z \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}(s, t)$ und einer Variablen $\kappa$ für Elemente von $\mathbb{N}^+$:

$$
\begin{array}{rcl}
s \,\varepsilon\, \overline{C}_m & \rightleftharpoons & s \,\varepsilon\, \{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m : 0 = 0\} \\
s =_m t & \rightleftharpoons & s \,\varepsilon\, \overline{C}_m \;\wedge\; t \,\varepsilon\, \overline{C}_m \;\wedge \\
 & & \wedge\; \forall \kappa\, \forall x \,\varepsilon\, C_m .\, [\, \exists y \,\varepsilon\, \pi_m(s, \kappa) .\, x = y \;\leftrightarrow\; \exists z \,\varepsilon\, \pi_m(t, \kappa) .\, x = z \,].
\end{array}
$$

**Lemma 7.4:** Für $a \equiv (a_1, \ldots, a_j),\ b \equiv (b_1, \ldots, b_k)$ gilt

$$
a =_m b \;\underline{\leftrightarrow}\; j = k \;\underline{\wedge}\; a_1 =_m b_1 \;\underline{\wedge}\; \ldots \;\underline{\wedge}\; a_j =_m b_j .
$$

**Beweis:** Wir schreiben jetzt $A$ für $(a \,\varepsilon\, \overline{C}_m \;\wedge\; b \,\varepsilon\, \overline{C}_m)$ und verwenden $i$ als Metavariable für Elemente von $\mathbb{N}^+$. Dann gilt

$$
\begin{array}{rcl}
a =_m b & \underline{\leftrightarrow} & A \;\underline{\wedge}\; \underline{\forall} i\, \forall x \,\varepsilon\, C_m .\, [\, \exists y \,\varepsilon\, \pi_m(a, i) .\, x =_m y \;\leftrightarrow\; \exists z \,\varepsilon\, \pi_m(b, i) .\, x =_m z \,] \\
 & \leftrightarrow & A \;\underline{\wedge}\; \underline{\forall} i\, \forall x \,\varepsilon\, C_m .\, [\, i \le j \;\wedge\; x =_m a_i \;\leftrightarrow\; i \le k \;\wedge\; x =_m b_i \,] \\
 & \underline{\leftrightarrow} & j = k \;\underline{\wedge}\; \underline{\forall} i \le j .\, a_i =_m b_i . \quad \square
\end{array}
$$

**Definitionen:** Für $\underline{x} \equiv x_1, \ldots, x_j \in \mathcal{W}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\exists \underline{x} \,\varepsilon\, C_m .\, F & \rightleftharpoons & \exists x_1 \,\varepsilon\, C_m \ldots \exists x_j \,\varepsilon\, C_m .\, F \\
\{\underline{x} \,\varepsilon\, C_m : F\} & \rightleftharpoons & \{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m : \exists \underline{x} \,\varepsilon\, C_m .\, (\overline{x} =_m (\underline{x}) \;\wedge\; F)\} \\
(\mathrm{J} \underline{x} \,\varepsilon\, C_m, \mu, z : F) & \rightleftharpoons & (\mathrm{J} \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z : \exists \underline{x} \,\varepsilon\, C_m .\, (\overline{x} =_m (\underline{x}) \;\wedge\; F)) \\
C_m(\underline{x}) & \rightleftharpoons & \{\underline{x} \,\varepsilon\, C_m : 0 = 0\}.
\end{array}
$$

**Bemerkung:** Wie man leicht zeigt, gilt für alle $c \in \overline{\mathcal{C}}$: $c \,\varepsilon\, C_m(\underline{x}) \;\underline{\leftrightarrow}\; c \in \mathcal{C}_m(\underline{x})$.

**Lemma 7.5:** $\quad c =_n d \;\rightarrow\; (c \,\varepsilon\, C_m(x) \leftrightarrow d \,\varepsilon\, C_m(x))$.

**Beweis:** Vorausgesetzt sei $c =_n d$ und $c \,\varepsilon\, C_m(x)$, d.h. $c \in \mathcal{C}_m(x)$. Für $x \in \mathcal{V}_0$ gilt $\mathcal{C}_m(x) = \mathcal{C}(x) \subseteq \mathcal{C}_0$, also $c \in \mathcal{C}_0$ und daher $c =_0 d$ (nach Lemma 7.3), d.h. $c \approx_0 c$. Wegen der Invarianz von $\mathcal{C}(x)$ bez. $(\approx_0)$ folgt $d \in \mathcal{C}(x)$, d.h. $d \,\varepsilon\, C_m(x)$. - Für $x \in \mathcal{V}$ ist $\mathcal{C}_m(x) = \mathcal{C}_m$. Wegen $c \sim d$ erhält man daraus nacheinander $c \in \mathcal{C}_m,\ c \,\varepsilon\, C_m,\ d \,\varepsilon\, C_m,\ d \in \mathcal{C}_m$, also $d \,\varepsilon\, C_m(x)$. $\square$

**Bemerkung:** Nach Lemma 7.4 lassen sich die Lemmata 7.3 und 7.5 auch auf Elemente von $\overline{\mathcal{C}}$ (statt $\mathcal{C}$) übertragen.

**Definitionen:** Für $\Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}$ sei $|\Phi|$ das kleinste $n \in \Omega$ mit $\Phi \in \mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$. Für $w \in \overline{\mathcal{W}}$ sei ferner: $\ \mathcal{C}(\underline{w}) \rightleftharpoons \bigcup_{n \in \Omega} \mathcal{C}_n(\underline{w})$.

**Lemma 7.6:** Für $\Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F},\ w \in \overline{\mathcal{W}}(\Phi),\ c \in \mathcal{C}(w)$ gilt: $\ |\Phi^w_c| = \max\{|\Phi|, |c|\}$.

**Beweis:** Die Voraussetzungen von Lemma 7.6 seien erfüllt. Zur Induktion über den Aufbau von $\Phi$ nach den $\mathcal{T},\mathcal{F}$-Regeln geben wir nur einige Induktionsschritte als Beispiele an; dabei sei $*$ die Substitution $\frac{w}{c}$:

$\triangleright$ Sei $\Phi \equiv (s \,\varepsilon\, C^p_q)$. Dann ist $|\Phi| = |s|$. Nach der Ergänzung zu Lemma 7.1 ist $q^* \in \mathcal{T}(\Omega)$; ebenso ist $p^* \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$, also $\Phi^* \in \mathcal{F}$. Im Falle $w \in \overline{\mathcal{W}}(s)$ gilt nach (I.V.): $|s^*| = \max\{|s|, |c|\}$ und daher $|\Phi^*| = |(s^* \,\varepsilon\, C^{p^*}_{q^*})| = |s^*| = \max\{|s|, |c|\} = \max\{|\Phi|, |c|\}$. Im Falle $w \notin \overline{\mathcal{W}}(s)$ erhalten wir $w \in \mathcal{V}_0(p) \cup \mathcal{V}_0(q)$, also $c \in \mathcal{C}(w) \subset \mathcal{C}_0$, $|c| = 0$, also $|\Phi^*| = |(s \,\varepsilon\, C^{p^*}_{q^*})| = |s| = |\Phi| = \max\{|\Phi|, |c|\}$.

$\triangleright$ Sei $\Phi \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z\colon F)(q) \in \mathcal{T}_n$. Dann ist $|\Phi| = \max\{m+1, |F|\}$. Im Falle $w \in \{\overline{x}, \mu, z\}$ ist $w \in \mathcal{V}_0(q)$, also wieder $|c| = 0$, ferner $\Phi^* \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z\colon F)(q^*)$ und somit $|\Phi^*| = \max\{m+1, |F|\} = |\Phi| = \max\{|\Phi|, |c|\}$. Im Falle $w \notin \overline{\mathcal{W}}(F)$ kann man ebenso schließen. Nun sei $w \notin \{\overline{x}, \mu, z\}$ und $w \in \overline{\mathcal{W}}(F)$. Dann ist $\Phi^* \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z\colon F^*)(q^*)$, und nach I.V.: $|F^*| = \max\{|F|, |c|\}$, also
$|\Phi^*| = \max\{m+1, |F^*|\} = \max\{m+1, |F|, |c|\} = \max\{|\Phi|, |c|\}$.

