Mathematische Theorie des inelastischen Materialverhaltens von Metallen

H.D. Alber

Franz G. Kollmann zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

1 Einführung

Die kontinuumsmechanische Beschreibung des Spannungs- und Deformationsverhaltens von Materialien beruht auf einem System von partiellen Differentialgleichungen, die aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie hergeleitet werden, und auf materialabhängigen konstitutiven Gleichungen, die die Abhängigkeit der Spannungsverteilung im Medium von der lokalen Deformation beschreiben. Man bezeichnet diese konstitutiven Gleichungen auch als Materialgleichungen oder Materialgesetze.

Die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie gehören zu den fundamentalen Prinzipien der Physik. Ähnliche fundamentale Prinzipien, aus denen die zu einem gegebenen Material gehörenden konstitutiven Gleichungen hergeleitet werden könnten, sind nicht bekannt. Zwar gibt es auch fundamentale Prinzipien, die bei der Aufstellung von konstitutiven Gleichungen beachtet werden müssen; sie legen jedoch die Form dieser Gleichungen nicht genau fest. Zur Formulierung von konstitutiven Gleichungen werden daher viele Grundsätze herangezogen, die Gültigkeit nur in sehr eingeschränktem Maße verlangen können. Entsprechend haben die daraus hergeleiteten Materialgleichungen auch nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich. Das Hookesche Gesetz beispielsweise beruht auf der Grundannahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung im Material. Für große Spannungen und Dehnungen verliert das Hookesche Gesetz jedoch seine Gültigkeit, weil dieser Zusammenhang dann nichtlinear und außerdem von der Deformationsvorgeschichte des Materials abhängig ist. Zur Beschreibung des sehr komplexen Materialverhaltens bei großen Deformationen oder Spannungen müssen daher anstelle des Hookeschen Gesetzes andere, weniger einfache Materialgesetze verwendet werden. Die Festkörpermechanik hat eine sehr große Anzahl derartiger Materialgesetze angegeben, durch die mögliches Materialverhalten beschrieben wird, die aber zur Vorhersage des Verhaltens eines realen Materials jeweils nur in eingeschränkten Bereichen gültig sind.

Ein Teil dieser Artikels wurde während eines im Rahmen des Brasilianisch-Deutschen Austauschprogramms zur wissenschaftlich-technischen Zusammenarbeit (KFA/CNPq) geförderten Aufenthalts des Autors an der Universidade Federal de Pernambuco angefertigt. Unterstützt wurde die Arbeit auch von der DFG-Forschergruppe "Mathematische und ingenieurwissenschaftliche Analyse bruchmechanischer und inelastischer Probleme".

Von der Vorgeschichte abhängiges Materialverhalten nennt man inelastisch. Eine befriedigende mathematische Theorie inelastischen Materialverhaltens liegt bisher nur für wenige spezielle Typen konstitutiver Gleichungen vor, die nur einen kleinen Ausschnitt aus dem gesamten Spektrum möglichen Materialverhaltens beschreiben können. Das Ziel ist, eine mathematische Theorie für alle konstitutiven Gleichungen zu entwickeln, die mögliches Materialverhalten realer Stoffe beschreiben. Auf Grund der großen Vielfalt der vorgeschlagenen konstitutiven Gleichungen und der sich daraus ergebenden Anfangsrandwertprobleme sollten die Einzelheiten der Theorie nicht wesentlich von der speziellen Form der vorliegenden konstitutiven Gleichungen abhängen.

Aus demselben Grund ist es bei mathematischen Untersuchungen dieser Probleme nicht möglich, nur von den Gleichungen des Anfangsrandwertproblems auszugehen und vom Hintergrund der Kontinuumsmechanik abzusehen, der die Grundlage zur Aufstellung dieser Gleichungen bildet. Deswegen skizzieren wir in diesem Artikel zunächst die kontinuumsmechanischen Grundlagen der Theorie des inelastischen Materialverhaltens, diskutieren dann einige Beispiele von konstitutiven Gleichungen aus der ingenieurwissenschaftlichen Literatur zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Metallen und geben dann einen Überblick über den Stand der mathematischen Forschung zu den resultierenden Anfangsrandwertproblemen. Nicht behandeln werden wir die Theorie viskoelastischer Flüssigkeiten, soweit nicht die kontinuumsmechanischen Grundlagen auch diesen Bereich betreffen. Der Vollständigkeit halber haben wir zu den meisten Aussagen Beweise oder Beweisskizzen angegeben, die in kleinerer Schrift gesetzt sind und beim Lesen übersprungen werden können. Für ausführliche Darstellungen der Kontinuumsmechanik und der Festkörpermechanik sei auf [13, 28, 29, 30, 40] verwiesen.

2 Geschichtsfunktionale – Einfache Materialien – Inelastische Materialien

Es sei $B_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge mit glattem Rand ∂B_0. B_0 repräsentiert einen materiellen Körper zur Zeit $t = 0$ und heißt Referenzkonfiguration. Für $x \in B_0$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $\varphi(x,t) \in \mathbb{R}^3$ die Position, an der sich derjenige Massenpunkt zur Zeit t befindet, der sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x befindet. Mit M^3 bezeichnen wir die Menge der 3×3–Matrizen. Die zur Menge M^3 gehörende Matrix

$$F(x,t) = \nabla_x \varphi(x,t) = \big(\frac{\partial}{\partial x_j}\, \varphi_i(x,t)\big)_{i,j=1,2,3}$$

heißt Deformationsgradient. Zur Zeit t nehmen die Punkte des Körpers das Raumgebiet

$$B_t = \varphi(B_0, t) \in \mathbb{R}^3$$

ein. Nach Definition ist $x \mapsto \varphi(x,0) : B_0 \to B_0$ die Identität, und da sich zwei verschiedene Massenpunkte niemals an derselben Stelle befinden können, muß die Abbildung

$$x \mapsto \varphi(x,t) : B_0 \to B_t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ bijektiv sein. Darüber hinaus verlangt man, daß $\det \mathrm{F(x,t)} > 0$ ist für alle $(x,t) \in B_0 \times \mathbb{R}$. Die Matrix $F(x,t)$ ist also nichtsingulär. Mit der Dichte $\rho(x,t)$, der Deformationsgeschwindigkeit

$$v(x,t) = \varphi_t(x,t) \tag{2.1}$$

und dem ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $T_R(x,t) \in M^3$ lauten die Gesetze der Massen- und Impulserhaltung in Lagrangescher Darstellung

$$\rho_t = 0 \tag{2.2}$$

$$\rho v_t = \operatorname{div}_x T_R\,, \tag{2.3}$$

wobei

$$\operatorname{div}_x T_R(x,t) = \Big(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_R)_{ij} \Big)_{i,j=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$$

sei. Man erhält den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\tilde{T}(x,t)$ aus dem ersten durch

$$\tilde{T}(x,t) = F(x,t)^{-1} T_R(x,t) \in M^3\,. \tag{2.4}$$

Aus dem Erhaltungssatz für das Drehmoment folgt, daß der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor symmetrisch ist, siehe [10]. Zu (2.2), (2.3) kommen also die in den beiden äquivalenten Gleichungen

$$\tilde{T} = \tilde{T}^T\,, \quad F^{-1} T_R = (F^{-1} T_R)^T \tag{2.5}$$

enthaltenen drei Bedingungen hinzu.

(2.2), (2.3) und (2.5) sind sieben Gleichungen für ρ, die drei Komponenten von v und die neun Komponenten von T_R. Damit fehlen sechs Gleichungen zur Bestimmung aller Unbekannten. Die fehlenden Gleichungen werden durch die konstitutiven Gleichungen geliefert, die die Abhängigkeit des Spannungstensors vom Deformationsgradienten F wiedergeben. Diese Abhängigkeit ist eine Materialeigenschaft, und es entspricht der Vielfalt des möglichen Materialverhaltens, daß die Form der konstitutiven Gleichungen durch die fundamentalen Prinzipien, denen diese Gleichungen genügen müssen, nur wenig eingeschränkt wird. Diese Prinzipien sollen im folgenden diskutiert werden.

Die Erfahrung zeigt, daß der Spannungstensor $T_R(x,t)$ von der Deformationsvorgeschichte des Materials abhängt. Klar illustriert wird dies durch das Beispiel einer Briefklammer: Bei geringer Verbiegung der Briefklammer besteht ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen Verbiegung und der dazu nötigen Kraft. Läßt man die Briefklammer los, dann entspannt sie sich elastisch und kehrt in ihren Ausgangszustand zurück. Läßt man sie jedoch nach großer Verbiegung los, dann kehrt sie nicht in den Ausgangszustand zurück, sondern verbleibt nach elastischer Entspannung in einem Zustand dauernder plastischer Deformation. Bei kleiner Verbiegung aus diesem Zustand plastischer Deformation heraus besteht wieder ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen Verbiegung und dazu nötiger Kraft; die Briefklammer verhält sich wieder elastisch, im allgemeinen aber mit einer gegenüber dem Ausgangszustand geänderten Funktion zwischen elastischer Deformation und Kraft. Mit den Bezeichnungen $T_R(t)$ und $F(t)$ für die Funktionen $x \mapsto T_R(x,t)$, $x \mapsto F(x,t) : B_0 \to M^3$, gilt also

$$T_R(t) = \underset{s\le t}{\mathcal{F}} [F(s)]\,,$$

wobei $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ eine Abbildung bezeichne, die die Funktion F in die Funktion T_R abbildet, derart daß $T_R(t)$ unabhängig ist von den Werten von $F(s)$ für $s > t$. Man nennt $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ auch Geschichtsfunktional.

In diesen Überlegungen ist zugelassen, daß der Spannungstensor T_R am Punkt (x,t) von den Werten des Deformationsgradienten F an allen Punkten $(y,s) \in B_0 \times (-\infty, t]$ abhängt. Man nennt eine konstitutive Relation lokal, wenn $T_R(x,t)$ nur von $F(x,s)$ abhängt. Nach Noll [47] heißen Materialien mit lokaler konstitutiver Relation einfach. Für ein einfaches Material gilt also

$$T_R(x,t) = \underset{s\le t}{\mathcal{F}} \left[F(x,s), x \right], \tag{2.6}$$

wobei das Geschichtsfunktional vom Ort $x \in B_0$ abhängen kann. Dementsprechend fassen wir das Geschichtsfunktional als vom Parameter x abhängige Abbildung $F(x,s) \mapsto \underset{s\le t}{\mathcal{F}} [F(x,s), x]$ auf, verzichten aber der Einfachheit halber auf die Angabe des Parameters x und schreiben in Zukunft nur $\underset{s\le t}{\mathcal{F}} [F(x,s)]$.

Die Theorie der einfachen Materialien ist angemessen zum Studium vieler realer Stoffe. Daneben gibt es aber auch Theorien für nicht einfache Materialien, siehe [52]. Je nach der Form der zugrunde liegenden konstitutiven Gleichungen erhält man in der Theorie der nicht-einfachen Materialien Systeme partieller Differentialgleichungen, die in den Raumvariablen von höherer als erster Ordnung sind. In diesem Artikel beschränken uns auf das Studium einfacher Materialien und nehmen an, daß alle auftretenden konstitutiven Relationen lokal sind.

In vielen Fällen ist die Abhängigkeit der Relation zwischen Deformation und Spannung von der Vorgeschichte vernachlässigbar, zum Beispiel dann, wenn nur kleine Deformationen und Spannungen auftreten. In diesem Fall hängt der Wert des Spannungstensors T_R am Ort x zur Zeit t nur vom Wert des Deformationsgradienten am selben Ort zur selben Zeit ab:

$$T_R(x,t) = \hat{T}(F(x,t)).$$

Stoffe mit einer deartigen konstitutiven Relation heißen elastisch. Wenn $T_R(x,t)$ auch von den Werten des Deformationsgradienten zu früheren Zeitpunkten abhängt, heißt der Stoff inelastisch.

3 Das Prinzip der materiellen Objektivität

Bei einem einfachen Material ist der Definitionsbereich $D(\underset{s\le t}{\mathcal{F}})$ und der Wertebereich des Geschichtsfunktionals $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ im Raum $A(\mathbb{R}, M^3)$ aller Abbildungen $F : \mathbb{R} \to M^3$ enthalten:

$$\underset{s\le t}{\mathcal{F}} : D(\underset{s\le t}{\mathcal{F}}) \subseteq A(\mathbb{R}, M^3) \to A(\mathbb{R}, M^3).$$

Dieses Funktional kann jedoch nicht beliebig vorgegeben werden. Vielmehr verlangt man, daß die konstitutive Gleichung ihre Form unter denjenigen Transformationen der Koordinaten der Momentankonfiguration, die aus Translationen und Rotationen bestehen, nicht ändert. Wenn diese Forderung erfüllt ist, sagt man, $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ erfülle das "Prinzip der materiellen Objektivität".

