Mathematik als kulturelles Produkt menschlicher Denktätigkeit und ihr Bezug zum Individuum

Susanne Prediger

Erscheint in: Katja Lengnink / Susanne Prediger / Franziska Siebel (Hrsg.): Mathematik und Mensch, Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik, Darmstädter Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft Bd. 2, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Darmstadt 2001.

Zusammenfassung: Ausgehend von dem für das Mathematiklernen fundamentalen Problem des (oft fehlenden) Subjektbezuges soll das Verhältnis von Mensch und Mathematik analysiert werden. Dazu wird die Auffassung von Mathematik als kulturelles Produkt menschlicher Denktätigkeit vorgestellt und begründet. So wird das eigentümliche Spannungsverhältnis verstehbar, dass die Mathematik einerseits zwar durch die Menschheit gestaltet ist, sie dem einzelnen andererseits aber als objektiv Gegebenes gegenübertritt. Erklärungsbedürftig ist in dieser Auffassung die hohe Kohärenz der mathematischen Theorien und der große Konsens unter Mathematikern, was unter Rückgriff auf historische Untersuchungen und wissenschaftstheoretische Überlegungen geschieht.

Für mich persönlich entstammt die Frage, wie es eigentlich in der Mathematik mit dem Ich-Bezug der einzelnen Individuen steht, aus der Beschäftigung mit der Themenzentrierten Interaktion (TZI), einem aus der Humanistischen Psychologie stammenden Konzept für Kommunikation und Kooperation in Gruppen (aus Cohn 1981). In ihr ist das Prinzip der dynamischen Balance zentral, nach dem jede Gruppe durch vier Faktoren bestimmt ist: die Personen (ICH), die Gruppeninteraktion (WIR), der Sachinhalt (ES) und das Umfeld im engeren und weiteren Sinne (GLOBE). Eine erfolgreiche gemeinsame Arbeit kann auf Dauer nur stattfinden, wenn langfristig zwischen den vier Faktoren eine Balance hergestellt wird, und das bedeutet insbesondere, überhaupt Beziehungen zwischen den einzelnen Komponenten aufzubauen. Wenn man dieses Modell auf Mathematiklernen bezieht, das ES also die zu lernende Mathematik ist, stellt sich schnell heraus, dass die schwierigste Achse zwischen dem ES und dem ICH liegt (ausführlicher in Lengnink/Heger/Prediger 1998, Lengnink/Prediger 2001). Daraus ist die zentrale Frage gewachsen, die Gegenstand dieses Beitrags sein soll, nämlich die nach dem Verhältnis des Individuums zur Wissenschaft Mathematik.

Besonders scharf stellt sich diese Frage nach dem Subjektbezug der Mathematik für diejenigen, die in der Schule Mathematik lernen sollen, ohne es sich selbst ausgesucht zu haben. Die Probleme, die daraus erwachsen, dass diese Frage für unseren Mathematikunterricht nicht annäherungsweise gelöst ist, sind hinlänglich beschrieben worden: Die Lernenden erleben Mathematik oft als für sie sinnlos, die Konsequenz ist ein häufig katastrophales Selbstbild in Bezug auf Mathematik sowie die Unfähigkeit und Weigerung, auch nur elementare Mathematik im Leben außerhalb der Schule anzuwenden (eindringlich beschrieben etwa in Baruk 1989, Fischer/Malle 1985).

Dennoch ist das Thema bisher selten umfassend behandelt worden. Eine der wenigen systematischen Beschäftigungen mit der Frage nach dem Subjektbezug beim Mathematiklernen findet sich in Ludwig Bauers Arbeit „Objektive mathematische Stoffstruktur und Subjektivität des Mathematiklernens“ (1995). Ausgangspunkt ist für ihn die Annahme einer Spannung zwischen der Objektivität der mathematischen Stoffstruktur einerseits und der Individualität und Subjektivität des Mathematiklernens andererseits. Zur Objektivität mathematischen Denkens schreibt er:

„Die Mathematik hat mit jeder anderen Wissenschaft Zielnorm und methodische Norm gemeinsam. Ziel der Wissenschaft ist Erkenntnisgewinnung, also das Streben nach wahren Aussagen über die Gegenstände der Wissenschaft. Die methodische Norm verlangt Objektivität im vorher beschriebenen Sinn bei der Begründung dieser Aussagen. Daß in der Mathematik diese Zielnorm konsequenter verfolgt und diese methodische Norm kompromißloser verwirklicht werden kann als in anderen Disziplinen, liegt an charakteristischen Strukturmerkmalen, welche die Mathematik von anderen Wissenschaften unterscheiden, vor allem an der Gedanklichkeit der mathematischen Objekte (‚Apriorität'), an der Deduktivität der mathematischen Begründungen und an der Zweiwertigkeit der dabei zugrunde gelegten Logik." (Bauer 1995, S. 9)

Diese Merkmale haben nach Bauer zur Folge, dass mathematische Sachverhalte mit einer Stringenz, mit einer zwingenden Notwendigkeit, einer unwiderlegbaren Eindeutigkeit und uneingeschränkten Allgemeingültigkeit gelten, die keinem anderen Wissensbereich zukommt (vgl. auch Bauer 1988).

Obwohl Bauers Arbeiten in ihren Vorschlägen zur Gestaltung eines stärker subjektorientierten Unterrichts sehr überzeugend sind, möchte ich grundsätzlicher bei der hier zitierten Mathematikauffassung ansetzen, denn aus meiner Sicht sollte die „objektive Stoffstruktur" angezweifelt werden. Meine zentrale These ist, dass die Frage nach dem Individuum in der objektiven Wissenschaft nur dann überzeugend gelöst werden kann, wenn die gängige Mathematikauffassung selbst revidiert wird. Auch Bauer äußert bereits gewisse Zweifel an der Objektivität der Mathematik und verweist dabei auf die Grundlagenfragen (Bauer 1995, S. 10f), doch sollte dies grundsätzlicher thematisiert werden.

Viele Aktivitäten in der Mathematikdidaktik der letzten Jahrzehnte haben gezeigt, dass alle „netteren" und „menschenfreundlicheren" Verpackungen der Mathematik durch Anwendungsorientierung, offenere Aufgaben oder andere „methodische Tricks" die Lernenden nur dann wirklich im Kern erreichen, wenn für den Lerngegenstand an sich die menschliche Ebene nicht verneint wird.

Daher möchte ich hier dafür plädieren, das alte aprioristische Mathematikbild gegen eine Auffassung von Mathematik als Kultur einzutauschen.

1. Mathematik als Kultur

Die Frage nach der „richtigen" Mathematikauffassung ist eine normative Frage, wie Hans Georg Steiner 1989 in einem weitblickenden Aufsatz formuliert hat:

„Es gibt keine ausgezeichnete, konstante, universelle Philosophie der Mathematik. Es erscheint zweckmäßig, Bewertungen von Mathematikauffassungen und Philosophien der Mathematik unter dem Aspekt der Fruchtbarkeit für bestimmte Aufgaben vorzunehmen und dafür Kriterien aufzustellen." (Steiner 1989, S. 55)

Wenn im folgenden Mathematik als Kultur betrachtet wird, soll es daher nicht darum gehen „zu beweisen", dass Mathematik eine Kultur ist. Statt dessen soll herausgestellt werden, dass für eine Annäherung an die Frage nach dem Individuum in der „objektiven" Wissenschaft diese Auffassung tragend ist, ebenso wie für andere Fragen im Themenfeld Mathematiklernen (ausgeführt in Prediger 2001).