$\triangleright$ Sei $\Phi \equiv (\exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s,p).\, F)$ mit $s \in \overline{\mathcal{T}},\ p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ und $F \in \mathcal{F}$. Dann ist $|\Phi| = \max\{m+1, |s|, |F|\}$. Wegen $w \in \overline{\mathcal{W}}(\Phi)$ ist $w \not\equiv x$. Wieder ist $p^* \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$, also $\Phi^* \equiv (\exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s^*, p^*).\, F^*) \in \mathcal{F}$. Im Falle $w \in \overline{\mathcal{W}}(s) \cup \overline{\mathcal{W}}(F)$ gilt also
$|\Phi^*| = \max\{m+1, |s^*|, |F^*|\} =_{I.V.} \max\{m+1, |s|, |F|, |c|\} = \max\{|\Phi|, |c|\}$.
Im Falle $w \notin \overline{\mathcal{W}}(s) \cup \overline{\mathcal{W}}(F)$ gilt $w \in \mathcal{V}_0(p)$, also wieder $|c| = 0$ und somit
$|\Phi^*| = |\exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s, p^*).\, F| = \max\{m+1, |s|, |F|\} = |\Phi| = \max\{|\Phi|, |c|\}$. $\square$ -
Aus Lemma 7.6 folgt:

**Korollar 7.1:** Für $s \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}},\ \overline{\mathcal{W}}(s) = \{\underline{w}\},\ \underline{c}, \underline{d} \in \mathcal{C}(\underline{w})$ gilt: $\ \underline{c} \sim \underline{d} \;\rightarrow\; s^{\underline{w}}_{\underline{c}} \sim s^{\underline{w}}_{\underline{d}}$.

**Definition:**

$$\begin{aligned} \exists \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, F &\;\rightleftharpoons\; \exists \overline{x} \,\varepsilon\, \{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m \colon 0 = 0\}.\, F \\ \forall \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, F &\;\rightleftharpoons\; \neg\, \exists \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, \neg F. \end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathcal{C}$ und $n > 0$ sei gesetzt:

$$\begin{aligned} a \,\varepsilon\, I_n \;&\rightleftharpoons\; a \,\varepsilon\, C_n \;\wedge\; \forall \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_n . \forall \overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_n . [\, \overline{x} =_n \overline{y} \;\rightarrow\; (\overline{x} \,\varepsilon\, a \;\leftrightarrow\; \overline{y} \,\varepsilon\, a)\,] \\ a \mathrel{\ddot{=}}_n b \;&\rightleftharpoons\; a =_n b \;\wedge\; a \,\varepsilon\, I_n \;\wedge\; b \,\varepsilon\, I_n . \end{aligned}$$

Ferner sei $I_0 \rightleftharpoons C_0$, und $(\ddot{=}_0)$ stimme mit $(=_0)$ überein. - Für $a \equiv (a_1, \ldots, a_j)$ und $b \equiv (b_1, \ldots, b_j)$ sei

$$a \mathrel{\ddot{=}}_n b \;\rightleftharpoons\; a_1 \mathrel{\ddot{=}}_n b_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; a_j \mathrel{\ddot{=}}_n b_j .$$

**Lemma 7.7:** Sind alle Elemente von $\mathcal{F}_m$ invariant bez. $(=_m)$, dann gilt für alle $a, b \in \mathcal{C}_m \cup \overline{\mathcal{C}}_m$: $\quad a =_n b \;\rightarrow\; a \mathrel{\ddot{=}}_n b$.

**Beweis** : Sei $a \in \mathcal{C}_m$. Dann gehört die Formel $(\overline{x} \;\varepsilon\; a)$ zu $\mathcal{F}_m$, ist also nach Voraussetzung invariant bez. $(=_m)$, d.h. es gilt $a \,\varepsilon\, I_m$. Ferner gilt $\forall \overline{x} \,\varepsilon\, C_n \,(\overline{x} \,\varepsilon\, a \;\rightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m)$. Nach Lemma 7.3 (mit $\overline{x}, \overline{y}$ an Stelle von $c, d$) folgt

$$\begin{aligned} \forall \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_n . \forall \overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_n . [\, \overline{x} =_n \overline{y} \;\;\rightarrow\;\; (\overline{x} \,\varepsilon\, a \;\leftrightarrow\; \overline{x} \,\varepsilon\, a \;\wedge\; \overline{x} =_m \overline{y} \;\leftrightarrow \\ \leftrightarrow\; \overline{y} \,\varepsilon\, a \;\wedge\; \overline{x} =_m \overline{y} \;\leftrightarrow\; \overline{y} \,\varepsilon\, a)\,], \end{aligned}$$

also $a \,\varepsilon\, I_n$. Daraus ergibt sich Lemma 7.7 - auch für $a, b \in \overline{\mathcal{C}}_m$. $\square$

**Satz 7.3:** Alle Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ sind invariant bezüglich $(=_n)$.

**Beweis** durch geschachtelte Induktion: Wir gehen aus von der

I.V.1: Für alle $m < n$ sind alle Elemente von $\mathcal{T}_m \cup \overline{\mathcal{T}}_m \cup \mathcal{F}_m$ invariant bez. $(=_m)$.

Daraus folgern wir *zunächst*: Alle Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ sind invariant bez. $(\ddot{=}_n)$. Zu diesem Zweck folgern wir die Invarianz bez. $(\ddot{=}_n)$ eines beliebigen Elements $\Phi \in \mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ aus I.V.1 und der

I.V.2: Invariant bez. $(\ddot{=}_n)$ sind alle Terme und Formeln, die (nach den $\mathcal{T}, \mathcal{F}$-Regeln) schon vor $\Phi$ als Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ nachgewiesen sein müssen.

Sei also $\Phi \in \mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ und $\overline{\mathcal{W}}(\Phi) = \{\underline{w}\}$ mit $\underline{w} \rightleftharpoons w_1, \ldots, w_j$. Ferner seien $\underline{c}, \underline{d} \in \mathcal{C}(\underline{w})$, für die $\underline{c} \mathrel{\ddot{=}}_n \underline{d}$ gilt. Substitutionen seien $* \rightleftharpoons \frac{\underline{w}}{\underline{c}}$ und $\dagger \rightleftharpoons \frac{\underline{w}}{\underline{d}}$. Das Wort "invariant" bedeute im Folgenden: "invariant bezüglich $(\ddot{=}_n)$".

▷ Sei $\Phi \equiv s \in \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$. In $s$ kommen nur Variable $w_i$ aus $\mathcal{V}_0$ vor. Somit gilt $c_i, d_i \in \mathcal{C}_0$. Wegen $c_i =_n d_i$ folgt (nach Lemma 7.3) $c_i =_0 d_i$, d.h. $c_i \approx_0 d_i$, und daher (nach der Voraussetzung über $(\approx_0)$): $s^* =_0 s^\dagger$, $s^*, s^\dagger \in \mathcal{C}_0$ und daher auch $s^*, s^\dagger \in I_n$.

▷ Sei $\Phi \in \mathcal{V}$. Dann ist $\Phi \equiv w_1$, also $\Phi^* \equiv c_1$, $\Phi^\dagger \equiv d_1$. Wegen $c_1 \mathrel{\ddot{=}}_n d_1$ gilt $\Phi^* \mathrel{\ddot{=}}_n \Phi^\dagger$.

▷ Sei $\Phi \equiv R(q) \equiv (\mathrm{J}\overline{x} \;\varepsilon\; \overline{C}_m, \mu, z : F)(q) \in \mathcal{T}_n$ mit $m < n$ und (nach I.V.2) invariantem $F \in \mathcal{F}_n$. Sei $F \equiv A(\overline{x}, \mu, z, \underline{w})$. Angenommen, für alle $k < l$ gelte

$R^*(k) \doteqdot_n R^\dagger(k)$. Dann ergibt sich für alle $\underline{a}, \underline{b}$ mit $\underline{a} =_n \underline{b}$ nach I.V.1, Lemma 7.7 und Lemma 7.5 zunächst: $(\underline{a})\, \varepsilon\, \overline{C}_m \;\rightarrow\; \underline{a} \doteqdot_n \underline{b}$, also für alle $k \in \Omega$ (nach Lemma 7.5)

$$\begin{aligned} (\underline{a}, k)\, \varepsilon\, R^*(l) \;&\leftrightarrow\; (\underline{a})\, \varepsilon\, \overline{C}_m \;\wedge\; k < l \;\wedge\; A((\underline{a}), k, R^*(k), \underline{c}) \\ &\leftrightarrow\; (\underline{b})\, \varepsilon\, \overline{C}_m \;\wedge\; k < l \;\wedge\; A((\underline{b}), k, R^\dagger(k), \underline{d}) \;\;\leftrightarrow\;\; (\underline{b}, k)\, \varepsilon\, R^\dagger(l). \end{aligned}$$

Mittels Korollar 7.1 folgt daraus $R^*(l) \doteqdot_n R^\dagger(l)$. Durch Induktion über $\Omega$ erhalten wir dies für alle $l \in \Omega$, also insbesondere $\Phi^* \doteqdot_n \Phi^\dagger$.

▷ Der Fall $\Phi \equiv \{\overline{x}\, \varepsilon\, \overline{C}_m \colon F\}$ ist noch einfacher zu behandeln.

