Restriktions- und Fortsetzungssätze für Hankelmultiplikatoren

Natsuko Arai

1 Einleitung

1.1 Hauptergebnisse

Die L^p-Norm radialer Funktionen f in $\mathbb{R}^n$ kann man mit L^p-Normen bzgl. des Maßes $r^{n-1}\,dr$ von Funktionen auf $\mathbb{R}^+ := (0,\infty)$ identifizieren, d.h. es gilt

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(|x|)|^p\,dx\right)^{1/p} \approx \left(\int_0^\infty |f(r)|^p r^{n-1}\,dr\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty\,. \tag{1.1}$$

Für die Fouriertransformierte einer radialen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(|\xi|)e^{-x\xi}\,dx = (2\pi)^{n/2}\int_0^\infty f(r)(|\xi|r)^{-\frac{n-2}{2}}J_{(n-2)/2}(|\xi|r)r^{n-1}\,dr\,, \tag{1.2}$$

wobei $J_{(n-2)/2}$ die Besselfunktion erster Art der Ordnung $(n-2)/2$ sind ([18, 1.71]). Wir betrachten, von der rechten Seite von (1.1) ausgehend, für $\nu \ge -1/2$ den Raum

$$L^p_{2\nu+1} := L^p(\mathbb{R}^+, x^{2\nu+1}\,dx) = \{f \text{ meßbar auf } (0,\infty) : \|f\|_{p,2\nu+1} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{p,2\nu+1} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\nu+1}\,dx\right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

und benutzen die Abkürzung $\|\bullet\|_p := \|f\|_{p,0}$. Als Erweiterung von (1.2) ist für $\nu \ge -1/2$ und einer auf $\mathbb{R}^+$ integrierbaren Funktion f die (modifizierte) Hankeltransformation der Ordnung ν durch

$$H_\nu f(x) = \int_0^\infty \frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} f(y)y^{2\nu+1}\,dy\,, \qquad x > 0\,,$$

definiert. Wir können uns daher intuitiv die Hankeltransformierte als Fouriertransformierte von radialen Funktionen vorstellen, die auf „gebrochendimensionalen“ Vektorräumen über

$\mathbb{R}$ definiert sind. Die halbganzzahligen Ordnungen ν entsprechen dabei der Fouriertransformation radialer Funktionen über $\mathbb{R}^n$ mit $\nu = \frac{n-2}{2}$. Der Spezialfall $\nu = -1/2$ ist wegen $x^{1/2} J_{-1/2}(x) = (2/\pi)^{1/2} \cos(x)$ gerade die Cosinustransformation.
Da

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \leq c \min\left\{1, x^{-\nu-1/2}\right\}, \quad \nu \geq -1/2,$$

gilt, ist wegen der Hölderungleichung $H_\nu f(x)$, $x > 0$, punktweise für alle Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^+, x^{2\nu+1}\,dx)$, $1 \leq p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$ definiert. Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^+, x^{2\nu+1}\,dx)$ mit $H_\nu f \in L^1(\mathbb{R}^+, x^{2\nu+1}\,dx)$ gilt die Inversionsformel

$$f(y) = \int_0^\infty \frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} H_\nu f(x) x^{2\nu+1}\,dx\,. \tag{1.3}$$

Daher ist die Hankeltransformation H_ν eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, dem Raum aller beliebig oft differenzierbaren, geraden Funktionen auf $\mathbb{R}$, deren Ableitungen stark fallen ([17]).
Im Fall $p = 2$ gilt für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ die Parseval-Identität $\|H_\nu f\|_{2,2\nu+1} \approx \|f\|_{2,2\nu+1}$.
Bezeichnen wir mit C_c^∞ den Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^+ := (0,\infty)$, so ist $H_\nu(C_c^\infty)$ dicht in $L^p_{2\nu+1}$ für $1 < p < \infty$ und $\nu > -1/2$ nach [17, Theorem 4.7].

Wir definieren nun Hankelmultiplikatoren. Sei $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, meßbare Funktion. Die Funktion m wird dann Multiplikator bzgl. der Hankeltransformation der Ordnung ν genannt, falls

$$\|H_\nu[m \cdot H_\nu f]\|_{p,2\nu+1} \leq C\|f\|_{p,2\nu+1}\,, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)\,, \tag{1.4}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C gilt. Wir schreiben

$$M_\nu^p := \left\{m \in L^\infty(\mathbb{R}^+) : \|m\|_{M_\nu^p} < \infty\right\},$$

wobei $\|m\|_{M_\nu^p}$ die kleinste Konstante C ist, bzgl. welcher die Ungleichung (1.4) gilt.
Einfache Beispiele für Multiplikatoren sind, wie auch im Fall der Fouriertransformation, beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in $(0,\infty)$.
Ferner gilt auch im Falle der Hankeltransformation durch die Parseval-Identität $M_\nu^2 = L^\infty$, die Dualität $M_\nu^p = M_\nu^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, sowie durch Interpolation

$$M_\nu^p \hookrightarrow M_\nu^q \hookrightarrow M_\nu^2 = L^\infty\,, \qquad 1 \leq p \leq q \leq 2\,. \tag{1.5}$$

Dabei sagen wir, daß für zwei normierte Vektorräume X und Y eine stetige Einbettung $X \hookrightarrow Y$ vorliegt, falls $X \subseteq Y$ und für jedes $x \in X$ die Abschätzung $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ mit einer von x unabhängigen Konstanten c gilt.

In dieser Arbeit interessieren wir uns für Beziehungen zwischen Multiplikatorenräumen M^P_λ und M^R_κ mit verschiedener Ordnung λ und κ. Diese Fragestellung wurde inspiriert durch das folgende Ergebnis von deLeeuw [20, Theorem 2.4] für klassische Fouriermultiplikatoren:

Restriktionssatz von deLeeuw.
Sei $m \in M^p(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann gilt $m(\xi, \bullet) \in M^p(\mathbb{R}^k)$ für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|m(\xi,\bullet)\|_{M^p(\mathbb{R}^k)} \leq c\|m\|_{M^p(\mathbb{R}^{n+k})}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

wobei

$$\|m\|_{M^p(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\|\mathcal{F}[m\mathcal{F}f]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \colon f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq 1\right\}$$

gesetzt ist. ■

Da nach Definition radiale Fouriermultiplikatoren (bzgl. $\mathbb{R}^n$) auch Hankelmultiplikatoren (bzgl. $\nu = \frac{n-2}{2}$) sind, macht es Sinn zu fragen, unter welchen Bedingungen stetige Einbettungen vom Typ

$$M^P_\lambda \hookrightarrow M^R_\kappa\,, \tag{1.6}$$

gültig sind. Falls $\kappa < \lambda$ nennen wir, in Anlehnung an das Ergebnis von deLeeuw, eine solche Einbettung einen *Restriktionssatz* (bzgl. der Dimension), falls $\kappa > \lambda$ einen *Fortsetzungssatz* (bzgl. der Dimension). Man beachte dabei, daß der Restriktionssatz von deLeeuw die Einbettung (1.6) für $P = R$, $\lambda = \frac{n+k-2}{2}$ und $\kappa = \frac{n-2}{2}$ nicht beinhaltet, da für Fouriermultiplikatoren alle Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$ betrachtet werden, hingegen in (1.4) nur radiale f.

Bei der Untersuchung von Einbettungen des Typs (1.6) stützen wir uns fundamental auf die folgende tiefliegende (zweite) Ungleichung von D. Müller und A. Seeger [9]:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty |K(r)|^p\, r^{n-1}\, dr\right)^{1/p} &\leq c\|K*\|_{L^p_{rad}(L^2_{sph})\longrightarrow L^p_{rad}(L^2_{sph})}\\ &\leq c\left(\int_0^\infty |(1+r)^\varepsilon K(r)|^p r^{n-1}\, dr\right)^{1/p}, \qquad 1<p<\frac{2n}{n+1}\,;\end{aligned}$$

hierbei wird vorausgesetzt, daß die Fouriertransformierte des Kerns $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger weg von der Null hat, d.h. $\operatorname{supp}\hat{K} \subset (0,\infty)$. Diese Ungleichungskette impliziert bereits sogenannte lokale Restriktions- und Fortsetzungssätze (vgl. Beweis zum lokalen Fortsetzungssatz 3.2). Nach A. Seeger [11] läßt sich dieses Ergebnis für lokale Multiplikatoren unter minimalen Glattheitsvoraussetzungen, (die z.B. durch $P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$ garantiert sind – siehe Proposition 2.5), global fortsetzen. Die Notationen werden in Kapitel 4.1 erläutert.

Ein Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Restriktionssatz für Hankelmultiplikatoren.

Theorem 1.1 *(Restriktionssatz)*
Seien $0 \le \lambda$ und $1 < P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$. Dann gilt für $0 \le \kappa < \lambda$ und $1 < R < \infty$ die Einbettung

$$M_\lambda^P \hookrightarrow M_\kappa^R \,, \qquad (2\kappa+2)|1/R-1/2| < (2\lambda+2)(1/P-1/2)\,. \tag{1.7}$$

Für $(2\kappa+2)|1/R-1/2| > (2\lambda+2)(1/P-1/2)$ ist die Einbettung (1.7) nicht gültig, d.h. das Ergebnis (1.7) ist fast optimal.

Zum Nachweis der Notwendigkeit der Bedingung

$$(2\kappa+2)|1/R-1/2| \le (2\lambda+2)(1/P-1/2) \tag{1.8}$$

betrachtet man den sogenannten Bochner-Riesz-Kern $(1-x^2)_+^\gamma$, $\gamma > 0$. Falls $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$, $\nu > -1/2$, gilt nach [6, S.257]

$$(1-x^2)_+^\gamma \in M_\nu^p \quad \Leftrightarrow \quad (2\nu+2)(1/p-1/2)-1/2 < \gamma\,.$$

Wir nehmen $1 < R \le 2$ an. Würde (1.8) mit „$>$“ gelten, dann existierte ein γ mit

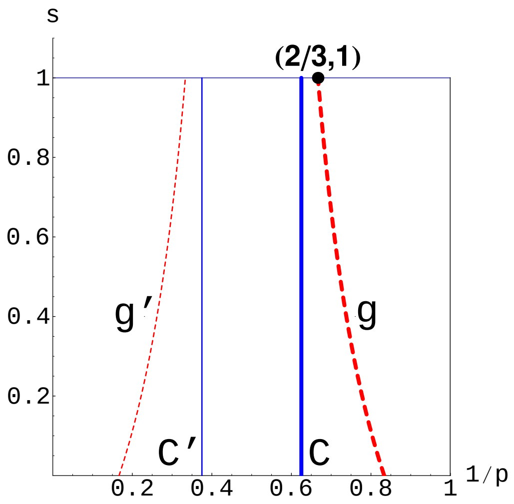
$$(2\kappa+2)(1/R-1/2) > \gamma > (2\lambda+2)(1/P-1/2)\,.$$

Hieraus würde $(1-x^2)_+^\gamma \in M_\lambda^P$ folgen, jedoch nicht $(1-x^2)_+^\gamma \in M_\kappa^R$.

Bemerkung:
Gleichwertig zur Voraussetzung des Restriktionssatzes ist die Bedingung

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{P} + \frac{\lambda-\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{2}\right) =: g^{-1}(\kappa)\,, \quad 1 < R \le 2\,. \tag{1.9}$$

Die folgende Skizze verdeutlicht die Situation im Falle $P = 3/2$ und $\lambda = 1$.



Die Kurve g ist der Graph der Inversen von g^{-1} und die Gerade C markiert den kritischen Punkt $\frac{2\lambda+3}{4\lambda+4}$ (Nach Voraussetzung muß $P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$ gelten). g' und C' sind die an der Geraden $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ gespiegelten (dualen) Größen. Die zugelassenen Einbettungen (1.7) werden durch den Bereich veranschaulicht, der durch g und g' begrenzt ist.

Wir interessieren uns nun für die Situation des Fortsetzungssatzes (die Ordnung der Hankeltransformation wird erhöht.)

$$M_\lambda^P \hookrightarrow M_\mu^Q, \qquad \lambda < \mu, \quad P < Q < Q'.$$

In diesem Zusammenhang erwähnen wir für radiale Fouriermultiplikatoren den folgenden Satz von Coifman und Weiss [3, Theorem 6.5]:

Fortsetzungssatz von Coifman und Weiss.
Sei $\xi_{(k)} := (\xi_1 \ldots, \xi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *ein Vektor in* $\mathbb{R}^k$. *Falls* $[t^{n-1}(t^n m(t))']_{t=|\xi_{(n)}|}$, $t \geq 0$, *ein Fouriermultiplikator in* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *ist, so gilt* $m(|\xi_{(n+2)}|) \in M^p(\mathbb{R}^{n+2})$ *mit*

$$\|m(|\xi_{(n+2)}|)\|_{M^q(\mathbb{R}^{n+2})} \leq c\|[t^{n-1}(t^n m(t))']_{t=|\xi_{(n)}|}\|_{M^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 1 \leq q = p \leq \infty.$$

Dieses Kriterium läßt sich einfach auf unsere Situation übertragen.

Proposition 1.2 *Sei* $-1/2 < \lambda$ *und* $1 < P < 2$. *Dann gilt für eine hinreichend glatte Funktion* $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *die Abschätzung*

$$\|m\|_{M_\mu^P} \leq c\|m\|_{M_\lambda^P} + c\|tm'(t)\|_{M_\lambda^P}, \qquad \mu = \lambda + \frac{P}{2-P}$$

mit einer von m *unabhängigen Konstanten* c.

Dieses Ergebnis, das am Ende des Kapitels 1.2 bewiesen wird, ist wesentlich weniger tiefliegend als der nachfolgende zweite Hauptsatz dieser Arbeit, Theorem 1.3. In Theorem 1.3 wird keine zusätzliche Glattheitsforderung an den Multiplikator m gestellt. Vielmehr wird eine höhere Ordnung μ dadurch erkauft, daß man P durch Q, $P < Q < P'$, ersetzt. (Vgl. auch Bemerkung (c) zum Fortsetzungssatz Theorem 1.3.)