1.1 Mathematik als kulturelles Phänomen

Aus der gemeinsamen Ablehnung des alten, aprioristischen Bildes von Mathematik heraus hat sich in der Philosophie der Mathematik eine sozial-konstruktivistische Position etabliert, nach der Mathematik als kulturelles Produkt zu verstehen ist (vgl. Ernest 1998, Tymoczko 1985, Restivo u.a. 1993). Die Betonung liegt hierbei auf beiden Worten: Produkt steht für etwas explizit Geschaffenes, was nicht per se existierte und nur noch entdeckt werden musste. Die Rahmenbedingung dieser Produktion liegen in der jeweiligen Kultur, deswegen kulturelles

Produkt. Als einer der prominentesten Vertreter beschreibt Reuben Hersh in seinem Buch „What is mathematics, really?“ (1997) die Mathematik als menschliche Aktivität. Sie muss daher stets als ein Teil der menschlichen Kultur und Geschichte, also als ein sozial-kulturelles, historisches Phänomen verstanden werden:

> „From the viewpoint of philosophy mathematics must be understood as a human activity, a social phenomenon, part of human culture, historically evolved, and intelligible only in a social context.“ (Hersh 1997, S. 11)

Während sich diese Auffassung unter den forschenden Mathematikern noch nicht allgemein durchgesetzt hat, scheint unter Didaktikern darüber bereits eine gewisse Einigkeit zu herrschen. Darauf lässt zumindest eine gemeinsame Stellungnahme schließen, die von den didaktischen Fachverbänden (GDM, MNU u.a.) unter der Überschrift „Mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert“ verabschiedet worden ist (Asselborn u.a. 1998). In ihr wird gefordert, Mathematik in drei Facetten zu vermitteln: Neben „Mathematik als einer nützlichen und brauchbaren Wissenschaft“ und „Mathematik als einer formalen Strukturwissenschaft“ solle auch stehen:

> „Mathematik als einer historisch gewachsenen und kulturell eingebetteten und auf Kreativität beruhenden Wissenschaft: Mathematische Begriffe und Methoden entwickelten sich historisch an Fragestellungen und Problemen, die auch an gesellschaftliche und praktische Bedingungen gebunden sind. Mathematik ist also kein abgeschlossener Wissenskanon. Sie ist lebendiges und phantasievolles Handeln, das auf menschlicher Kreativität beruht. Dieses greift zurück auf den Wunsch nach ästhetischer Darstellung, auf das freie Spiel, aber auch auf den Willen zu Diskurs und Begründung.“ (Asselborn u.a. 1998)

Mathematik als kulturelles Phänomen zu sehen heißt somit, den menschlichen Einfluss auf die Mathematik explizit zu bejahen.

Gleichwohl hat Leslie White schon 1947 beschrieben, wie die Auffassung der Mathematik als Kultur einen guten Erklärungsrahmen dafür liefert, dass dieses Produkt menschlicher Denktätigkeit dem Einzelnen dennoch als objektiv gegebenes Gedankengebäude entgegentritt, da die mathematischen Ideen wie jedes kulturelle Produkt dem Einzelnen gegenüber eine autonome Existenz gewinnen:

> „The concept of culture clarifies the entire situation. Mathematical formulas, like other aspects of culture, do have in a sense an ‘independent existence and intelligence of their own.’ The English language has, in a sense, ‘an independent existence of its own.’ Not independent of the human species, of course, but independent of any individual or group of individuals, race or nation.“ (White 1947, S. 295)

Vor diesem Hintergrund stellt sich die von Bauer beobachtete Spannung zwischen Objektivität der Mathematik und Subjektivität des Lernens ambivalent dar: Versteht man Mathematik als kulturell gewachsenes Produkt menschlicher Denktätigkeit, so muss die vermeintliche Objektivität als Intersubjektivität gedeutet werden.

Auf der Ebene des individuellen Erlebens aber hat Bauer vollkommen recht: dem Einzelnen tritt die Mathematik als ein fertiges Gedankengebäude entgegen. Erklären lässt sich das Gefühl der Objektivität aber nicht nur durch den begrenzten Spielraum des Einzelnen innerhalb der existierenden Kultur, sondern auch durch zwei Phänomene, die an der kulturellen Bedingtheit der Mathematik zweifeln lassen: Die hohe begriffliche Kohärenz der mathematischen Theorien und den hohen Konsens unter Mathematikern. Diese Phänomenen sollen im folgenden etwas genauer beleuchtet werden, denn sie sind in der Tat aus kulturalistischer Sicht nicht leicht zu erklären.

1.2 Kontingenz in der Mathematik

Eine Disziplin, in der derzeit über die kulturelle Bedingtheit der Mathematik gestritten wird, ist die konstruktivistische Wissenssoziologie. Grundsätzlich geht die Wissenssoziologie von der These der prinzipiellen Unterdeterminiertheit von wissenschaftlichen Theorien aus, d.h. bei jeder theoretischen Beschreibung empirischer Befunde bleibt eine gewisser interpretativer Spielraum, und somit bleibt Raum für den Einfluss sozialer Faktoren (Bloor 1991).

Inwieweit dieser sogenannte *kontingente Charakter* des Wissens auch auf die Mathematik zutrifft, wird in der Wissenssoziologie aber kontrovers diskutiert. Insbesondere David Bloor betont, dass Begriffe und Beweise auch in der Mathematik nicht ein für allemal feststehen, sondern Gegenstand von Kontroversen und Aushandlungsprozessen sind (Bloor 1991).

Eine wichtige Opponentin hat Bloor in der Soziologin Bettina Heintz die zwei unbestreitbare Phänomene heranzieht, um der Mathematik einen epistemischen Sonderstatus zuzubilligen: die hohe begriffliche Kohärenz der mathematischen Theorien und der vergleichsweise leicht herzustellende Konsens unter Mathematikern (Heintz 2000). Zur Kohärenz schreibt sie:

> „Im Gegensatz zu anderen Disziplinen, die in verschiedene und teilweise widersprüchliche Theorien zerfallen, bildet das Gebäude der Mathematik nach wie vor ein zusammenhängendes Ganzes. Angesichts der enormen Spezialisierung [...] ist diese Kohärenz keineswegs selbstverständlich. Die Mathematik ist ein kollektives Produkt, aber kein zentral koordiniertes. Es gibt keine Instanz, die dafür sorgen würde, dass die einzelnen Ergebnisse zueinander passen. Doch obschon die Mathematiker relativ vereinzelt arbeiten und sich ihr Arbeitsfeld in der Regel auf ein winziges Territorium beschränkt, werden immer wieder Verbindungen zwischen Gebieten entdeckt, die unabhängig voneinander entwickelt wurden." (Heintz 2000, S. 19)

Noch wichtiger scheint ihr das zweite Phänomen zu sein, der hohe Konsens unter Mathematikern:

> „In der Mathematik, so Ludwig Wittgenstein in einem berühmten Passus, gibt es kaum Streit, und wenn es einen gibt, dann ist er ‚mit Sicherheit zu entscheiden' (Wittgenstein 1983: 571). Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften scheint es in der Mathematik keine interpretative Flexibilität zu geben. Die Schlussfolgerungen der Mathematik sind zwingend. Wer sich an die Regeln der mathematischen Methode hält, wird unweigerlich zum selben Resultat gelangen." (Heintz 2000, S. 20)

Wenn man dieser Einschätzung folgt, so ist auch ihre Schlussfolgerung klar:

> „Die moderne Mathematik zeichnet sich durch Merkmale aus, die für eine soziologische Analyse tatsächlich kaum mehr Raum lassen. [...] Eine soziologische Perspektive ist dort legitim und angebracht, wo es um die Rekonstruktion des Entwicklungsweges geht, der zu jener epistemischen Struktur führte, die für die moderne Mathematik typisch und mit ihrer Kohärenz und argumentativen Rationalität einzigartig ist." (Heintz 2000, S. 274/275)

Wenn Heintz recht hätte, würde die Mathematik nicht nur für eine soziologische Analyse sozialer Einflussfaktoren auf die Wissenschaftsentwicklung kaum mehr Raum lassen, sondern auch für menschliche Gestaltung. Ein menschlicher Faktor wäre nur noch in der historischen Herausbildung der Mathematik zu erkennen, als Menschen in langen Prozessen Entscheidungen getroffen haben, etwa über Stil oder die Strenge von formalen Beweisen. Die heutige Mathematik dagegen ließe nach Heintz' Darstellung aufgrund ihrer zwingenden Schlussfolgerungen nur noch im Bereich des *Entdeckens* von Beweisen Spielraum für menschliche Kreativität. Konsequent zu Ende gedacht, behauptet die von Heintz aufgestellte These von der epistemischen Sonderstellung der Mathematik also, Kontingenz gebe es nur in den *Wegen* zu den mathematischen Inhalten, nicht aber in den Inhalten selbst.

Einer solchen Auffassung von Mathematik muss deutlich widersprochen werden, denn es werden dabei ganz entscheidende Bereiche des Mathematiktreibens übersehen. Es fehlt der gesamte Bereich der Mathematisierung (d. h. die Frage, wie die initialen außermathematischen Problemstellungen in die Mathematik übersetzt werden), die Begriffsbildung und die

Theorieentwicklung sowie die Frage, welches die interessanten, zu formulierenden Zusammenhänge sind, die schließlich in Sätze gepackt und bewiesen werden. Wie werden mathematische Begriffe überhaupt geschöpft, und was beeinflusst diese Begriffsbildung? Wie wird entschieden, ob ein Problem adäquat mathematisiert ist? Welche Faktoren wirken auf die Theorieentwicklung ein? Wer entscheidet, was die relevanten Fragen sind, oder welche Sätze wichtig zu beweisen wären? In diesen Bereichen ist der kontingente Charakter der Mathematik sehr viel klarer als bei einer reinen Beschränkung auf das Beweisen.

Ebenso wie viele Philosophen der Mathematik ist selbst die Soziologin Heintz der Versuchung erlegen, epistemologische Überlegungen zur Mathematik ausschließlich auf die Beweise zu konzentrieren, dabei schreibt sie, dass diese erst am Ende eines Arbeitsprozesses stehen. Auch die in der Wissenschaftstheorie üblich gewordene Unterscheidung zwischen dem *context of discovery* und dem *context of justification* ist hier wenig hilfreich, denn sie entstammt dem gleichen Denkmuster, das Mathematik treiben auf Beweisen und Entdecken von Beweisen oder Sätzen reduziert (auch Lakatos bleibt in diesen Grenzen in seiner Auseinandersetzung mit Reichenbach, Lakatos 1979, S. 135f).

Doch gerade bei Zurückweisung der Schlussfolgerung vom epistemischen Sonderstatus der Mathematik bedürfen die von Heintz konstatierten Phänomene der Kohärenz und des Konsenses einer genaueren Betrachtung. Geht man nämlich von der kulturellen Bedingtheit und der Kontingenz mathematischen Wissens aus, sind die Kohärenz der Theorie und die Abwesenheit von echten Streitigkeiten oder Revolutionen erstaunliche Erscheinungen. Als Erklärungsansätze sollen im folgenden eine allgemeine wissenschaftstheoretische Theorie und ein dazu passendes spezielles Modell mathematischer Entwicklung vorgestellt werden.

1.3 Erklärungsansätze für Kohärenz und Konsens in der Mathematik

Als erster Erklärungsansatz für die Phänomene der Kohärenz und des Konsenses ist eine allgemeine Theorie hilfreich, die Ludwik Fleck schon 1935 in seinem Buch „Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und vom Denkkollektiv“ dargestellt hat. Sie war zwar Grundlage für wissenschaftstheoretische Standardwerke wie Kuhns „Struktur wissenschaftlicher Revolutionen“ (1970), aber dennoch ist sie insgesamt wenig rezipiert worden. Deswegen soll sie hier etwas ausführlicher vorgestellt werden.

Flecks Theorie vom Denkkollektiv und denkstilgebundenem Konsens

Flecks erkenntnistheoretische Überlegungen passen insofern gut zu kulturalistischen Konzepten, als er neben dem Erkenntnissubjekt und dem Erkenntnisobjekt die Erkenntnisbedingungen mit einbezieht. Diese Erkenntnis*bedingungen* sind aus seiner Sicht durch den jeweiligen Wissensbestand geprägt, der nicht im *Einzelnen*, sondern im *Kollektiv* verankert ist:

> „Historische und stilgemäße Zusammenhänge innerhalb des Wissens beweisen eine Wechselwirkung zwischen Erkanntem und dem Erkennen: bereits Erkanntes beeinflußt die Art und Weise neuen Erkennens, das Erkennen erweitert, erneuert, gibt frischen Sinn dem Erkannten. Deshalb ist das Erkennen kein individueller Prozeß eines theoretischen ‚Bewußtseins überhaupt‘, es ist Ergebnis sozialer Tätigkeit, da der jeweilige Erkenntnisbestand die einem Individuum gezogenen Grenzen überschreitet.“ (Fleck 1935, S. 54)

Erkenntnisbedingungen sind für Fleck also nicht beim Individuum verortet, sondern die Voraussetzungen des Erkennens sind intersubjektiv. In einer Fallstudie zur Entstehung des Syphilisbegriffs zeigt er, dass es kein voraussetzungsloses Betrachten und Beobachten gibt, da es immer von Entscheidungen und denkstilgebundenen Gewohnheiten geprägt ist.