▷ Für $\Phi \in \overline{\mathcal{V}}$ kann man wie im obigen Falle “$\Phi \in \mathcal{V}$” schließen; dabei ist $c_1, d_1 \in \overline{\mathcal{C}}_n$.

▷ Sei $\Phi \equiv (s_1, \ldots, s_k) \in \overline{\mathcal{T}}_n$. Nach I.V.2 gilt $s_i^* \doteqdot_n s_i^\dagger$ und daher $\Phi^* \doteqdot_n \Phi^\dagger$.

▷ Sei $\Phi \equiv E \in \mathcal{E}$. Wie im Falle “$\Phi \equiv s \in \mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$” erhält man $c_i =_0 d_i$, also: $E^* \;\leftrightarrow\; E^\dagger$.

▷ Sei $\Phi \in \big\{(F \wedge G),\, (F \vee G),\, (\neg F), (\exists x\, \varepsilon\, C_m.\, F)\big\}$ mit invarianten Formeln $F, G \in \mathcal{F}_n$, und $m < n$. Dann erweist sich leicht $\Phi$ als invariant. Zu $(\exists x\, \varepsilon\, C_m.\, F)$ beachte man, dass nach I.V.1 und Lemma 7.7 gilt: $a\, \varepsilon\, C_m \;\rightarrow\; a \doteqdot_n a$.

▷ Sei $\Phi \equiv (s\, \varepsilon\, t)$ mit invarianten $s \in \overline{\mathcal{T}}_n$ und $t \in \mathcal{T}_n$. Somit gilt $s^* =_n s^\dagger$, $t^*\, \varepsilon\, I_n$ und $t^* =_n t^\dagger$. Daraus folgt: $s^*\, \varepsilon\, t^* \;\leftrightarrow\; s^\dagger\, \varepsilon\, t^* \;\leftrightarrow\; s^\dagger\, \varepsilon\, t^\dagger$.

▷ Sei $\Phi \equiv (\exists \overline{x}\, \varepsilon\, t.\, F)$ mit invarianten $t \in \mathcal{T}_n$, $F \in \mathcal{F}_n$. Zunächst sei $\overline{x} \in \overline{\mathcal{W}}(t^*)$. Für alle $a \in \overline{\mathcal{C}}$ mit $a\, \varepsilon\, t\binom{\overline{x}}{a}^*$ gilt dann $|a| < |t\binom{\overline{x}}{a}^*| = \max\{|t^*|, |a|\}$ (Lemma 7.6), also $|a| < |t^*| \le n$. Dies gilt aber auch im Falle $\overline{x} \notin \overline{\mathcal{W}}(t^*)$. Jedenfalls erhalten wir nach I.V.1 und Lemma 7.7: $a\, \varepsilon\, t\binom{\overline{x}}{a}^* \;\rightarrow\; a \doteqdot_n a \;\rightarrow\; t\binom{\overline{x}}{a}^* \doteqdot_n t\binom{\overline{x}}{a}^\dagger$, und daher:
$a\, \varepsilon\, t\binom{\overline{x}}{a}^* \;\wedge\; F\binom{\overline{x}}{a}^* \;\rightarrow\; a\, \varepsilon\, t\binom{\overline{x}}{a}^\dagger \;\wedge\; F\binom{\overline{x}}{a}^\dagger$, also: $\Phi^* \;\rightarrow\; \Phi^\dagger$, und ebenso: $\Phi^\dagger \;\rightarrow\; \Phi^*$.

▷ Sei $\Phi \equiv (\exists x\, \varepsilon\, \pi_m(s, p).\, F) \in \mathcal{F}_n$ mit $s \in \overline{\mathcal{T}}_n$, $p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)$ und $F \in \mathcal{F}_n$, die sämtlich invariant sind. Wegen $x \in \mathcal{V}$ ist $x \notin \overline{\mathcal{W}}(p)$. Daher gilt $p^*, p^\dagger \in \mathbb{N}^+$ und $p^* \equiv p^\dagger$. Sei $i \rightleftharpoons p^*$. Zunächst sei $x \notin \mathcal{V}(s)$. Dann sind $s^*$ und $s^\dagger$ konstant, und es gilt $s^* \doteqdot_n s^\dagger$. Sei $s^* \equiv (a_1, \ldots, a_j)$ und $s^\dagger \equiv (b_1, \ldots, b_j)$. Für $i \le j$ gilt dann $a_i \doteqdot_n b_i$, also: $\Phi^* \;\leftrightarrow\; F\binom{x}{a_i}^* \leftrightarrow F\binom{x}{b_i}^\dagger \;\leftrightarrow\; \Phi^\dagger$. Für $i > j$ gilt dann: $\Phi^* \;\leftrightarrow\; \perp \;\leftrightarrow\; \Phi^\dagger$. Schließlich sei $x \in \mathcal{V}(s)$. Dann ist $x \in \mathcal{V}(s^*) \cap \mathcal{V}(s^\dagger)$, sodass ebenfalls gilt: $\Phi^* \;\leftrightarrow\; \perp \;\leftrightarrow\; \Phi^\dagger$.

▷ Sei $\Phi \equiv (s\, \varepsilon\, C_q^p)$ mit einem invarianten Term $s \in \overline{\mathcal{T}}_n$. Wegen $s^* \sim s^\dagger$, $p^* \equiv p^\dagger$ und $q^* \equiv q^\dagger$ gilt: $s^*\, \varepsilon\, C_{q^*}^{p^*} \;\leftrightarrow\; s^\dagger\, \varepsilon\, C_{q^*}^{p^*} \;\leftrightarrow\; s^\dagger\, \varepsilon\, C_{q^\dagger}^{p^\dagger}$.

▷ Für $\Phi \equiv (s =_0 t)$ mit invarianten $s, t \in \mathcal{T}_n$ gilt: $\Phi^* \;\rightarrow\; s^*\, \varepsilon\, C_0 \;\wedge\; t^*\, \varepsilon\, C_0$, also nach Lemma 7.3: $\Phi^* \;\rightarrow\; s^\dagger =_0 s^* =_0 t^* =_0 t^\dagger \;\rightarrow\; \Phi^\dagger$ und ebenso: $\Phi^\dagger \;\rightarrow\; \Phi^*$.

Somit folgt aus I.V.1, dass alle Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{F}_n$ invariant bez. $(\doteqdot_n)$ sind. Nun betrachten wir ein beliebiges Element $c \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}_0$ $(n > 0)$. Alle ‘Elemente’ $a, b$ von $c$ haben eine niedrigere Stufe als $n$, sodass für sie $(a =_n b \;\rightarrow\; a \doteqdot_n b)$ nach I.V.1 und Lemma 7.7 gilt. Da die Formel $(\overline{x}\, \varepsilon\, c)$ zu $\mathcal{F}_n$ gehört, ist sie invariant bez. $(\doteqdot_n)$ und somit bez. $(=_n)$. Daher ist $c\, \varepsilon\, I_n$. Für alle $c, d \in \mathcal{C}_n$ gilt also: $c =_n d \;\leftrightarrow\; c \doteqdot_n d$. Somit sind alle Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{F}_n$ invariant bez. $(=_n)$. $\square$

**Definition:** Für Konstante $a, b \in \overline{\mathcal{C}}$ sei

$$a = b \; :\Leftrightarrow \; \underline{\exists} n \in \Omega.\, a =_n b.$$

**Korollar 7.2:** Alle Elemente von $\mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}$ sind invariant bez. $(=)$.

**Beweis,** z.B. für Formeln: Sei $F \in \mathcal{F}$, $\{\underline{w}\} = \overline{\mathcal{W}}(F)$, $(\underline{c}), (\underline{d}) \in \mathcal{C}(\underline{w})$ und $\underline{c} = \underline{d}$. Dann gibt es $k, m \in \Omega$ mit $F \in \mathcal{F}_k$ und $\underline{c} =_m \underline{d}$. Für $n :\Leftrightarrow \max\{k, m\}$ folgt $F \in \mathcal{F}_n$, $\underline{c} =_n \underline{d}$, also $(F^{\underline{w}}_{\underline{c}} \leftrightarrow F^{\underline{w}}_{\underline{d}})$ (nach Satz 7.3). $\square$

Nun erhalten wir insbesondere

$$(\underline{c}) \in \{\underline{x} \in C_m \colon A(\underline{x})\} \;\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; A(\underline{c}),$$

und für $R :\Leftrightarrow (\mathrm{J}\underline{x} \in C_m, \mu, z : A(\underline{x}, \mu, z))$:

$$(\underline{c}, k) \in R(l) \;\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; k < l \;\wedge\; A(\underline{c}, k, R(k)).$$

Hieraus ergibt sich weiter (vgl. §4):