Man überzeugt sich leicht, daß Translationen keinen Einfluß auf die Form der konstitutiven Gleichung haben, und daß es zum selben Ergebnis führt, ob man verlangt, daß die konstitutive Gleichung ihre Form unter Rotation des Koordinatensystems oder unter Rotationen des Körpers nicht ändern soll. Im folgenden werden wir daher untersuchen, unter welchen Bedingungen die konstitutive Gleichung invariant bleibt, wenn man den Körper einer Starrkörperrotation unterwirft.

Ein Körper, dessen Bewegung durch die Funktion $\varphi : B_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschrieben sei, werde zusätzlich einer zeitabhängigen Starrkörperrotation unterworfen. Die Gesamtbewegung wird dann durch die Funktion $\varphi^* : B_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi^*(x,t) = Q(t)\,\varphi(x,t)$$

beschrieben, wobei $Q(t) \in M^3$ für jedes t die einer Drehung entsprechende orthogonale Matrix ist, also $\det \mathrm{Q(t)} = 1$ erfüllt. Eine orthogonale Matrix, deren Determinante den Wert eins hat, nennen wir Drehmatrix. Durch Ableiten folgt für den Deformationsgradienten der Gesamtbewegung

$$F^*(x,t) = Q(t)\,F(x,t)\,. \tag{3.1}$$

Für den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor der Gesamtbewegung gilt dann nach (2.6)

$$T_R^*(x,t) = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[F^*(x,s)] = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[Q(s)\,F(x,s)]\,.$$

Das Prinzip der materiellen Objektivität verlangt, daß T_R^* aus T_R durch Rotation der Spannungsverteilung mit dem Körper hervorgeht. In [11, 13, 28] wird gezeigt, daß diese Rotation den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor in

$$Q(t)\,T_R(x,t) \tag{3.2}$$

überführt. Also muß

$$Q(t)\underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[F(x,s)] = Q(t)T_R(x,t) = T_R^*(x,t) = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[Q(s)\,F(x,s)]$$

gelten. Dies ist eine Bedingung an $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$, die sicherlich erfüllt ist, wenn

$$Q(t)\underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[F(s)] = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[Q(s)\,F(s)] \tag{3.3}$$

gilt für jede Funktion $F \in D(\underset{s\le t}{\mathcal{F}})$ und für jede Funktion

$$Q \in \{A(\mathbb{R}, M^3) \mid Q(t) \text{ ist Drehmatrix für alle } t\}\,.$$

Jedes Funktional, das diese Bedingung erfüllt, genügt dem Prinzip der materiellen Objektivität. Um zu untersuchen, welche Funktionale (3.3) erfüllen, werden einige Definitionen benötigt: Zur Matrix $F \in M^3$ sei

$$E[F] = \tfrac{1}{2}(F^T F - I)\,.$$

$E[F]$ heißt Greenscher Verzerrungstensor zu F, und $E : M^3 \to M^3$ ist die Abbildung, die jedem F den Greenschen Verzerrungstensor zuordnet. Mit demselben Symbol bezeichnen wir auch die Abbildung $E : A(\mathbb{R}, M^3) \to A(\mathbb{R}, M^3)$, die jedem $F \in A(\mathbb{R}, M^3)$ die durch

$$E[F](t) = E[F(t)]\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

definierte Abbildung $E[F] \in A(\mathbb{R}, M^3)$ zuordnet.

Zu den Matrizen $F, T \in M^3$ sei $\vartheta[F]T = FT$. Hierdurch wird die vom Parameter F abhängige Abbildung $\vartheta[F] : M^3 \to M^3$ definiert. Auch hier bezeichnen wir mit demselben Symbol die vom Parameter $F \in A(\mathbb{R}, M^3)$ abhängige Abbildung $\vartheta[F] : A(\mathbb{R}, M^3) \to A(\mathbb{R}, M^3)$, die jedem $T \in A(\mathbb{R}, M^3)$ die durch

$$(\vartheta[F]T)(t) = F(t)T(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

definierte Funktion $\vartheta[F]T \in A(\mathbb{R}, M^3)$ zuordnet.

Wenn F der Deformationsgradient und T der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist, dann ist $\vartheta[F]T$ nach (2.4) der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor. $\vartheta[F]$ spielt also die Rolle einer Transformation des zweiten in den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors.

Mit diesen Definitionen können wir nun die Funktionale charakterisieren, die dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen:

Satz 3.1 *Das Funktional* $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ *erfüllt die Bedingung (3.3) genau dann, wenn eine Faktorisierung der Form*

$$\underset{s\le t}{\mathcal{F}} = \vartheta[\cdot] \circ \underset{s\le t}{\mathcal{G}} \circ E$$

möglich ist mit einem Geschichtsfunktional $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$ *; das heißt genau dann, wenn*

$$T_R(t) = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[F(s)] = \vartheta[F(t)] \underset{s\le t}{\mathcal{G}}[E[F](s)] = F(t) \underset{s\le t}{\mathcal{G}}[E(s)]$$

gilt für jede Abbildung $F \in D(\underset{s\le t}{\mathcal{F}})$ *. Der Kürze halber wurde hierin* $E(s) = E[F(s)]$ *gesetzt.*

Insbesondere ist für jedes Geschichtsfunktional $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$ auch

$$\vartheta[\cdot] \circ \mathcal{G} \circ E$$

ein Geschichtsfunktional, das dem Prinzip der materiellen Objektivität genügt. Weil $\tilde{T}(t) = F(t)^{-1}T_R(t)$ der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist, gilt

$$\tilde{T}(t) = \underset{s\le t}{\mathcal{G}}[E(s)]\,.$$

Man nennt diese Gleichung reduzierte Form von (2.6). Die Bedingung (3.3) ist also genau dann erfüllt, wenn der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor eine Funktion des Greenschen Verzerrungstensors ist. Jede konstitutive Gleichung, die $\tilde{T}$ als Funktion von E vorschreibt, genügt somit dem Prinzip der materiellen Objektivität. Die Wahl von $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$ ist dabei nur dadurch eingeschränkt, daß $\tilde{T}$ symmetrisch sein muß. Dies liefert eine bequeme Möglichkeit, konstitutive Gleichungen zu formulieren, die diesem Prinzip genügen.

Beweisskizze. Man rechnet sofort nach, daß ein Funktional der Form $\underset{s\le t}{\mathcal{F}} = \vartheta[\cdot] \circ \underset{s\le t}{\mathcal{G}} \circ E$ die Bedingung (3.3) erfüllt. Also bleibt zu zeigen, daß eine Faktorisierung möglich ist, wenn (3.3) erfüllt ist. Hierzu sei $F \in A(\mathbb{R}, M^3)$ mit $\det \mathrm{F(t)} > 0$ und

$$F(t) = R(t)U(t)$$

die polare Zerlegung der nichtsingulären Matrix $F(t)$ mit einer orthogonalen Matrix $R(t)$ und der symmetrischen, positiv definiten Matrix

$$U(t) = (F(t)^T\, F(t))^{1/2}\,.$$

Wenn $\det \mathrm{F(t)} > 0$ ist, gilt $\det \mathrm{R(t)} = 1$. Dies folgt aus der Konstruktion der polaren Zerlegung, siehe zum Beispiel [10, S.94 ff]. Also ist $R(t)$ eine Drehmatrix, und man kann die polare Zerlegung für F in (3.3) einsetzen und $Q(t) = R(t)^{-1} = R(t)^T$ wählen. Dann folgt $R(t)^{-1} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[F(s)] = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[U(s)]$, und wegen $R(t)^{-1} = U(t)\, F(t)^{-1}$ ergibt sich

$$F(t)^{-1} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[F(s)] = U(t)^{-1} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[U(s)]\,. \tag{3.4}$$

Man sieht unmittelbar, daß auch die Umkehrung gilt, die wir jedoch nicht benötigen: Jedes Funktional mit dieser Eigenschaft erfüllt (3.3).

Wegen $2E[F(t)] + I = F(t)^T F(t)$ gilt nun

$$(2E[F(t)] + I)^{1/2} = U(t)\,. \tag{3.5}$$

Definiert man das Funktional $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$ durch

$$\underset{s\le t}{\mathcal{G}}[E(s)] = (2E(t) + I)^{-1/2} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[(2E(s) + I)^{1/2}]\,,$$

dann folgt wegen (3.4) und (3.5)

$$F(t) \underset{s\le t}{\mathcal{G}}[E[F(s)]] = F(t)U(t)^{-1} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[U(s)] = \underset{s\le t}{\mathcal{F}}[F(s)]\,.$$

Damit ist die Existenz der Faktorisierung gezeigt.

4 Plastischer Zwischenzustand

Zum weiteren Ausbau und zur Anwendung der Theorie müssen die Funktionale $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ oder $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$ genauer spezifiziert werden. Wegen der großen Freiheit bei der Wahl dieser Funktionale werden in der Regel einige plausible Konzepte und Annahmen zugrunde gelegt, um die Form der Funktionale einzuschränken. Ein häufig verwendetes Konzept ist die Idee des "plastischen Zwischenzustandes" , die durch das in Abschnitt 2 an einem Beispiel erläutere Verhalten von Metallen plausibel gemacht wird. Hierzu siehe zum Beispiel [27].

Die Grundannahme hierbei ist, daß der Deformationsgradient F multiplikativ in einen elastischen Anteil F_e und einen plastischen Anteil F_p zerlegt werden kann, wobei die Spannungen im Material durch den elastischen Anteil erzeugt werden. Es sollen also nichtsinguläre Matrizen $F_e(x,t)$, $F_p(x,t) \in M^3$ mit $\det \mathrm{F_p(x,t)} > 0$, eine Funktion $\hat{T}$ und ein Funktional $\underset{s\le t}{\mathcal{H}}$ existieren mit

$$F(x,t) = F_e(x,t)F_p(x,t) \tag{4.1}$$

$$F_p(x,t) = \underset{s\le t}{\mathcal{H}}[F(x,s)] \tag{4.2}$$

$$T_R(x,t) = \hat{T}(F_e(x,t)\,,\; F_p(x,t)) \tag{4.3}$$

wobei für die Funktion $\hat{T}$ außerdem

$$\hat{T}(I, G) = 0 \tag{4.4}$$

gelten soll für die Einheitsmatrix I und für alle $G \in M^3$ mit $(I, G) \in D(\hat{T})$. Die drei Gleichungen (4.1) – (4.3) bestimmen T_R als Funktion von F und definieren somit das Funktional $\underset{s\leq t}{\mathcal{F}}$:

$$T_R(x, t) = \underset{s\leq t}{\mathcal{F}}\,[F(x, s)]\,.$$

Gleichung (4.4) bringt zum Ausdruck, daß die Spannungen im Material durch F_e erzeugt werden. Ist F_e an einer Stelle gleich der Identität, dann sind an dieser Stelle keine Spannungen vorhanden. In der Gleichung (4.3) muß F_p als Parameter aufgefaßt werden: Der Zusammenhang zwischen F_e und T_R hängt von der plastischen Deformation F_p ab. Bei geänderter plastischer Deformation ändert sich im allgemeinen dieser Zusammenhang. Aus der Kenntnis von $F(x, s)$ für $s \leq t$ ergibt sich $F_p(x, t)$ wegen (4.2) und damit auch $F_e(x, t) = F(x, t)\, F_p(x, t)^{-1}$.

Hinter diesem Ansatz für ein konstitutives Modell stehen folgende Vorstellungen: Befindet sich ein Körper in einem Zustand plastischer Deformation, dann ist der Körper lokal im allgemeinen sowohl plastisch als auch elastisch deformiert. Zerschneidet man den Körper in kleine Stücke, dann können sich die einzelnen Stücke elastisch in ihren Zustand konstanter plastischer Deformation entspannen. Weil die Stücke bei der Entspannung ihre Form ändern, können sie nun nicht mehr zu einem Körper zusammengefügt werden. Um sie zum ursprünglichen Körper zusammenzufügen, müssen sie wieder elastisch deformiert werden. Die entspannten Stücke repräsentieren den plastischen Zwischenzustand, der durch das Feld F_p charakterisiert wird. Weil die einzelnen Stücke nicht zu einem Körper zusammengefügt werden können, ist F_p kein Deformationsgradient, das heißt, daß F_p nicht Gradient eines Vektorfeldes $\varphi_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist. Die notwendigen Kompatibilitätsbedingungen sind nicht erfüllt.