Um den intersubjektiven Charakter von Erkenntnis und von Wissenschaft genauer beschreiben zu können, entwickelt Fleck die Begriffe des Denkstils und des Denkkollektivs. Das Denkkollektiv definiert er als „Gemeinschaft von Menschen, die im Gedankenaustausch oder in gedanklicher Wechselwirkung stehen“ (Fleck 1935, S. 54). Es wird zum „Träger geschichtlicher Entwicklung eines Denkgebietes, eines bestimmten Wissensbestandes und Kulturstandes, also eines besonderen *Denkstiles*“ (Fleck 1935, S. 55). Den Begriff Denkstil beschreibt er wie folgt:

> „Wir können also Denkstil als gerichtetes Wahrnehmen, mit entsprechendem gedanklichen und sachlichen Verarbeiten des Wahrgenommenen definieren. Ihn charakterisieren gemeinsame Merkmale der Probleme, die ein Denkkollektiv interessieren; der Urteile, die es als evident betrachtet; der Methoden, die es als Erkenntnismittel anwendet. Ihn begleitet eventuell ein technischer und literarischer Stil des Wissenssystems.“ (Fleck 1935, S. 130)

Der in einem Denkkollektiv herrschenden Denkstil prägt nicht nur die Wahrnehmung, sondern determiniert das für wahr Gehaltene, wenn der Denkstil weit genug elaboriert ist. Damit verankert Fleck auch Wahrheit im Intersubjektiven:

> „Sie [die Wahrheit] ist nicht ‘relativ’ oder gar ‘subjektiv’ im populären Sinne des Wortes. Sie ist immer oder fast immer, innerhalb eines Denkstils, vollständig determiniert. Man kann nie sagen, derselbe Gedanke sei für A wahr und für B falsch. Gehören A und B demselben Denkkollektiv an, dann ist der Gedanke für beide entweder wahr oder falsch. [...] Auch ist Wahrheit nicht Konvention, sondern im [jeweilgen] momentanen Zusammenhang: stilgemäßer Denkzwang.“ (Fleck 1935, S. 131)

Diese Theorie von den Denkkollektiven und –stilen lässt sich mit Gewinn auf die Mathematik beziehen, denn Fleck versteht die Wissenschaften als spezifische, denkkollektive Gebilde, die sich durch eine besonders hohe Stabilität auszeichnen. Betrachtet man auch die Mathematik als einen solchen Denkstil, der durch die Community der Mathematiker als Denkkollektiv getragen wird, so leistet Fleck einen entscheidenden Beitrag zur Frage nach der Ursache des hohen Konsenses und der hohen Kohärenz. Für ihn ist dies kein Ausdruck einer epistemischen Sonderstellung der Mathematik, sondern ein verbreitetes Phänomen, das in einem Zusammenhang zur Elaboriertheit eines Wissensgebietes steht:

> „Je ausgebauter ein Wissensgebiet, je entwickelter es wird, desto kleiner werden die Meinungsdifferenzen. [...] Es ist, als ob mit dem Wachsen der Zahl der Knotenpunkte der freie Raum sich verkleinere, als ob mehr Widerstände entstünden, als ob freie Entfaltung des Denkens beschränkt würde.“ (Fleck 1935, S. 110)

Diese Gedanken führt er weiter aus mit Hilfe der Begriffe aktive und passive Kopplung: „Jedem aktiven Element des Wissens entspricht ein passiv, zwangsmäßig sich ergebender Zusammenhang.“ (Fleck 1935, S. 110), und je mehr aktive Wissenselemente einem Denkstil schon eigen sind, desto mehr passive Kopplungen ergeben sich.

Mit Fleck können wir also die Mathematik als ein Wissensgebiet verstehen, das bereits sehr weit ausgebaut ist. Seine kurze und einprägsame Formel

> „Je tiefer wir in ein Wissensgebiet eindringen, desto stärker wird die Denkstilgebundenheit.“ (Fleck 1935, S. 109)

erklärt den hohen Konsens gut: Die Mathematik ist ein sehr weit ausgebauter Denkstil mit langer Tradition, der ein großes Maß an Denkzwängen mit sich bringt. Er ist geprägt durch gemeinsame Merkmale der Probleme, die Mathematiker interessieren, durch gemeinsame, als evident betrachtete Bewertungsmaßstäbe und Methoden, die als mathematische Erkenntnismittel angewendet werden.

Dass sich Mathematiker selten darüber streiten müssen, ob eine Argumentation einen überzeugenden Beweis darstellt, liegt also nicht an der epistemischen Sonderstellung der Mathematik, sondern daran, dass die Mathematik einen ausgesprochen elaborierten Denkstil darstellt, in dem die Kontingenz in großem Maße genau festgelegten Regeln der Community gewichen ist. Stärker als in anderen Wissenschaften produziert in der Mathematik jedes neue aktive Wissenselement viele passive, sich zwangsläufig daraus ergebende Kopplungen.

Für das Empfinden von Kohärenz und Konsens in der Mathematik kommt ein Spezifikum der Entwicklung von Mathematik hinzu, das Philip Kitcher herausgearbeitet hat:

Denkstilveränderungen in der Mathematik – Historische Analysen

In der aus kulturalistischer Sicht wichtigen Arbeit „The nature of mathematical knowledge" von Philip Kitcher vergleicht der Autor die Weiterentwicklung in Mathematik und Naturwissenschaften (Kitcher 1984). Dazu definiert er parallel zu Flecks Begriff des Denkstils den Begriff der *mathematischen Praxis*:

„We view a mathematical practice as consisting of five components: a language, a set of accepted statements, a set of accepted reasonings, a set of questions selected as important, and a set of meta-mathematical views (including standards for proof and definition and claims about the scope and structure of mathematics)." (Kitcher 1984, S. 229)

So, wie Fleck den Fortschritt der Wissenschaft als Denkstilveränderung untersucht, ist für Kitcher Veränderung der Mathematik nun als Übergang von einer mathematischen Praxis zur nächsten zu begreifen.

„The problem of accounting for the growth of mathematical knowledge becomes that of understanding what makes a transition from a practice <L,M,Q,R,S> to an immediately succeeding practice <L',M',Q',R',S'> a rational transition." (Kitcher 1984, S. 229)

Er kann an historischen Beispielen belegen, dass der Übergang zu einer neuen mathematischen Praxis meist durch Unstimmigkeiten zwischen den einzelnen Komponenten ausgelöst wird. Diese werden dadurch wieder in ein Gleichgewicht gebracht, dass bestimmte Komponenten verändert werden. Findet man z.B. zu mathematischen Sätzen Gegenbeispiele, so wird nicht der Satz an sich verworfen, sondern nur die Definitionen der beteiligten Begriffe so eingeschränkt, dass der Satz wieder Gültigkeit erlangt, es wird also die Sprache verändert (diesen Mechanismus hat Lakatos in seinem Buch „Beweise und Widerlegungen" 1979 ausführlich beschrieben).

„So, where in the case of science we find the replacement of one theory by another [...], in the mathematical case there is the adjustment of language and a distinction of questions, so that the erstwhile 'rivals' can coexist with each other. Mathematical change is cumulative in a way that scientific change is not, because of the existence of a special kind of interpractice transition." (Kitcher 1984, S. 229)

Diesen Mechanismus zur Herstellung von Kohärenz und Konsens hält Kitcher für charakteristisch für Mathematik. Durch ihn werden explizite Brüche weniger notwendig als in anderen Wissensbereichen. Zwar müssen immer wieder Komponenten der mathematischen Praxis revidiert werden, um das Gesamtbild stimmig zu halten, doch selten werden einzelne Elemente vollkommen verworfen. Auf eine vereinfachende Formel gebracht: Kohärenz in der Mathematik entsteht dadurch, dass Mathematiker stets danach suchen, wie die Mathematik durch drehen an einzelnen Komponenten wieder kohärent gemacht werden kann, denn Inkonsistenzen oder Widersprüchlichkeiten werden selten geduldet.