**Korollar 7.3:** Zu je zwei Formeln $A(\underline{x}), B(\underline{x}, \mu, z) \in \mathcal{F}_n$ mit $\underline{x} \in \mathcal{W}$, $z \in \mathcal{V}$ und zu jedem $m < n$ gibt es einen Term $S(\nu) \in \mathcal{T}_n$, sodass für alle $(\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}(\underline{c}) \in S(0) \;&\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; A(\underline{c})\\ (\underline{c}) \in S(k\mathrm{I}) \;&\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; B(\underline{c}, k, S(k)).\end{aligned}$$

**Beweis:** Sei

$$\begin{aligned}D(\underline{x}, \mu, z) \;&:\Leftrightarrow\; \big[\mu = 0 \;\wedge\; A(\underline{x})\big] \vee\\ &\quad\; \vee \exists\lambda \big[\mu = \lambda\mathrm{I} \;\wedge\; B(\underline{x}, \lambda, \{\underline{x} \in C_m \colon (\underline{x}, \lambda) \in z\})\big]\\ R(k) \;&:\Leftrightarrow\; (\mathrm{J}\underline{x} \in C_m, \mu, z \colon D(\underline{x}, \mu, z))(k)\\ S(k) \;&:\Leftrightarrow\; \{\underline{x} \in C_m \colon (\underline{x}, k) \in R(k\mathrm{I})\}.\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(\underline{c}) \in S(0) \;\leftrightarrow\; (\underline{c}, 0) \in R(0\mathrm{I}) \;&\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; A(\underline{c})\\ (\underline{c}) \in S(k\mathrm{I}) \;\leftrightarrow\; (\underline{c}, k\mathrm{I}) \in R(k\mathrm{II}) \;&\leftrightarrow\; (\underline{c}) \in C_m(\underline{x}) \;\wedge\; B(\underline{c}, k, S(k)).\end{aligned} \quad \square$$

## $\iota$-Terme (Kennzeichnungsterme)

Durch Hinzunahme von '$\iota$-Termen', d.h. Termen der Form $(\iota\, y \in C_m.\, F)$ ("dasjenige $y$ aus $C_m$ mit $F$") mit $y \in \mathcal{W}$, erweitern wir die Klassen der Terme und Formeln, indem wir in den Termen und Formeln sukzessive $\iota$-Terme für Variable einzusetzen erlauben. [Damit soll vor allem die Kennzeichnung von Funktionswerten in der Form

$f(a) \rightleftharpoons (\iota y \;\varepsilon\; C_m.\,(a,y) \;\varepsilon\; f)$ ermöglicht werden.] Dementsprechend führen wir für jede der Term- oder Formelmengen $\mathcal{S} \in \{\mathcal{T}_{\mathrm{or}}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \overline{\mathcal{T}}, \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{T}(w) : w \in \overline{\mathcal{W}}\}$ die Obermenge $\mathcal{S}'$ durch folgende Konstruktionsregeln ein:

$$\begin{array}{rcll} & \Rightarrow & \Phi \in \mathcal{S}', & \text{falls } \Phi \in \mathcal{S} \\ F \in \mathcal{F}' & \Rightarrow & (\iota y \;\varepsilon\; C_m.\, F) \in \iota\mathcal{T}(x), & \text{falls } x, y \in \mathcal{W},\ \mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y) \\ \Phi \in \mathcal{S}', \tau \in \iota\mathcal{T}(x) & \Rightarrow & \Phi^x_\tau \in \mathcal{S}'. & \end{array}$$

[In der letzten Regel kommt schon ein metasprachlicher Kennzeichnungsterm vor, nämlich $\Phi^x_\tau$ ("dasjenige $\Psi$, für das $\Psi$ aus $\Phi$ durch Einsetzung von $\tau$ für $x$ entsteht"). Um ihn aus dieser Regel zu eliminieren, ersetze man ihn durch $\Psi$ und füge folgende Bedingung hinzu: "falls $\Psi$ aus $\Phi$ durch Einsetzung von $\tau$ für $x$ entsteht."] Nun definieren wir: $\mathcal{T}(\mathbb{N}^+)' \rightleftharpoons \mathcal{T}(\kappa)'$ und $\mathcal{T}(\Omega)' \rightleftharpoons \mathcal{T}(\mu)'$ mit Variablen $\kappa$ bzw. $\mu$ für Elemente von $\mathbb{N}^+$ bzw. $\Omega$ - sowie

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \rightleftharpoons & \mathcal{E}' \cup \{(s =_0 t) \colon s, t \in \mathcal{T}'\} \cup \\ & & \cup\, \{(s \;\varepsilon\; C^p_q) : s \;\varepsilon\; \overline{\mathcal{T}}',\ p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)',\ q \in \mathcal{T}(\Omega)'\} \cup \\ & & \cup\, \{(s \;\varepsilon\; t) \colon s \;\varepsilon\; \overline{\mathcal{T}}',\ t \;\varepsilon\; \mathcal{T}'\} \cup \\ & & \cup\, \{(\exists x \;\varepsilon\; \pi_m(s,p).\, F) \colon x \in \mathcal{V},\ m \in \Omega,\ s \in \overline{\mathcal{T}}',\ p \in \mathcal{T}(\mathbb{N}^+)',\ F \in \mathcal{F}'\}. \end{array}$$

Ein $\iota$-Term $(\iota\, x \;\varepsilon\; C_m.\, F)$ heiße *einfach*, wenn $F$ zu $\mathcal{F}$ gehört, d.h. keine $\iota$-Terme enthält. - Ein $\iota$-Term, in dem keine Variable frei vorkommt, heiße eine *$\iota$-Konstante.*

Die in diesem §7 aufgestellten *Behauptungsregeln* mögen nun auch für die Aussagen aus $\mathcal{F}'$ gelten. Zu diesen Behauptungsregeln fügen wir noch die Regel

$$\natural\, B(\alpha) \quad\Longrightarrow\quad \natural\, \exists x \;\varepsilon\; C_m.\, [A(x)' \;\wedge\; B(x)]$$

für $B(x) \in \mathcal{H}$ und

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \rightleftharpoons & \iota\, x \;\varepsilon\; C_m.\, A(x) \\ A(x)' & \rightleftharpoons & \forall y \;\varepsilon\; C_m.\, [A(y) \;\leftrightarrow\; y = x] \end{array}$$

mit einer Formel $A(x) \in \mathcal{F}$ und einer Variablen $y$ mit $\mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(x)$, die nicht in $A(x)$ vorkommt. Dabei sei $\alpha$ diejenige einfache $\iota$-Konstante, die in $B(\alpha)$ an mindestens einer Stelle links von jeder anderen einfachen $\iota$-Konstanten steht. $\alpha$ komme in $B(x)$ nicht mehr vor. ($\alpha$ darf in $B(\alpha)$ allerdings in anderen $\iota$-Termen vorkommen. - In $C^p_q \rightleftharpoons (C_q)^p$ stehe $q$ 'links' von $p$.)

In jedem Einzelfall dieser Behauptungsregel ist offenbar die 'Konklusion' durch die 'Prämisse' eindeutig bestimmt. Ferner kommen in $B(x)$ weniger $\iota$-Terme vor als in $B(\alpha)$. Gleiches gilt auch für die Belegungen $B(c)$ von $B(x)$ mit Konstanten $c \in \mathcal{C}_m(x)$. Daher ist auch die Aussage $B(\alpha)$ zirkelfrei, und somit ist die angeführte Behauptungsregel umkehrbar.

**Bemerkungen:** $(\exists x \;\varepsilon\; C_m.\, A(x)')$ bedeutet, dass es genau ein $c \in \mathcal{C}_m$ mit $A(c)$ gibt. Unter der oben genannten Voraussetzung gilt:

$$\exists x \;\varepsilon\; C_m.\, A(x)' \;\rightarrow\; \Big\{\, \begin{array}{rl} B(\alpha) & \leftrightarrow\;\; \exists x \;\varepsilon\; C_m.\, [\, A(x) \;\wedge\; B(x)\,] \\ & \leftrightarrow\;\; \forall x \;\varepsilon\; C_m.\, [\, A(x) \rightarrow B(x)\,]\,\Big\}. \end{array}$$

Daraus ergibt sich bekanntlich, dass Gleiches auch ohne die genannten Voraussetzungen - d.h. für beliebige Formeln $B(x)$ und $\iota$-Konstante $\alpha \equiv (\iota x \,\varepsilon\, C_m.\, A(x))$ - gilt (vgl. z.B. [6, §9] oder [8, pp. 170f.]). Für Formeln der Gestalt $(\exists \overline{x} \,\varepsilon\, t.\, F)$ schreibe man dabei $(\exists \overline{x}.\, (\overline{x} \,\varepsilon\, t \wedge F))$. Ferner ergibt sich leicht:

$$\exists x \,\varepsilon\, C_m.\, A(x)' \;\rightarrow\; \big[\, c(\alpha) \,\varepsilon\, \{\overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_n \colon B(\alpha, \overline{y})\} \;\leftrightarrow\; c(\alpha) \,\varepsilon\, \overline{C}_n \;\wedge\; B(\alpha, c(\alpha)) \,\big],$$