Die Wahl von $\hat{T}$ und $\underset{s\leq t}{\mathcal{F}}$ ist eingeschränkt, weil die Gleichungen (4.1) – (4.3) das Prinzip der materiellen Objektivität erfüllen müssen. Nach (3.4) ist dies genau dann der Fall, wenn

$$F(t)^{-1}\hat{T}(F(t)\underset{s\leq t}{\mathcal{H}}\,[F(s)]^{-1}\,,\ \underset{s\leq t}{\mathcal{H}}\,[F(s)]) = U(t)^{-1}\hat{T}(U(t)\underset{s\leq t}{\mathcal{H}}\,[U(s)]^{-1}\,,\ \underset{s\leq t}{\mathcal{H}}\,[U(s)])$$

gilt für jedes $F \in D(\underset{s\leq t}{\mathcal{F}})$. Durch dieses Prinzip wird jedoch nicht festgelegt, wie sich die plastischen und elastischen Anteile des Deformationsgradienten bei Starrkörperrotationen transformieren sollen. Im Hinblick auf die angegebene Interpretation der Zerlegung ist es naheliegend, zwei zusätzliche Invarianzbedingungen zu stellen. Zur Formulierung dieser Bedingungen seien $Q \in M^3$ eine Drehmatrix und $F^* = F_e^* F_p^*$ sowie T_R^* die transformierten Werte des Deformationsgradienten und des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors. Nach (3.1) und (3.2) gilt

$$F^* = QF\,, \quad T_R^* = QT_R\,. \tag{4.5}$$

Die erste zusätzliche Invarianzbedingung ist, daß sich der plastische Anteil von F wie F selbst transformieren soll:

$$F_p^* = QF_p\,. \tag{4.6}$$

Hieraus folgt für den elastischen Anteil das Transformationsgesetz

$$F_e^* = F^*(F_p^*)^{-1} = QF\,F_p^{-1}\,Q^T = Q\,F_e\,Q^T\,. \tag{4.7}$$

Bei der zweiten zusätzlichen Invarianzbedingung geht man von der Vorstellung aus, daß die Spannungen im Material nur vom elastischen Anteil des Deformationsgradienten erzeugt werden. Eine Rotation der Spannungsverteilung im Material tritt dann schon ein, wenn nur der elastische Anteil des Deformationsgradienten bei festgehaltenem plastischen Anteil rotiert wird. Dementsprechend fordert man, daß

$$T_R^* = QT_R = \hat{T}(QF_e, F_p) \tag{4.8}$$

gelten soll. Zusammen mit den Gleichungen (4.2), (4.3) ergeben sich aus (4.5) – (4.8) und aus dem Prinzip der materiellen Objektivität folgende drei Bedingungen für die Funktion $\hat{T}$ und das Funktional $\underset{s\le t}{\mathcal{H}}$: Für alle nichtsingulären Matrizen $F', F'' \in M^3$ mit positiver Determinante, alle Drehmatrizen Q' und alle Funktionen $Q \in \{A(\mathbb{R}, M^3) \mid Q(t) \text{ ist Drehmatrix für jedes } t\}$ sowie $F \in D(\underset{s\le t}{\mathcal{H}})$, mit $\det \mathrm{F(t)} > 0$ soll gelten, daß

$$Q(t)\underset{s\le t}{\mathcal{H}}[F(s)] = \underset{s\le t}{\mathcal{H}}[Q(s)\,F(s)] \tag{4.9}$$

$$Q'\hat{T}(F', F'') = \hat{T}(Q'F', F'') \tag{4.10}$$

$$Q'\hat{T}(F', F'') = \hat{T}(Q'F'(Q')^T, Q'F'')\,. \tag{4.11}$$

Der folgende Satz charakterisiert diejenigen Funktionale, die diese Bedingung erfüllen.

Satz 4.1 (i) *Sei das Geschichtsfunktional* $\underset{s\le t}{\mathcal{F}}$ *durch die Gleichungen*

$$\underset{s\le t}{\mathcal{F}}[F(s)] = \hat{T}(F(t)F_p(t)^{-1}, F_p(t)) \tag{4.12}$$

$$F_p(t) = \underset{s\le t}{\mathcal{H}}[F(s)] \tag{4.13}$$

definiert. Dann gilt: Die Abbildungen $\hat{T}$ *und* $\underset{s\le t}{\mathcal{H}}$ *erfüllen die Bedingungen (4.9) – (4.11) genau dann, wenn eine Faktorisierung*

$$\underset{s\le t}{\mathcal{F}} = \vartheta\,[\cdot] \circ \underset{s\le t}{\mathcal{G}} \circ E \tag{4.14}$$

möglich ist mit einem Funktional $\underset{s\le t}{\mathcal{G}}$, *das durch Gleichungen der Form*

$$\underset{s\le t}{\mathcal{G}}[\tilde{E}(s)] = \overline{T}(\tilde{E}(t), E_p(t)) \tag{4.15}$$

$$E_p(t) = E[\underset{s\le t}{\overline{\mathcal{H}}}[\tilde{E}(s)]] \tag{4.16}$$

definiert wird, wobei $\underset{s\le t}{\overline{\mathcal{H}}}$ *ein geeignetes Geschichtsfunktional ist, für das zusätzlich*

$$\underset{s\le t}{\mathcal{H}}[F(s)] = F(t)(2E[F(t)] + I)^{-1/2}\,\underset{s\le t}{\overline{\mathcal{H}}}[E[F(s)]] \tag{4.17}$$

gilt. Aus dieser Gleichung folgt insbesondere

$$E_p(t) = E\Big[\underset{s\le t}{\overline{\mathcal{H}}}[E[F(s)]]\Big] = E\Big[\underset{s\le t}{\mathcal{H}}[F(s)]\Big] = E[F_p(t)]\,. \tag{4.18}$$

(ii) *Es seien die Bedingungen (4.9) – (4.11) erfüllt. Dann gilt: Die Funktion* $\hat{T}$ *in (4.12) erfüllt (4.4) genau dann, wenn* $\overline{T}(G, G) = 0$ *ist für jedes* $G \in M^3$ *mit* $(G, G) \in D(\overline{T})$.

Für ein System konstitutiver Gleichungen der Form (4.1) – (4.3), das die Bedingungen (4.9) – (4.11) des erweiterten Prinzips der materiellen Objektivität erfüllt, wird also durch

$$\tilde{T}(t) = F(t)^{-1} T_R(t) = \overline{T}(E[F](t), E_p(t))$$

$$E_p(t) = \underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]]$$

der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor als Funktion des Greenschen Verzerrungstensors $E[F(t)]$ vorgeschrieben, und nach (4.18) ist $E_p(t)$ der Greensche Verzerrungstensor zu $F_p(t)$. $E[F_p]$ soll hier plastischer Verzerrungstensor genannt werden.

Aus diesem Satz folgt, daß jedes Funktional der Form (4.15), (4.16) ein Geschichtsfunktional $\underset{s \le t}{\mathcal{F}}$ definiert, das (4.9) – (4.11) erfüllt, wobei die Wahl von $\overline{T}$ und $\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}}$ nur dadurch eingeschränkt ist, daß $\overline{T}(E[F(t)], E[F_p(t)]) = \tilde{T}(t)$ für jedes t symmetrisch und $\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}}[E[F(s)]]$ für jedes t invertierbar sein und positive Determinante haben muß. Denn definiert man bei gegebenen $\overline{T}$ und $\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}}$ das Funktional $\underset{s \le t}{\mathcal{H}}$ durch (4.17) und $\hat{T}$ durch

$$\hat{T}(F(t)\, F_p(t)^{-1}, F_p(t)) = F(t) \overline{T}(E[F(t)], E[F_p(t)])\,,$$

dann gilt für das durch (4.12), (4.13) definierte Funktional wegen der aus (4.18) folgenden Identität $E[F_p(t)] = E_p(t)$, daß

$$\underset{s \le t}{\mathcal{F}}[F(s)] = \hat{T} = F(t) \overline{T}(E[F(t)], E_p(t)) = F(t) \underset{s \le t}{\mathcal{G}} [E[F(s)]]\,.$$

Dies ist (4.14). Weil (4.17) nach Definition gilt, sind auf Grund des Satzes auch die Gleichungen (4.9) – (4.11) erfüllt. Also erlaubt dieser Satz in einfacher Weise, konstitutive Gleichungen zu formulieren, die das erweiterte Prinzip der materiellen Objektivität erfüllen.

Beweisskizze. (i) Es seien (4.9) – (4.13) erfüllt, und es sei F die Funktion aus (4.12), (4.13). Dann ist $F(t)$ für jedes t eine nichtsinguläre Matrix mit $\det \mathrm{F(t)} > 0$ und hat eine polare Zerlegung $F(t) = R(t)U(t)$ mit der symmetrischen, positiv definiten Matrix $U(t) = (F(t)^T F(t))^{1/2}$ und der Drehmatrix $R(t)$. Mit $Q(t) = R(t)^T$ folgt aus (4.9)

$$\begin{aligned} \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [F(s)] &= R(t)\, R(t)^T \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [F(s)] = R(t) \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [R(s)^T R(s)\, U(s)] \\ &= R(t) \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [U(s)] = F(t)\, U(t)^{-1} \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [U(s)]\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wegen $U = (2E[F] + I)^{1/2}$ ergibt sich hieraus (4.17), wenn man

$$\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]] = \underset{s \le t}{\mathcal{H}} [(2E[F(s)] + I)^{1/2}]$$

setzt. Mit (4.13) folgt aus (4.17) wegen $F(2E[F] + I)^{-1/2} = FU^{-1} = R$, daß

$$\begin{aligned} E[F_p(t)] &= E[\underset{s \le t}{\mathcal{H}} [F(s)]] = E[F(t)(2E[F(t)] + I)^{-1/2} \underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]]] \\ &= \frac{1}{2} \Big((R(t) \underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]]\,)^T R(t) \underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]] - I \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big((\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]]\,)^T \underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]] - I \Big) \\ &= E(\underset{s \le t}{\overline{\mathcal{H}}} [E[F(s)]]\,) = E_p(t)\,. \end{aligned}$$

Dies ist (4.18). Wenn Q eine Drehmatrix ist, folgt aus (4.10) und (4.11)

$$\begin{aligned}\hat{T}(F', F'') &= \hat{T}(QQ^T F', F'') = Q\hat{T}(Q^T F', F'') \\ &= \hat{T}(QQ^T F' Q^T, QF'') = \hat{T}(F'Q^T, QF'')\,.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Matrix $F_p(t)$ aus (4.13) ist für jedes t nichtsingulär und hat wegen $\det \mathrm{F_p(t)} > 0$ eine polare Zerlegung $F_p(t) = S(t)V(t)$ mit $V(t) = (F_p(t)^T F_p(t))^{1/2}$ und einer Drehmatrix $S(t)$. Setzt man die polaren Zerlegungen von F und F_p in (4.12) ein, dann folgt zusammen mit (4.10) und (4.20)

$$\begin{aligned}F(t)^{-1} \underset{s\le t}{\mathcal{F}}\,[F(s)] &= F^{-1}\hat{T}(FF_p^{-1}, F_p) = U^{-1}R^T\hat{T}(RUV^{-1}S^T, SV) \\ &= U^{-1}\hat{T}(UV^{-1}S^T, SV) = U^{-1}\hat{T}(UV^{-1}, V) \\ &= \check{T}(U,V) = \overline{T}(E[F(t)], E[F_p(t)]\,) = \overline{T}(E[F(t)], E_p(t)) \\ &= \underset{s\le t}{\mathcal{G}}\,[E[F(s)]]\,.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Beim zweitletzten Gleichheitszeichen wurde (4.18) verwendet. Dies beweist, daß die Faktorisierung (4.14) möglich ist, und gleichzeitig ist gezeigt, daß (4.14) – (4.18) aus (4.9) – (4.13) folgen. Zum Beweis der anderen Richtung der Behauptung muß nachgewiesen werden, daß (4.9) – (4.11) aus (4.12) – (4.18) folgen. (4.9) resultiert aber sofort aus (4.17), und (4.10), (4.11) ergeben sich aus

$$\hat{T}(F(t)\,F_p(t)^{-1}, F_p(t)) = F(t)\overline{T}(E[F(t)], E[F_p(t)]\,)\,,$$

wobei diese Gleichung wegen (4.14) und (4.12), (4.15), (4.18) gilt.