Untermauert wird dieser Erklärungsansatz durch die Arbeiten von Raymond Wilder, der die Mathematik als sich entwickelndes kulturelles System analysiert hat (Wilder 1969, Wilder 1981). Wirkliche Brüche, so schreibt er, seien nur auf einer Meta-Ebene zu finden, in der Metaphysik, dem Symbolismus oder der Methodologie. Gleichwohl machen die mathematischen Objekte, Begriffe und Theorien im Laufe der Zeit eine Evolution durch, d.h. sie verändern sich in ihrer Bedeutung und ihrer Rolle im Gesamtgefüge. Anhand historischer Fallstudien charakterisiert er die Gesetzmäßigkeiten dieses Entwickungsprozesses. Ausgelöst wird die Weiterentwicklung nach Wilder meist durch „hereditary stress", das sind z.B. inner- oder außermathematische Probleme, ein verändertes Verständnis der Natur gewisser mathematischer Objekte, entdeckte Paradoxien oder Inkonsistenzen, wachsende Ansprüche an Strenge usw. Als wichtigste Mechanismen zur Weiterentwicklung von Begriffen arbeitet er neben

Abstraktion und Verallgemeinerung die Konsolidierung heraus, womit er die vereinheitlichende Zusammenführung von Theorien oder Begriffsbildungen meint.

Ebenso wie Kitcher weist also Wilder einem Mechanismus zur expliziten Wiederherstellung von Kohärenz eine zentrale Rolle in der mathematischen Weiterentwicklung zu. Damit sieht auch er begriffliche Kohärenz nicht als gegebenes Phänomen der Mathematik, die die These einer epistemischen Sonderrolle rechtfertigen würde, sondern als ein immer wieder konsequent von Mathematikern angestrebtes Ziel.

Vor dem Hintergrund dieser historischen Studien stellt sich die Frage nach der Kohärenz somit etwas anders: Gefragt werden muss in kulturalistischer Perspektive nicht, warum die mathematische Theorie kohärent ist, sondern, wieso sie immer wieder kohärent gemacht wird, und warum dies überhaupt gelingen kann. Ohne die Frage endgültig zu lösen, möchte ich Ansätze vorstellen, auf welchen Ebenen sie beantwortet werden kann:

Zum einen liegt es in der ontologischen Natur der Mathematik, dass Kohärenz leichter hergestellt werden kann als in anderen Wissenschaften, denn die mathematische Theorie kann sich immer weiter von der Realität ablösen, wenn dies benötigt wird. Dadurch können etwa Begriffe so verändert werden, dass die alten Sätze auch nach dem Auftauchen von Widersprüchen weiter gelten. Eine Ursache für die Möglichkeit der Kohärenz liegt also gerade in der Kontingenz der Begriffsbildung, nicht in der Apriorität der mathematischen Gegenstände. Während sich die Naturwissenschaften stets an der Korrespondenz ihrer Theorien mit realen Phänomenen messen lassen müssen, hat sich die Mathematik zunehmend von der Realität gelöst. Dass nicht die Übereinstimmung mit der Realität, sondern die innermathematische Konsistenz das entscheidende Ziel ist, wurde spätestens mit der Festlegung des mathematischen Wahrheitsbegriffs als Widerspruchsfreiheit seit Hilbert offensichtlich.

Dies leitet über auf eine zweite Ebene: Eine Antwort auf die Frage, warum Mathematiker diese Zielentscheidungen so treffen, ist wohl am ehesten im Mathematikbild selbst zu suchen. Wenn eine Community davon überzeugt ist (als Platoniker oder wie auch immer), dass Inkonsistenzen nicht auftreten können, wird sie viel Anstrengung darin investieren, diese zu beseitigen. Somit hat sich das gängige Mathematikbild im Laufe der Geschichte immer wieder als „self-fulfilling prophecy" erwiesen. Dahinter steht das urmenschliche Bedürfnis nach Gewissheit, das sich in der Mathematik geradezu paradigmatisch einlösen ließ, solange an dem objektiven Bild der Mathematik nicht gerüttelt wurde.

Und schließlich soll auch Ausgliederung als Mechanismus zur Herstellung von Kohärenz erwähnt werden, denn immer wieder hat die Mathematik (angewandte) Disziplinen ausgegliedert, die ihre eigenen Denk- und Arbeitsweisen entwickelt hat (beschrieben etwa bei Laugwitz 1972). Indem sie als nicht mehr zur Mathematik gehörig galten, waren Inkohärenzen kein Problem mehr.

Auch heute gibt es wieder Teildisziplinen, die sich in ihren Standards von denen der Mathematiker-Community entfernen, wie etwa das wissenschaftliche Rechnen oder anderen Gebiete der experimentellen Mathematik. Auch hier gibt es wieder Diskussionen, ob sie noch als Teilgebiete gelten dürfen, oder ob die Mathematik angesichts einer veränderten Mathematikauffassung Unterschiede eher toleriert.

1.4 Fazit

Ausgehend von dem Problem des Subjektbezuges in der Mathematik sollte in diesem Abschnitt mit der kulturalistischen Mathematikauffassung eine Philosophie der Mathematik vorgestellt werden, die für die Analyse des Problemfeldes eine fruchtbare philosophische Orientierung darstellt. Fruchtbar ist sie in meinen Augen in zweierlei Hinsicht: Zum einen erfüllt das Verständnis von Mathematik als lebendige, von Menschen geprägte Kultur in überzeugenden Weise die von Steiner formulierte Forderung:

„Für die Mathematikdidaktik sind Philosophien der Mathematik zu bevorzugen bzw. auszubauen, in denen u.a. die unterschiedlichen Wissensformen, subjektive und objektive Entwicklungsdynamiken, Beziehungshaltigkeit und Anwendungsbezug, die personale und soziale Dimension und Bedingtheit von Mathematik angemessen zur Geltung kommen." (Steiner 1989, S. 56)

Zum anderen ist dem Konzept der Kultur auch inhärent, dass sie den einzelnen Individuen als etwas Gegebenes, Unveränderbares entgegentritt, worauf White schon 1947 hingewiesen hat:

„Mathematics does have objective reality. And this reality, as Hardy insists, is *not* the reality of the physical world. But there is no mystery about it. Its reality is cultural: the sort of reality possessed by a code of etiquette, traffic regulations, the rules of baseball, the English language or rules of grammar." (White 1947, S. 302f)

Es muss dennoch als Spezifikum der Mathematik herausgestellt werden, dass sie mehr als andere kulturelle Errungenschaften (wie etwa Sprache) ihre kulturelle Bedingtheit in den Hintergrund rücken kann und somit die menschliche Ebene verdeckt, da sie stärker als andere Wissenschaften durch Kohärenz und Konsens geprägt ist. Erklärungsansätze für diese Phänomene sind durch Analysen der Herausbildung der Mathematik durchaus zu finden, wie die Argumentationen von Fleck, Wilder und Kitcher zeigen. Sie können allerdings den Charakter der Mathematik als etwas Entmenschlichtes nur erklären, nicht substanziell verändern.