Entsprechendes für Aussagen der Form $(c, k) \,\varepsilon\, (\mathrm{J}\overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_n, \mu, z \colon B(\overline{y}, \mu, z))(l)$, in denen $\iota$-Terme vorkommen, sowie im Falle $i \le j$:

$$\exists x \,\varepsilon\, C_m.\, A(x)' \;\rightarrow\; \big[\, \exists y \,\varepsilon\, \pi_k((c_1(\alpha), \ldots, c_j(\alpha)), i).\, B(\alpha, y) \;\leftrightarrow\; B(\alpha, c_i(\alpha)) \,\big].$$

Um z.B. die Regeln R22 und R24 aus §3 auch auf Formeln $F \in \mathcal{F}'$ und Terme $t \in \mathcal{T}'$ übertragen zu können, benötigt man noch eine gewisse Abgeschlossenheit der neu eingeführten Term- und Formelmengen gegen Substitutionen (vgl. Lemma 7.1):

**Lemma 7.1'**: Für $\mathcal{S} \in \{\mathcal{T}_{\mathrm{or}}, \mathcal{E}, \mathcal{T}, \overline{\mathcal{T}}, \mathcal{F}\} \cup \{\mathcal{T}(x) : x \in \overline{\mathcal{W}}\}$ gilt

$$\Phi \in \mathcal{S}', w \in \overline{\mathcal{W}}, r \in \mathcal{T}(w)' \;\underline{\rightarrow}\; \Phi^w_r \in \mathcal{S}'.$$

Hierzu kann man zunächst folgenden 'Sonderfall' beweisen:

$$\Phi \in \mathcal{T}(x),\; x \in \mathcal{V}_0,\; w \in \mathcal{V}_0, r \in \mathcal{T}(w) \;\underline{\rightarrow}\; \Phi^w_r \in \mathcal{T}(x)$$

Zum Beweis von Lemma 7.1' wende man dann eine 'übergeordnete' Induktion über die Anzahl der Vorkommnisse von $\iota$ in $r$ und eine 'untergeordnete' Induktion über die Anzahl der Vorkommnisse von $\iota$ in $\Phi$ an.

In gleicher Weise kann man auch $\iota$-Terme der Form $(\iota\, \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, F)$ (mit $\overline{x} \in \overline{\mathcal{V}}$) einführen, und zwar mit Hilfe der Behauptungsregel:

$$\natural\, B(\alpha) \;\Longrightarrow\; \natural\, \exists \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, [\, A(\overline{x})' \;\wedge\; B(\overline{x}) \,]$$

für Formeln $B(\overline{x})$ aus der entsprechenden Erweiterung von $\mathcal{H}$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \rightleftharpoons & (\iota\, \overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, A(\overline{x})), \\ A(\overline{x})' & \rightleftharpoons & \forall \overline{y} \,\varepsilon\, \overline{C}_m.\, [\, A(\overline{y}) \;\leftrightarrow\; \overline{y} =_m \overline{x} \,], \end{array}$$

usw. - wie oben.

# §8. Einbeziehung von Gegenstandsvariablen in Sprachen höherer Stufen

Nun lassen wir zu, dass in den Formeln von $\mathcal{E}$ bereits *Gegenstandsvariable* vorkommen (vgl. §5). In diesem Falle sind weitere Terme und Formeln höherer Stufen in Betracht zu ziehen.

Um unsere Ausführungen vereinfachen zu können, verwenden wir zwei Sorten von Gegenstandsvariablen, und zwar *bindbare* sowie *unbindbare* Gegenstandsvariable. (Dies ist mit unserem bisherigen Vorgehen vereinbar, da man durch Quantoren gebundene Gegenstandsvariable nach Satz 5.2 durch 'neue' ersetzen darf.) Die unbindbaren Gegenstandsvariablen nennen wir kurz *Indikatoren*. Sie dürfen nicht gebunden werden. Bindbare Gegenstandsvariable mögen zu $\mathcal{V}_0$ gehören. $\overline{\mathcal{W}}$ $(\rightleftharpoons \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V} \cup \overline{\mathcal{V}})$ enthalte jedoch keine Indikatoren. Ansonsten übernehmen wir alle bisherigen Voraussetzungen über $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}$ und $\overline{\mathcal{V}}$, sowie die bisherigen Bezeichnungen und die Konstruktionsregeln für Terme und Formeln höherer Stufen. Insbesondere sei $\mathcal{C}_m$ bzw. $\mathcal{A}$ wieder die Menge aller Elemente von $\mathcal{T}_m$ bzw. $\mathcal{F}$, in denen keine Elemente von $\overline{\mathcal{W}}$ frei vorkommen.

Damit gestatten wir nun (anders als in §5), dass Indikatoren auch in Konstanten vorkommen. Dies ist angemessen, da Konstanten höherer Stufen (wie z.B. $\{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m : A(\overline{x}, u)\}$ mit einem Indikator $u$) in geeigneten Kontexten als 'Formelabstrakta' dienen sollen.

Wir schreiben $\xi, \eta$ für bindbare Gegenstandsvariable, $\underline{\xi}$ für Listen voneinander *verschiedener* derartiger Variablen, $u, v, w$ für beliebige Indikatoren, $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ für Listen von Indikatoren, und $\beta, \gamma, \delta$ für beliebige Denotationen.
$\gamma \,\Delta\, \{\underline{u}\}$ heiße, dass $\gamma$ eine Denotation von $\underline{u}$, aber keiner weiteren Indikatoren ist. (Ist $\underline{u}$ leer, dann bedeute $\gamma \,\Delta\, \{\underline{u}\}$, dass auch $\gamma$ 'leer' ist. Dann stimme $\gamma\delta$ (s. §5) mit $\delta$ überein.)
$\gamma \,\Delta \supseteq \{\underline{u}\}$ heiße, dass $\gamma$ eine Denotation von $\underline{u}$ und evtl. weiteren Indikatoren ist.
Wir verwenden auch die Abkürzung: $\gamma \,\Delta\, \underline{u} \rightleftharpoons \gamma \,\Delta \supseteq \{\underline{u}\}$.
Schließlich bezeichne z.B. $\mathrm{ind}(c \backslash A(x))$ die (durch eine Liste dargestellte) Menge aller in $c$, aber nicht in $A(x)$ vorkommenden Indikatoren.

$(\approx_0)$ sei wieder eine bereits eingeführte Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}_0$, bezüglich der alle Terme aus $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$ und alle Formeln aus $\mathcal{E}$ invariant sind. Für jede Variable $x \in \mathcal{V}_0$ sei der Wertebereich $\mathcal{C}(x)$ wieder invariant bez. $(\approx_0)$. Für Indikatoren $u, v$ sei dabei $(u \approx_0 v)$ definiert als $(u = v)$, wobei $(=)$ die in §5 eingeführte 'Gegenstandsgleichheit' sei. In jeder Situation gelte also: $u \approx_0 v \leftrightarrow u = v$. - Ferner gelte für $k, l \in \Omega$ wieder: $k \approx_0 l \;\leftrightarrow\; k = l$ ("$k$ ist gestaltlich gleich $l$").

Behauptungen von Aussagen der so erweiterten Sprache werden wieder einschränkenden Regeln unterworfen: Für die Elementaraussagen und die Aussagen (aus $\mathcal{A}$) der Formen $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ und $(\neg A)$ übernehmen wir die *Behauptungsregeln* aus

§5. Ferner stellen wir folgende Regeln auf, in denen $\delta$ jeweils eine Denotation aller in der links angeführten Aussage vorkommenden Indikatoren sei. (Die erste dieser Regeln fasst die beiden Regeln P(∃) und P(∃ den) aus §5 gewissermassen zusammen. Dies ist dadurch motiviert, dass nun Indikatoren in Konstanten vorkommen dürfen.)