Theorem 1.3 *(Fortsetzungssatz)*
Seien $0 < \lambda$ *und* $1 < P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$. *Dann gilt für* $P < Q < P'$ *und* $0 < \mu$,

$$\lambda < \mu < \begin{cases} \infty, & 1 < P \leq \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} \\ \frac{1}{4}\frac{1}{\lambda+1-(2\lambda+1)/P} - 1, & \max\left\{1, \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\right\} < P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}, \end{cases} \tag{1.10}$$

die Einbettung

$$M_\lambda^P \hookrightarrow M_\mu^Q, \qquad (2\mu+1)\,|1/Q - 1/2| < (2\lambda+1)\,(1/P - 1/2). \tag{1.11}$$

Für $(2\mu+1)\,|1/Q - 1/2| > (2\lambda+1)\,(1/P - 1/2)$ *ist die Einbettung (1.11) nicht mehr gültig, d.h. das Ergebnis (1.11) ist fast optimal.*

Um die Notwendigkeit der Voraussetzung

$$(2\mu + 1)(1/Q - 1/2) \le (2\lambda + 1)(1/P - 1/2) \tag{1.12}$$

zu begründen, sehen wir uns den Multiplikator $m_\gamma(s) := s^{-\gamma} J_\gamma(s)$ als Beispiel an. Sei $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$. Nach Satz 4.3 ist $m_\gamma \in M_\nu^p$, falls $\gamma > (2\nu+1)(1/p - 1/2) - 1/2$. Ferner folgt aus $m_\gamma \in M_\nu^p$ die Bedingung $\gamma \ge (2\nu+1)(1/p-1/2) - 1/2$. Nehmen wir nun an, daß (1.12) nicht gelte. Dann gibt es ein γ mit

$$(2\mu + 1)(1/Q - 1/2) > \gamma > (2\lambda + 1)(1/P - 1/2)\,.$$

Dann gilt $m_\gamma \in M_\lambda^P$, jedoch $m_\gamma \notin M_\mu^Q$.

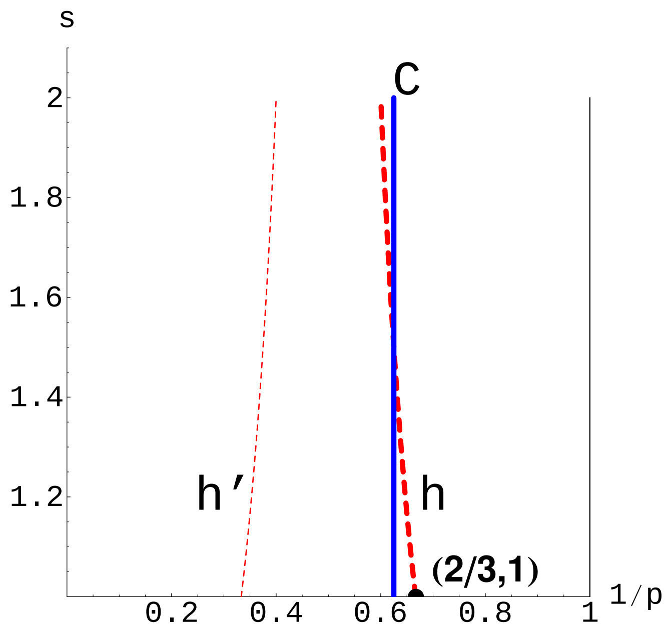
Bemerkungen:

(a) Aus der Voraussetzung (1.10) erhält man keine zusätzlichen Restriktionen.

(b) Gleichwertig zur Voraussetzung (1.10) des Fortsetzungssatzes ist die Bedingung

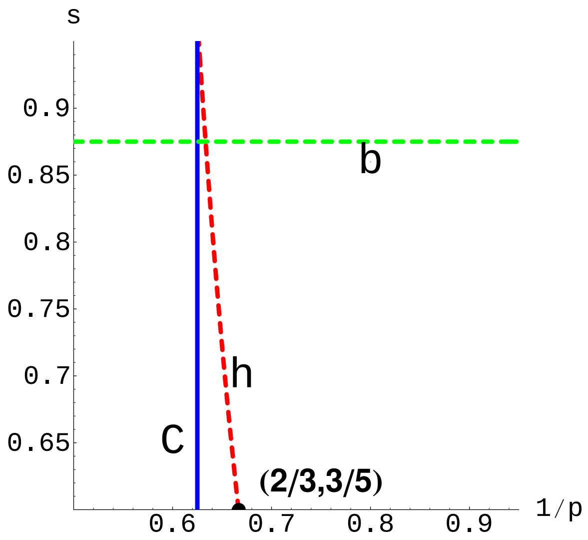
$$\frac{1}{Q} < \frac{1}{P} + \frac{2(\lambda - \mu)}{2\mu + 1}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2}\right) =: h^{-1}(\mu)\,. \tag{1.13}$$

Die folgende Skizze veranschaulicht die Situation im Fall $P = 3/2$ und $\lambda = 1$; dann sind wir in der Situation $1 < P \le \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$.



Die gestrichelte Kurve h beschreibt den Graph der Inversen von h^{-1} und die Gerade

C markiert wieder den kritischen Punkt $\frac{2\lambda+3}{4\lambda+4}(< \frac{1}{P})$. h' ist die an der Geraden $\frac{1}{p} = \frac{1}{2}$ gespiegelte (duale) Größe. Die zugelassenen Einbettungen (1.11) werden durch den Bereich veranschaulicht, der durch h und h' begrenzt ist.
Die folgende Skizze ist ein Ausschnitt für den Fall $P = 3/2$ und $\lambda = 3/5$, was ein Beispiel für den Fall $\frac{2\lambda+1}{\lambda+1} < P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$ ist.



Die Kurven h und C sind wie im vorherigen Beispiel des Fortsetzungssatzes. Die Gerade b stellt die obere Grenze für die Ordnung μ in (1.10) dar. Die zugelassenen Einbettungen (1.11) werden somit durch den Bereich veranschaulicht, der durch b, h und der zu h dualen Kurve h' begrenzt ist.

(c) Benutzt man den Restriktions- und Fortsetzungssatz hintereinander, erhält man für geeignete λ und P, z.B. $\lambda > 0$ und $1 < P < \frac{2\lambda+2}{\lambda+2}$ die Einbettung

$$M_\lambda^P \hookrightarrow M_\mu^P\,, \quad \textbf{für alle} \quad \mu\,, \quad 0 < \mu < \lambda\,.$$

Da die Gleichheit in (1.9) und (1.13) nicht zugelassen ist, ist der minimale Verlust an Ordnung von λ nach μ, $\mu < \lambda$ beliebig nahe, nicht überraschend. Dies ist ein Indiz für die Schärfe der von D. Müller und A. Seeger entwickelten Methode.

Wir werden den Restriktions- und Fortsetzungssatz beweisen, indem wir in Kapitel 2 die Behauptungen auf die lokaler Multiplikatoren, d.h. Multiplikatoren mit kompaktem Träger, zurückführen. In Kapitel 3 wird dann der lokale Restriktions- und Fortsetzungssatz gezeigt werden.

Danksagung: Die Autorin dankt Prof. A. Seeger und Prof. W. Trebels für hilfreiche Diskussionen und Hinweise.

1.2 Notation

Die Translation ist im Fall der Hankeltransformation für eine lokal integrierbare Funktion f durch

$$\tau_y f(x) := \int_0^\infty f(z) D_\nu(x,y,z) z^{2\nu+1}\, dz\,, \qquad x,y,>0$$

mit dem Faltungkern

$$D_\nu(x,y,z) := \int_0^\infty \frac{J_\nu(xt)}{(xt)^\nu}\frac{J_\nu(yt)}{(yt)^\nu}\frac{J_\nu(zt)}{(zt)^\nu} t^{2\nu+1}\, dt \tag{1.14}$$

definiert. Nach [4, 8.11(31),S.52] gilt $D_\nu(x,y,z) \geq 0$ und verschwindet für $0 < x < |y-z|$ oder $y+z < x < \infty$. Ferner hat man nach [8, (17)]

$$\int_0^\infty D_\nu(x,y,z) x^{2\nu+1}\, dx = c \approx 1\,, \qquad y,z > 0\,. \tag{1.15}$$

Sind nun f und g lokal integrierbare Funktionen, so wird die Faltung im Fall der Hankeltransformation definiert durch

$$f * g(x) := \int_0^\infty \int_0^\infty f(y) g(z) D_\nu(x,y,z) y^{2\nu+1} z^{2\nu+1}\, dy\, dz\,, \quad x > 0\,,$$

wobei D_ν der Faltungskern (1.14) ist. Nach dem Satz von Fubini erhalten wir $H_\nu[fg] = H_\nu f * H_\nu g$ für Funktionen $f,\, g \in C_c^\infty$.
Aus diesen Eigenschaften kann man, genau wie im Fall der Fouriertransformation, die Youngsche Ungleichung zeigen, d.h. für $1 \leq p,q \leq \infty$, $f \in L^p_{2\nu+1}$ und $g \in L^q_{2\nu+1}$ erhält man $f * g \in L^r_{2\nu+1}$ mit

$$\|f*g\|_{r,2\nu+1} \leq c\|f\|_{p,2\nu+1}\|g\|_{q,2\nu+1}\,, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0\,.$$

Wir führen nun den zur Hankeltransformation gehörigen Differentialoperator ein:

$$L_\nu = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}\right)\,, \qquad \nu \geq -1/2\,.$$

Dann gilt nach [17, (1.8)] für $f \in C_c^\infty$ die Gleichung

$$H_\nu(L_\nu f)(x) = x^2 H_\nu f(x)\,, \qquad x > 0.$$

Damit kann man für $\delta \in \mathbb{R}$ die δ-Potenzen dieser Operatoren durch

$$H_\nu(L_\nu^\delta f)(x) = x^{2\delta} H_\nu f(x)\,, \qquad x > 0$$

einführen.
Diese Operatoren spielen nun beim folgenden Transplantationssatz von Stempak [16, Corollary 1.4] eine große Rolle:

Transplantationsatz von Stempak.
Seien $1 < p < \infty$, α, $\gamma > -1$ *und* $-p(\alpha+1/2) < a < p(\gamma+3/2) - 1$. *Dann gilt*

$$\left(\int_0^\infty |(H_\alpha \circ H_\gamma) f(x)|^p x^{a+p(\alpha+1/2} \, dx\right)^{1/p} \leq c \left(\int_0^\infty |L_\gamma^{(\alpha-\gamma)/2} f(x)|^p x^{a+p(\gamma+1/2)} \, dx\right)^{1/p}$$

für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. ■

Dieser Transplantationssatz zieht unmittelbar Einbettungen für gewichtete Hankelmultiplikatoren, die im folgendem definiert sind, nach sich. Sei $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, meßbare Funktion. Dann schreiben wir $m \in M^p_{\nu,\delta}$, falls

$$\|H_\nu[mH_\nu f]\|_{p,2\delta+1} \leq C \|f\|_{p,2\delta+1}\,, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+) \tag{1.16}$$

mit einer von f unabhängigen, endlichen Konstanten C gilt. Die kleinste Konstante, bzgl. welcher die Ungleichung (1.16) gilt, bezeichnen wir $\|m\|_{M^p_{\nu,\delta}}$.

Korollar.
Seien λ, $\mu > -1/2$ und $1 < p < 2$. Dann gilt

$$M^p_{\mu+\delta,\mu} = M^p_\lambda\,, \qquad \mu = \lambda + \frac{\delta p}{2-p}\,.$$

■

Damit können wir nun Proposition 1.2 beweisen.

Beweis von Proposition 1.2: Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Dann folgt unter Benutzung von

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\alpha} J_\alpha(z)\right] = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)\,, \quad \alpha > -1/2 \tag{1.17}$$

und partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty m(y) \frac{J_\mu(xy)}{(xy)^\mu} H_\mu f(y) y^{2\mu+1} \, dy \\
= \;& \int_0^\infty m(y)(xy)^{-2\mu-1} \frac{1}{x}\frac{d}{dy}\left[(xy)^{\mu+1} J_{\mu+1}(xy)\right] H_\nu f(y) y^{2\mu+1} \, dy \\
= \;& -\int_0^\infty \frac{J_{\mu+1}(xy)}{(xy)^{\mu+1}} \left[m'(y) H_\mu f(y) + m(y) \frac{d}{dy} H_\mu f(y)\right] y^{2\mu+2} \, dy\,.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Nimmt man nun die Norm $\|\bullet\|_{p,2\mu+1}$ über (1.18), so erhält man

$$\begin{aligned}
&\|H_\mu[m \cdot H_\mu f]\|_{p,2\mu+1} &(1.19)\\
\leq\ & \|ym'(y)\|_{M^p_{\mu+1,\mu}} \left\| \int_0^\infty \frac{1}{y} H_\mu f(y) \frac{J_{\mu+1}(xy)}{(xy)^{\mu+1}} y^{2\mu+2}\, dy \right\|_{p,2\mu+1} + \|m\|_{M^p_{\mu+1,\mu}} \|f\|_{p,2\mu+1} \,.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\left\| \int_0^\infty \frac{1}{y} H_\mu f(y) \frac{J_{\mu+1}(xy)}{(xy)^{\mu+1}} y^{2\mu+2}\, dy \right\|_{p,2\mu+1} \leq c\|f\|_{p,2\nu+1} \,, \tag{1.20}$$

denn dann folgt aus (1.19) und dem Korollar des Transplantationssatzes von Stempak die Behauptung.
Nach [4, 8.11(3),S.47] und dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{H_\mu f(y)}{y} \frac{J_{\mu+1}(xy)}{(xy)^{\mu+1}} y^{2\mu+2}\, dy &= \int_0^\infty f(y) \int_0^\infty J_\mu(yz) J_{\mu+1}(xy)\, dy x^{-\mu-1} z^{\mu+1}\, dz \\
&= x^{-2\mu-2} \int_0^x f(z) z^{2\mu+1}\, dz \,.
\end{aligned}$$

Also ist die linke Seite der Ungleichung (1.20) mit Hilfe von [1, Corollary 2.1] beschränkt durch

$$\left(\int_0^\infty \left| \int_0^x f(z) z^{2\mu+1}\, dz \right|^p x^{(2\mu+2)p+2\mu+1}\, dx \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p,2\mu+1}$$

und (1.20) ist gezeigt. ■

Im folgenden seien die Konstanten c variabel, in den die essentiellen Werte auftauchen.

2 Lokalisierung der Hankelmultiplikatoren

Sei $m \in M^p_\nu$ und $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$. Dann gilt

$$\|\Phi(\bullet)m(\bullet/t)\|_{M^p_\nu} = \|\Phi(t\bullet)m(\bullet)\|_{M^p_\nu} \leq \|\Phi\|_{M^p_\nu} \|m\|_{M^p_\nu} \,, \tag{2.21}$$

d.h. die Lokalisierung von m, nämlich $\Phi(t\bullet)m$, erzeugt einen beschränkten Operator auf $L^p_{2\nu+1}$. Da $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+) \subseteq M^p_\nu$ ist, gilt

$$\sup_{t>0} \|\Phi(t\bullet)m\|_{M^p_\nu} \leq c\|m\|_{M^p_\nu} \,, \qquad 1 \leq p \leq \infty \,, \quad \nu > -1/2 \,.$$

Sei Φ in diesem Kapitel eine positive, glatte Funktion auf $\mathbb{R}^+$ mit Träger im Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$, so daß $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-k}x) = 1$ für alle $x > 0$ gilt. Die Idee, daß eine schwache Umkehrung von (2.21) im Fall von Fouriermultiplikatoren gilt, findet man in der Arbeit [11] von A. Seeger. Wir wollen nun dieses Ergebnis für den Hankel-Fall modifizieren:

Theorem 2.1 *Seien $\nu > -1/2$ und $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$. Sei ferner $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\Phi \geq 0$, $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-k}x) = 1$ für alle $x > 0$. Dann läßt sich jeder lokale Multiplikator global fortsetzen, d.h. für jede beschränkte Funktion m gilt*

$$\|m\|_{M_\nu^r} \leq c \sup_{t>0} \|\Phi(t\bullet)m\|_{M_\nu^p} \qquad p < r < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}\,.$$

Um diesen Satz zu zeigen, benötigt man zunächst die folgende Modifikation von [11, Theorem 1]:

Satz 2.2 *Seien $\nu > -1/2$, $1 < p < \infty$ und Φ wie in Satz 2.1 gegeben. Sei ferner m eine beschränkte Funktion, die den folgenden Bedingungen genügt:*

(i.) $\sup_{t>0} \|\Phi m(t\cdot)\|_{M_\nu^p} \leq A$

(ii.) $\sup_{t>0} \int_{x>\omega} |H_\nu[\Phi m(t\cdot)](x)| x^{2\nu+1}\,dx \leq B(1+\omega)^{-\varepsilon}$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *und alle* $\omega \geq 0$.