Die Aussage (ii) folgt unmittelbar aus (4.21).

5 Darstellungen von Geschichtsfunktionalen – Innere Variable – Thermodynamik

In diesem Abschnitt soll auf eine Möglichkeit zur konkreten Darstellung von Geschichtsfunktionalen, die Methode der inneren Variablen, näher eingegangen werden. Nur am Rande sei auf die naheliegende und häufig verwendete Darstellung von Geschichtsfunktionalen durch Integrale der Form

$$\tilde{T}(x,t) = \underset{s\le t}{\mathcal{G}}\,(E(x,s)) = a(E(x,t)) + \int_0^\infty b(s, E(x,t), E(x,t{-}s) - E(x,t))\,ds \tag{5.1}$$

mit gegebenen Funktionen a und b hingewiesen, wobei wir zur Abkürzung die Bezeichnung $E(x,t) = E[F(x,t)]$ benützt haben, die wir in diesem ganzen Abschnitt verwenden werden. Einige Literaturhinweise zu mathematischen Untersuchungen von Anfangsrandwertproblemen mit konstitutiven Gleichungen in dieser Integralform geben wir in Abschnitt 7.

Zum Studium von Metallen wird in den Ingenieurwissenschaften jedoch üblicherweise eine andere Methode zur Darstellung von Geschichtsfunktionalen verwendet, die eng mit thermodynamischen Überlegungen verknüpft ist: Es wird angenommen, daß Parameter $z_1(x,t), \ldots, z_N(x,t)$ existieren, die man innere Variable nennt, so daß der Spannungstensor am Punkt (x,t) nur von den Werten des Greenschen Verzerrungstensors E und der inneren Variablen $z_1, \ldots, z_N$ an diesem Punkt abhängt:

$$\tilde{T}(x,t) = \hat{T}(E(x,t), z_1(x,t), \ldots, z_N(x,t))\,. \tag{5.2}$$

Die zeitliche Entwicklung der inneren Variablen wird bestimmt durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit

$$\frac{\partial}{\partial t} z_k(x,t) = f_k(E(x,t), z_1(x,t), \ldots, z_N(x,t)), \quad k = 1, \ldots, N. \tag{5.3}$$

(5.2) und (5.3) sind die konstitutiven Gleichungen. Zusammen mit Anfangsbedingungen für die Werte $z_1(x,0), \ldots, z_N(x,0)$ der inneren Variablen bestimmen diese Gleichungen $\tilde{T}(x,t)$ als Funktion von $E(x,s)$ und definieren daher das Geschichtsfunktional $\underset{s \le t}{\mathcal{G}}$. Man kann dabei auch die Idee des plastischen Zwischenzustandes verwenden. Die Komponenten des plastischen Verzerrungstensors $E[F_p]$ gehören dann zu den inneren Variablen. Auch hier ist die explizite Abhängigkeit der Funktionen $\hat{T}$ und f_k vom Parameter x zugelassen.

Bisher haben wir den Fall betrachtet, daß die Funktionen $\hat{T}$ und $f = (f_1, \ldots, f_N)$ nicht von der Temperatur θ abhängen. Im allgemeinen sind diese Funktionen jedoch temperaturabhängig. Man muß dann zur Berechnung der Deformation des Körpers auch die Gesetze der Thermodynamik heranziehen um die Temperaturverteilung mitzuberechnen. Natürlich treten Wärmeleitungseffekte auch dann auf, wenn $\hat{T}$ und f nicht von θ abhängen, haben aber in diesem Fall keinen Einfluß auf das Deformationsverhalten des Körpers, und können somit bei der Berechnung der Deformation und der Spannungsverteilung unberücksichtigt bleiben. Trotzdem muß man die Gesetze der Thermodynamik auch in diesem Fall berücksichtigen, denn sie liefern eine Bedingung an die Form der Funktion f, die unabhängig davon erfüllt sein muß, ob $\hat{T}$ und f von θ abhängen oder nicht. Wir skizzieren unten die Herleitung dieser Bedingung, die auf [11] zurückgeht, und formulieren sie am Ende des Abschnitts.

Die Einordnung in den Rahmen der Thermodynamik liefert zugleich ein besseres Verständnis der Bedeutung der inneren Variablen: Im Rahmen der Thermodynamik wird der Zustand eines materiellen Körpers, zum Beispiel eines Gases, durch die Werte von Zustandsvariablen festgelegt. Zustandsvariable sind unter anderem Temperatur, innere Energie, Dichte, Druck und Entropie. Der Einführung der inneren Variablen liegt nun die Idee zugrunde, daß viele Materialien und insbesondere auch Metalle in sehr komplizierter Weise aufgebaut sind, und daß es deswegen nötig ist, zur thermodynamischen Beschreibung des Zustandes eines solchen Materials weitere Zustandsvariable, die inneren Variablen, einzuführen. Besonders anschaulich wird dies am Beispiel von Beton. Unterhalb einer Längenskala von einigen Zentimetern ist Beton ein sehr inhomogenes Material. Nur über hinreichend große Regionen kann das Material im Mittel als homogen aufgefaßt werden, und kontinuumsmechanische Variable müssen als Mittelwerte über derartige Regionen aufgefaßt werden. Wählt man für derartige Regionen Kugeln, dann müssen diese Kugeln im Falle von Beton Durchmesser von einigen Zentimetern haben. Diese Kugeln haben aber ein sehr kompliziertes Inneres. Um den Zustand einer solchen Kugel durch Mittelwerte zu kennzeichnen, sind daher hinreichend viele Zustandsvariable nötig.

Thermodynamik mit inneren Variablen. Um die erwähnte Bedingung an $f = (f_1, \ldots, f_N)$ herzuleiten, sei $z = (z_1, \ldots, z_N)$ der Vektor der inneren Variablen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Funktion f nicht explizit von x abhängt. Anstelle der Temperatur führt man zunächst die innere Energie $e(x,t)$ als Unbekannte ein. Die Temperatur ist dann eine Funktion von e, E, z :

$$\theta = \hat{\theta}(e, E, z),$$

also

$$\theta(x,t) = \hat{\theta}(e(x,t), E(x,t), z(x,t)).$$

Wie üblich werden wir im folgenden in der Bezeichnung nicht zwischen den beiden verschiedenen Funktionen θ und $\hat{\theta}$ unterscheiden und einheitlich θ für beide Funktionen schreiben. Mit Ausnahme des Spannungstensors verfahren wir auch bei den anderen thermodynamischen Größen so.

Zur Bestimmung der zusätzlichen Unbekannten e ist jetzt neben (2.1) – (2.4), (5.2) und (5.3) eine weitere Gleichung nötig, die man aus dem Energiesatz erhält: Das vergrößerte Gleichungssystem lautet

$$\rho_t = 0 \tag{5.4}$$

$$\rho v_t = \operatorname{div}_x T_R \tag{5.5}$$

$$\rho e_t = \tilde{T} \cdot E_t - \operatorname{div}_x q \tag{5.6}$$

$$z_t = f \tag{5.7}$$

mit dem Wärmefluß $q(x,t) \in \mathbb{R}^3$, wozu noch die Gleichung $\varphi_t = v$, die Definition von v, kommt. Zusätzlich benötigt man die konstitutiven Gleichungen

$$\tilde{T} = \hat{T}(e, E, z, x) \tag{5.8}$$

$$q = q(e, E, z, \nabla_x e, \nabla_x E, \nabla_x z) \tag{5.9}$$

$$f = f(e, E, z)\,. \tag{5.10}$$

Unter geeigneten Voraussetzungen für $\hat{T}, q$ und f ist die Lösung (ρ, φ, e, z) dieses Gleichungssystems und damit auch $E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$ bei gegebenen Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muß zu diesem Gleichungssystem eine Funktion $s = s(e, E, z) \in \mathbb{R}$, die Entropie, existieren, so daß für jede Lösung (ρ, φ, e, z) die Funktion

$$s(x,t) = s(e(x,t), E(x,t), z(x,t))$$

die Ungleichung

$$\rho s_t + \operatorname{div}_x\Big(\frac{q}{\theta}\Big) \geq 0 \tag{5.11}$$

erfüllt. Hieraus und aus (5.6), (5.7) folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \rho s_t + \operatorname{div}_x\Big(\frac{q}{\theta}\Big) &= \rho\Big(\frac{\partial s}{\partial e}\, e_t + \nabla_E s \cdot E_t + \nabla_z s \cdot z_t\Big) + \operatorname{div}_x\Big(\frac{q}{\theta}\Big) \\ &= \frac{\partial s}{\partial e}\,(\tilde{T} \cdot E_t - \operatorname{div}_x q) + \rho \nabla_E s \cdot E_t + \rho \nabla_z s \cdot z_t + \frac{1}{\theta}\operatorname{div}_x q - \frac{1}{\theta^2}\, q \cdot \nabla_x \theta \\ &= \Big(\frac{\partial s}{\partial e}\,\tilde{T} + \rho \nabla_E s\Big) \cdot E_t - \Big(\frac{\partial s}{\partial e} - \frac{1}{\theta}\Big)\operatorname{div}_x q + \rho \nabla_z s \cdot f - \frac{1}{\theta^2}\, q \cdot \nabla_x \theta\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Diese Ungleichung muß für alle (x,t) gelten und insbesondere für $(x_0, 0)$ mit einem beliebig gewählten $x_0 \in B_0$, das wir nun festhalten. Mit

$$E_t(x_0, 0) = \frac{1}{2}[F^T \nabla_x v + (F^T \nabla_x v)^T] = \frac{1}{2}[\nabla_x v + (\nabla_x v)^T]$$

$$\operatorname{div}_x q(x_0, 0) = \frac{\partial q}{\partial e} \cdot \nabla_x e + \ldots + \nabla_{(\partial z_N/\partial x_3)} q \cdot \nabla_x(\partial z_N/\partial x_s)\,,$$

wobei $F(x_0, 0) = I$ verwendet wurde, prüft man anhand von (5.4) – (5.10) leicht nach, daß durch Variation der höheren Ableitungen der Anfangsdaten bei festgehaltenen Werten von $e, E, z, \nabla_x e, \nabla_x E, \nabla_x z$

an der Stelle $(x_0, 0)$ die Größen $E_t(x_0, 0)$ und $\mathrm{div}_x q(x_0, 0)$ so variiert werden können, daß die Ungleichung (5.12) nur dann für alle Lösungen erfüllt sein kann, wenn die Klammerausdrücke vor E_t und $\mathrm{div}_x q$ verschwinden. Dies liefert

$$\tilde{T} = -\rho\Big(\frac{\partial s}{\partial e}\Big)^{-1}\nabla_E s = -\rho\nabla_E e(s, E, z)\big|_{s=s(e,E,z)} = \hat{T}(e, E, z, x) \tag{5.13}$$

$$\theta = \Big(\frac{\partial s}{\partial e}\Big)^{-1} = \frac{\partial}{\partial s}\, e(s, E, z)\big|_{s=s(e,E,z)} \tag{5.14}$$

$$\rho\nabla_z s \cdot f - \frac{1}{\theta^2}\, q \cdot \nabla_x\theta \geq 0\,, \tag{5.15}$$

wobei man die letzten Gleichheitszeichen in den ersten beiden Gleichungen erhält, indem man s anstelle von e als unabhängige Variable auffaßt und e als Funktion von (s, E, z) schreibt. $\hat{T}$ ist explizit von x abhängig, weil in (5.13) die Funktion $\rho(x)$ auftritt. Nach (5.4) ist ρ unabhängig von t.

Wählt man die Anfangsbedingungen so, daß $\nabla_x e(x_0, 0) = \nabla_x E(x_0, 0) = \nabla_x z(x_0, 0) = 0$ gilt bei festgehaltenen Werten von $e(x_0, 0)$, $E(x_0, 0)$, $z(x_0, 0)$, dann folgt wegen

$$\nabla_x\theta = \frac{\partial\theta}{\partial e}\nabla_x e + \nabla_E\theta\,\nabla_x E + \nabla_z\theta\,\nabla_x z$$

aus (5.15), daß

$$\nabla_z s \cdot f = \nabla_z s(e, E, z) \cdot f(e, E, z) \geq 0 \tag{5.16}$$

sein muß.