$$\begin{array}{rcl} \natural\, \exists x \,\varepsilon\, C_m.\, A(x)|\delta & \Longrightarrow & \text{für ein } c \in \mathcal{C}_m(x): \\ & & \text{für ein } \gamma\,\Delta\,\mathrm{ind}(c\backslash A(x)):\ \natural\, A(c)|\gamma\delta \\ \natural\, c \,\varepsilon\, \{\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m \colon A(\overline{x})\}|\delta & \Longrightarrow & \natural\, c \in \overline{\mathcal{C}}_m,\ \natural\, A(c)|\delta, \end{array}$$

für $R \rightleftharpoons (\mathrm{J}\overline{x} \,\varepsilon\, \overline{C}_m, \mu, z \colon A(\overline{x}, \mu, z))$:

$$\begin{array}{rcl} \natural\, (\underline{c}, k) \,\varepsilon\, R(l)|\delta & \Longrightarrow & \natural\, (\underline{c}) \in \overline{\mathcal{C}}_m,\ \natural\, k < l,\ \natural\, A((\underline{c}), k, R(k))|\delta. \\ \natural\, \exists \overline{x} \,\varepsilon\, b(\overline{x}).\, A(\overline{x})|\delta & \Longrightarrow & \text{für ein } c \in \overline{\mathcal{C}}: \\ & & \text{für ein } \gamma\,\Delta\,\mathrm{ind}(c\backslash(b(\overline{x}), A(\overline{x}))): \\ & & \natural\, c \,\varepsilon\, b(c)|\gamma\delta,\ \natural\, A(c)|\gamma\delta \\ \natural\, \exists x \,\varepsilon\, \pi_m((c_1, \ldots, c_j), i).\, A(x)|\delta & \Longrightarrow & \natural\, c_i \in \mathcal{C}_m,\ \natural\, A(c_i)|\delta \quad (\text{falls } i \leq j) \\ \natural\, \exists x \,\varepsilon\, \pi_m((c_1, \ldots, c_j), i).\, A(x)|\delta & \Longrightarrow & \natural\, \perp \qquad (\text{falls } i > j) \\ \natural\, \exists x \,\varepsilon\, \pi_m(s, i).\, A(x)|\delta & \Longrightarrow & \natural\, \perp \qquad (\text{falls } \mathcal{V}(s) = \{x\}) \\ \natural\, c =_0 d|\delta & \Longrightarrow & \natural\, c, d \in \mathcal{C}_0,\ \natural\, c \approx_0 d|\delta \\ \natural\, c \,\varepsilon\, C^j_m|\delta & \Longrightarrow & \natural\, c \in \mathcal{C}^j_m. \end{array}$$

Für $d \in \mathcal{C}_0$ gelte $(c \,\varepsilon\, d)$ in jedem Kontext als widerlegt. Für $R$ wie oben und $a \notin \mathcal{C}_m(\overline{x}, \mu)$ gelte auch $(a \,\varepsilon\, R(l))$ in jedem Kontext als widerlegt. - Behauptungen von Aussagen aus $\mathcal{A}$ werden keinen weiteren Einschränkungen unterworfen.

Dementsprechend sei die *Vorgängerrelation* wie in §7 definiert.

Auch für die so erweiterte Sprache kann man wie in §7 zeigen, dass alle ihre Aussagen *zirkelfrei* sind, sodass die angegebenen Behauptungsregeln *umkehrbar* sind. Alles Folgende dient zum Beweis dafür, dass man mit den Aussagen aus $\mathcal{A}$ (im klassischen Spiel) klassisch argumentieren darf - und alle Formeln von $\mathcal{F}$ invariant bez. (=) sind (Korollarien 8.1 und 8.2 unten).

**Voraussetzungen**: Für jede bindbare Gegenstandsvariable $\xi$ enthalte $\mathcal{C}(\xi)$ unendlich viele Indikatoren, aber keine anderen Elemente. Für jeden Indikator $u$ gebe es ein $\xi$ mit $u \in \mathcal{C}(\xi)$. Für jedes $\xi$ gebe es unendlich viele $\eta$ mit $\mathcal{C}(\xi) = \mathcal{C}(\eta)$. - Für $x \in \mathcal{V}_0$ und $u \in \mathcal{C}(\xi)$ gelte

$$\begin{array}{rcl} t \in \mathcal{T}(x) & \underline{\rightarrow} & t^u_\xi \in \mathcal{T}(x) \\ t \in \mathcal{T}_{\mathrm{or}} & \underline{\rightarrow} & t^u_\xi \in \mathcal{T}_{\mathrm{or}} \\ E \in \mathcal{E} & \underline{\rightarrow} & E^u_\xi \in \mathcal{T}_{\mathrm{or}}. \end{array}$$

Bemerkung: Nach **V1, V2** von §7 und der Anmerkung zum Beweis von Lemma 7.1' gilt das Gleiche auch nach Vertauschen von $\xi$ mit $u$.

**Lemma 8.1:** Seien $(\underline{u}), (\underline{v}) \in \mathcal{C}(\underline{\xi})$ und $x \in \mathcal{W}$. Die Glieder von $\underline{u}$ seien voneinander verschieden. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} t \in \mathcal{T}_n & \underline{\rightarrow} & t^{\underline{u}}_{\underline{\xi}} \in \mathcal{T}_n \\ c \in \mathcal{C}_n(x) & \underline{\rightarrow} & c^{\underline{u}}_{\underline{v}} \in \mathcal{C}_n(x). \end{array}$$

**Beweis:** 1. Fall: Sei $x \in \mathcal{V}_0$. Dann ist $\mathcal{C}_n(x) = \mathcal{C}(x)$, und aus $c \in \mathcal{C}(x)$ folgt nacheinander $c^{u_1}_{\xi_1} \in \mathcal{T}(x)$, $c^{u_1,u_2}_{\xi_1,\xi_2} \equiv (c^{u_1}_{\xi_1})^{u_2}_{\xi_2} \in \mathcal{T}(x)$ usw., also $c^{\underline{u}}_{\underline{\xi}} \in \mathcal{T}(x) \subseteq \mathcal{T}_0$ - und ebenso $c^{\underline{u}}_{\underline{v}} \equiv (c^{\underline{u}}_{\underline{\xi}})^{\underline{\xi}}_{\underline{v}} \in \mathcal{C}(x)$.
2. Fall: Sei $x \in \mathcal{V}$. Dann ist $\mathcal{C}_n(x) = \mathcal{C}_n$, und nach dem Vorbild des Beweises von Lemma 7.1 läßt sich zeigen, dass für alle $\Phi \in \mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\mathcal{F}_n$ und $u \in \mathcal{C}(\xi)$ gilt $\Phi^u_\xi \in \mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\mathcal{F}_n$. Somit und nach Lemma 7.1 erhalten wir für alle $\Phi \in \mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\mathcal{F}_n$ wie im 1. Fall $\Phi^{\underline{u}}_{\underline{\xi}}, \Phi^{\underline{u}}_{\underline{v}} \in \mathcal{T}_n, \overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\mathcal{F}_n$. Insbesondere gilt: $c \in \mathcal{C}_n \;\underline{\rightharpoonup}\; c^{\underline{u}}_{\underline{v}} \in \mathcal{C}_n$. $\square$

Um anschließend einige Beweise vereinfachen zu können, simulieren wir noch die Gegenstandsquantifikation durch eine Einsetzungsquantifikation. Dazu führen wir Figuren der Gestalt $u^\delta$ ein, und zwar gewissermaßen als (kontextunabhängige) Eigennamen von Gegenständen, die in $\delta$ durch $u$ bezeichnet werden.

Vorausgesetzt sei nun, dass die (hier betrachteten) Denotationen als sprachliche Darstellungen (s. §5, Absatz 4) gegeben und in der Form $(\delta_1, \ldots, \delta_j)$ aus je endlich vielen singulären Denotationen (d.h. je eines Indikators) zusammengesetzt sind. Ist dabei $\delta_i$ eine Denotation von $u_i$ für $i = 1, \ldots, j$, so seien die Indikatoren $u_1, \ldots, u_j$ paarweise verschieden. - Für singuläre Denotationen $\delta, \delta'$ schreiben wir $\delta \cong \delta'$ um mitzuteilen, dass sie (als sprachliche Darstellungen) gestaltlich gleich sind. Für zusammengesetzte Denotationen $\delta, \delta'$ schreiben wir $\delta \cong \delta'$ um mitzuteilen, dass sie durch eine Permutation ihrer singulären Anteile auseinander hervorgehen.