Dann folgt

$$\|m\|_{M_\nu^p} \leq cA[\log(2 + B/A)]^{|1/p-1/2|}\,.$$

Beweis: Hierfür benötigt man einige Hilfsmittel aus der Littlewood-Paley-Theorie für die Hankeltransformation. Wir setzen $Tf := H_\nu[mH_\nu f]$, $\eta_k := H_\nu[\Phi(2^{-k})]$ und $g(f) := (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\eta_k * f|^2)^{1/2}$ und betrachten die vektorwertige Funktion $\tilde{T}f := \{\eta_k * Tf\}_k$ mit der Faltung $*$ bzgl. der Hankeltransformation. Wie auch im Fall der Fouriertransformation gilt (Satz 4.4)

$$\|g(f)\|_{p,2\nu+1} \approx \|f\|_{p,2\nu+1} \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty\,. \tag{2.22}$$

Man definiert für meßbare Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion

$$\mathcal{M}_H f(x) := \sup_{x\in Q_x} \frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} |f(y)| y^{2\nu+1}\,dy \qquad \text{mit} \qquad \lambda(Q_x) := \int_{Q_x} x^{2\nu+1}\,dx$$

und Intervallen Q_x in $\mathbb{R}^+$, die x enthalten. Ferner sei für vektorwertige Funktionen F die Sharp-Funktion durch

$$F^\sharp(x) := \sup_{x\in Q_x} \frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} \|F(y) - F_{Q_x}\|_{l^2}\, y^{2\nu+1}\,dy\,, \qquad F_{Q_x} := \frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} F(y) y^{2\nu+1}\,dy$$

definiert. Für den Beweis des Satzes 2.2 benötigt man für Q_x Intervalle von der Form $[x - 2^n, x + 2^n] \cap \mathbb{R}^+$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für diese Funktionen

$$\|\mathcal{M}_H(\|F\|_{l^2})\|_{p,2\nu+1} \leq c\|F^\sharp\|_{p,2\nu+1} \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty\,. \tag{2.23}$$

Dies kann man genauso wie in [5, Theorem 5] zeigen, indem man $|f(x)|$ mit $\|F(x)\|_{l^2}$ und das Lebesgue-Maß durch das Maß $x^{2\nu+1}\,dx$ ersetzt. Ferner folgt direkt aus der Definition

$$|F(x)| \le c\mathcal{M}_H(\|F\|_{l^2})(x) \quad \text{für alle} \quad x > 0\,.$$

Sei nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$. Aus (2.22) und (2.23) erhält man

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{p,2\nu+1} &\le c\|g(Tf)\|_{p,2\nu+1} = c\|\{(\tilde{T}f)\}_k\|_{L^p_{2\nu+1}(l^2)} \\ &\le c\|\mathcal{M}_H(\|\tilde{T}f\|_{l^2})\|_{p,2\nu+1} \le c\|(\tilde{T}f)^\sharp\|_{p,2\nu+1}\,. \end{aligned}$$

Falls man also

$$\|(\tilde{T}f)^\sharp\|_{p,2\nu+1} \le cAN^{1/2-1/p}\|f\|_{p,2\nu+1} \qquad \text{mit} \qquad N := \max\{\varepsilon^{-1}, 1\}\log_2(2 + B/A) \quad (2.24)$$

für $2 \le p < \infty$ zeigen kann, so ergibt sich durch Dualität von M^p_ν und $M^{p'}_\nu$ die Behauptung. Um (2.24) zu zeigen, führt man den Operator

$$Sf(x) := \frac{1}{\lambda(Q_x)}\int_{Q_x}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\eta_k * Tf(y) - (\eta_k * Tf)_{Q_x}\right|\chi_k(x,y)y^{2\nu+1}\,dy$$

mit meßbaren Funktionen $\chi_k : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein. Aus der Umkehrung der Hölderungleichung bzgl. des Folgenraums l^2 folgt

$$(\tilde{T}f)^\sharp(x) \le \sup Sf(x) \quad \text{für} \quad x > 0\,, \qquad (2.25)$$

wobei man das Supremum über alle Intervalle Q_x und alle Funktionenfolgen $\{\chi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $\|\{\chi_k(x,y)\}_k\|_{l^2} \le 1$ nimmt.
Sei nun $\Psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^+)$ mit $\Psi(x) = 1$ für $x \in \operatorname{supp}\Phi$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Psi(2^{-k}x) \approx c$ mit einer von x unabhängigen Konstanten $c > 0$. Wir definieren $\tilde{\eta}_k := H_\nu[\Psi(2^{-k}\bullet)]$ und $g_\Psi(f) := (\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\tilde{\eta}_k * f|^2)^{1/2}$. Man setzt nun für vektorwertige Funktionen $G := \{g_k\}_k$ und $H = \{h_k\}_k$ aus $L^p_{2\nu+1}(\mathbb{R}^+, l^2)$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,N}(G,x) &:= \frac{1}{\lambda(Q_x)}\int_{Q_x}\sum_{|k+l(x)|\le N}\left|\tilde{\eta}_k * g_k(y) - (\tilde{\eta}_k * g_k)_{Q_x}\right|\chi_k(x,y)y^{2\nu+1}\,dy \\ \sigma_{2,N}(H,x) &:= \frac{1}{\lambda(Q_x)}\int_{Q_x}\sum_{|k+l(x)|> N}\left|\eta_k * Th_k(y) - (\eta_k * Th_k)_{Q_x}\right|\chi_k(x,y)y^{2\nu+1}\,dy\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist $l(x) := 2^n$ für das Intervall $Q_x := [x - 2^n, x + 2^n] \cap \mathbb{R}^+$. Das Ziel ist nun

$$\|\sigma_{1,N}(G)\|_{p,2\nu+1} \le cN^{1/2-1/p}\|G\|_{L^p_{2\nu+1}(l^p)}\,, \qquad N := \max\left\{1, \varepsilon^{-1}\right\}\log_2(2 + B/A) \quad (2.26)$$

und

$$\|\sigma_{2,N}(H)\|_{p,2\nu+1} \le cA\|H\|_{L^p_{2\nu+1}(l^2)} \qquad (2.27)$$

mit Konstanten c zu zeigen, die unabhängig von der Wahl von Q_x, χ_k, A, N sind. Die spezielle Wahl von N ergibt sich bei der Ungleichung (2.27). Da die Konstante c insbesondere von Q_x und χ_k unabhängig ist, kann man auf folgende Weise (2.24) und somit die Behauptung folgern: Wegen der Träger von Φ und Ψ gilt $\tilde{\eta}_k * \eta_k = \eta_k$ und somit

$$\tilde{\eta}_k * (\eta_k * Tf) = \eta_k * Tf = \eta_k * T(\tilde{\eta}_k * f)\,,$$

weshalb man

$$Sf = \sigma_{1,N}(\{\eta_k * Tf\}_k) + \sigma_{2,N}(\{\tilde{\eta}_k * f\}_k) \tag{2.28}$$

hat.
Aus (2.27) und (2.22), sowie Satz 4.4 erhält man die Abschätzung

$$\|\sigma_{2,N}(\{\tilde{\eta}_k * f\}_k)\|_{p,2\nu+1} \le cA\|\{\tilde{\eta}_k * f\}_k\|_{L^p_{2\nu+1}(l^2)} = cA\|\tilde{g}(f)\|_{p,2\nu+1} \le cA\|f\|_{p,2\nu+1}\,.$$

Nun zur Beschränktheit des σ_1-Anteils in (2.28): Aus der Voraussetzung (i.) folgt mittels Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\|\{\eta_k * Tf\}_k\|^p_{L^p_{2\nu+1}(l^p)} &= \sum_k \|\eta_k * Tf\|^p_{p,2\nu+1} = \sum_k \|\eta_k * T(\tilde{\eta}_k * f)\|^p_{p,2\nu+1} \\
&= \sum_k \|H_\nu[\Phi(2^{-k}\bullet) m H_\nu(\tilde{\eta}_k * f)]\|^p_{p,2\nu+1} \\
&\le A^p \sum_k \|\tilde{\eta}_k * f\|^p_{p,2\nu+1} = A^p\|\{\tilde{\eta}_k * f\}_k\|^p_{L^p_{2\nu+1}(l^p)} \\
&\le cA^p\|\tilde{g}(f)\|^p_{p,2\nu+1} \le cA^p\|f\|^p_{p,2\nu+1}\,.
\end{aligned}$$

Aus (2.26) erhält man daher

$$\|\sigma_{1,N}(\{\eta_k * Tf\}_k)\|_{p,2\nu+1} \le cN^{1/2-1/p}\|\{\eta_k * Tf\}_k\|_{L^p_\nu(l^p)} \le cAN^{1/2-1/p}\|f\|_{p,2\nu+1}$$

und somit insgesamt die Ungleichung (2.24).

Beweis von (2.26): Sei nun $g_k := \eta_k * Tf$. Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt wegen $\{\chi_k\}_k \in l^2$

$$\begin{aligned}
|\sigma_{1,N}(G,x)| &\le \frac{2}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} \sum_{|k+l(x)|\le N} |\tilde{\eta}_k * g_k(y)| \chi_k(x,y)\, y^{2\nu+1}\, dy \qquad (2.29)\\
&\le 2\mathcal{M}_H\left(\Big(\sum_{|k+l(x)|\le N} |\tilde{\eta}_k * g_k|^2\Big)^{1/2}\right)(x)
\end{aligned}$$

mit der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion $\mathcal{M}_H$ bzgl. des Hankelgewichts. Wir wollen den Satz von Riesz-Thorin benutzen und zeigen zunächst die Abschätzung für $p = 2$ und dann für $p=\infty$. Nach [13, Thm.1] ist die Maximalfunktion in $L^p_{2\nu+1}$, $p>1$, beschränkt, weshalb wegen $g_k = \tilde{\eta}_k * g_k$

$$\|\sigma_{1,N}(G)\|_{2,2\nu+1} \le c\|\{\tilde{\eta}_k * g_k\}_k\|_{L^2_{2\nu+1}(l^2)} = c\|\,\{\eta_k * Tf\}_k\,\|_{L^2_{2\nu+1}(l^2)} = c\|G\|_{L^2_{2\nu+1}(l^2)}$$

gilt.
Sei nun $p=\infty$. Durch (2.29) und der Beschränktheit der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion in L^∞ erhält man

$$\begin{aligned}\|\sigma_{1,N}(G)\|_\infty &\le 2\left\|\mathcal{M}_H\left(\sup_{l\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{|k+l(x)|\le N}|\tilde{\eta}_k * g_k|^2\Big)^{1/2}\right)\right\|_\infty \le 2(2N)^{1/2}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|\tilde{\eta}_k * g_k\|_\infty \\ &= 2(2N)^{1/2}\|G\|_{L^\infty(l^\infty)}\,.\end{aligned}$$

Durch den Interpolationssatz von Riesz-Thorin [2, Theorem 5.6.2, S.123] folgt

$$\|\sigma_{1,N}(G)\|_{p,2\nu+1} \le cN^{1/2-1/p}\|G\|_{L^p_{2\nu+1}(l^p)}\,.$$

Hiermit ist (2.26) bewiesen.

Beweis von (2.27): Analog zu (2.29) ergibt sich

$$|\sigma_{2,N}(H,x)| \le c\mathcal{M}_H\left(\Big(\sum_{|k+l(x)|>N}|\eta_k * Th_k|^2\Big)^{1/2}\right)(x)\,.$$

Die Beschränktheit der Maximalfunktion auf $L^2_{2\nu+1}$ impliziert

$$\|\sigma_{2,N}(H)\|^2_{2,2\nu+1} \le c\sum_k \|\eta_k * Th_k\|^2_{2,2\nu+1}\,.$$

Mit der Definition von η_k und dem Satz von Plancherel erhält man mittels (i)

$$\|\sigma_{2,N}(H)\|^2_{2,2\nu+1} \le c\sum_k \|\Phi(2^{-k}\bullet)mH_\nu h_k\|^2_{2,2\nu+1} \le cA^2\sum_k \|H_\nu h_k\|^2_{2,2\nu+1} \le cA^2\|H\|_{L^2_{2\nu+1}(l^2)}\,.$$

Hat man noch

$$\|\sigma_{2,N}(H)\|_\infty \le cA\|H\|_{L^\infty(l^2)} \tag{2.30}$$

zur Verfügung, folgt die Behauptung (2.27) durch Interpolation.
Für die Abschätzung (2.30) benötigt man eine weitere Unterteilung von σ_2. Sei dafür $R_x := 2Q_x \cap \mathbb{R}^+$, d.h. ein Intervall mit gleichem Mittelpunkt wie Q_x, doppelter Länge und beschränkt auf $\mathbb{R}^+$. Für eine Funktion H sei $R_xH := \chi_{R_x}H$. Analog $R^c_x := \chi_{R^c_x}H$ für das

Komplement von R_x.
Setzt man

$$I_N(x) := \frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} \Big(\sum_{|k+l(x)|>N} |\eta_k * T(R_x h_k)(y)|^2 \Big)^{1/2} y^{2\nu+1}\, dy$$

und

$$II_N(x) := \frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{Q_x} \Big(\sum_{|k+l(x)|>N} \Big| \{\eta_k * T(R_x^c h_k)(y) - [\eta_k * T(R_x^c h_k)]_{Q_k} \Big|^2 \Big)^{1/2} y^{2\nu+1}\, dy\,,$$

so gilt $|\sigma_2(H,x)| \leq 2I(x) + II(x)$. Durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dem Satz von Plancherel und dem Satz von Fubini folgt

$$|I_N(x)| \leq c \left(\lambda(Q_x) \sum_k \|\Phi(2^{-k}\bullet) m H_\nu(R_x h_k)\|^2_{2,2\nu+1} \right)^{1/2}.$$