Diese Ungleichung ist eine Bedingung an f. Sie soll in eine Form gebracht werden, in der anstelle von e die Temperatur θ als Variable vorkommt. Hierzu sei $\sigma \mapsto -\psi(\sigma, E, z)$ die Legendretransformierte der Funktion $s \mapsto e(s, E, z)$:

$$-\psi(\sigma, E, z) = \sup_{s\in\mathbb{R}}[\sigma s - e(s, E, z)]\,. \tag{5.17}$$

Man nennt ψ freie Energie. Weil nach (5.14) $\theta = (\partial s/\partial e)^{-1} = \partial e/\partial s$ gilt, folgt aus der Theorie der Legendretransformation

$$\psi(\theta(e, E, z), E, z) = e - s(e, E, z)\,\theta(e, E, z)\,. \tag{5.18}$$

Dies liefert

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial e} = 1 - \frac{\partial s}{\partial e}\,\theta - s\,\frac{\partial\theta}{\partial e} = -s\,\frac{\partial\theta}{\partial e}\,,$$

also

$$s = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,.$$

Hiermit und mit der Gleichung

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\nabla_z\theta + \nabla_z\psi = -\theta\nabla_z s - s\nabla_z\theta\,,$$

die aus (5.18) folgt, ergibt sich

$$\nabla_z s(e, E, z) = -\Big[\frac{1}{\theta}\,\nabla_z\psi(\theta, E, z)\Big]_{\theta=\theta(e,E,z)}\,.$$

Hieraus und aus (5.16) resultiert nun folgende Bedingung an f :

Dissipationsungleichung. *Für alle* (θ, E, z) *aus dem gemeinsamen Definitionsbereich* $D(\psi) \cap D(f)$ *der freien Energie* $\psi : D(\psi) \subseteq \mathbb{R}^+ \times M^3 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *und der Funktion* $f = (f_1, \ldots, f_N) : D(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \times M^3 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *gilt*

$$\nabla_z \psi(\theta, E, z) \cdot f(\theta, E, z) \leq 0 \,. \tag{5.19}$$

Dies ist eine Bedingung an f, weil bei gegebener Funktion $s(e, E, z)$, also wegen (5.17) auch gegebener Funktion ψ die Abbildung f so vorgegeben werden muß, daß (5.19) erfüllt ist.

Allerdings ist die zum System (5.4) –(5.10) gehörende Entropie $s(e, E, z)$ nicht eindeutig bestimmt. Ohne auf Einzelheiten eingehen zu können, geben wir hier nur an, daß die Funktion $s(e, 0, z)$ im wesentlichen beliebig gewählt werden kann, und daß dann zu diesen Anfangsdaten die Funktion $s(e, E, z)$ aus (5.13), einem überbestimmten System partieller Differentialgleichungen für s, berechnet werden kann, und damit durch Vorgabe der Funktion $\hat{T}(e, E, z, x)$ bestimmt ist. Definiert man nun θ durch (5.14), dann folgt aus (5.12), daß die so konstruierten Funktionen s und θ die Ungleichung (5.11) erfüllen, und damit Entropie und Temperatur zum System (5.4) – (5.10) sind, wenn die Ungleichung (5.15) erfüllt ist. Wie gezeigt, ist (5.19) eine Folgerung aus (5.15). In einem allgemeineren Rahmen ist die an f zu stellende Bedingung also, daß auf die beschriebene Weise zu f eine Funktion s konstruiert werden kann, die (5.15) erfüllt.

Die Bedeutung von (5.19) für die Lösungstheorie von Anfangsrandwertproblemen zum System (2.2), (2.3), (5.2), (5.3) wird sich in Abschnit 7 zeigen, insbesondere in der Gleichung (7.6).

6 Konstitutive Gleichungen für Metalle bei kleinen Deformationen – Elastisch ideal-plastisches Materialverhalten

Die in den Ingenieurwissenschaften aufgestellten konstitutiven Gleichungen zur mathematischen Beschreibung des Spannungs- und Deformationsverhaltens von Metallen verwenden überwiegend die Konzepte des plastischen Zwischenzustandes sowie der inneren Variablen und sind unter der Einschränkung formuliert, daß große Spannungen, aber nur kleine Deformationen auftreten dürfen. In diesem Fall kann die Funktion $\hat{T}$ aus Gleichung (4.3) linearisiert werden, da als unabhängige Variable nur Deformationen auftreten. Die linearisierte Form von $\hat{T}$ ergibt sich aus folgendem Lemma. Zur Formulierung dieses Lemmas benötigt man mehrere Definitionen:

Es sei $|\cdot|$ eine Norm auf dem Raum der $n{\times}m$–Matrizen, zum Beispiel

$$|A| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij}^2 \Big)^{1/2}, \quad A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} .$$

Die Zahlen n und m werden jeweils geeignet spezialisiert. Weiter benötigt man die durch

$$u(x,t) = \varphi(x,t) - x \tag{6.1}$$

definierte Funktion $u : B_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, die Verschiebung. Es gilt

$$F(x,t) = \nabla_x \varphi(x,t) = I + \nabla_x u(x,t) \tag{6.2}$$

sowie

$$\begin{aligned} E[F] &= \tfrac{1}{2}[F^T F - I] = \tfrac{1}{2}[(I + \nabla_x u)^T (I + \nabla_x u) - I] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(\nabla_x u)^T + \nabla_x u\right] + \tfrac{1}{2}(\nabla_x u)^T \nabla_x u = \varepsilon(\nabla_x u) + O(|\nabla_x u|^2) \end{aligned} \tag{6.3}$$

mit dem linearen Verzerrungstensor

$$\varepsilon(\nabla_x u) = \tfrac{1}{2}[\nabla_x u + (\nabla_x u)^T]\,.$$

Lemma 6.1 *Wenn die Bedingungen (4.9) – (4.11) des erweiterten Prinzips der materiellen Objektivität erfüllt sind, gilt*

$$T_R = \hat{T}(FF_p^{-1}, F_p) = D(\varepsilon(\nabla_x u) - E[F_p]) + o(|(\nabla_x u, \hat{F}_p)|)\,|(\nabla_x u, \hat{F}_p)| \tag{6.4}$$

für $|(\nabla_x u, \hat{F}_p)| \to 0$ *, wobei* $\hat{F}_p = F_p - I$ *sei und* $D : M^3 \to M^3$ *eine lineare Abbildung ist, die symmetrische Matrizen in symmetrische Matrizen abbildet. Man nennt* D *Elastizitätstensor.*

Beweisskizze. Wenn (4.9) – (4.11) erfüllt sind, gilt nach Satz 4.1

$$T_R = \hat{T}(FF_p^{-1}, F_p) = F\overline{T}(E[F], E[F_p])\,, \tag{6.5}$$

und nach Definition der Ableitung gilt für alle symmetrischen Matrizen E und E_p

$$\overline{T}(E, E_p) - \overline{T}(0,0) = [\nabla_E \overline{T}(0,0)]E + [\nabla_{E_p} \overline{T}(0,0)]E_p + o(|(E, E_p)|)\,|(E, E_p)|$$

für $|(E, E_p)| \to 0$, wobei die Ableitungen $\nabla_E \overline{T}(0,0)$ und $\nabla_{E_p} \overline{T}(0,0)$ lineare Abbildungen auf dem Raum M^3 sind. Wegen $\overline{T}(G,G) = 0$ folgt $\overline{T}(0,0) = 0$ und für $\lambda > 0$

$$0 = \overline{T}(\lambda E, \lambda E) = [\nabla_E \overline{T}(0,0)](\lambda E) + [\nabla_{E_p} \overline{T}(0,0)](\lambda E) + o(\lambda |(E,E)|)\, \lambda |(E,E)|\,.$$

Nach Division durch λ resultiert somit für alle E

$$[\nabla_E \overline{T}(0,0) + \nabla_{E_p} \overline{T}(0,0)]E = -o(\lambda|(E,E)|)\,|(E,E)| \to 0$$

für $\lambda \to 0$, also $\nabla_{E_p} \overline{T}(0,0) = -\nabla_E \overline{T}(0,0)$. Weil $\overline{T}(E, E_p) = \tilde{T}$ der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist, der nach (2.5) symmetrisch sein muß, erhält man auf dieselbe Weise, daß $[\nabla_E \overline{T}(0,0)]E$ eine symmetrische Matrix ist für alle symmetrischen E. Es folgt, daß der Elastizitätstensor $D = \nabla_E \overline{T}(0,0)$ eine lineare Abbildung auf dem Raum der symmetrischen Matrizen ist mit

$$\overline{T}(E, E_p) = D(E - E_p) + o(|(E, E_p)|)\,|(E, E_p)|\,.$$

Setzt man diese Gleichung in (6.5) ein und benutzt (6.2), (6.3) sowie

$$E[F_p] = \varepsilon(\hat{F}_p) + \tfrac{1}{2}\,\hat{F}_p^T \hat{F}_p = O(|\hat{F}_p|)\,, \quad |\hat{F}_p| \to 0\,,$$

dann folgt (6.4).

Einige Beispiele für die Vielzahl der in den Ingenieurwissenschaften entwickelten und verwendeten konstitutiven Modelle für Metalle findet man in [12, 13, 21, 25, 26, 29, 30, 42]. Um ein häufig verwendetes Modell zu formulieren, sei angenommen, daß das Material homogen ist. Die auf die Referenzkonfiguration bezogene Dichte ρ ist dann zur Zeit $t = 0$ räumlich und nach

Gleichung (2.2) auch zeitlich konstant. Nach (2.1) und (6.1) gilt $v_t = u_{tt}$. Gleichung (2.3) und die aus Lemma 6.1 abgelesene linearisierte Form von (4.3) lauten somit

$$\rho u_{tt}(x,t) = \operatorname{div}_x T(x,t) \tag{6.6}$$

$$T(x,t) = D\Big(\varepsilon(\nabla_x u(x,t)) - \varepsilon_p(x,t)\Big), \tag{6.7}$$

wobei der einheitlichen Bezeichnung halber

$$\varepsilon_p = E[F_p], \quad T = T_R$$

gesetzt wurde. Man faßt ε_p als innere Variable auf und schließt das Gleichungssystem durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die ε_p als Funktion von T und damit wegen (6.7) als Funktion von $\varepsilon(\nabla_x u)$ bestimmen, und somit das Geschichtsfunktional in (4.16) definieren:

$$\tau = T - \frac{1}{3}(\text{spur } T)I \tag{6.8}$$

$$\tau = T_a + T_f \tag{6.9}$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_a + \varepsilon_n \tag{6.10}$$

$$T_a = \mathcal{M}\varepsilon_a \tag{6.11}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p(x,t) = \alpha(|T_f(x,t)|\,,\,\zeta(x,t))T_f(x,t) \tag{6.12}$$

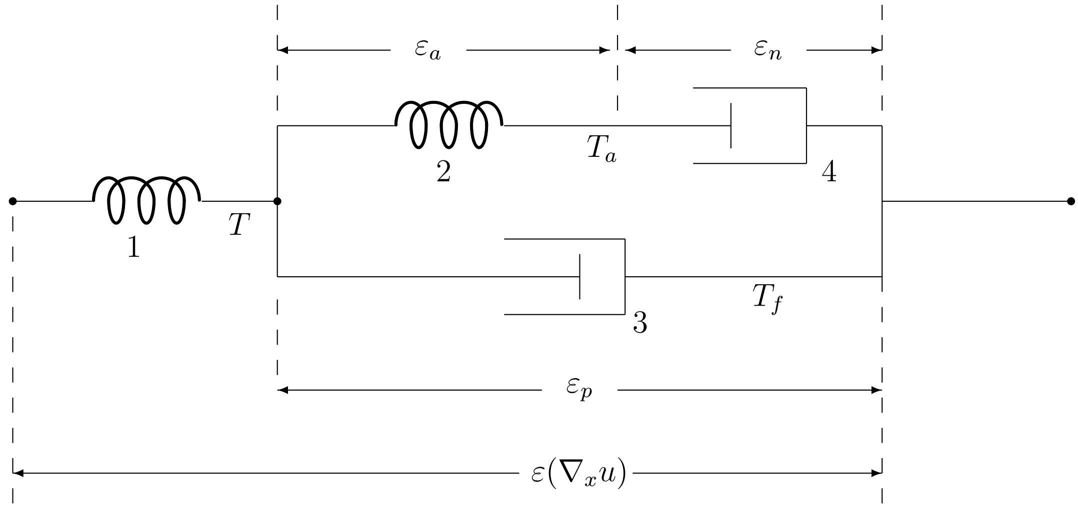
$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_n(x,t) = \beta(|T_a(x,t)|)\,T_a(x,t) \tag{6.13}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,\zeta(x,t) = \gamma(|T_f(x,t)|\,,\,\zeta(x,t))\,, \tag{6.14}$$

Zum Gleichungssystem (6.6) – (6.14) kommen noch geeignete Rand- und Anfangsbedingungen hinzu.