Um Figuren der Gestalt $u^\delta$ mit $\delta \,\Delta\, u$ wie Eigennamen verwenden zu können, konstruieren wie eine weitere Sprache, in der derartige Figuren als zusätzliche Konstante 0. Stufe vorkommen: $\hat{\mathcal{T}}_{\mathrm{Or}}$ bzw. $\hat{\mathcal{E}}$ sei die Menge derjenigen Figuren ('Originalterme' bzw. 'Elementarformeln'), die aus den Elementen von $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}}$ bzw. $\mathcal{E}$ dadurch entstehen, dass man die in ihnen vorkommenden Indikatoren $u$ durch Konstante der Gestalt $v^\delta$, für die $u, v \in \mathcal{C}(\xi)$ für ein $\xi$ und $\delta \,\Delta\, v$ gilt, substituiert. Ebenso entstehe $\hat{\mathcal{C}}(x)$ aus $\mathcal{C}(x)$ für $x \in \mathcal{V}_0$. Die Terme und Formeln aus $\hat{\mathcal{T}}_n \cup \hat{\overline{\mathcal{T}}}_n \cup \hat{\mathcal{F}}_n$ mögen nun aus den Elementen von $\hat{\mathcal{T}}_{\mathrm{Or}} \cup \hat{\mathcal{E}}$ in gleicher Weise entstehen wie die Elemente von $\mathcal{T}_n \cup \overline{\mathcal{T}}_n \cup \mathcal{F}_n$ aus denen von $\mathcal{T}_{\mathrm{Or}} \cup \mathcal{E}$. D.h., $\Psi$ sei genau dann ein Element von $\hat{\mathcal{T}}_n$, $\hat{\overline{\mathcal{T}}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{F}}_n$, wenn die Metaaussage $(\Psi \in \hat{\mathcal{T}}_n)$, $(\Psi \in \hat{\overline{\mathcal{T}}}_n)$ bzw. $(\Psi \in \hat{\mathcal{F}}_n)$ nach den entsprechenden '$\hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{F}}$-Regeln' herleitbar ist. $\hat{\mathcal{C}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{A}}_n$ sei die Menge aller Elemente von $\hat{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{F}}_n$, in denen keine Elemente von $\overline{\mathcal{W}}$ frei vorkommen. Schließlich sei $\hat{\mathcal{A}} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\Omega} \hat{\mathcal{A}}_n$ etc.

Für die komplexen Aussagen aus $\hat{\mathcal{A}}$ übernehmen wir die in §7 aufgestellten Behauptungsregeln. Ferner werden wir Elementarregeln aufstellen, welche die Regeln für die zu $\mathcal{E}$ gehörigen Elementaraussagen auf entsprechende Aussagen von $\hat{\mathcal{E}}$ 'übertragen'. (Damit erübrigt es sich, für die Aussagen aus $\hat{\mathcal{E}} \backslash \mathcal{E}$ eine zusätzliche externe Regel wie $\mathrm{P}_{\mathrm{ext}}$ aufzustellen.)

**Definitionen:** Für $\Phi \in \mathcal{T} \cup \overline{\mathcal{T}} \cup \mathcal{F}$ und $\delta \,\Delta \supseteq \mathrm{ind}(\Phi)$ entstehe $\Phi^\delta$ aus $\Phi$, indem man alle Vorkommnisse von Indikatoren $u$ durch $u^\delta$ ersetzt. Wir haben also

$$\Phi(u_1, \ldots, u_j)^\delta \equiv \Phi(u_1^\delta, \ldots, u_j^\delta).$$

Auch für $\underline{u} \equiv u_1, \ldots, u_j$ setzen wir: $\underline{u}^\delta \rightleftharpoons u_1^\delta, \ldots, u_j^\delta$. - Ferner sei

$$\delta!u \;\rightleftharpoons\; \delta_i,$$

falls $\delta \cong (\delta_1, \ldots, \delta_j)$ mit singulären Denotationen $\delta_1, \ldots, \delta_j$ (verschiedener Indikatoren) ist, unter ihnen $\delta_i$ vorkommt und durch $\delta_i \,\Delta\, u$ bestimmt ist.

Nun stellen wir die angekündigten *Elementarregeln* auf, in denen wir einfach $(u^\gamma = v^\delta)$ für $(u^\gamma \approx_0 v^\delta)$ schreiben:

$$\begin{array}{rcll} \natural\, E^\delta & \Leftrightarrow & \natural\, E|\delta & \text{für } E \in \mathcal{E},\ \delta\,\Delta \supseteq \mathrm{ind}(E) \\ & \Rightarrow & \natural\, u^\delta = u^{\delta!u}, & \text{falls } \delta\,\Delta\, u \\ \natural\, u^\gamma = v^\delta,\ \natural\, \hat{E}(u^\gamma) & \Rightarrow & \natural\, \hat{E}(v^\delta) & \text{für } \hat{E}(u^\gamma), \hat{E}(v^\delta) \in \hat{\mathcal{E}}. \end{array}$$

Damit erhalten wir leicht:

$$\begin{array}{ll} u^{\gamma\delta} = u^\gamma, & \text{falls } \gamma\,\Delta\, u \\ v^{\gamma\delta} = v^\delta, & \text{falls } \delta\,\Delta\, v, \text{ aber nicht } \gamma\,\Delta\, v. \end{array}$$

**Lemma 8.2:** Zu jedem $\hat{c} \in \hat{\mathcal{C}}_m(x)$ mit $x \in \mathcal{W}$ gibt es ein $c \in \mathcal{C}_m(x)$ und eine Denotation $\beta$ mit $\beta\,\Delta\,\mathrm{ind}(c)$ und $\hat{c} = c^\beta$.

**Beweis**: Durch Induktion nach den $\hat{\mathcal{T}}, \hat{\mathcal{F}}$-Regeln kann man beweisen, dass es zu jedem Element $\Psi$ von $\hat{\mathcal{T}}_n$, $\hat{\overline{\mathcal{T}}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{F}}_n$ $(n \in \Omega)$ ein Element $\Phi$ von $\mathcal{T}_n$, $\overline{\mathcal{T}}_n$ bzw. $\mathcal{F}_n$ gibt, aus dem $\Psi$ durch *Substitution* der in $\Phi$ vorkommenden Indikatoren $u$ durch neue Konstante $v^\delta$ entsteht, wobei $u, v \in \mathcal{C}(\xi)$ für ein $\xi$ und $\delta\,\Delta\, v$ gilt. -
Nun sei $\hat{c} \in \hat{\mathcal{C}}_m(x)$. Dann entsteht $\hat{c}$ aus einer Konstanten $c(u_1, \ldots, u_j) \in \mathcal{C}_m(x)$, in der genau die verschiedenen Indikatoren $u_1, \ldots, u_j$ vorkommen, durch Substitution derselben durch Konstante der Form $v_1^{\delta_1}, \ldots, v_j^{\delta_j}$, für die es voneinander verschiedene $\xi_1, \ldots, \xi_j$ mit $(u_1, \ldots, u_j), (v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{C}(\xi_1, \ldots, \xi_j)$ gibt und $\delta_i\,\Delta\, v_i$ für $i = 1, \ldots, j$ gilt. Also ist $\hat{c} \equiv c(v_1^{\delta_1}, \ldots, v_j^{\delta_j})$. Wir setzen $\delta_i' \rightleftharpoons \delta_i!v_i$, $\beta_i \rightleftharpoons \delta_i'[v_i/u_i]$ (s. §5) und $\beta \rightleftharpoons (\beta_1, \ldots, \beta_j)$. Nun gilt $v_i^{\delta_i} = v_i^{\delta_i'} = u_i^{\beta_i} = u_i^\beta$. Nach Lemma 8.1 ist $c(\xi_1, \ldots, \xi_j) \in \hat{\mathcal{T}}$, also invariant bez. $(=)$. Es folgt $\hat{c} = c(u_1^\beta, \ldots, u_j^\beta) = c(u_1, \ldots, u_j)^\beta$. $\square$

**Satz 8.1:** Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $\delta\,\Delta \supseteq \mathrm{ind}(A)$ gilt: $A^\delta \;\underline{\leftrightarrow}\; (A|\delta)$.

Dies ist in einer Erweiterungs- und Metasprache formuliert, in der die Aussagen der Form $(A|\delta)$ eingeführt sind mit Hilfe der (einzigen) Behauptungsregel:
$\natural(A|\delta) \Longrightarrow \natural A|\delta$. In dieser Sprache argumentieren wir nun klassisch.

**Beweis:** Nach Satz 7.2 genügt es zu zeigen, dass die Klasse $\mathcal{X}$ aller Aussagen $A$, für die $A^\delta \;\underline{\leftrightarrow}\; (A|\delta)$ für alle $\delta\,\Delta \supseteq \mathrm{ind}(A)$ gilt, progressiv ist. Nicht-trivial sind nur folgende beiden Metaaussagen: 1. $(\exists x\,\varepsilon\, C_m.\, A(x)) \in \mathcal{X}$ gilt dann, wenn (I.V.) $A(c) \in \mathcal{X}$ für alle $c \in \mathcal{C}_m(x)$ gilt. 2. Die entsprechende Metaaussage über $(\exists \overline{x}\,\varepsilon\, b(\overline{x}).\, A(\overline{x}))$. - Wir beweisen hier nur 1. und schreiben dabei $A(x,\underline{v})$ statt $A(x)$, wobei $\underline{v}$ eine Liste aller vorkommenden Indikatoren sei. - Unter der angeführten I.V. gilt dann für alle $\delta \,\Delta\, \underline{v}$ (nach den Behauptungs- und Inversionsregeln):