Auf der Suche nach den Gründen dieser „entmenschlichenden" Mechanismen stößt man auf das urmenschliche Bedürfnis nach Gewissheit: Gerade dieser Wunsch der Menschen nach Objektivem, an das man sich anhalten kann, das Gewissheit und Sicherheit bietet, gerade er ist treibender Faktor, etwas zu schaffen, was dann dem Einzelnen als fremd gegenübersteht. Diese Widersprüchlichkeit ist nicht nur typisch für das Verhältnis von Mathematik und Mensch, sondern ist allgemein der Natur der Menschen inhärent (diesen Gedanken verdanke ich Roland Fischer).

2. Subjektbezug beim Mathematiklernen

2.1 Subjektbezug als Problem

Nach dieser mathematikphilosophischen Analyse soll nun das Ausgangsproblem wieder auf Mathematiklernen bezogen werden: Wie ist beim Mathematiklernen das Verhältnis der Individuen zu ihrem Lerngegenstand?

Eine notwendige Konsequenz aus obigen Überlegungen ist, dass eine menschliche Beziehung zur Mathematik auch im Unterricht nur dann aufgebaut werden kann, wenn den Lernenden eine angemessene Mathematikauffassung vermittelt wird. Nur, wenn die Schüler die Mathematik als kulturelles Produkt menschlicher Denktätigkeit erleben und begreifen lernen, sind die Voraussetzungen geschaffen, einen individuellen Subjektbezug zum Lerngegenstand aufzubauen (ähnlich argumentieren Steiner 1989, S. 56, und Fischer/Malle 1985). Über diese Forderung scheint unter Didaktikern bereits eine gewisse Einigkeit zu herrschen, zumindest kann man dies sowohl der oben zitierten Stellungnahme der deutschen Didaktik-Verbände entnehmen (Asselborn u.a. 1998) als auch in den NCTM-Standards (beschrieben in Engel 2000), die den Konsens des amerikanischen Fachverbandes der Mathematiklehrer darstellen.

Aber selbst wenn es gelingt, den Lernenden Mathematik als kulturelles Produkt menschlicher Tätigkeit zu vermitteln und sie sich so des Einflusses der Menschen auf die Mathematik bewusst sind, selbst dann ist der Bezug der *einzelnen Individuen* zur Mathematik noch nicht hergestellt, wie White so pointiert betont. Denn was im ersten Abschnitt für das Verhältnis des Individuums zur Mathematik im Allgemeinen beschrieben ist, trifft die Lernenden um so stärker: Auch wenn Mathematik kulturell bedingt ist, steht sie doch dem Einzelnen als etwas in sich Abgeschlossenes gegenüber.

Daher ist die von Bauer aufgeworfene Frage, wie mit der Spannung zwischen der Subjektivität des Lernenden und der als objektiv empfundenen Stoffstruktur umzugehen ist, auch mit einem veränderten Mathematikbild bei weitem nicht gelöst. Er selbst schreibt zu diesem Punkt:

> „Wie sollte [...] der mathematische Lernprozeß gestaltet werden, damit die Individualität des Schülers zu ihrem Recht kommen kann? Dies bezüglich ist es wohl nicht nötig, neue Grundsätze zu formulieren. Es genügt, sich auf Prinzipien eines genetisch geprägten, aktiv-entdeckenden, sinnorientierten, motivierenden, individualisierenden und differenzierenden Mathematikunterrichts zu besinnen. Sie sind in der pädagogisch-didaktischen Literatur breit entfaltet und gründlich diskutiert. Ihre Realisierung ist allerdings schwierig und anstrengend." (Bauer 1995, S. 15)

Die hier genannten Prinzipien sind alles sehr wichtige Bausteine für einen subjektorientierten Unterricht, doch fehlt dieser Aufzählung eine explizite Gesamtorientierung. Und so bin ich in der Einschätzung, dass es sich nur noch um ein Realisierungsproblem handelt, etwas weniger optimistisch als Bauer. Gerade vor dem Hintergrund der obigen Ausführungen zeigt sich, wie problematisch es für den Einzelnen ist, sich in der Kultur Mathematik wirklich als Individuum wiederzufinden.

Um das Problem besser analysieren zu können und eine mögliche Gesamtorientierung anzubieten, soll im nächsten Abschnitt ein Denkmodell für Mathematiklernen vorgestellt werden, das aus meiner Sicht zu der kulturalistischen Mathematikauffassung am besten passt: Mathematiklernen als interkulturelles Lernen.

2.2 Denkansatz vom Mathematiklernen als interkulturelles Lernen

Bei der Beschreibung des Verhältnisses zwischen lernenden Subjekten und Lerngegenstand schöpfen die existierenden Konzepte von Mathematiklernen in Theorie und Unterrichtspraxis die ganze Breite der Skala aus: Von radikal-konstruktivistischen Positionen, die die individuellen Konstruktionen der Schüler als einzig relevanten Lerngegenstand ansehen, bis hin zu dem traditionellen Mathematikunterricht, in dem ohne große Rücksicht auf die Individualität der Einzelnen die Mathematik als absolute, objektive Wissenschaft in die Köpfe der Lernenden transportiert werden soll. Offensichtlich werden beide Extreme dem im ersten Abschnitt skizzierten kulturalistischen Bild von Mathematik nicht gerecht: Während in der traditionellen Version die Mathematik nicht als lebendige Kultur, sondern als absolutes, fertiges Gebilde präsentiert wird, verneint die radikal-konstruktivistische Position, dass es im Mathematikunterricht um die Aneignung einer existierenden Kultur geht, und nicht nur um individuelle Schöpfungen.

Alan Bishop hat mit seinem Buch „Mathematical Enculturation" ein Konzept vorgestellt, das dagegen wirklich auf einer kulturalistischen Sicht von Mathematik basiert (Bishop 1991). Er sieht Enkulturation als

> „creative, interactive process engaging those living the culture with those born into it, which results in ideas, norms and values which are similar from one generation to the next but which inevitably must be different in some way due to the re-creation role of the next generation." (Bishop 1991, S. 89)

Zwar ist Bishops Ansatz außerordentlich lehrreich, dennoch sind diese oder ähnliche Vorstellungen von schulischem Mathematiklernen als einem Sozialisierungsprozess meiner Meinung nach nicht wirklich zutreffend. Das damit implizierte Ziel, jeder Schüler solle sich am Ende in der Kultur der Mathematik wie ein „Einheimischer" bewegen können, ist ausgesprochen hoch gegriffen und aus allgemeinbildender Sicht nicht akzeptabel. Zudem wird dadurch die Tatsache verdeckt, dass den Lernenden im schulischen Mathematikunterricht immer nur sehr kleine Ausschnitte der Mathematik gezeigt werden können (und sollten).

Daher möchte ich dafür plädieren, Mathematiklernen als interkulturelles Lernen zu betrachten. Dieses Konzept ist an anderer Stelle ausführlich erläutert (Prediger 2001), hier möchte ich es nur metaphorisch in Analogie zu (idealen) Lernprozessen beim Schüleraustausch beschreiben:

Schüler nähern sich der Mathematik wie einer fremden Kultur, über die sie einiges erfahren, ein Stück weit in ihr leben und dabei versuchen, sich den Verhaltensweisen und Denkweisen anzupassen. Betont werden muss das „Stück weit in ihr leben", denn sie sollen nicht nur von außen auf die Mathematik gucken, sondern sie selbst erfahren, so wie man es eben während eines Schüleraustauschs kann.