In diesen Gleichungen bedeuten neben $\varepsilon_p(x,t)$ auch $\varepsilon_a(x,t)$ und $\varepsilon_n(x,t)$ symmetrische 3×3–Matrizen, die man als Verzerrungstensoren interpretiert, und neben $T(x,t)$ auch $\tau(x,t)$, $T_a(x,t)$, $T_f(x,t)$ symmetrische 3×3–Matrizen, die man als Spannungstensoren interpretiert. ζ ist eine reellwertige Funktion, $\mathcal{M}$ ist eine positive Konstante und $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $\beta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegebene, materialabhängige Funktionen. Die drei ersten algebraischen Gleichungen kann man durch Einsetzen in die drei Differentialgleichungen beseitigen.

Folgendes rheologische Diagramm hilft zum besseren Verständnis dieser Gleichungen:



Man kann (6.7) als konstitutive Gleichung der Feder 1, (6.11) als konstitutive Gleichung der Feder 2, und (6.12), (6.13) als konstitutive Gleichungen der Stoßdämpfer 3 und 4 auffassen. T_a hat die Dimension einer Spannung, es spielt die Rolle einer kinematischen Verfestigungsvariable, während der Parameter ζ die isotrope Verfestigung des Stoßdämpfers 3 beschreibt. (6.14) ist die Evolutionsgleichung für diese Verfestigungsvariable. τ ist der Spannungsdeviator. Ein typisches Beispiel für die Funktion α ist

$$\alpha(|T_f|,\zeta) = c(\frac{|T_f|}{\zeta})^m \tag{6.15}$$

mit Materialkonstanten $c > 0$, $m \sim 5 \dots 7$. Für dieses Beispiel muß γ so vorgegeben sein, daß $\zeta(x,t)$ immer positiv bleibt. Der Stoßdämpfer 3 verfestigt sich bei wachsendem ζ. Die Funktion γ ist häufig von der Form

$$\gamma(|T_f|,\zeta) = \gamma_1(|\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p|,\zeta)\,, \quad \gamma(|T_f|,\zeta) = \gamma_2(|\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p|\,|T_f|,\zeta)$$

mit geeigneten Funktionen γ_1 und γ_2.

Von etwas anderer Form sind mathematische Modelle, die elastisch ideal-plastisches Materialverhalten beschreiben, siehe hierzu [3, 29, 30]. Bei diesen Modellen geht man von der Vorstellung aus, daß sich das Material rein elastisch verhält, wenn der Wert der Spannung eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Erreicht die Spannung diese Grenze, fängt das Material an, plastisch zu fließen. Durch das Fließen wird ein weiterer Anstieg der Spannung verhindert. Innerhalb des Materials ist also der Wert der Spannung nie größer als der durch die Fließgrenze bestimmte Maximalwert, wobei aber dieser Maximalwert durch Verfestigung ansteigen kann. Um ein Beispiel für ein solches Modell zu erhalten, bei dem Verfestigung berücksichtigt ist, und um die Form der Gleichungen in diesem Modell zu motivieren, gehen wir von folgender einfachen Version der Gleichungen (6.6) – (6.14) aus:

$$\rho u_{tt} = \operatorname{div}_x T \tag{6.6}$$

$$T = D(\varepsilon(\nabla_x u) - \varepsilon_p) \tag{6.7}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p = \alpha(|T|,\zeta)T = c(\frac{|T|}{\zeta})^m T \tag{6.16}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,\zeta = \gamma(|T|,\zeta) = |\,\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p|\,. \tag{6.17}$$

Das rheologische Diagramm zu diesen Gleichungen enthält die Feder 2 und den Stoßdämpfer 4 nicht, und der Einfachheit halber haben wir auf die Einführung des Spannungsdeviators verzichtet. Läßt man m in (6.16) über alle Grenzen wachsen, dann "konvergiert" der Graph der Funktion

$$(T,\zeta) \mapsto (\alpha(|T|,\zeta)T\,,\,\gamma(|T|,\zeta)) = \Big(c(\frac{|T|}{\zeta})^m T\,,\,c(\frac{|T|}{\zeta})^m|T|\Big)$$

gegen die Menge $V \subseteq (M^3\times\mathbb{R})\times(M^3\times\mathbb{R})$ mit

$$V = \{(T,\zeta;\,0,0)\mid |T|<\zeta\}\cup\{(T,\zeta;\,\lambda T,\lambda\zeta)\mid |T|=\zeta\,,\,\lambda\geq 0\}\,.$$

V ist nicht Graph einer Funktion $g : M^3\times\mathbb{R}\to M^3\times\mathbb{R}$. Man kann V jedoch als Graph einer mengenwertigen Funktion $g : M^3\times\mathbb{R}\to\mathcal{P}(M^3\times\mathbb{R})$ auffassen, wobei $\mathcal{P}(M^3\times\mathbb{R})$ die

Potenzmenge von $M^3 \times \mathbb{R}$, also die Menge aller Teilmengen von $M^3 \times \mathbb{R}$ sei. g ist definiert durch

$$g(T,\zeta) = \begin{cases} \{(0,0)\}\,, & \text{für } |T| < \zeta \\ \{(\lambda T, \lambda\zeta) \mid \lambda \geq 0\}\,, & \text{für } |T| = \zeta \\ \emptyset\,, & \text{für } |T| > \zeta \end{cases}\,. \tag{6.18}$$

Mit der Funktion

$$f(\varepsilon, \varepsilon_p, \zeta) = g(D(\varepsilon - \varepsilon_p), \zeta) \tag{6.19}$$

ist die zur "Verfestigungsregel" (6.17) gehörende konstitutive Relation für elastisch ideal-plastisches Materialverhalten gegeben durch

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\,(\varepsilon_p, \zeta) \in f(\varepsilon(\nabla_x u), \varepsilon_p, \zeta) = g(D(\varepsilon(\nabla_x u) - \varepsilon_p), \zeta), \tag{6.20}$$

zu der noch die beiden Gleichungen (6.6) und (6.7) kommen. Daß es sich bei (6.20) um eine direkte Verallgemeinerung der Gleichungen (5.3) oder (5.7) handelt wird deutlich, wenn man $z = (\varepsilon_p, \zeta)$ setzt.

Die Interpretation von (6.20) ist folgende: Solange die Norm des Spannungstensors $|T| = |D(\varepsilon(\nabla_x u) - \varepsilon_p)|$ kleiner als ζ ist, gilt nach (6.18) - (6.20), daß $\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p = \tfrac{\partial}{\partial t}\,\zeta = 0$ ist. Nach (6.7) verhält sich das Material also rein elastisch. Dies ist für die Werte von $\varepsilon(\nabla_x u)$ in einer Umgebung von ε_p der Fall. Wenn die Fließbedingung

$$|T| = \zeta$$

erfüllt ist, setzt plastisches Fließen ein, das heißt es gilt $\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p = \lambda T$ und $\tfrac{\partial}{\partial t}\,\zeta = \lambda |T|$ mit einer Konstanten $\lambda \geq 0$. Diese Konstante ist keine Funktion von T und ζ, sondern wird dadurch bestimmt, daß wegen $g(T,\zeta) = \emptyset$ für $|T| > \zeta$ die Relation (6.20) als Bedingung enthält, daß für eine Lösung von (6.6), (6.7), (6.20) immer

$$|T(x,t)| = |D(\varepsilon(\nabla_x u(x,t)) - \varepsilon_p(x,t))| \leq \zeta(x,t)$$

gelten muß. Bei vorgegebener Funktion u muß also der Betrag der Fließgeschwindigkeit $|\tfrac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon_p(x,t)|$ und damit $\lambda(x,t)$ so groß sein, daß diese Ungleichung durch die Funktion ε_p erfüllt wird. Bei plastischem Fließen wächst auch der Verfestigungsparameter ζ. Der Bereich, in dem sich das Material zukünftig elastisch verhält, wird dadurch größer.

7 Zum Stand der mathematischen Forschung

Sieht man von Untersuchungen zu viskoelastischen Flüssigkeiten ab, dann konzentrieren sich die mathematischen Untersuchungen zur Existenz– und Eindeutigkeit von Lösungen und zur Wohlgestelltheit von Anfangsrandwertproblemen aus der Theorie inelastischer Materialen hauptsächlich auf zwei Bereiche. Im ersten Bereich werden Probleme untersucht, bei denen das Geschichtsfunktional in der konstitutiven Gleichung die Integralform (5.1) hat. Aus der zitierten Literatur, die keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt, gehören in erster Linie [4, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 31, 41, 50] zu diesem Bereich. Die Arbeit [16] steht etwas am Rande dieses Bereiches, weil darin allgemeine Geschichtsfunktionale unter der Voraussetzung "schwindenden Gedächtnisses" untersucht werden, und im Gegensatz zu den anderen Arbeiten, in denen räumlich eindimensionale Probleme untersucht werden, wird in [4] ein dreidimensionales Problem studiert. Alle diese Arbeiten beschäftigen sich mit den Gleichungen für große Deformationen, die einen "quasilinearen hyperbolischen Charakter" haben, so daß grundsätzlich Stoßwellen entstehen können. Den Arbeiten gemeinsam ist das Interesse daran, ob die dissipative Wirkung des Gedächtnisanteils, also des Integralterms in (5.1), stark genug ist, die Entstehung von Stoßwellen zu verhindern. Die Voraussetzungen sind dabei so gewählt, daß der Gedächtnisanteil stark dissipativ und somit stark regularisierend wirkt, das heißt, daß die dissipative Wirkung des Gedächtnisanteils nicht abnimmt bei Verkleinerung der Norm der Lösung. Materialgleichungen für Metalle haben diese Eigenschaft nicht, weil bei Verkleinerung der Spannung die plastische Deformation und damit die Dissipation immer stärker abnehmen und das Material sich fast rein elastisch verhält. Deswegen gehören die Arbeiten dieses Bereiches nicht zur Theorie des inelastischen Verhaltens von Metallen und sollen hier nicht weiter besprochen werden.

Die mathematischen Untersuchungen aus dem zweiten Bereich dagegen gehören zur Theorie des inelastischen Verhaltens von Metallen und betreffen überwiegend einen Typ konstitutiver Gleichungen, deren zugehörige Anfangsrandwertprobleme in der Form

$$w_t + C(w) = 0$$

geschrieben werden können mit einem maximal monotonen Operator C. Wir wollen hier die Grundidee skizzieren und daraus die Form der in diesem Bereich studierten konstitutiven Gleichungen herleiten. Betrachtet wird das Gleichungssystem

$$\rho u_{tt} = \operatorname{div}_x T \tag{7.1}$$
$$T = D(\varepsilon(\nabla_x u) - \varepsilon_p) \tag{7.2}$$
$$z_t = f(\varepsilon(\nabla_x u), z) \tag{7.3}$$

mit dem plastischen Verzerrungstensor ε_p und dem Vektor $z = (\varepsilon_p, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^N$ der inneren Variablen. Hierbei nehmen wir an, daß die Dichte ρ räumlich und nach (2.2) zeitlich konstant ist, und daß der Elastizitätstensor eine symmetrische und positiv definite Abbildung $D : M^3 \to M^3$ darstelle, die den Raum der symmetrischen Matrizen in sich abbildet.