Benutzt man (i.) und wieder den Satz von Plancherel, erhält man die Schranke

$$\begin{aligned} cA \left(\frac{1}{\lambda(Q_x)} \sum_k \|H_\nu(R_x h_k)\|^2_{2,2\nu+1} \right)^{1/2} &\leq cA \left(\frac{1}{\lambda(Q_x)} \int_{R_x} \sum_k |h_k(y)|^2 y^{2\nu+1}\ dy \right)^{1/2} \\ \leq \quad cA\|H\|_{L^\infty(l^2)}\,. \end{aligned}$$

Also haben wir die punktweise Abschätzung

$$|I_N(x)| \leq cA\|H\|_{L^\infty(l^2)}\,.$$

Nun fehlt also nur noch $II_N(x)$ abzuschätzen. Wir setzen $K_x(x) := H_\nu[\Phi m(2^k\bullet)](x)$. Zunächst kann man durch Substitution

$$\eta_k * T(R_x^c h_k)(y) \quad = \quad K_k * [R_x^c h_k(2^{-k}\bullet)](2^k y)$$

zeigen. Mit der Minkowski-Integralungleichung gilt

$$|II_N(x)| \leq c \sup_{x,z\in Q_x} \left(\sum_{|k+l(x)|>N} \Big| K_k * [R_x^c h_k(2^{-k}\bullet)](2^k y) - K_k * [R_x^c h_k(2^{-k}\bullet)](2^k z) \Big|^2 \right)^{1/2}$$

beschränkt. Für die einzelnen Summanden gilt nach Substitution

$$\begin{aligned} & K_k * [R_x^c h_k(2^{-k}\bullet)](2^k y) - K_k * \left[R_x^c h_k(2^{-k}\bullet)\right](2^k z) \\ = & \int_{2^{-k}v\in R_x^c} h_k(2^{-k}v) \int_0^\infty K_k(u) \left[D_\nu(2^k y,u,v) - D_\nu(2^k z,u,v)\right] u^{2\nu+1} v^{2\nu+1}\, dudv \\ = & \int_{R_x^c} h_k(v) 2^{k(2\nu+2)} \left[(\tau_{2^k y} K_k)(2^k v) - (\tau_{2^k z} K_k)(2^k v)\right] v^{2\nu+1}\, dv\,. \end{aligned}$$

Definiert man nun

$$E_k(x,y,z) := \int_{R_x^c} 2^{k(2\nu+2)} |(\tau_{2^k y} K_k)(2^k w) - (\tau_{2^k z} K_k)(2^k w)| w^{2\nu+1}\, dw\,,$$

so erhält man

$$|II_N(x)| \le c \sup_{y,z\in Q_x} \left(\sum_{|k+l(x)|>N} E_k(x,y,z)^2 \right)^{1/2} \|H\|_{L^\infty(l^\infty)}\,.$$

Setzt man nun

$$E_k(x,y,z) \le cB \min\left\{2^{-\varepsilon(k+l(x))}, 2^{k+l(x)}\right\} \tag{2.31}$$

voraus, erhält man

$$\begin{aligned}
|II_N(x)| &\le cB \sup_{y,z\in Q_x} \left(\sum_{|k+l(x)|>N} \min\left\{2^{-\varepsilon(k+l(x))}, 2^{k+l(x)}\right\} \right) \|H\|_{L^\infty(l^\infty)} \\
&\le cB \left[\sum_{k+l(x)>N} 2^{-\varepsilon(k+l(x))} + \sum_{k+l(x)<-N} 2^{k+l(x)} \right] \|H\|_{L^\infty(l^\infty)} \\
&\le cB \max\left\{2^{-\varepsilon N}, 2^{-N}\right\} \|H\|_{L^\infty(l^\infty)}\,. \\
&\le cB(2+B/A)^{-1} \|H\|_{L^\infty(l^\infty)} \le cA\|H\|_{L^\infty(l^2)}\,,
\end{aligned}$$

mit dem in (2.26) definiertem N. Unter Annahme von (2.31) ist also die Abschätzung (2.27) gezeigt.
Nun zum Beweis von (2.31): Man betrachte zunächst den Fall $k + l(x) > N$. Nach Substitution erhält man

$$\begin{aligned}
E_k(x,y,z) \;\le\; & \int_{2^{-k}w\in R_x^c} \left| \int_0^\infty H_\nu[\Phi m(2^k\bullet)](u) D_\nu(2^k y, w, u) u^{2\nu+1}\, du \right| w^{2\nu+1}\, dw\; + \\
& + \int_{2^{-k}w\in R_x^c} \left| \int_0^\infty H_\nu[\Phi m(2^k\bullet)](u) D_\nu(2^k z, w, u) u^{2\nu+1}\, du \right| w^{2\nu+1}\, dw\,.
\end{aligned}$$

Nun gilt $D_\nu(2^k y, u, w) = 0$ für $0 < u < |2^k y - w|$ oder $2^k u + w < u < \infty$. Wegen $y, z \in Q_x$ und $2^{-k}w \in R_x^c$ gilt $|2^k y - w| = 2^k |2^{-k}w - y| \ge 2^{k+l(x)}$, weshalb es ausreicht, das innere Integral nur auf $[2^{k+l(x)}, \infty]$ zu betrachten. Nach dem Satz von Fubini und (1.15) folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{2^{-k}w\in R_x^c} \left| \int_{2^{k+l(x)}}^\infty H_\nu[\Phi m(2^k\bullet)](u) D_\nu(2^k y, w, u) u^{2\nu+1}\, du \right| w^{2\nu+1}\, dw \\
\le\; & \int_{2^{k+l(x)}}^\infty |H_\nu[\Phi m(2^k\bullet)](u)| u^{2\nu+1}\, du \\
\le\; & cB 2^{-\varepsilon(k+l(x))}
\end{aligned}$$

wegen Voraussetzung (ii). Es fehlt der Fall $k + l(x) < -N$. Benutzt man [7, Theorem 2.1], gilt

$$\begin{aligned} E_k(x,y,z) &= \int_{2^{-k}w\in R_x^c} \left|(\tau_{2^k y}K_k)(w) - (\tau_{2^k z}K_k)(w)\right| w^{2\nu+1}\,dw \\ &\leq 2^k|y-z|\|K_k'\|_{1,2\nu+1}\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Da $y, z \in Q_x$ ist, gilt $|y-z| < 2^{l(x)+1}$. Man benötigt daher die Abschätzung $\|K_k'\|_{1,2\nu+1} \leq B$, wozu man $K_k * \varphi = K_k$ mit $\varphi := H_\nu\Psi$ benutzen kann. Da $D_\nu(x,y,z) = D_\nu(z,y,x)$ und somit $\frac{\partial}{\partial x}D_\nu(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}D_\nu(z,y,x)$ gilt, erhält man für die Ableitung $[K_k * \varphi]'$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty K_k(y)\int_0^\infty \varphi(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}D_\nu(z,y,x)\right) z^{2\nu+1}\,dzy^{2\nu+1}\,dy \\ =\;& -\int_0^\infty K_k(y)\int_0^\infty [\varphi'(z)z^{2\nu+1} + (2\nu+1)\varphi(z)z^{-1}z^{2\nu+1}]D_\nu(x,y,z)\,dz\,y^{2\nu+1}\,dy \\ =\;& -K_k * \varphi'(x) - (2\nu+1)K_k * [\varphi(z)z^{-1}](x)\,. \end{aligned}$$

Es folgt mit der Faltungsungleichung

$$\|K_k'\|_{1,2\nu+1} \leq \|K_k\|_{1,2\nu+1}\|\varphi'\|_{1,2\nu+1} + \|K_k\|_{1,2\nu+1}\|\varphi(z)z^{-1}\|_{1,2\nu+1} \leq c\|K_k\|_{1,2\nu+1}\,,$$

da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ und $\nu > -1/2$ ist. Benutzt man wieder die Voraussetzung (ii.) mit $\omega = 0$, so erhält man aus (2.32) die Behauptung (2.31). ∎

Aus diesem Satz möchten wir, genauso wie in [11, Corollary 1], eine auf Glattheit basierende hinreichende Bedingung für $m \in M_\nu^p$ erhalten. Zu diesem Zweck führen wir für Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die folgende Differenz

$$\nabla_h f(x) := f(h^{-1}x) - f(x) \quad \text{für} \quad x, h > 0$$

ein.

In den folgenden zwei Folgerungen nehmen wir zusätzlich an, daß m eine stetige Funktion ist. Dies ist keine Einschränkung für unser Ziel Satz 2.1 zu zeigen, da wir in Proposition 2.5 sehen werden, daß für $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$ aus $\Phi m(t\bullet) \in M_\nu^p$ die Stetigkeit von $\Phi m(t\bullet)$ folgt.

Korollar 2.3 *Seien $\nu > -1/2$, $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$ und Φ wie in Satz 2.1 gegeben. Sei ferner m eine stetige, beschränkte Funktion, die der Bedingung (i) aus Satz 2.2, sowie folgender Bedingung genügt:*

$$(ii)^* \quad \sup_{t>0} 2^l \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{2^{-l}}} \|\nabla_\eta[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^p}\frac{d\eta}{\eta} \leq A_l \quad \textit{für alle} \quad l \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt

$$\|m\|_{M^p_\nu} \le c\left[A + \sum_{l=1}^{\infty} l^{|1/p-1/2|} A_l\right].$$

Beweis: Der Beweis besteht darin, Satz 2.2 lokal anzuwenden. Hierzu wählen wir eine Funktion $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$ und $\int_0^\infty \psi(x)\frac{dx}{x} = 1$. Definiert man $\psi_l(x) := 2^l \psi(x^{(2^l)})$ für $x \in \mathbb{R}^+$, $l \in \mathbb{N}_0$, so gelten $\int_0^\infty \psi_l(x)\frac{dx}{x} = 1$ und $\operatorname{supp}\psi_l \subseteq [2^{-(2^{-l})}, 2^{(2^{-l})}]$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Ferner benutzen wir für meßbare Funktionen f und g die Mellin-Faltung

$$f *_{\mathcal{M}} g(x) := \int_0^\infty f(\eta^{-1}x)g(\eta)d\eta$$

und erhält

$$\lim_{l\to\infty} \psi_l *_{\mathcal{M}} f(x) = f(x) + \lim_{l\to\infty}\int_0^\infty \psi_l(\eta)[f(\eta^{-1}x) - f(x)]\frac{d\eta}{\eta}.$$

Ist f stetig, konvergiert wegen des Trägers von ψ_l die rechte Seite gegen $f(x)$. Setzt man $\chi_l := \psi_l - \psi_{l-1}$ für $l \ge 1$ und $\chi_0 := \psi_0$, so erhält man $\sum_{l=0}^\infty \chi_l *_{\mathcal{M}} f(x) = f(x)$ für alle $x > 0$.

Sei nun $f := \Phi(2^{-j}\bullet)m$. Durch Substitution erhält man

$$\chi_l *_{\mathcal{M}} [\Phi(2^{-j}\bullet)m](x) = \chi_l *_{\mathcal{M}} [\Phi m(2^j\bullet)](2^{-j}x),$$

woraus mit dem Satz von Fubini die Gleichung

$$m(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-j}x)m(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{l=0}^\infty \chi_l *_{\mathcal{M}} [\Phi m(2^j\bullet)](2^{-j}x) = \sum_{l=0}^\infty m_l(x)$$

mit

$$m_l(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_l *_{\mathcal{M}} [\Phi m(2^j\bullet)](2^{-j}x)$$

folgt. Zur Vereinfachung der Schreibweise setze man $g_j := \Phi m(2^j\bullet)$ für $j \in \mathbb{Z}$.
Wir werden nun Satz 2.2 für jedes m_l, $l \in \mathbb{Z}$, anwenden. Der Träger von $\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j$ ist in $[\frac{1}{8}, 8]$ enthalten, da $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$ gilt, und wegen $l \ge 0$ die Träger von χ_l im Intervall $[2^{-(2^{-l+1})}, 2^{(2^{-l+1})}] \subseteq [\frac{1}{4}, 4]$ enthalten sind.
Seien nun $l \ge 1$ und $2^k \le s \le 2^{k+1}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann folgt

$$\Phi(x)m_l(sx) = \Phi(x)\sum_{j=k-4}^{k+5} [\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j](2^{-j}sx), \tag{2.33}$$

da j, wegen der Träger von $\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j$ und Φ, der Bedingung $\frac{1}{8} \le 2^{-j}sx \le 8$ mit $\frac{1}{2} \le x \le 2$ genügen muß. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\Phi m_l(s\bullet)\|_{M_\nu^p} &\le \|\Phi\|_{M_\nu^p} \sum_{j=k-4}^{k+5} \|\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j\|_{M_\nu^p} \\ &\le c \sum_{j=k-4}^{k+5} \Big[\Big\| \int_0^\infty \psi_l(\eta) \nabla_\eta g_j(\bullet) \frac{d\eta}{\eta} \Big\|_{M_\nu^p} + \Big\| \int_0^\infty \psi_{l-1}(\eta) \nabla_\eta g_j(\bullet) \frac{d\eta}{\eta} \Big\|_{M_\nu^p} \Big] . \end{aligned}$$

Beachtet man den Träger von ψ, ist dies beschränkt durch

$$c \sum_{j=k-4}^{k+5} \|\psi\|_\infty \Big[2^l \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{(2^{-l})}} \|\nabla_\eta [\Phi m(2^j \bullet)]\|_{M_\nu^p} \frac{d\eta}{\eta} + 2^{l-1} \int_{2^{-(2^{-l+1})}}^{2^{(2^{-l+1})}} \|\nabla_\eta [\Phi m(2^j \bullet)]\|_{M_\nu^p} \frac{d\eta}{\eta} \Big] .$$

Aus der Voraussetzung $(ii)^*$ folgt daher

$$\|\Phi m_l(s\bullet)\|_{M_\nu^p} \le c(A_{l-1} + A_l) \tag{2.34}$$

mit einer von l und k, und daher von s, unabhängigen Konstanten c. Also ist (i) aus Satz 2.2 erfüllt.
Wir zeigen nun, daß m_l der Voraussetzung (ii) des Satzes 2.2 genügt. Sei $2N > \nu + 1$ mit $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt mittels Hölderungleichung

$$\begin{aligned} &\int_{x>w} |H_\nu[\Phi m_l(s\bullet)](x)| x^{2\nu+1}\, dx \\ \le\ & c(1+\omega)^{-2N+\nu+1} \left(\int_{x>w} (1+x)^{2\alpha} |H_\nu[\Phi m_l(s\bullet)](x)|^2 x^{2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Das Integral ist durch

$$\left(\int_0^1 |H_\nu[\Phi m_l(s\bullet)(x)|^2 x^{2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_1^\infty |H_\nu[\Phi m_l(s\bullet)(x)|^2 x^{2\alpha+2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} := I_1 + I_2$$

beschränkt. Benutzt man wieder (2.33), gilt wegen $M_\nu^p \hookrightarrow M_\nu^2$

$$I_1 \le \sum_{j=k-4}^{k+5} \|\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j(2^{-j}s\bullet)\|_{M_\nu^2} \|H_\nu \Phi\|_{2,2\nu+1} \le c \sum_{j=k-4}^{k+5} \|\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j\|_{M_\nu^p} \le c(A_{l-1} + A_l)\, , \tag{2.36}$$

indem man genauso wie in (2.34) argumentiert.
Nun zu I_2: Wegen des Satzes von Plancherel gilt mit dem Differentialoperator L_ν aus [17] (Der Differentialoperator sollte auch in der Einleitung schon erwähnt werden!)