Dabei werden sie erleben, dass sich die Denkweisen, Normen und Werte durchaus von denen der eigenen Kultur (in Bezug auf die Kultur Mathematik also den alltäglichen Denkweisen) unterscheiden, und sie werden vielleicht einiges davon den Denkweisen der eigenen Kultur vorziehen. Wenn sie dann wieder nach Hause fahren, und wirklich ein interkultureller Lernprozess stattgefunden hat, dann vergessen sie nicht einfach alles. Zumindest wird sie die Erfahrung der kulturellen Relativität vieler Normen, Sitten und Gebräuche prägen, so dass sie eine größere Toleranz gegenüber Andersartigem entwickeln. Im noch besseren Fall werden sie einige der Denkweisen oder Werte übernehmen und in ihrem Alltag Zuhause integrieren.

Zur Verdeutlichung soll dies explizit auf Mathematiklernen übertragen werden: Mathematikunterricht sollte dazu dienen, dass die Schüler die Mathematik als eine eigene Kultur kennen und verstehen lernen. Dazu sollten sie selbst diese Kultur er-leben können, sich ein Stück weit darin sozialisieren, so dass sie sich in gewissen abgegrenzten Teilbereichen sicher bewegen können. Auch der Erwerb von implizitem Wissen über Vorgehensweisen, Normen und Werte ist für diesen Zweck notwendig, welcher durch explizites Thematisieren erleichtert werden kann.

So können die Lernenden ihren „Schüleraustausch" bewältigen, doch was ist, wenn sie wieder „nach Hause fahren", d.h. außerhalb des Mathematikunterrichts? Die Dimension der bleibenden Lerneffekte zielt auf ein Verständnis des spezifischen Beitrages der Mathematik zur Erklärung der Welt und vor allem auf den Transfer mathematischen Denkens in außermathematische Bereiche, und genau dieser Dimension sollten wir unter allgemeinbildender Perspektive die größte Aufmerksamkeit schenken.

Damit ist das Konzept soweit vorgestellt, dass die Frage des Subjektbezuges in diesem Rahmen behandelt werden kann:

2.3 Subjektbezug beim Mathematiklernen als interkulturelles Lernen

Wie würde sich in dieser Perspektive nun das Problem des Subjektbezuges einordnen? Gehen wir zurück auf den Schüleraustausch. Hier erscheint Subjektbezug auf sehr *verschiedenen Ebenen*:

Der erste (und ausgesprochen wichtige) Bezug wird aufgebaut durch *Faszination* am fremden Land, *Neugier* für die fremden Eigenheiten, und vielleicht *Begeisterung* für die Schönheit des Landes oder die Art der Leute. Es gibt auch die gegenteiligen Reaktionen: Abneigung, Befremdung, Unwille, die hier aber ausgeblendet werden sollen, denn es geht um ideale Lernprozesse. Die interkulturellen Pädagogen (etwa Thomas 1988) wären aber auch mit den positiven Reaktionen höchst unzufrieden, wenn es auf dieser Ebene stehen bleiben würde.

Der entscheidende Bezug kommt nämlich erst durch eine *Reflexion und Einordnung* der zunächst Befremdung auslösenden Erlebnisse in ein zugrundeliegendes System von Werten, Zielen und Normen. Erst durch eine solche Einordnung erhalten die beobachteten Andersartigkeiten (etwa von bestimmten Sitten oder anderen Begriffen) ihren Sinn, und dies ist die Voraussetzung für den Aufbau von Verständnis ohne Irritation.

Dazu gehört, als nächste Ebene, auch die *eigenkulturelle Reflexion*: Was hat das, was ich hier anders erlebe, mit mir und einer Heimatkultur zu tun? Wie würden wir die Dinge Zuhause sehen? Warum irritiert mich das so, was für ein Bild leitet mich da? Nun wird der Subjektbezug substanziell, denn nun kommen Fragen wie „Was von meinem Bild möchte ich evtl. revidieren und von der fremden Kultur andere Vorstellungen oder Denkweisen übernehmen?"

Der Prozess muss nicht immer so bewusst ablaufen wie hier beschrieben, entscheidend ist aber, dass über die Begeisterung oder das Interesse am Fremden hinaus der Subjektbezug erst dort substanziell wird, wo es um die *Übernahme* bestimmter Elemente in das eigene Denken geht.

Übertragen auf Mathematiklernen sind diese Gedanken sehr aufschlussreich: Die erste Ebene der Faszination und Begeisterung für das Fremde ist in der Mathematikdidaktik breit diskutiert. Unter dem Stichwort Motivation gibt es sehr viele Vorschläge und Konzepte, wie die Mathematik den Lernenden nähergebracht werden soll. Abgesehen von reinen „Werbemaßnahmen“ ohne viel Substanz oder rein extrinsisch motivierten Unterrichtseinheiten gibt es viele überzeugende Beispiele, in denen der Stoff so aufgearbeitet ist, dass die Schüler/innen die Faszination an zentralen Elementen der Mathematik tatsächlich erleben können, und sich echte Begeisterung für den Kern der Sache einstellt. Zu nennen sind hier z.B. Aktivitäten, die über eine anwendungsorientierte Gestaltung des Unterrichts erreichen, dass für die Lernenden die Kraft der Mathematik als Werkzeug erlebbar wird. Gemeint sind aber natürlich auch Beispiele, in denen die reine Mathematik in ihrer Kohärenz und Eleganz glänzen kann. All dies kann dazu dienen, Begeisterung für Mathematik zu wecken, doch ist dies allein nicht genug, denn damit ist noch kein wirklicher Bezug zu einzelnen Individuen hergestellt.

Auf der zweiten Ebene muss es deswegen auch Reflexionen geben, die zur Einordnung der schönen Einzelerfahrungen (faszinierende Begriffe, effiziente Algorithmen, was auch immer) führen kann und durch die sich ein Gesamtbild über die Spezifika der Mathematik einstellt. Dies kann z.B. bedeuten, dass man bestimmte Vorgehensweisen explizit macht, etwa gewisse Problemlösestrategien oder mathematische Denkweisen und bespricht, was daran für die Mathematik typisch ist.

Hier sind für mich die von Fischer und Malle ausführlich beschriebenen Sinn-Argumentationen einzuordnen (Fischer/Malle 1985). Sie erheben sie zu einem zentralen Element ihrer Unterrichtsphilosophie, die das Problem Mensch-Mathematik zum Ausgangspunkt hat. Wichtig ist ihnen dabei vor allem der Aspekt, dass Sinnfragen niemals eine objektive Antwort finden können, sondern Sinn sich für jedes Individuum konstituieren muss. Wenn dies expliziert und die Suche nach Sinn im Mathematikunterricht kultiviert wird, gibt es hier für die Individuen eine große Chance, einen individuellen Bezug zum Lerngegenstand herzustellen. Fischer und Malle versprechen sich davon auch eine Veränderung des Mathematikbildes, die ganz im obigen Sinne ist.