Für symmetrische Matrizen $\varepsilon \in M^3$ sei

$$(\varepsilon, z) \mapsto \psi(\varepsilon, z) : M^3 \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

eine Funktion mit

$$\rho \nabla_\varepsilon \psi(\varepsilon, z) = \rho \nabla_\varepsilon \psi(\varepsilon, \varepsilon_p, \tilde{z}) = T = D(\varepsilon - \varepsilon_p)\,, \tag{7.4}$$

also

$$\rho \psi(\varepsilon, z) = \tfrac{1}{2}[D(\varepsilon - \varepsilon_p)] \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p) + \psi_1(z)\,. \tag{7.5}$$

Sei $(u(x,t), \varepsilon_p(z,t), \tilde{z}(x,t))$ eine Lösung von (7.1) – (7.3). Weil T symmetrisch ist, gilt

$$T \cdot \varepsilon(\nabla_x u_t) = \tfrac{1}{2}\, T \cdot [\nabla_x u_t + (\nabla_x u_t)^T] = T \cdot \nabla_x u_t = \operatorname{div}_x(T^T u_t) - (\operatorname{div}_x T) \cdot u_t\,.$$

Für die Funktion $\psi = \psi(\varepsilon(\nabla_x u), \varepsilon_p, \tilde{z})$ resultiert somit wegen (7.4)

$$\rho(\tfrac{1}{2}\,|u_t|^2 + \psi)_t = \rho u_{tt} \cdot u_t + \rho \nabla_\varepsilon \psi \cdot \varepsilon(\nabla_x u_t) + \rho \nabla_z \psi \cdot z_t = \operatorname{div}_x(T u_t) + \rho \nabla_z \psi \cdot f\,.$$

Integration und Anwendung des Gaußschen Satzes liefert die "Energiegleichung"

$$\frac{d}{dt}\int_{B_0}\rho(\frac{1}{2}|u_t|^2+\psi)dx=\int_{\partial B_0}(Tn)\cdot u_t\,dS(x)+\int_{B_0}\rho\nabla_z\psi\cdot f\,dx=\int_{B_0}\rho\nabla_z\psi\cdot f\,dx\,, \qquad (7.6)$$

wobei ∂B_0 der als hinreichend regulär angenommene Rand des Gebietes B_0 sei, und wobei $n=n(x)$ die äußere Einheitsnormale an ∂B_0 im Punkt x sei. Um das letzte Gleichheitszeichen zu erhalten wurde angenommen, daß der Randterm durch geeignete Wahl der Randbedingungen weggefallen ist.

Die in (5.17) definierte, ebenfalls mit ψ bezeichnete freie Energie erfüllt die Gleichung

$$\rho\nabla_E\psi(\theta,E,z)=\tilde{T}\,. \qquad (7.7)$$

Dies folgt durch Ableiten von (5.18) und Vergleich mit (5.13), (5.14). Die Gleichung (7.7) entspricht der Gleichung (7.4) wenn man E durch ε und $\tilde{T}$ durch T ersetzt, und ähnlich wie man aus (7.4) die Gleichung (7.6) erhält, erhält man aus (7.7) eine Gleichung für die freie Energie, die sich von (7.6) im wesentlichen nur um den Term $-\int_{B_0}\rho s\theta_t\,dx$ unterscheidet, der bei Vernachlässigung von Temperaturänderungen verschwindet. Es ist daher naheliegend, die Funktion ψ aus (7.5) als freie Energie zum teilweise linearisierten System (7.1) – (7.3) zu interpretieren. Dann muß die Dissipationsungleichung (5.19) erfüllt sein.

Zur Funktion f muß also die noch unbestimmte Funktion ψ_1 in (7.5) so gewählt werden können, daß $\nabla_z\psi\cdot f\le 0$ gilt. Dies ist eine Bedingung an f. Aus (7.6) folgt dann, daß die Summe aus kinetischer und freier Energie nicht wachsend ist. Der Versuch liegt nahe, diese aus den Gesetzen der Thermodynamik folgende Dissipativität von (7.1) – (7.3) zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu verwenden, insbesondere wenn man für ψ eine nichtnegative Funktion wählen kann. Jedoch ist unbekannt, ob diese Dissipationseigenschaft allein als Beweisgrundlage ausreicht.

Falls ψ_1 eine quadratische Form ist, ist auch ψ nach (7.5) quadratisch, und es gilt

$$\begin{aligned}\rho\nabla_z\psi(\varepsilon,z)&=\rho(\nabla_{\varepsilon_p}\psi(\varepsilon,\varepsilon_p,\tilde{z}),\nabla_{\tilde{z}}\psi(\varepsilon,\varepsilon_p,\tilde{z}))\\&=(\,-D(\varepsilon-\varepsilon_p)+\nabla_{\varepsilon_p}\psi_1(\varepsilon_p,\tilde{z}),\nabla_{\tilde{z}}\psi_1(\varepsilon_p,\tilde{z}))=A(\varepsilon,z)\,,\end{aligned}$$

wobei $A:D(A)\subseteq M^3\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ eine lineare Abbildung ist. Wenn es nun zur Funktion f eine quadratische Form ψ_1 und eine konvexe Funktion $\chi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ gibt mit $\nabla\chi(0)=0$ und mit

$$f(\varepsilon,z)=(\nabla\chi)(-\rho\nabla_z\psi(\varepsilon,z))=(\nabla\chi)(-A(\varepsilon,z))\,, \qquad (7.8)$$

dann folgt

$$\rho\nabla_z\psi(\varepsilon,z)\cdot f(\varepsilon,z)=A(\varepsilon,z)\cdot\nabla\chi(-A(\varepsilon,z))=-(\varepsilon,z)\cdot[-A^T\nabla\chi(-A(\varepsilon,z))]\le 0\,,$$

weil $-A^T\circ\nabla\chi\circ(-A)$ unter den angegebenen Bedingungen an χ ein monotoner Operator ist, der den Nullpunkt in sich abbildet. Also ist (5.19) erfüllt. Es gilt jedoch mehr. Denn weil (7.1) linear und ψ quadratisch, also auch $\nabla\psi$ linear ist, kann man die Differenz zweier Lösungen $(u,\varepsilon_p,\tilde{z})$ und $(u',\varepsilon_p',\tilde{z}')$ von (7.1) – (7.3) in (7.6) einsetzen und erhält mit $\varepsilon=\varepsilon(\nabla_x u)$, $\varepsilon'=\varepsilon(\nabla_x u')$ wegen der Monotonie von $-A^T\circ\nabla\chi\circ(-A)$, daß

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{B_0}\rho\Big[\tfrac{1}{2}|u_t-u_t'|^2+\psi\Big(\varepsilon(\nabla_x(u-u')),z-z'\Big)\Big]dx\\&=-\int_{B_0}[(\varepsilon,z)-(\varepsilon',z')]\cdot[\,-A^T\nabla\chi(-A(\varepsilon,z))+A^T\nabla\chi(-A(\varepsilon',z'))]dx\le 0\,.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich unter geeigneten Zusatzbedingungen an ψ die Eindeutigkeit der Lösung von Anfangsrandwertproblemen, und mit der Theorie der maximal monotonen Operatoren kann man auch eine Existenztheorie darauf aufbauen und globale Existenz von Lösungen zeigen, wieder unter geeigneten Zusatzbedingungen.

Das Studium derartiger Probleme zum Gleichungssystem (7.1) – (7.3) mit Funktionen f, die sich in der Form (7.8) darstellen lassen, bildet das Schwergewicht der mathematischen Untersuchungen aus dem zweiten Bereich. Wie üblich in der Theorie der monotonen Operatoren kann man diese Überlegungen und die entsprechenden Ergebnisse noch auf eine größere Klasse von Funktionen f ausdehnen, die man erhält, wenn man $\nabla\chi$ in (7.8) durch das Subdifferential $\partial\chi$ einer konvexen Funktion χ ersetzt. Mit denselben Methoden kann man also auch konstitutive Relationen der Form

$$z_t \in f(\varepsilon(\nabla_x u), z) = \partial\chi(-\rho\nabla_z\psi(\varepsilon(\nabla_x u), z)) \tag{7.9}$$

mit einer mengenwertigen Funktion f studieren.

Ein Beispiel für eine derartige konstitutive Relation ist durch (6.20) mit der in (6.18), (6.19) definierten Funktion f gegeben. Denn sei $z = (\varepsilon_p, \zeta)$ und $\psi_1(z) = \frac{1}{2}\zeta^2$, also

$$\rho\psi(\varepsilon, z) = \tfrac{1}{2}[D(\varepsilon - \varepsilon_p)] \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p) + \tfrac{1}{2}\zeta^2 ,$$

und somit

$$\rho\nabla_z\psi(\varepsilon, z) = (\,-\,D(\varepsilon - \varepsilon_p), \zeta) = A(\varepsilon, z)\,. \tag{7.10}$$

Die konvexe Menge K sei definiert durch

$$K = \{(T, -\zeta) \in M^3 \times \mathbb{R} \mid |T| \le \zeta\}\,.$$

Die zugehörige charakteristische Funktion

$$\chi_K(T,\zeta) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } (T,\zeta) \in K \\ +\infty\,, & \text{für } (T,\zeta) \notin K \end{cases}$$

ist dann konvex, weil K konvex ist, und man rechnet nach, daß für das Subdifferential $\partial\chi_K$ von χ_K

$$g(T,\zeta) = \partial\chi_K(T, -\zeta) \tag{7.11}$$

gilt falls $(T,\zeta) \neq 0$ ist, wobei g die in (6.18) definierte Funktion ist. Zusammen mit (7.10) und (6.19) resultiert also

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, z) &= f(\varepsilon, \varepsilon_p, \zeta) = g(D(\varepsilon - \varepsilon_p), \zeta) \\ &= \partial\chi_K(D(\varepsilon - \varepsilon_p), -\zeta) = \partial\chi_K(-A(\varepsilon, z)) = \partial\chi_K(-\rho\nabla_z\psi(\varepsilon, z))\,. \end{aligned}$$

Somit hat f in diesem Problem die Form (7.9). Die Beschränkung von (7.11) auf $(T,\zeta) \neq 0$ ist ohne Bedeutung, weil beim Problem (6.6), (6.7), (6.20) nur positive Werte des Verfestigungsparameters ζ auftreten können, da nach (6.20) $\frac{\partial}{\partial t}\zeta \ge 0$ gilt, und da aus physikalischen Gründen die Anfangswerte für ζ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt sein müssen.

Dagegen hat die zum Gleichungssystem (6.6), (6.7), (6.16), (6.17) gehörende Funktion f nicht die Form (7.8), und auch für die Modelle aus der ingenieurwissenschaftlichen Literatur mit der Form (6.6) – (6.14) hat das zugehörende f in der Regel nicht die Form (7.8). Berücksichtigt man jedoch die isotrope Verfestigung nicht und verzichtet man somit auf die Variable ζ , dann hat die zum verbleibenden Gleichungssystem

$$T = T_a + T_f \tag{7.12}$$
$$\varepsilon_p = \varepsilon_a + \varepsilon_n \tag{7.13}$$
$$T_a = \mathcal{M}\varepsilon_a \tag{7.14}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial t}\varepsilon_p = \alpha(|T_f|)T_f \tag{7.15}$$
$$\tfrac{\partial}{\partial t}\varepsilon_n = \beta(|T_a|)T_a \tag{7.16}$$

gehörende Funktion f die Form (7.8), wobei wir auch hier der Einfachheit halber auf die Einführung des Spannungsdeviators verzichtet haben. Um dies einzusehen, seien $\tilde{\alpha}(r)$ und $\tilde{\beta}(r)$ Stammfunktionen zu den Funktionen $\alpha(r)r$ und $\beta(r)r$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$. Die Funktionen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ sind konvex, wenn die Ableitungen von $\alpha(r)r$, $\beta(r)r$ nicht negativ sind. Also ist auch die durch

$$\chi(\tau_1, \tau_2) = \tilde{\alpha}(|\tau_1|) + \tilde{\beta}(|\tau_2|)$$

definierte Funktion $\chi : M^3 \times M^3 \to \mathbb{R}$ konvex. Wählt man nun als innere Variable $z = (\varepsilon_p, \varepsilon_n)$ und setzt

$$\rho\psi(\varepsilon, z) = \tfrac{1}{2}[D(\varepsilon - \varepsilon_p)] \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p) + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}|\varepsilon_p - \varepsilon_n|^2 \,,$$

dann kann man unter Berücksichtigung von (6.7) das Gleichungssystem (7.12) – (7.16) zusammenziehen zu

$$\tfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_p, \varepsilon_n) = f(\varepsilon(\nabla_x u), \varepsilon_p, \varepsilon_n) = \nabla\chi(-\rho\nabla_z\psi(\varepsilon(\nabla_x u), \varepsilon_p, \varepsilon_n)) \,.$$

f hat also hier die Form (7.8).