$$I_2 \approx \left(\int_0^\infty |L_\nu^N [\Phi m_l(s\bullet)](x)|^2 x^{2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} .$$

Man hat nun

$$L_\nu^N = \sum_{r=1}^{2N} c_r x^{-(2N-r)} \left(\frac{d}{dx}\right)^r$$

mit nur von r, ν und α abhängigen Konstanten c_r zur Verfügung. Daher gilt

$$I_2 \le c \sum_{r=1}^{2N} \sum_{j=k-4}^{k+5} \left(\int_0^\infty \left| x^{-(2N-r)} \left(\frac{d}{dx}\right)^r \left[\Phi(x)\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j(2^{-j}sx)\right] \right|^2 x^{2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} .$$

Da Φ und ihre Ableitungen kompakte Träger haben, die 0 nicht enthalten, ist $x^{-(2N-r)}$ durch eine Konstante beschränkt. Der Multiplikatorenraum M_ν^2 ist dilatationsinvariant, und somit kann I_2 durch

$$\begin{aligned} & c \sum_{r=1}^{2N} \sum_{j=k-4}^{k+5} \sum_{i=0}^{r} \left(\int_0^\infty \left| \Phi^{(r-i)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i (\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j)(2^{-j}sx)(2^{-j}s)^i \right|^2 x^{2\nu+1}\, dx \right)^{1/2} \\ \le \quad & c \sum_{r=1}^{2N} \sum_{j=k-4}^{k+5} \sum_{i=0}^{r} \left\| (\chi_l *_{\mathcal{M}} g_j)^{(i)} \right\|_{M_\nu^2} \left\| \Phi^{(r-i)} \right\|_{2,2\nu+1} \end{aligned} \tag{2.37}$$

abgeschätzt werden, da $2^{-j}s \le 2^{-j+4-k}$ ist. Für $i \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(\psi_l *_{\mathcal{M}} g_j)^{(i)}(x) = \int_0^\infty \psi_l^{(i)}(y^{-1}x) g_j(y) y^{-(i+1)} dy = \int_0^\infty \psi_l^{(i)}(y) g_j(y^{-1}x) \frac{y^{i-1}}{x^i} dy\,.$$

Induktiv folgt durch partielle Integration

$$\int_0^\infty \psi_l^{(i)}(\eta)\eta^{i-1}\, d\eta = 0 \quad \text{für} \quad i \in \mathbb{N},$$

weshalb

$$(\psi_l *_{\mathcal{M}} g_j)^{(i)}(x) = \int_0^\infty \psi_l^{(i)}(\eta)[g_j(\eta^{-1}x) - g_j(x)] \frac{\eta^{i-1}}{x^i}\, d\eta$$

und somit

$$\left\| (\psi_l *_{\mathcal{M}} g_j)^{(i)} \right\|_{M_\nu^2} \le \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{(2^{-l})}} |\psi_l^{(i)}(\eta)| \left\| [\nabla_\eta g_j](x) x^{-i} \right\|_\infty \eta^i \frac{d\eta}{\eta}$$

gilt. Da $g_j := \Phi m(2^j \bullet)$ gilt $|g_j(\eta^{-1}x) - g_j(x)| = 0$, falls $\frac{x}{\eta} \notin [\frac{1}{2}, 2]$ und $x \notin [\frac{1}{2}, 2]$ ist. Zusammen mit dem Integrationsbereich sieht man daher, daß außerhalb des Intervalls $\frac{1}{8} < x < 8$ die Beziehung $|g_j(\eta^{-1}x) - g_j(x)| = 0$ gilt, weshalb es reicht, die Supremumsnorm über diesen Bereich zu nehmen. x^{-i} kann also durch eine Konstante abgeschätzt werden. Es folgt

$$\left\|(\psi_l *_{\mathcal{M}} g_j)^{(i)}\right\|_{M_\nu^2} \leq c_i 2^{l(1+i)} \sum_{i_1=0}^{i} \|\psi^{(i_1)}\|_\infty \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{(2^{-l})}} \left\|\nabla_\eta[\Phi m(2^j \bullet)]\right\|_\infty \frac{d\eta}{\eta} \leq c 2^{li} A_l \,.$$

Setzt man dies nun in (2.37) ein, folgt

$$I_2 \leq c \sum_{r=1}^{2N} \sum_{i=0}^{r} 2^{li}(A_l + A_{l-1}) \leq c 2^{2Nl}(a_{l-1} + A_l)\,, \tag{2.38}$$

wobei c unabhängig von l ist. Aus (2.35), (2.36) und (2.38) erhält man insgesamt für $l \geq 1$

$$\sup_{t>0} \int_{x>w} |H_\nu[\Phi m_l(t\bullet)](x)| x^{2\nu+1}\, dx \leq c 2^{l\alpha}(1+w)^{-\varepsilon}(A_l + A_{l-1})\,.$$

Genauso kann

$$\sup_{t>0} \|\Phi m_0(t\bullet)\|_{M_\nu^p} \leq cA \quad \text{und} \quad \sup_{t>0} \int_{x>w} |H_\nu[\Phi m_0(t\bullet)](x)| x^{2\nu+1}\, dx \leq c(1+w)^{-\varepsilon} A$$

gezeigt werden. Aus Satz 2.2 folgen daher

$$\|m_l\|_{M_\nu^p} \leq c[\log(2+2^{l\alpha})]^{|1/p-1/2|}(A_l + A_{l-1}) \leq c l^{|1/p-1/2|}(A_l + A_{l-1}) \quad \text{für} \quad l \geq 1$$

und $\|m_0\|_{M_\nu^p} \leq cA$. Wegen $m = \sum_{l=0}^{\infty} m_l$ hat man somit die Behauptung. ∎

Indem man genauso wie in [11, Corollary 2] vorgeht, ist man durch Korollar 2.3 nun in der Lage, eine hinreichende Bedingung für Multiplikatoren m zu zeigen, falls die Lokalisierung von m, d.h. $\Phi m(t\bullet)$, ein Multiplikator ist und eine gewisse Glattheitsbedingung erfüllt.

Korollar 2.4 *Seien $\nu > -1/2$ und Φ wie in Satz 2.1 gegeben. Sei ferner m eine stetige, beschränkte Funktion mit*

$$\sup_{t>0} \|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\nu^p} =: A_0 < \infty \quad \textit{für ein} \quad 1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}\,.$$

(a) Falls es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\sup_{t>0} \sup_{\frac{1}{2}<h<2} |\log h|^{-\varepsilon} \|\nabla_\eta[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^p} \leq A$$

gibt, folgt $m \in M_\nu^p$, mit $\|m\|_{M_\nu^p} \leq c(A_0 + A)$.

(b) Falls

$$\sup_{t>0} \sup_{\frac{1}{2}<h<2} |\log h|^{-\varepsilon} \, \|\nabla_h[\Phi m(t\bullet)]\|_\infty < \infty\,,$$

so gilt $m \in M_\nu^r$ *für* $p < r < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$.

Bemerkung Teil (b) folgt aus (a), indem man zwischen M_ν^p und $M_\nu^2 = L^\infty$ interpoliert.
Beweis: (a) Wir benötigen nur die Voraussetzung $(ii)^*$ des Korollars 2.3. Es gilt

$$\sup_{t>0} 2^l \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{(2^{-l})}} \|\nabla_h[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^p} \frac{dh}{h} \le A \sup_{t>0} 2^l \int_{2^{-(2^{-l})}}^{2^{(2^{-l})}} |\log h|^\varepsilon \frac{dh}{h} \le cA2^{-l\varepsilon}\,,$$

nach Substitution $s := |\log h|$. Aus Korollar 2.3 folgt

$$\|m\|_{M_\nu^p} \le c\left[A_0 + \sum_{l=1}^\infty l^{|1/p-1/2|} A2^{-l\varepsilon}\right] \le c(A_0 + A)\,.$$

(b) Wir beweisen (b) durch (a). Wegen $M_\nu^p \hookrightarrow M_\nu^r$ für $p < r < 2$, ist $\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\nu^r}$ beschränkt. Wegen $M_\nu^2 = L^\infty$ folgt

$$\|\nabla_h[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^2} \le c|\log h|^\varepsilon \quad \text{für alle} \quad \frac{1}{2} < h < 2\,.$$

Da $\|\nabla_h[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^p} \le 2\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\nu^p} \le c$, interpoliert man zwischen $L^2_{2\nu+1}$ und $L^p_{2\nu+1}$ und erhält für $1 < p < r < 2$

$$\|\nabla_h[\Phi m(t\bullet)]\|_{M_\nu^r} \le c|\log h|^{\theta\varepsilon}\,, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{2}\,, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

Damit sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt und die Behauptung folgt. ∎

Um nun Satz 2.1 zu erhalten, wird noch die im Korollar 2.4 aufgeführte Glattheitsbedingung an die Lokalisierung $\Phi m(t\bullet)$ durch $\Phi m(t\bullet) \in M_\nu^p$ benötigt. Dieses wird in der folgenden Proposition geleistet. Der Beweis orientiert sich an [19, Theorem A].

Proposition 2.5 *Seien* $\nu > -\frac{1}{2}$, $1 < p < \frac{4\nu+4}{2\nu+3}$ *und* $0 < \varepsilon < \min\left\{1, (2\nu+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{p'}\right\}$. *Dann gilt für* $m \in M_\nu^p$ *mit* $\operatorname{supp} m \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$

$$\sup_{\frac{1}{2}<h<2} |\log h|^{-\varepsilon} \, \|\nabla_h m\|_\infty \le c\|m\|_{M_\nu^p}$$

mit einer von m *unabhängigen Konstanten* c.

Beweis: Kann man für beliebige Funktionen $f \in L^p_{2\nu+1}$ mit $\operatorname{supp} H_\nu f \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$

$$\sup_{\frac{1}{2}<h<2, x>0} |\log h|^{-\varepsilon} |\nabla_h [H_\nu f](x)| \leq c\|f\|_{p,2\nu+1} \tag{2.39}$$

zeigen, erhält man mit $f := H_\nu m * H_\nu \chi$ und einer Funktion $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\chi = 1$ auf $[\frac{1}{2}, 2]$,

$$|\log h|^{-\varepsilon} \|\nabla_h m\|_\infty = |\log h|^{-\varepsilon} \|\nabla_h (m\chi)\|_\infty \leq c\|H_\nu (m\chi)]\|_{p,2\nu+1} \leq c\|m\|_{M^p_\nu} \|H_\nu \chi\|_{p,2\nu+1}$$

für alle $\frac{1}{2} < h < 2$ und man hat die Behauptung.
Also ist (2.39) zu zeigen. Dabei kann man sich auf $\frac{1}{4} < x < 4$ beschränken, da sonst $H_\nu f(x) = 0$ und $H_\nu f(h^{-1}x) = 0$ für $\frac{1}{2} < h < 2$ gilt. $|\nabla_h H_\nu f(x)|$ ist beschränkt durch die Summe von

$$\begin{aligned} I_{1,h}(x) &:= \left| \int_{|\log h|^{-1}}^\infty \left[\frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} - \frac{J_\nu(h^{-1}xy)}{(h^{-1}xy)^\nu} \right] f(y) y^{2\nu+1}\, dy \right|, \\ I_{2,h}(x) &:= \left| \int_0^{|\log h|^{-1}} \left[\frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} - \frac{J_\nu(h^{-1}xy)}{(h^{-1}xy)^\nu} \right] f(y) y^{2\nu+1}\, dy \right|. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\frac{1}{4}<x<4} I_{1,h}(x) &\leq 2 \sup_{\frac{1}{4}<x<4} \int_{|\log h|^{-1}}^\infty \left| \frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} \right| |f(y)| y^{2\nu+1}\, dy \\ &\leq 2 \sup_{\frac{1}{4}<x<4} |\log h|^\varepsilon \int_{|\log h|^{-1}}^\infty \left| \frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} \right| |f(y)| y^{2\nu+1+\varepsilon}\, dy, \qquad \frac{1}{2} < h < 2, \end{aligned}$$

da $(|\log h| y)^\varepsilon \geq 1$ für $\varepsilon \geq 0$ ist. Wegen $|\log h|^{-1} > \frac{1}{2}$, kann man den Integrationsbereich auf $[\frac{1}{2}, \infty]$ vergrößern. Benutzt man nacheinander die Hölderungleichung und die Abschätzung $\left|\frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu}\right| < c(xy)^{-\nu-1/2}$, so gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\frac{1}{4}<x<4} I_{1,h}(x) &\leq c|\log h|^\varepsilon \|f\|_{p,2\nu+1} \sup_{\frac{1}{4}<x<4} \left(\int_{1/2}^\infty (xy)^{-(\nu+1/2)p'} y^{2\nu+1+\varepsilon p'}\, dy \right)^{1/p'} \\ &\leq c|\log h|^\varepsilon \|f\|_{p,2\nu+1} \end{aligned}$$

für $\varepsilon < (2\nu+1)(1/p - 1/2) - 1/p'$.
Nun zu I_2: Durch den Mittelwertsatz erhält man

$$\left| \frac{J_\nu(xy)}{(xy)^\nu} - \frac{J_\nu(h^{-1}xy)}{(h^{-1}xy)^\nu} \right| \leq |xy - \frac{xy}{h}| \sup_s \left| \frac{d}{ds} \frac{J_\nu(s)}{s^\nu} \right| \leq 2xy|\log h| \sup_s \left| \frac{J_{\nu+1}(s)}{s^\nu} \right|,$$

wobei das Supremum über alle s mit $xy \le s \le \frac{xy}{h}$ bzw. $\frac{xy}{h} \le s \le xy$ betrachtet wird. Für kleine xy ist das Supremum durch eine Konstante beschränkt. Für große xy gilt die Abschätzung

$$\sup_s \left| \frac{J_{\nu+1}(s)}{s^\nu} \right| \le c \sup_s s^{-\nu-1/2} \le c(xy)^{-\nu-1/2} . \tag{2.40}$$

Sei zunächst $|\log h| < x$. So ergibt sich

$$I_{2,h}(x) \le \left(\int_0^{1/x} + \int_{1/x}^{|\log h|^{-1}} \right) \sup_s \left| \frac{J_{\nu+1}(s)}{s^{\nu+1}} s \right| xy |\log h| |f(y)| y^{2\nu+1} \, dy =: I_{3,h}(x) + I_{4,h}(x) .$$