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists x\,\varepsilon\, C_m.\, A(x,\underline{v})|\delta) \\
\underline{\leftrightarrow} & \underline{\exists}\, c \in \mathcal{C}_m(x).\, \underline{\exists}\, \gamma \,\Delta\, \mathrm{ind}(c\backslash\underline{v}).\, (A(c,\underline{v})|\gamma\delta) \\
\underline{\leftrightarrow} & \underline{\exists}\, c \in \mathcal{C}_m(x).\, \underline{\exists}\, \gamma \,\Delta\, \mathrm{ind}(c\backslash\underline{v}).\, A(c,\underline{v})^{\gamma\delta} \qquad \text{(nach I.V.)} \\
 & \big[\text{beachte nun: } A(c,\underline{v})^{\gamma\delta} \equiv A(c^{\gamma\delta},\underline{v}^{\gamma\delta}) \text{ und } \underline{v}^{\gamma\delta} = \underline{v}^{\delta}\,\big] \\
\underline{\rightarrow} & \underline{\exists}\, c \in \mathcal{C}_m(x).\, \underline{\exists}\, \beta \,\Delta\, \mathrm{ind}(c).\, A(c^{\beta},\underline{v}^{\delta}) \\
\underline{\leftrightarrow} & \underline{\exists}\, \hat{c} \in \hat{\mathcal{C}}_m(x).\, A(\hat{c},\underline{v}^{\delta}) \qquad\qquad (\,(\underline{\leftarrow})\text{ nach Lemma 8.2)} \\
\underline{\leftrightarrow} & \exists x\,\varepsilon\, C_m.\, A(x,\underline{v})^{\delta}.
\end{array}
$$

Zu zeigen ist noch:

$$\underline{\exists}\, c \in \mathcal{C}_m(x).\, \underline{\exists}\, \beta \,\Delta\, \mathrm{ind}(c).\, A(c^{\beta},\underline{v}^{\delta}) \;\underline{\rightarrow}\; (\exists x\,\varepsilon\, C_m.\, A(x,\underline{v})|\delta).$$

Gegeben seien dazu $c(\underline{u}) \in \mathcal{C}_m(x)$ und eine Denotation $\beta$ mit $\beta \,\Delta\, \{\underline{u}\}$; dabei seien $\underline{u} \rightleftharpoons u_1,\ldots,u_j$ die verschiedenen in $c(\underline{u})$ vorkommenden Indikatoren. Dann gibt es verschiedene $\underline{\xi} \rightleftharpoons \xi_1,\ldots,\xi_j$ mit $(\underline{u}) \in \mathcal{C}(\underline{\xi})$ und verschiedene $\underline{w} \rightleftharpoons w_1,\ldots,w_j$, für die $w_1,\ldots,w_j \notin \{\underline{u},\underline{v}\}$ und $(\underline{w}) \in \mathcal{C}(\underline{\xi})$ gilt. Nach Lemma 8.1 gilt dann: $c(\underline{w}) \in \mathcal{C}_m(x)$. Nach Satz 5.2 gibt es ferner eine Denotation $\gamma$ mit $\gamma \,\Delta\, \{\underline{w}\}$ und $u_i = w_i$ in $\beta\gamma$ für $i = 1,\ldots,j$. Für $i = 1,\ldots,j$ gilt *nicht* $\beta \,\Delta\, w_i$, und für alle $v \in \{\underline{v}\}$ gilt *nicht* $\gamma \,\Delta\, v$. Daher erhalten wir $\underline{u}^{\beta} = \underline{u}^{\beta\gamma} = \underline{w}^{\beta\gamma} = \underline{w}^{\gamma} = \underline{w}^{\gamma\delta}$ sowie $\underline{v}^{\delta} = \underline{v}^{\gamma\delta}$. Ferner ist $\{\underline{w}\} = \mathrm{ind}(c(\underline{w})) = \mathrm{ind}\big(c(\underline{w})\backslash\underline{v}\big)$. Daher und wegen der Invarianz der Formeln von $\hat{\mathcal{F}}$ bez. $(=)$ (d.i. $(\approx_0)$) gilt unter der angeführten I.V.:

$$
\begin{array}{rcccl}
A(c(\underline{u}^{\beta}),\underline{v}^{\delta}) & \underline{\rightarrow} & A(c(\underline{w}^{\gamma\delta}),\underline{v}^{\gamma\delta}) & \underline{\rightarrow} & A(c(\underline{w}),\underline{v})^{\gamma\delta} \\
 & \underline{\rightarrow} & (A(c(\underline{w}),\underline{v})|\gamma\delta) & \underline{\rightarrow} & (\exists x\,\varepsilon\, C_m.\, A(x,\underline{v})|\delta). \quad \square
\end{array}
$$

**Korollar 8.1:** Die Schlussregeln der klassischen Logik sind für die Formeln von $\mathcal{F}$ (in denen Indikatoren oder Gegenstandsvariable vorkommen dürfen) klassisch zulässig.

**Beweis:** Ist z.B. $A_1, A_2 \Rightarrow B$ ein Einzelfall einer der Regeln R1 - R29 (in nicht abgekürzter Form), dann gilt:

$$(A_1|\delta) \;\underline{\wedge}\; (A_2|\delta) \;\underline{\rightarrow}\; A_1^{\delta} \;\underline{\wedge}\; A_2^{\delta} \;\underline{\rightarrow}\; B^{\delta} \;\underline{\rightarrow}\; (B|\delta). \quad \square$$

**Korollar 8.2:** Invariant bez. $(=)$ sind alle Formeln von $\mathcal{F}$.

**Beweis:** $A(\underline{x})$ sei eine Formel, in der genau die Variablen $\underline{x}$ (aus $\overline{\mathcal{W}}$) frei vorkommen. Ferner seien $\underline{c}, \underline{d} \in \mathcal{C}(\underline{x})$. Dann gilt

$$((\underline{c} = \underline{d} \;\wedge\; A(\underline{c}))|\delta) \;\underline{\rightarrow}\; (\underline{c}^{\delta} = \underline{d}^{\delta} \;\wedge\; A(\underline{c})^{\delta}) \;\underline{\rightarrow}\; A(\underline{d})^{\delta} \;\underline{\rightarrow}\; (A(\underline{d})|\delta). \quad \square$$

Aus Korollar 8.1 ergibt sich insbesondere, dass man in den Aussagen von $\mathcal{A}$ beliebige Einsquantoren miteinander vertauschen darf. Dieses Ergebnis weicht scheinbar von der bekannten Tatsache ab, dass - etwa im Kontext von [9, §28] - aufeinander folgende Einsquantoren, von denen einer eine Gegenstandsvariable und der andere eine Einsetzungsvariable bindet, i.Allg. nicht vertauscht werden dürfen. Diese scheinbare Abweichung ist dadurch zu erklären, dass die hier in §8 eingeführte Einsquantifikation gewissermaßen aus einer Einsetzungs- und (i.Allg.) einer Gegenstandsquantifikation *zusammengesetzt* ist.

## L i t e r a t u r


[1] Dalen, D. van: Intuitionistic Logic. In: D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Handbook of Philosophical Logic, Vol. III, 1986, 225-339.

[2] Kambartel, F.: Notwendige Geltung. Zum Verständnis des Begrifflichen. In P. Janich (Hg.): Entwicklungen der methodischen Philosophie, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1992.

[3] Kolmogoroff, A.N.: Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Mathematische Zeitschrift Bd. 25 (1932), 58ff.

[4] Kreisel, G.: Mathematical logic. In T.L. Saaty (ed.), Lectures on Modern Mathematics III, Wiley & Sons, New York 1965, 95-195.

[5] Lorenz, K.: On the Criteria for the Choice of the Rules of Dialogic Logic. In: Studies in Language Companion Series, Vol. 8, Amsterdam: Benjamins 1982, 145-157.

[6] Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Springer, Berlin 1955.

[7] -: Differential und Integral. Akad. Verlagsges. Frankfurt a.M. 1965.

[8] -: Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. B.I., Mannheim 1986.

[9] Quine, W.V.O.: Die Wurzeln der Referenz. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1989.

[10] Russel, B.: Mathematical Logik as Bases on the Theory of Types. Amer. J. of Math. 30 (1908) 222 - 262.

[11] Schroeder-Heister, P.: Popper's Theory of Deductive Inference and the Concept of a Logical Constant. History and Philosophy of Logic, 5 (1984), 79-110.

[12] Schütte, K.: Proof Theory. Springer, Berlin 1977.

[13] Sundholm, G.: Constructions, proofs and the meanings of the logical constants. J. Phil. Logic **12**, 1983, 151-172.

[14] Troelstra, A.S., Schwichtenberg, H.: Basic Proof Theory. Cambridge University Press 1996.

[15] Weyl, H.: Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis. Leipzig 1918, repr. Leipzig 1932 und New York o.J. 1960.

[16] Zahn, P.: Gedanken zur pragmatischen Begründung von Logik und Mathematik: In: H. Stachowiak (Hg.): Pragmatik IV, Meiner, Hamburg 1993, 424-455.