Aus der zitierten Literatur beschäftigen sich in erster Linie die Arbeiten [5, 6, 20, 24, 33, 34, 38, 39, 44, 45, 54] mit derartigen Problemen, wobei hauptsächlich die beiden dargestellten Beispiele und Varianten davon untersucht werden. In [37] wird die mathematische Formulierung von Problemen mit nichtkonvexer Fließbedingung diskutiert.

Konstitutive Gleichungen der Form (7.3) mit einem in der Form (7.8) oder (7.9) darstellbaren f stellen jedoch nur einen Ausschnitt dar aus dem Spektrum aller konstitutiven Gleichungen mit inneren Variablen, die mögliches Materialverhalten von Metallen beschreiben. Ein Versuch, allgemeineres f zu behandeln, wird in [32] gemacht. Es wird benützt, daß das Gleichungssystem (7.1) – (7.3) einen "semilinearen Charakter" hat und vorausgesetzt, daß f eine globale Lipschitzbedingung erfüllt. Dies bedingt, daß f höchstens linear wachsen darf. Unter dieser Voraussetzung kann man die Nichtlinearität als stetigen Operator in einem Banachraum auffassen und die Theorie der Operatorhalbgruppen zum Beweis der Existenz einer globalen Lösung heranziehen ohne Monotonie zu verlangen.

Die Klasse der konstitutiven Gleichungen für Metalle, die diese Lipschitzbedingung erfüllen, ist jedoch nicht groß. Wie das Beispiel (6.15) zeigt wird das Eintreten von plastischem Fließen in der Regel durch stark superlineares Wachstum von f charakterisiert, und beim Auftreten von Entfestigungseffekten wird häufig auch keine lokale Lipschitzbedingung erfüllt. Es bleibt somit das Problem bestehen, bei starkem Wachstum der Nichtlinearität, die häufig auch nicht differenzierbar ist, Existenz, Eindeutigkeit, stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten, Singularitäten, Konvergenz von Näherungslösungen, asymptotisches Verhalten und anderes zu untersuchen ohne Monotonie vorauszusetzen. Einige Ergebnisse in dieser Richtung sind in [1, 7, 8, 9, 35] enthalten. Es werden hierin Energieabschätzungen zur Untersuchung konkreter Modelle aus den Ingenieurwissenschaften und zum Beweis von globalen Existenzsätzen bei kleinen Anfangsdaten verwendet. In [2] wird zeitlich globale Existenz einer Lösung für ein Modell der Form (6.6) – (6.14) in einer Raumdimension bei großen Anfangsdaten bewiesen. Jedoch steht auch dieses Resultat unter Einschränkungen, die zu stark sind für die Anwendung auf konkrete Modelle aus den Ingenieurwissenschaften.

Die zentralen Fragen aus der Theorie des Gleichungssystems (7.1) – (7.3) sind also weitgehend offen. Während aber für dieses Gleichungssystem Teilresultate bekannt sind, wurden andere Bereiche der Theorie des inelastischen Verhaltens von Metallen, wie zum Beispiel das Gleichungssystem für große Deformationen, bisher gar nicht untersucht.

Danksagung. Ein erster Entwurf dieses Artikels entstand während eines Gastaufenthalts an der Universidade Federal de Pernambuco. Der Autor bedankt sich bei Professor F. Cardoso und beim Mathematischen Institut der Universität für die Einladung, für die Gastfreundschaft und für die günstigen Arbeitsmöglichkeiten.

Literatur

[1] H.-D. Alber: On a system of equations from the theory of nonlinear viscoplasticity. Preprint Nr. 1265, FB Mathematik, TH Darmstadt 1989

[2] H.-D. Alber: Global existence and boundedness of large solutions to nonlinear equations of viscoelasticity with hardening. Preprint Nr. 1571, FB Mathematik, TH Darmstadt 1993. Erscheint in Comm. Math. Phys.

[3] S. S. Antmann, G. W. Szymczak: Nonlinear elastoplastic waves. Contemp. Math. **100** (1989), 27–54

[4] H. Bellout, F. Bloom, J. Nečas: Existence of global weak solutions to the dynamical problem for a three–dimensional elastic body with singular memory. SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 36–45

[5] D. Blanchard, P. Le Tallec: Numerical analysis of the equations of small strains quasistatic elastoviscoplasticity. Numer. Math. **50** (1986), 147–169

[6] D. Blanchard, P. Le Tallec, M. Ravachol: Numerical analysis of evolution problems in nonlinear small strains elastoviscoplasticity. Numer. Math. **55** (1989), 177–195

[7] K. Chelminski: Global in time existence of solutions to the constitutive model of Bodner–Partom with isotropic hardening. Preprint Nr. 1574, FB Mathematik, TH Darmstadt 1993. Zur Veröffentlichung eingereicht.

[8] K. Chelminski: Existence of large solutions to the quasistatic problem for a three–dimensional Maxwell material. Preprint Nr. 1577, FB Mathematik, TH Darmstadt 1993

[9] K. Chelminski: About large solutions for the quasistatic problem in nonlinear viscoelasticity with the constitutive equations of Bodner–Partom. Preprint Nr. 1575, FB Mathematik, TH Darmstadt 1993. Zur Veröffentlichung eingereicht.

[10] P. G. Ciarlet: Mathematical elasticity. Volume I: Three dimensional elasticity. Amsterdam: North–Holland 1988

[11] B. D. Coleman, M. E. Gurtin: Thermodynamics with internal state variables. J. Chem. Phys. **47** (1967), 597–613

[12] D. Cordts, F. G. Kollmann: An implicit time integration scheme for inelastic constitutive equations with internal state variables. Internat. J. Numer. Methods Engrg. **23** (1986), 533–554

[13] N. Cristescu, I. Suliciu: Viscoplasticity. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers 1982

[14] C. Dafermos: Global smooth solutions to the initial-boundary value problem for the equations of one–dimensional nonlinear thermoviscoelasticity. SIAM. J. Math. Anal. **13** (1982), 397–408

[15] C. Dafermos: Dissipation in materials with memory. In: A. S. Lodge, M. Renardy, J. A. Nohel (eds.), Viscoelasticity and rheology. Academic Press 1985, 221–234

[16] C. Dafermos: Development of singularities in the motion of materials with fading memory. Arch. Rational Mech. Anal. **91** (1986), 193–205

[17] C. Dafermos, L. Hsiao: Development of singularities in solutions of the equations of nonlinear thermoelasticity. Quart. Appl. Math. **44** (1986), 463–474

[18] C. Dafermos, J. A. Nohel: Energy methods for nonlinear hyperbolic volterra integrodifferential equations. Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), 219–278

[19] C. Dafermos, J. A. Nohel: A nonlinear hyperbolic volterra equation in viscoelasticity. Amer. J. Math. Supplement dedicated to P. Hartman (1981), 87–116

[20] G. Duvaut, J. L. Lions: Les inéquations en méchanique et en physique. Paris: Dunod 1972

[21] J. Eftis, M. S. Abdel-Kader, D. L. Jones: Comparisons between the modified Chaboche and Bodner-Partom viscoplastic constitutive theories at high temperature. Int. J. Plast. **5** (1989), 1–27

[22] A. E. Green, P. M. Naghdi: A general theory of an elastic–plastic continuum. Arch. Rational Mech. Anal. **18** (1965), 251–281

[23] J. M. Greenberg: Models of elastic–perfectly plastic materials. European J. Appl. Math. **1** (1990), 131–150

[24] B. Halphen, Q. S. Nguyen: Sur les matériaux standards généralisés. J. Méc. **14** (1975), 39–63

[25] G. Hartmann, F. G. Kollmann: A computational comparison of the inelastic constitutive models of Hart and Miller. Acta Mech. **69** (1987), 139–165

[26] E. W. Hart: Constitutive relations für the nonelastic deformation of metals. Trans. ASME J. Engrg. Mat. Technol. **98** (1976), 193–202

[27] P. Haupt: On the concept of an intermediate configuration and its applications to a representation of viscoelastic–plastic material behavior. Int. J. Plast. **1** (1985), 303–316

[28] P. Haupt: Foundation of continuum mechanics. In: K. Hutter (ed.): Continuum mechanics in environmental sciences and geophysics. CISM Courses and Lectures **337**. Wien: Springer 1993, 1–77

[29] P. Haupt: Thermodynamics of Solids. In: W. Muschik (ed.): Non-equilibrium with applications to solids. CISM Courses and Lectures **336**. Wien: Springer 1993, 65–137

[30] P. Haupt: On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics. Acta Mech. **100** (1993), 129–154

[31] W. J. Hrusa, J. A. Nohel: The Cauchy problem in one–dimensional nonlinear viscoelasticity. J. Differential Equations **59** (1985), 388–412

[32] I. R. Ionescu, M. Sofonea: Functional and numerical methods in viscoplasticity. Oxford, New York, Tokio: Oxford University Press, 1993

[33] C. Johnson: Existence theorems for plasticity problems. J. Math. Pures Appl. **55** (1976), 431–444

[34] C. Johnson: On plasticity with hardening. J. Math. Anal. Appl. **62** (1978), 325–336

[35] F. Klaus: Lokaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz für die Millerschen Gleichungen zur nichtlinearen Viskoelastizität mit Härtung. Dissertation, FB Mathematik, TH Darmstadt, 1994

[36] E. Kröner: Mikrostrukturmechanik. Mitt. Ges. Angew. Math. Mech. (1992), 104–119

[37] M. S. Kuczma, E. Stein: On nonconvex problems in the theory of plasticity. Extended lecture presented on the 6th Polish–German Symposium "Mechanics of inelastic solids and structures", 13.–17.09.1993, Czerniejewo, Poland. Erscheint in Arch. Mech. (Arch. Mech. Stos.) **4** (1994)

[38] P. Laborde: On visco–plasticity with hardening. Numer. Funct. Anal. Optimi. **1** (1979), 315–339

[39] P. Le Tallec: Numerical analysis of viscoelastic problems. Paris: Masson. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1990

[40] J. Lemaitre, J. L. Chaboche: Mécanique des matériaux solides. Paris: Dunod 1985

[41] R. C. MacCamy: A model for one–dimensional, nonlinear viscoelasticity. Quart. Appl. Math. **35** (1977), 21–33

[42] A. K. Miller: An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part 1 – Equations development and analytical procedures. Trans. ASME J. Engrg. Mat. Technol. **98** (1976), 97–105

[43] R. v. Mises: Mechanik der festen Körper im plastisch–deformablen Zustand. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. **1913** (1913), 582–592. (Selected papers of Richard von Mises I. Providence: American Mathematical Society 1963, pp. 189–199)

[44] J. J. Moreau: Application of convex analysis to the treatment of elastic–plastic systems. In: P. Germain, B. Nayroles (eds.): Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics. Lecture Notes in Math. **503**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976

[45] B. Nayroles: Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites. J. Méc. **9** (1970), 491–506

[46] J. Nečas, I. Hlaváček: Mathematical theory of elastic and elastico–plastic bodies: An introduction. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier 1981

[47] W. A. Noll: A mathematical theory for the mechanical behavior of continuous media. Arch. Rational Mech. Anal. **2** (1958/59), 197–226

[48] L. Prandtl: Anwendungsbeispiel zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. Z. Angew. Math. Mech. **3** (1923), 401–406. (Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer 1961, S. 113–121)

[49] L. Prandtl: Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924. (1925), 43–54 (Gesammelte Abhandlungen. Berlin: Springer 1961, S. 133–148)

[50] M. Renardy, W. J. Hrusa, J. A. Nohel: Mathematical problems in viscoelasticity. Harlow: Longman 1987

[51] A. Reuss: Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. Z. Angew. Math. Mech. **10** (1930), 266–274

[52] M. Růžička: Multipolar materials. In: H.–D. Alber, M. Fuchs (eds.): Workshop on the mathematical theory of nonlinear and inelastic material behaviour. Bonner Math. Schriften **239** (1993), 53–64

[53] E. Stein, P. Wriggers: "Computational Mechanics" bei Festkörpern und Ingenieurstrukturen unter Verwendung von Finite–Element–Methoden. Mitt. Ges. Angew. Math. Mech. (1989), 3–39

[54] P.-M. Suquet: Evolution problems for a class of dissipative materials. Quart. Appl. Math. **38** (1980/81), 391–414

[55] R. Temam: Problèmes mathématique en plasticité. Paris: Gauthier–Villars 1983

H.D. Alber
Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule Darmstadt
Schloßgartenstraße 7
64289 Darmstadt