Es folgt mit der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
\sup_{\frac{1}{4}<x<4} I_{3,h}(x) &\le c \sup_x \int_0^{1/x} xy |\log h| |f(y)| y^{2\nu+1} \, dy \\
&\le c \sup_{1/4<x<4} |\log h| \|f\|_{p,2\nu+1} \left(\int_0^{1/x} y^{2\nu+1} \, dy \right)^{1/p'} \\
&\le c \|f\|_{p,2\nu+1} |\log h|^\varepsilon ,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

da $\frac{|\log h|}{2} \le (\frac{|\log h|}{2})^\varepsilon$ für $0 < \varepsilon \le 1$ gilt.
Für $I_{4,h}$ folgt mit (2.40)

$$I_{4,h}(x) \le c x^{-\nu+1/2} |\log h|^\varepsilon \int_{1/x}^{|\log h|^{-1}} y^{-\nu-1/2+\varepsilon} |f(y)| y^{2\nu+1} \, dy ,$$

da wegen $y|\log h| \le 1$, $y|\log h| \le (y|\log h|)^\varepsilon$ für $0 < \varepsilon \le 1$ gilt. Durch die Hölderungleichung erhält man für $\varepsilon < (2\nu+1)(1/p - 1/2) - 1/p'$

$$I_{4,h}(x) \le c|\log h|^\varepsilon x^{-\nu+1/2-\varepsilon+\nu+1/2-(2\nu+2)/p'} \|f\|_{p,2\nu+1} . \tag{2.42}$$

Falls $x \le |\log h|$ ist, fällt der $I_{4,h}$-Anteil weg und die Beschränktheit von $I_{3,h}$ kann genauso gezeigt werden. Also hat man insgesamt aus (2.41) und (2.42)

$$\sup_{\frac{1}{4}<x<4} I_{2,h}(x) \le c|\log h|^\varepsilon \|f\|_{p,2\nu+1}$$

für $\frac{1}{2} < h < 2$ und $0 < \varepsilon < \min\{1, (2\nu+1)(1/p - 1/2) - 1/p'\}$. ■

Beweis von Satz 2.1:
Dazu setzen wir Korollar 2.4 (b) und Proposition 2.5 mit $\Phi m(t\bullet)$ an Stelle von m zusammen. Ist $\sup_{t>0} \|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\nu^p} < \infty$, folgt aus Proposition 2.5 die Stetigkeit von $\Phi m(t\bullet)$, weshalb

Korollar 2.4 anwendbar ist. ∎

Wir können nun den den Restriktions- und Fortsetzungssatz auf lokale Multiplikatorensätze, die wir in folgenden Kapitel zeigen werden, zurückführen.

Beweis des Restriktionssatzes 1.1: Zunächst kann man sich darauf beschränken, für P, R, λ, κ mit

$$1 < R \le P \le 2\,, \quad R < \frac{4\kappa+4}{2\kappa+3}\,, \quad (2\kappa+2)(1/R-1/2) < (2\lambda+2)(1/P-1/2)\,,$$

d.h.

$$\max\left\{\frac{1}{P}, \frac{2\kappa+3}{4\kappa+4}\right\} < \frac{1}{R} < \frac{1}{P} + \frac{\lambda-\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{2}\right) \tag{2.43}$$

die Einbettung (1.7) zu zeigen. Ein solches R läßt sich immer finden, da für $P < \frac{4\lambda+4}{2\lambda+3}$ gerade

$$\frac{1}{P} + \frac{\lambda-\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{2}\right) > \frac{2\kappa+3}{4\kappa+4}\,,$$

impliziert. Die Behauptung folgt dann durch Interplolation (1.5).
Wir führen nun die Aussage auf einen lokalen Restriktionssatz zurück. Sei dazu $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$, $\Phi \ge 0$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-k}x) = 1$ für $x > 0$. Wir benutzen dann Theorem 2.1 mit κ statt ν und R statt r. Dazu wählt man ein $1 < R^* < R$ mit

$$(2\kappa+2)(1/R^*-1/2) < (2\lambda+2)(1/P-1/2)\,.$$

Dann gilt

$$\|m\|_{M_\kappa^R} \le c \sup_{t>0} \|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\kappa^{R^*}}\,.$$

Da wegen $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$

$$\sup_{t>0} \|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\lambda^P} = \sup_{t>0} \|\Phi(t\bullet) m\|_{M_\lambda^P} \le c\|m\|_{M_\lambda^P}\,,$$

gilt, haben wir das Problem auf den folgenden lokalen Restriktionssatz zurückgeführt:

$$\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\kappa^{R^*}} \le c\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\lambda^P}\,, \qquad (2\kappa+2)(1/R^*-1/2) < (2\lambda+2)(1/P-1/2)$$

mit einer von t unabhängigen Konstanten c. Diese Aussage werden wir im nächsten Kapitel zeigen. ∎

Beweis des Fortsetzungssatzes 1.3: Im Fall des Fortsetzungssatzes verfährt man genauso. Hier kann man sich darauf beschränken, für P, Q, λ, μ mit $-1/2 < \lambda < \mu$, $\mu \geq 0$, $1 < P < Q < \frac{4\mu+4}{2\mu+3}$ und $(2\mu+1)(1/Q - 1/2) < (2\lambda+1)(1/P - 1/2)$ die Einbettung (1.11) zu zeigen. Denn aus der Voraussetzung (1.10) kann man die Existenz von Q mit

$$\frac{2\mu+3}{4\mu+4} < \frac{1}{Q} < \frac{1}{P} + \frac{2(\lambda-\mu)}{2\mu+1}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2}\right)$$

folgern. Durch (1.5) erhält man dann die Behauptung für alle Q, die die Voraussetzung (1.10) erfüllen.
Mit diesen P, Q, λ und μ kann das Theorem, genauso wie der Restriktionssatz, auf die lokale Aussage ($1 < P < Q < Q^* < \frac{4\mu+4}{2\mu+3}$)

$$\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\nu^{Q^*}} \leq c\|\Phi m(t\bullet)\|_{M_\lambda^P}\,, \qquad (2\mu+1)(1/Q^* - 1/2) < (2\lambda+1)(1/P - 1/2)$$

zurückgeführt werden. Auch dieses Resultat werden wir im nächsten Kapitel zeigen. ■

3 Lokale Hankelmultiplikatoren

3.1 Der lokale Restriktions- und Fortsetzungssatz

In diesem Kapitel werden der angekündigte Restriktions- und Fortsetzungssatz für lokale Hankelmultiplikatoren m bewiesen, indem wir die Methoden von D. Müller und A. Seeger in [9] leicht modifizieren.

Wir bezeichnen $M_\nu^p([1/2,2])$ als den Raum aller Multiplikatoren $m \in M_\nu^P$, deren Träger $\operatorname{supp} m$ im Intervall $[1/2,2]$ enthalten ist. Intuitiv sagt dann der lokale Restriktionssatz folgendes unter diversen Voraussetzungen aus:

$$M_\lambda^P([1/2,2]) \hookrightarrow M_\kappa^{R^*}([1/2,2])\,, \qquad R^* \leq P\,.$$

Theorem 3.1 *(lokaler Restriktionssatz)*
Seien $0 \leq \kappa < \lambda$, $1 < R^* \leq P \leq 2$ und $1 < R^* < \frac{4\kappa+4}{2\kappa+3}$. Für beschränkte Funktionen m mit $\operatorname{supp} m \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$ *gilt*

$$\|m\|_{M_\kappa^{R^*}} \leq c\|m\|_{M_\lambda^P}\,, \qquad (2\kappa+2)(1/R^* - 1/2) < (2\lambda+2)(1/P - 1/2)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten c.

Der lokale Fortsetzungssatz besagt intuitiv

$$M_\lambda^P([1/2,2]) \hookrightarrow M_\mu^{Q^*}([1/2,2])\,, \qquad P < Q^*\,.$$

Theorem 3.2 *(lokaler Fortsetzungssatz)*
Seien $0 \le \mu$, $-1/2 < \lambda < \mu$ und $1 < P < Q^* < \frac{4\mu+4}{2\mu+3}$. Für beschränkte Funktionen m mit $\operatorname{supp} m \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$ *gilt*

$$\|m\|_{M_\mu^{Q^*}} \le c\|m\|_{M_\lambda^P}, \qquad (2\mu+1)(1/Q^* - 1/2) < (2\lambda+1)(1/P - 1/2)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten c.

Bemerkung: Technische Schwierigkeiten liegen sowohl im Restriktions- als auch im Fortsetzungssatz für $-1/2 < \nu < 0$ vor und ist daher noch ein offenes Problem.

Wir werden diese Sätze beweisen, indem wir Ergebnisse aus [9] leicht modifiziert anwenden und die Aussagen auf Ergebnisse für die Cosinusentwicklung (d.h. Entwicklung bzgl. $H_{-1/2}$) zurückführen:

Satz 3.3 *Seien $\nu \ge 0$ und $\frac{4\nu+4}{2\nu+1} < p < \infty$. Sei ferner m eine beschränkte Funktion mit* $\operatorname{supp} m \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$. *Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$*

$$\|m\|_{M_\nu^p} \le c\|m\|_\infty + c_\varepsilon \left(\int_0^\infty \left| H_{-1/2}[m](y) y^{(2\nu+1)(1/2-1/p)+\varepsilon} \right|^{p'} \, dy \right)^{1/p'}$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten c.

Dieser Satz kann genauso bewiesen werden wie [9, Theorem 6.4], indem man in Theorem 1.2, Theorem 2.1, Theorem 2.3, Propsition 6.3 und in den Sätzen des Kapitels 4 und 5 aus [9] die Dimension n durch $2\nu + 2$, $\nu \ge 0$, ersetzt, $\gamma = 0$, $\lambda_1 = \nu$ sowie $f_1 := f$ und $f_j := 0$, $\lambda_j := 0$ für $j \ge 2$ setzt. Dadurch vereinfacht sich in Kapitel 5.2 die Abschätzung des oszillatorischen Anteils $O_{z,\lambda,l}$. Statt Theorem 3.1 in [9] genügt es, folgenden elementare Abschätzung zu zeigen.

Lemma 3.4 *Sei Φ eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}^2$, $a \in C_c(\mathbb{R}^3)$ und T_ν definiert durch*

$$T_\nu f(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu\Phi(x,y)} a(x,y) f(y) \, dy, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt für alle Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|T_\nu f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le c\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 2 \le p \le \infty,$$

wobei die Konstante c nur von $\|a\|_\infty$, p und vom Durchmesser der Menge $\operatorname{supp} a$ *abhängig ist.*

Beweis: Wir beweisen dieses Lemma durch Interpolation und betrachten daher die Fälle $p = 2$ und $p = \infty$. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir mit d den Durchmesser der Menge $\operatorname{supp} a$.
Sei zunächst $p = 2$. Dann gilt mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|T_\nu f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}}|a(x,y)|^2\,dy\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(y)|^2\,dy\Big)\,dx\right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}d^{3/2}\,.$$

Für $p = \infty$ gilt

$$\|T_\nu f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}|a(x,y)||f(y)|\,dy \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}d\,.$$

Die Behauptung folgt durch Interpolationssatz von Riesz-Thorin. ■

Hiermit kann nun der Operator $\mathcal{O}_{z,\lambda,l}$ aus [9, 5.2] abgeschätzt werden, indem für den Operator $\mathcal{A}_\lambda$ [9, (5.2.1)] die Ungleichung [9, (5.2.14)] gezeigt wird.

Durch Satz 3.3 können wir nun den lokalen Restriktions- und Fortsetzungssatz zeigen.

Beweis des lokalen Restriktionssatzes 3.1: Wir benutzen Korollar 3.3, wobei $p' < 2$ durch R^* und ν durch κ ersetzt werden, und werden daher

$$\|m\|_{M_\kappa^{R^*}} \leq c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |H_{-1/2}m(x)|^{R^*}x^{(2\kappa+1)(1/R^*-1/2)R^*+\varepsilon R^*}\,dx\right)^{1/R^*}$$

mit einem noch zu wählenden $\varepsilon > 0$ durch $\|m\|_{M_\lambda^P}$ abschätzen. Durch Lemma 4.1 und der Hölderungleichung gilt

$$\begin{aligned}\|m\|_{M_\kappa^{R^*}} \leq\ & c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |H_{-1/2}m(x)|^P(1+x)^{P(2\lambda+1)(1/P-1/2)}\,dx\right)^{1/P}\\ & \times\left(\int_0^\infty (1+x)^{[(2\kappa+1)(1/R^*-1/2)+\varepsilon-(2\lambda+1)(1/P-1/2)]\frac{R^*P}{P-R^*}}\,dx\right)^{\frac{P-R^*}{R^*P}},\end{aligned}$$

wobei das untere Integral beschränkt ist, falls $0 < \varepsilon < (2\lambda+2)(1/P-1/2)-(2\kappa+2)(1/R^*-1/2)$ ist. Nun benutzt man den Transplantationssatz von Stempak. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|m\|_{M_\kappa^{R^*}} &\leq c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |L_\lambda^{(-1/2-\lambda)/2}H_\lambda m(x)|^P x^{2\mu+1}\,dx\right)^{1/P}\\ &= c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |H_\lambda[\bullet^{-1/2-\lambda}m](x)|^P x^{2\lambda+1}\,dx\right)^{1/P}\\ &\leq c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |H_\lambda[\varphi m](x)|^P x^{2\lambda+1}\,dx\right)^{1/P}\\ &\leq c\|m\|_\infty + c\|m\|_{M_\lambda^P}\|H_\lambda\varphi\|_{P,2\lambda+1}\,,\end{aligned}$$

wobei $\varphi(\xi) := \xi^{-1/2-\lambda}\chi(\xi)$ mit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ aus den Beweis des Korollars 3.3 ist. Die Voraussetzung $-1 < a < P(\lambda + \frac{3}{2}) - 1$ für $a = P(2\lambda+1)(1/P - 1/2)$ aus dem Transplantationssatz läßt sich durch einfache Berechnung nachprüfen. Da $H_\lambda\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ ist, folgt daraus die Behauptung. ■

Für den Beweis des lokalen Fortsetzungssatzes orientieren wir uns an dem Beweis von [9, Theorem 1.6].