Auf dieser zweiten Ebene lernen die Schüler also, über Mathematik zu reflektieren und gewisse Hintergründe zu begreifen, was für Mathematik spezifisch ist

Dies ist Grundlage für die Ebene der Selbstreflexion, die mit Wirkung in der eigenen Lebenswelt überschrieben werden kann. Gemeint sind hier im wesentlichen zwei Aspekte: Zum einen sollten Schüler erfahren können, wie die Mathematik auf ihre Lebenswelt zurückwirkt (im Sinne des Mittel- und Systemaspektes bei Fischer 1988). Zum anderen, und das ist mir noch wichtiger, geht es um den Transfer des mathematischen Denkens in außermathematische Bereiche. So, wie die Schüler nach dem Schüleraustausch gewisse Sichtweisen mit nach Hause bringen und in ihren Alltag integrieren, wäre es wünschenswert, die Schüler würden mehr mathematisches Denken mit in ihre außermathematischen Lebensbereiche mitnehmen. Welche Denkweisen das sind, und wo sie im Alltag Anwendung finden, wird individuell sehr verschieden sein.

Der Subjektbezug ist hier dann so unmittelbar wie auf keiner Ebene vorher, denn es geht direkt um die Frage, „Wie kann ich das, was ich hier im Mathematikunterricht kennenlerne, für mein eigenes Denken nutzen?“. Im allgemeinen läuft dieser Transfer nicht sehr bewusst ab, er ist auch nicht bis ins letzte bewusst zu machen, wohl aber sollte versucht werden, durch explizites Thematisieren dieser Frage es so bewusst wie möglich zu gestalten, denn dadurch kann es besser gelingen (es sei hier auf die didaktische Diskussion zum Transferproblem verwiesen, etwa Bauersfeld 1983).

Abschließend sei zusammengefasst, dass der Denkansatz vom Mathematiklernen als interkulturellem Lernen dabei hilft, eine konstruktivistische Sicht von Lernen mit der Tatsache zu vereinen, dass Mathematik den Schülern als bestehendes Konstrukt gegenüber tritt. Zwar ist Lernen immer ein Stück weit konstruktivistisch und Bildung immer ein „Sich Bilden", um mit von Hentig zu sprechen (1996), doch es ist die existierende Kultur der Mathematik, die den Schülern nahegebracht werden soll, deren Begriffe und Techniken sie erwerben müssen. Im Denkmuster des interkulturellen Lernen wird diese unauflösbare Spannung nicht geglättet, sondern verortet, und auf dieser Grundlage bearbeitet.

Mit der These, die Beschäftigung mit Mathematik habe dort den stärksten Subjektbezug, wo sie wirklich persönlichkeitsbildend auf das Individuum einwirkt, und den Lernenden dieser Bildungseffekt auch bewusst ist, wird das Problem des Subjektbezuges zwar nicht gelöst (es ist aus meiner Sicht eines der schwierigsten Probleme im Bereich Mathematiklernen überhaupt), wohl aber kann ein Baustein zum Verständnis und auch zur Lösung des Problems geliefert werden.

Literatur

Asselborn, W. / Berg, G. u.a.: Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 66 (Mai 1998), S. 26-40.

Baruk, Stella: Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik, Birkhäuser, Basel 1989.

Bauer, Ludwig: Mathematik und Subjekt. Eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht, Dt. Universitätsverlag, Wiesbaden 1988.

Bauer, Ludwig: Objektive mathematische Stoffstruktur und Subjektivität des Mathematiklernens, in: Steiner, H.-G. / Vollrath, H.-J. (Hrsg.): Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze, IDM 20, Aulis, Köln 1995, S. 9-16.

Bauersfeld, Heinrich: Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens, in: ders. et.al.: Lernen und Lehren von Mathematik, IDM 6, Aulis, Köln 1983, S. 1-56.

Bishop, Alan J.: Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education, Kluwer Academic Publ., Dordrecht 1991.

Bloor, David: Knowledge and social imagery, University of Chicago Press ²1991.

Cohn, Ruth C.: Von der Psychoanalyse zur Themenzentrierten Interaktion: Von der Behandlung einzelner zu einer Pädagogik für alle, Klett-Cotta, Stuttgart ⁵1981.

Engel, Joachim: Die NCTM-Standards - Anstöße für den Mathematikunterricht nach TIMSS, in: ZDM 32 (2000) 3, S. 70-75.

Ernest, Paul: Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, SUNY Press, New York 1998.

Fischer, Roland: Mittel und System - zur sozialen Relevanz der Mathematik, in: ZDM 20 (1988) 1, S. 20-28.

Fischer, Roland / Malle, Günther: Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim / Wien 1985.

Fleck, Ludwik: Entstehung und Entwicklung einer wissenschaftlichen Tatsache: Einführung in die Lehre vom Denkstil und vom Denkkollektiv, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1980 (erstmals 1935).

Heintz, Bettina: Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin, Springer, Wien / New York 2000.

Hersh, Reuben: What is Mathematics, really? Jonathan Cape, London 1997.

Kitcher, Philip: The nature of mathematical knowledge, Oxford University Press, New York 1984.

Kuhn, Thomas S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1970.

Lakatos, Imre: Beweise und Widerlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen, Vieweg, Braunschweig 1979.

Laugwitz, Detlef: Anwendbare Mathematik heute, in: Meschkowski, Herbert (Hrsg.): Grundlagen der modernen Mathematik, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1972, S. 224-252.

Lengnink, Katja / Heger, Michael / Prediger, Susanne: TZI macht Schule in der Hochschule, in: Das Hochschulwesen 46 (1998) 3, S. 157-163.

Lengnink, Katja / Prediger, Susanne: Lebendiges Mathematiklernen: Der Blick der Themenzentrierten Interaktion auf die Mathematikdidaktik, erscheint in Bildung und Erziehung 2001.

Prediger, Susanne: Mathematiklernen als interkulturelles Lernen, erscheint im Journal für Mathematikdidaktik 2001.

Restivo, Sal / van Bendegem, Jean Paul / Fischer, Roland (Hrsg.): Math Worlds. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education, State University of New York Press, New York 1993.

Steiner, Hans Georg: Philosophische und epistemologische Aspekte der Mathematik und ihr Einfluß auf den Mathematikunterricht, in: Mathematische Semesterberichte 36 (1989) 1, S. 47-60.

Thomas, Alexander (Hrsg.): Interkulturelles Lernen im Schüleraustausch, Saarbrücken 1988.

Tymoczko, Thomas: New Directions in the Philosophy of Mathematics, Birkhäuser, Boston 1985.

von Hentig, Hartmut: Bildung: ein Essay, Hanser, München 1996.

Wilder, Raymond L.: Mathematics as a cultural system, Pergamon Press, Oxford et al. 1981.

White, Leslie A.: The Locus of Mathematical Reality: An anthropological footnote, in: Philosophy of Science 14 (1947), S. 289-303.

Anschrift der Autorin:

Dr. Susanne Prediger, FB Mathematik, TU Darmstadt
Schloßgartenstraße 7, D-64289 Darmstadt
email: prediger@mathematik.tu-darmstadt.de