Beweis des lokalen Fortsetzungssatzes 3.2: Wir benutzen wieder Korollar 3.3 mit Q^* statt $p' < 2$ und μ anstatt ν, weshalb es reicht

$$I_m := \left(\int_0^\infty |H_{-1/2}m(x)|^{Q^*}(1+x)^{(2\mu+1)(1/Q^*-1/2)Q^*+\varepsilon Q^*}\,dx\right)^{1/Q^*} \leq c\|m\|_{M_\lambda^P} \tag{3.44}$$

zu zeigen. Sei $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\chi = 1$ auf $[1/2, 2]$ und $\operatorname{supp}\chi \subseteq [1/4, 4]$, so daß $m = m\chi$ gilt. Mit $\varepsilon := (2\lambda+1)(1/P - 1/2) - (2\mu+1)(1/Q^* - 1/2) > 0$ gilt wegen der gewichteten Faltungsungleichung bzgl. der Faltung in $H_{-1/2}$ (Lemma 4.2)

$$\begin{aligned} I_m &\leq c\left(\int_0^\infty \left|H_{-1/2}m * H_{-1/2}\chi(x)(1+x)^{(2\mu+1)(1/Q^*-1/2)+\varepsilon}\right|^{Q^*}dx\right)^{1/Q^*} \\ &\leq c\left\|H_{-1/2}m(\bullet)(1+\bullet)^{(2\lambda+1)(1/P-1/2)}\right\|_P \left\|H_{-1/2}\chi(\bullet)(1+\bullet)^{(2\lambda+1)(1/P-1/2)}\right\|_q \\ &\leq c\left(\int_0^\infty |H_{-1/2}m(x)|^P(1+x)^{P(2\lambda+1)(1/P-1/2)}\,dx\right)^{1/P}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

mit $1/q := 1/Q^* - 1/P + 1$, da $H_{-1/2}\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.
Führen wir den (beschränkten) Kern K durch $m =: H_\lambda K$ ein, so folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} H_{-1/2}m(x) &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(xy)m(y)\chi(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty K(z)\int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(xy)\chi(y)\frac{J_\lambda(yz)}{(yz)^\lambda}\,dy z^{2\lambda+1}\,dz\,. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nun benutzt man für die Besselfunktion die Asymptotik [18, (1.71.8)]

$$(\frac{\pi}{2})^{1/2}J_{\gamma-1/2}(s) = \sum_{j=0}^{N-1} d_{j,\gamma}\cos(s-\frac{\gamma\pi}{2})s^{-2j-1/2} + \sum_{j=0}^{N-1} d_{j,\gamma}\sin(s-\frac{\gamma\pi}{2})s^{-2j-3/2} + s^{-N}R_\gamma(s)\,, \tag{3.47}$$

wobei $c_{0,\gamma} = 1$ ist und R_γ eine beliebig oft differnzierbare Funktion mit beschränkten Ableitungen auf $[1,\infty)$ ist.

Setzt man $s := yz \geq 1$, so erhält man und erhält

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{J_\lambda(s)}{s^\lambda} = \sum_{\pm} a_\pm(s)e^{\pm is} := a_+(s)e^{is} + a_-(s)e^{-is} \tag{3.48}$$

mit

$$\begin{aligned} a_+(s) &:= \sum_{j=0}^{N-1} a_j s^{-\lambda-1/2-2j} + \sum_{j=0}^{N-1} c_j s^{-\lambda-3/2-2j} + R(s)s^{-N-\lambda}e^{-is} \\ a_-(s) &:= \sum_{j=0}^{N-1} b_j s^{-\lambda-1/2-2j} + \sum_{j=0}^{N-1} d_j s^{-\lambda-3/2-2j}\,, \end{aligned}$$

wobei R eine Funktion mit beschränkten Ableitungen auf $[1, \infty)$ ist. (Die Koeffizienten a_j, b_j, c_j und d_j sind dabei nur von j und λ abhängig.) Dann gilt für $s \geq 1$ die folgende Ungleichung

$$|a_\pm^{(k)}(s)| \leq cs^{-\lambda-1/2-k}\,, \qquad s \geq 0\,, \quad 0 \leq k \leq N-1\,. \tag{3.49}$$

Diese gilt auch für $0 \leq s := yz \leq 1$. indem man $a_+(s) := \frac{J_\lambda(s)}{s^\lambda}e^{-is}$ und $a_-(s) := 0$, sowie $R(s) := 0$ setzt. Wegen $\frac{d}{ds}[s^{-\alpha}J_\alpha(s)] = -\frac{J_{\alpha+1}(s)}{s^{\alpha+1}}s$ ist $(\frac{d}{ds})^k[s^{-\alpha}J_\alpha(s)]$ eine Summe von $c_{\beta,\gamma}s^\beta\frac{J_\gamma(s)}{s^\gamma}$, wobei $0 \leq \beta \leq k$ und $\alpha \leq \gamma \leq \alpha + k$ sind. Wegen $\frac{J_\alpha(s)}{s^\alpha} \approx 1$, hat man insgesamt (3.49).
Setzt man (3.48) in (3.46) ein, so erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} H_{-1/2}m(x) &= \frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_0^\infty K(z)\int_0^\infty a_+(yz)e^{iy(\pm x+z)}\chi(y)\,dyz^{2\lambda+1}\,dz + \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{\pm}\int_0^\infty K(z)\int_0^\infty a_-(yz)e^{iy(\pm x-z)}\chi(y)\,dyz^{2\lambda+1}\,dz\,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Man betrachtet nun das innere Integral. Für $\pm x + z \neq 0$ und einem $N \in \mathbb{N}$ mit $(2\lambda + 1)(1/r - 1/2) + 2 < N$ gilt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \chi(y)a_+(yz)e^{iy(\pm x+z)}\,dy = \int_0^\infty \chi(y)a_+(yz)[i(\pm x+z)]^{-N+1}D_y^{N-1}e^{iy(\pm x+z)}\,dy \\ &= (-1)^{N-1}[i(\pm x+z)]^{-N+1}\int_0^\infty e^{iy(\pm x+z)}D_y^{N-1}[\chi(y)a_+(yz)]\,dy \\ &= (-1)^{N-1}[i(\pm x+z)]^{-N+1}\int_0^\infty \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\chi^{(N-1+k)}(y)a_+^{(k)}(yz)z^k e^{iy(\pm x+z)}\,dy\,. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung von a_+ erhält man wegen $\sup_{0\le k\le N-1}|\chi^{(N-1-k)}(y)|\le c$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty \chi(y)a_+(yz)e^{iy(\pm x+z)}\,dy\right| \\
\le\;& c|\pm x+z|^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{1/4}^4 y^{-\lambda-1/2-k}z^{-\lambda-1/2}\,dy \\
\le\;& cz^{-\lambda-1/2}|\pm x+z|^{-N+1}
\end{aligned}$$

für $\pm x+z\neq 0$. In einer Umgebung von $\pm x+z=0$ hingegen, kann man wegen $\operatorname{supp}\chi\subseteq[\frac{1}{4},4]$ und (3.49) die Abschätzung

$$\left|\int_0^\infty \chi(y)a_+(yz)e^{iy(\pm x+z)}\,dy\right|\le\int_{1/4}^4(yz)^{-\lambda-1/2}\le cz^{-\lambda-1/2}$$

benutzen. Setzt man

$$\varphi(s):=\begin{cases}|s|^{-N+1} & \text{für}\quad |s|\ge 1\\ 1 & \text{sonst,}\end{cases}$$

so erhält man insgesamt

$$\left|\int_0^\infty \chi(y)a_+(yz)e^{iy(\pm x+z)}\,dy\right|\le cz^{-\lambda-1/2}\varphi(\pm x+z)\,.$$

Genauso kann man den Anteil mit a_- abschätzen. Setzt man dies in (3.50) ein und erweitert K gerade, so erhält man

$$\begin{aligned}
|H_{-1/2}m(x)| &\le c\sum_{\pm}\int_0^\infty |K(z)|z^{-\lambda-1/2}\varphi(\pm x\pm z)z^{2\lambda+1}\,dz \\
&\le \frac{c}{2}\sum_{\pm}\int_{-\infty}^\infty |K(z)||z|^{\lambda+1/2}\varphi(\pm x\pm z)\,dz = c[|K||\bullet|^{\lambda+1/2}]*\varphi(x) \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

mit der klassischen Faltung $*$ auf $\mathbb{R}$.
Wir setzen nun (3.51) in (3.45) ein un erhalten durch Lemma 4.1 und der gewichteten Faltungsungleichung (Lemma 4.2

$$\begin{aligned}
I_m &\le c\left(\int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^\infty |K(y)y^{\lambda+1/2}|\varphi(x-y)\,dy\Big)^P(1+x)^{(2\lambda+1)(1/P-1/2)P}\,dx\right)^{1/P} \\
&\le c\left(\int_0^\infty |K(x)x^{\lambda+1/2}(1+x)^{(2\lambda+1)(1/P-1/2)}|^P\,dx\right)^{1/P}\|\varphi(\bullet)(1+\bullet)^{(2\lambda+1)(1/P-1/2)}\|_1 \\
&\le c\|m\|_\infty + c\left(\int_0^\infty |H_\lambda m\chi(x)|^P x^{2\lambda+1}\,dx\right)^{1/P}\le c\|m\|_{M_\lambda^P}\,,
\end{aligned}$$

da die Integration über φ wegen $(2\lambda+1)(1/P-1/2)+2<N$ endlich ist. ■

4 Hilfsmittel

4.1 Bezeichnungsweisen

Hier möchten wir kurz die Begriffe erläutern, die zur Erläuterung des Restriktions- bzw. Fortsetzungssatzes benutzt worden sind:
Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

definiert. Auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird die Fouriertransformation auf natürliche Weise erweitert ([14, S.25]).
Sei $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, meßbare Funktion. Dann wird m ein Fouriermultiplikator genannt, falls

$$\|\mathcal{F}^{-1}[m \cdot \mathcal{F}f]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{4.52}$$

gilt. Wir schreiben dann

$$M^p(\mathbb{R}^n) := \left\{m \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \|m\|_{M^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}\,,$$

wobei $\|m\|_{M^p(\mathbb{R}^n)}$ die kleinste Konstante C ist, bzgl. welcher die Ungleichung (4.52) gilt.
Der Raum aller radialen Fouriermultiplikatoren ist im allgemeinen im Raum der Hankelmultiplikatoren $M^p_{(n-2)/2}$ der Ordnung $\frac{n-2}{2}$ echt enthalten. Der Raum $L^p_{\mathrm{rad}}(L^2_{\mathrm{sph}})$ ist die Menge aller meßbaren Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$, deren Norm

$$\|f\|_{L^p_{\mathrm{rad}}(L^2_{\mathrm{sph}})} := \left(\int_0^\infty \|f(r,\bullet)\|^p_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} r^{n-1}\,dr\right)^{1/p}\,, \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

endlich ist. Die Norm unter dem Integral ist die L^2-Norm auf der n-Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$.

4.2 Kleinigkeiten

In diesem Kapitel werden wir einige Hilfsmittel zeigen, die nützlich und häufig verwendet wurden.

Lemma 4.1
Seien $1 < q < \infty$, $\eta \geq 0$ und $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [\frac{1}{2}, 2]$. Dann gilt für jede beschränkte Funktion $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\|\Phi m(t\bullet)\|_\infty + \left(\int_0^\infty |H_{-1/2}[\Phi m(t\bullet)](x)|^q x^\eta\,dx\right)^{1/q} \\ \approx\ &\|\Phi m(t\bullet)\|_\infty + \left(\int_0^\infty |H_{-1/2}[\Phi m(t\bullet)](x)|^q (1+x)^\eta\,dx\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Ungleichung $\lesssim$ ist trivialerweise gegeben. Nun zur umgekehrten Richtung. Wir zerlegen das Integral in

$$\left[\left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) |H_{-1/2}[\Phi m(t\bullet)](x)|^q (1+x)^\eta \, dx\right]^{1/q} =: I_1 + I_2 \, .$$

Es gilt

$$I_1 \leq c\|H_{-1/2}[\Phi m(\bullet)]\|_\infty = c\left\|\int_{1/2}^2 \cos(y\bullet)\Phi(y)m(ty)\,dy\right\|_\infty \leq c\|\Phi m(t\bullet)\|_\infty \, .$$

In I_2 kann man $1+x \leq 2x$ benutzen und erhält sofort die Behauptung. ■

Lemma 4.2 (gewichtete Faltungsungleichung)
Seien $\varepsilon \geq 0$, $f(\bullet)(1+\bullet)^\varepsilon \in L^p_{2\nu+1}$, $g(\bullet)(1+\bullet)^\varepsilon \in L^r_{2\nu+1}$, $1 \leq p, r \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \geq 1$, dann gilt

$$\|f * g(1+\bullet)^\varepsilon\|_{q,2\nu+1} \leq \|f(1+\bullet)^\varepsilon\|_{p,2\nu+1}\|g(1+\bullet)^\varepsilon\|_{r,2\nu+1} \, , \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \, .$$

Beweis: Nach Definition gilt

$$f * g(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)g(z)D_\nu(x,y,z)y^{2\nu+1}z^{2\nu+1}\,dydz$$

mit einem Kern $D_\nu(x,y,z)$, das für $x \leq |y-z|$ und $y+z \leq x$ verschwindet. Also gilt $x < y+z$, woraus aus [10, S.13] $(1+x)^\varepsilon < (1+y+z)^\varepsilon \leq (1+y)^\varepsilon(1+z)^\varepsilon$ folgt. Man erhält $|f * g(x)(1+x)^\varepsilon| \leq [|f|(1+|\bullet|)^\varepsilon] * [|g|(1+\bullet)^\varepsilon](x)$. Wendet man darauf die Youngsche Ungleichung für den Hankel-Fall an, hat man die Behauptung. ■

Bemerkung. Für die Faltung auf $\mathbb{R}$ erhält man das gleiche Ergebnis (mit der Norm auf L^p statt $L^p_{2\nu+1}$), da hier genauso $|f * g(1+|\bullet|)^\varepsilon| \leq [|f|(1+|\bullet|)^\varepsilon] * [|g|(1+|\bullet|)^\varepsilon]$ gilt.

Im folgenden Satz untersuchen wir, unter welchen Bedingungen die Funktion $s^{-\gamma}J_\gamma(s)$ ein Multiplikator aus M^p_ν ist.

Satz 4.3 *Für $1 < p < 2$ und $\gamma > (2\nu+1)(1/p - 1/2) - 1/2$ ist $m_\gamma := s^{-\gamma}J_\gamma(s)$ ein Multiplikator in M^p_ν.*

Beweis: Wir benutzen den Interpolationssatz für analytische Familien von Operatoren und erweitern hierfür die Definition des Multiplikators m_γ für komplexe Indizes $z \in \mathbb{C}$ durch

$$m_{\nu+1+z}(s) := s^{-(\nu+1+z)}J_{\nu+1+z}(s)$$

und zeigen die Voraussetzungen des Interpolationssatzes.
Da für $\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{2}$ die Funktion $J_z(s)$ bzgl. z holomorph ist, ist $m_{\nu+1+z}$ holomorph auf der Menge $\{z \in \mathbb{C}\colon\, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ und stetig auf deren Abschluß.
Weiterhin gelten nach [4, S. 37,(7)]

$$H_\nu \left[\bullet^{-(\nu+1+z)} J_{\nu+1+z}\right](x) = \frac{2^{-z}}{\Gamma(z+1)}(1-x^2)_+^z \in L^1_{2\nu+1}\,, \quad \mathrm{Re}(z) > -1$$

und

$$s^{-(\nu+1+z)} J_{\nu+1+z}(s) \in L^\infty\,, \qquad \mathrm{Re}(z) > -(\nu+3/2)\,,$$

d.h. es gelten $m_{\nu+1+z} \in M^1_\nu$ und $m_{\nu+1+z} \in M^2_\nu$. Benutzt man die Abschätzungen

$$|\Gamma(x+iy)| \geq \Gamma(x) e^{-|y|\pi/2}\,, \qquad x \geq \frac{1}{2}\,,$$

$$|J_{x+iy}(s)| \leq 4\pi^{-1/2} \left(\frac{s}{2}\right)^x \frac{e^{|y|\pi/2}}{(1+2x)\Gamma(x+1)}\,,$$

sowie $\Gamma(x)^{-1} \leq 2$ für alle $x \geq 0$, so erhält man

$$\left\|(1-\bullet^2)^{-1+\varepsilon+iy}\right\|_{1,2\nu+1} \leq \int_0^1 (1-s^2)^{-1+\varepsilon} s^{2\nu+1}\, ds \leq \frac{1}{2\varepsilon}$$

und somit für $z = -1+\varepsilon+iy$ die Abschätzung

$$\|m_{\nu+1+z}\|_{M^1_\nu} \leq \frac{2^{1-\varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon)} e^{|y|\pi/2} \frac{1}{2\varepsilon}\,.$$

Ferner gilt auch

$$\|m_z\|_{M^2_\nu} \leq 4\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-(\nu+1+x)} \frac{e^{|y|\pi/2}}{(1+2(\nu+1+x))\Gamma(\nu+2+x)} \leq 4\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^|y|\pi/2}{\varepsilon}\,, \quad x \geq \frac{1}{2}+\varepsilon\,.$$

Die Wachstumsbedingungen sind somit auch erfüllt, weshalb aus dem Interpolationssatz für analytische Operatoren die Behauptung folgt. ■

4.3 Hilfsmittel aus der Littlewood-Paley-Theorie

Für die Erweiterung der lokalen Ergebnisse für die Hankelmultiplikatoren hat man spezielle g-Funktionen als Hilfsmittel benutzt. Wir möchten nun den zentralen Satz der Littlewood-Paley-Theorie im Falle der Hankeltransformation zeigen.

Satz 4.4 *Sei* $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ *eine Funktion mit* $\Phi \geq 0$ *und* $\operatorname{supp}\Phi \subseteq [2^{-N}, 2^N]$ *für ein festes* $N \in \mathbb{N}$*, die der Bedingung* $c_1 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(2^{-k}x) \leq c_2$ *mit von* x *unabhängigen Konstanten* $c_1,\, c_2 > 0$ *genügt.*
Dann gilt für die g-Funktion $g_\Phi(f)(x) := \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |H_\nu[\Phi(2^{-k}\bullet)] * f|^2\right)^{1/2}$ *für alle Funktionen* $f \in L^p_{2\nu+1}$

$$\|g_\Phi(f)\|_{p,2\nu+1} \approx \|f\|_{p,2\nu+1}\,, \qquad 1 < p < \infty\,.$$

Um dies zu beweisen benötigt man die folgende, einfache Modifikation des Theorems 3 aus [13], die man genauso aus [13, Theorem 2] herleiten kann, indem man die Beträge von $Tf(x)$, $Tg(x)$, $Tb(x)$ und $K(x,y)$ durch l^2-Normen ersetzt.

Proposition 4.5 *Der vektorwertige Kern* $K := \{K_k\}_{K\in\mathbb{Z}}$ *erzeuge den Operator*

$$Tf(x) := \int_0^\infty K(x,y)f(y)\,d\mu(y) = \left\{\int_0^\infty K_k(x,y)f(y)\,d\mu(y)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\,,$$

wobei μ *ein Verdopplungsmaß ist. Es gelte*

$$\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_k f(\bullet)|^2\right)^{1/2}\right\|_{2,\mu} \leq c\|f\|_{2,\mu} \quad \text{für alle} \quad f \in L^2_\mu \tag{4.53}$$

und

$$\int_{B(y,2\delta)^c} \|K(x,y) - K(x,\bar{y})\|_{l^2}\,d\mu(y) \leq A \quad \text{für} \quad \bar{y} \in B(y,\delta) \tag{4.54}$$

für alle y*,* $\delta > 0$*. Dann folgt für* $f \in L^p_\mu$

$$\left\|\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_k f(\bullet)|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\mu} \leq C\|f\|_{p,\mu}\,, \quad 1 < p \leq 2$$

wobei die Konstante C *nur von* c*,* A *und* p*, jedoch nicht von* K *oder* f *abhängig ist.*

Beweis von Satz 4.4: Wir zeigen zunächst $\|g_\Phi(f)\|_{p,2\nu+1} \leq c\|f\|_{p,2\nu+1}$ und benutzen Satz 4.5 mit

$$T_k f(x) := \int_0^\infty K_k(x,y)f(y)\,d\mu(y)\,, \quad d\mu(y) := y^{2\nu+1}\,dy$$

und

$$K_k(x,y) := \int_0^\infty H_\nu[\Phi(2^{-k}\bullet)](z) D_\nu(x,y,z)\, d\mu(z) = \tau_y[H_\nu(\Phi(2^{-k}\bullet))](x)\,.$$

Dann gilt

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_k f(x)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |H_\nu[\Phi(2^{-k}\bullet)] * f(x)|^2\right)^{1/2} = g_\Phi(f)(x)\,.$$

Ferner ist nach [15, Prop. 4] $d\mu$ ein Verdopplungsmaß.
Wir zeigen zunächst die Voraussetzung (4.53) des Satzes 4.5: Mit dem Satz von Fubini und dem Satz von Plancherel folgt

$$\|g_\Phi(f)\|_{2,2\nu+1}^2 \approx \int_0^\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Phi(2^{-k}x)|^2 |H_\nu f(x)|^2 x^{2\nu+1}\, dx\,.$$

Gleichmäßig in $x > 0$, gibt es nach Konstruktion für jedes x nur endlich viele $k \in \mathbb{Z}$, so daß $\Phi(2^{-k}x) \neq 0$ ist. Daher gilt $\sum_k |\Phi(2^{-k}x)|^2 \approx \sum_k |\Phi(2^{-k}x)| \approx 1$. Durch den Satz von Plancherel erhält man dann

$$\|g_\Phi(f)\|_{2,2\nu+1} \approx \|f\|_{2,2\nu+1} \tag{4.55}$$

und (4.53) gilt.
Um die Voraussetzung (4.54) des Satzes 4.5, d.h. die Hörmander-Bedingung zu zeigen, sei zunächst $y,\ \bar{y} \in \mathbb{R}^+$ fest. Dann wählt man ein $k_0 \in \mathbb{Z}$, so daß $2^{k_0}|y-\bar{y}| \le 1$ und $2^{k_0+1}|y-\bar{y}| \ge 1$ gelten. Wir benötigen die Beschränktheit der Terme

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|\ge 2|y-\bar{y}|} \left[\left(\sum_{k\ge k_0} + \sum_{k\le k_0}\right) |\tau_y[H_\nu(\Phi(2^{-k}\bullet))](x) - \tau_{\bar{y}}[H_\nu(\Phi(2^{-k}\bullet))](x)|^2\right]^{1/2} x^{2\nu+1}\, dx\\ =:&\ \ S_1 + S_2\,.\end{aligned}$$

Durch Substitution erhält man

$$\tau_y[H_\nu(\Phi(2^{-k}\bullet))](x) = 2^{k(2\nu+2)}\tau_{2^k y}[H_\nu\Phi](2^k x)\,. \tag{4.56}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} S_1 &\le 2\int_{|x-y|\ge 2|y-\bar{y}|} \left(\sum_{k\ge k_0} |2^{k(2\nu+2)}\tau_{2^k y}[H_\nu\Phi](2^k x)|^2\right)^{1/2} x^{2\nu+1}\, dx\\ &\le c\sum_{k\ge k_0} 2^{k(2\nu+2)} \int_{|x-y|\ge 2|y-\bar{y}|} \left|\int_0^\infty H_\nu\Phi(z) D_\nu(2^k x, 2^k y, z) z^{2\nu+1}\, dz\right| x^{2\nu+1}\, dx\,,\end{aligned}$$

da $l^1 \hookrightarrow l^2$. Nun gilt aber $D_\nu(2^k x, 2^k y, z) = 0$ für $0 < z < 2^k|x-y|$ oder $2^k(x+y) < z < \infty$. Daher reicht es für das innere Integral, über $[2^{k+1}|y-\bar{y}|, \infty[$ zu integrieren, da $2^{k+1}|y-\bar{y}| \leq 2^k|x-y| \leq z$ ist. Mit dem Satz von Fubini erhält man

$$\begin{aligned} S_1 &\leq c \sum_{k \geq k_0} 2^{k(2\nu+2)} \int_{|x-y| \geq 2|y-\bar{y}|} \int_{2^{k+1}|y-\bar{y}|}^{\infty} |H_\nu \Phi(z)| D_\nu(2^k x, 2^k y, z) z^{2\nu+1}\, dz\, x^{2\nu+1}\, dx \\ &\leq c \sum_{k \geq k_0} 2^{k(2\nu+2)} \int_{2^{k+1}|y-\bar{y}|}^{\infty} |H_\nu \Phi(z)| \int_0^\infty D_\nu(2^k x, 2^k y, z) x^{2\nu+1}\, dx\, z^{2\nu+1}\, dz \\ &\leq c \sum_{k \geq k_0} \int_{2^{k+1}|y-\bar{y}|}^{\infty} |H_\nu \Phi(z)| z^{2\nu+1}\, dz\,. \end{aligned}$$

Nun wählt man ein $\alpha > \nu + 1$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt wegen $H_\nu\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$

$$S_1 \leq c \sum_{k \geq k_0} \|H_\nu \Phi\|_{2,2\alpha+2\nu+1} \left(\int_{2^{k+1}|y-\bar{y}|}^{\infty} z^{-2\alpha+2\nu+1}\, dz \right)^{1/2} \leq c \sum_{k \geq k_0} (2^{k-k_0})^{-\alpha+\nu+1} \leq c\,,$$

da $2^{-k_0-1} \leq |y-\bar{y}|$.
Wir zeigen nun die Beschränktheit von S_2 und können in diesem Fall [7, Theorem 2.1] benutzen. Wegen (4.56), $l^1 \hookrightarrow l^2$ und des Satzes von Fubini gilt

$$\begin{aligned} S_2 &\leq c \sum_{k \leq k_0} 2^{k(2\nu+2)} \int_0^\infty |\tau_{2^k y}(H_\nu\Phi)(2^k x) - \tau_{2^k \bar{y}}(H_\nu\Phi)(2^k x)| x^{2\nu+1}\, dx \\ &\leq 2^k |y-\bar{y}| \|(H_\nu\Phi)'\|_{1,2\nu+1} \leq c \sum_{k \leq k_0} 2^{k-k_0} \leq c\,, \end{aligned}$$

da $H_\nu\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ und $|y-\bar{y}| \leq 2^{-k_0}$ ist. Damit hat man nun auch die Voraussetzung (4.54), weshalb man aus Satz 4.5 die Behauptung für $1 < p \leq 2$ folgern kann. Für $2 < p < \infty$ folgt die Behauptung durch ein Dualitätsargument wie in [12, (c),S.33].

Wir beweisen nun $\|f\|_{p,2\nu+1} \leq c\|g_\Phi(f)\|_{p,2\nu+1}$. Durch Polarisierung führt man die Behauptung auf die Ungleichung $\|g_\Phi(f)\|_{p,2\nu+1} \leq c\|f\|_{p,2\nu+1}$ zurück. Für Funktionen $h \in L^{p'}_{2\nu+1}$ gilt wegen (4.55)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)h(x)x^{2\nu+1}\, dx &= \frac{1}{4}(\|f+h\|^2_{2,2\nu+1} - \|f-h\|^2_{2,2\nu+1}) \\ &\approx \int_0^\infty g(f)(x) g(h)(x) x^{2\nu+1}\, dx\,. \end{aligned}$$

Durch die Umkehrung der Hölderungleichung folgt daraus

$$\|f\|_{p,2\nu+1} \approx \sup_h \left| \int_0^\infty g(f)(x) g(h)(x) x^{2\nu+1}\, dx \right|\,,$$

wobei das Supremum über alle $h \in L^{p'}_{2\nu+1}$ mit $\|h\|_{p',2\nu+1} \leq 1$ betrachtet wird. Wendet man auf die linke Seite die Hölderungleichung an und dann $\|g(h)\|_{p',2\nu+1} \leq \|h\|_{p',2\nu+1}$, so hat man die Behauptung. ■

Literatur

[1] K.F. Andersen und H.P. Heinig, *Weighted norm inequalities for certain integral operators*, SIAM J. Math. Anal. **14** (1983), 834-844.

[2] J. Bergh und J. Löfström, *Interpolation spaces*, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 223, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[3] R. R. Coifman und G. Weiss, *Transference Methods in Analysis*, CBMS No. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[4] A. Erdlyi, W. Magnus, F. Oberhettinger und F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1954.

[5] C. Fefferman und E. M. Stein, *H^p Spaces of Several Variables*, Acta Math. **129**, (1972), 137-193.

[6] G. Gasper und W. Trebels, *A characterization of localized Bessel potential spaces and application to Jacobi and Hankel multipliers*, Studia Math. **65**, (1979), 243-278.

[7] J. Gosselin und K. Stempak, *A weak-type Estimate for Fourier-Bessel Multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc. **106**, No. 3, (1989), 655-662.

[8] D. Guy, *Hankel Multiplier Transformations and weighted p-Norms*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 137-189.

[9] D. Müller und A. Seeger, *Regularity Properties of Wave Propagation on Conic Manifolds and Application to Spectral Multipliers.*

[10] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Group*, Oxford Clarendon Press, Oxford, 1968.

[11] A. Seeger, *Some Inequalities for Singular Convolution Operators in L^p-Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** No.1, (1988), 259-272.

[12] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[13] E. Stein, Harmonic Analysis, Princeton Univ. Press., Princeton, N.J., 1993.

[14] E.M. Stein und G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[15] K. Stempak, *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, Preprint no. 45, Univ. Wroclaw, 1985.

[16] K. Stempak, *On Connection between Hankel, Laguerre and Jacobi Transplantation*, J. London Math. Soc., II. **51**, No. 2 (1995), 286-298.

[17] K. Stempak und W. Trebels, *Hankel multipliers and transplantation operators*, Studia Math. **126**, (1), (1997), 51-66.

[18] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium, 1959.

[19] P. A. Tomas, *On radial Fourier Multipliers*, Diss. der Cornell Univ., 1974.

[20] A. Torchinsky, *Real-variable methods in harmonic analysis*, Academic Press, Orlando, Fla., 1986.

Natsuko Arai
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
Schloßgartenstraße 7
64289 Darmstadt
e-mail. arai@mathematik.tu-darmstadt.de