TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Workshop
Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie granularer und metallischer Stukturen

Hans-Dieter Alber

Preprint Nr. 1952

November 1997

FACHBEREICH MATHEMATIK

D-64289 DARMSTADT, SCHLOSSGARTENSTRASSE 7

Workshop

"Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie granularer und metallischer Strukturen"

Wahlen, 10./11. September 1997

Vorwort

Ein wesentliches Ziel dieses Workshops war, die Zusammenarbeit zwischen Spezialisten aus den Ingenieurwissenschaften und Mathematikern zu fördern. Insbesondere sollten Mathematiker mit Problemen aus der kontinuumsmechanischen Theorie granularer Medien vertraut gemacht werden. Andererseits sollten auch neue Entwicklungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen diskutiert werden, sowohl um diese Theorie selbst zu fördern, als auch um die Anwendung neuer Ergebnisse und Methoden der Theorie partieller Differentialgleichungen auf Probleme der Kontinuumsmechanik voranzubringen.

Die Durchführung des Workshops wurde ermöglicht durch Unterstützung vom SFB 298 „Deformation und Versagen bei metallischen und granularen Strukturen".

H.-D. Alber

Vortragsprogramm

Mittwoch, 10. September 1997

13.00 – 13.30	*R. Leis:* Multikanalstreuung nichtlinearer Schrödingergleichungen
13.35 – 14.05	*K. J. Witsch:* Ein allgemeiner Zugang zur Niederfrequenzasymptotik in Außengebieten, erläutert am Beispiel der Helmholtzschen Schwingungsgleichung
14.10 – 14.40	*N. Weck:* Niederfrequenzasymptotik in Außengebieten für die verallgemeinerten Gleichungen der Elastizitätstheorie
14.45 – 15.15	*B. Peter:* Hoch- und Niederfrequenzasymptotik des Lösungsoperators und seiner Frequenzableitungen für das Dirichlet – Außenraumproblem in zwei Dimensionen zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung
15.50 – 16.20	K. *Chełmiński:* Coercive limits for a subclass of monotone constitutive equations in the theory of inelastic material behavior of metals.
16.25 – 16.55	*P. Gwiazda:* Existence and uniqueness theorems for the Chan–Bodner–Lindholm model
17.00 – 17.30	*St. Ebenfeld:* Vergleich der Schalentheorien im Sinne von Kirchhoff und Cosserat
17.35 – 18.05	*R. Balean:* Mathematische Methoden zur Untersuchung von Lawinen

Donnerstag, 11. September 1997

8.30 – 9.10	*K. Hutter:* Konstitutivgleichungen bei granularen Medien und ihre Anwendungen in Scherströmungen
9.15 – 9.55	*K. Wilmański:* Hyperbolische Feldgleichungen für poröse Medien
10.20 – 11.00	*B. Svendsen:* Kontinuumsthermodynamische Modelle für poröse und granulare Materialien
11.05 – 11.35	*H. Koch:* Instabile stationäre Lösungen der zweidimensionalen Eulergleichung für inkompressible Flüssigkeiten
11.40 – 12.10	*S. Noelle:* High order finite volume schemes for the two–dimensional compressible Euler equations
14.00 – 14.30	*Ch. Klingenberg:* Relaxationslimites bei Erhaltungssätzen
14.35 – 15.05	*Wen–An Yong:* Initial-boundary value problems of first–order hyperbolic systems with stiff source terms
15.10 – 15.30	*I. Jäpel:* Die nichtlinearen Gleichungen zur Hypoplastizität – das konstitutive Gesetz und die Bewegungsgleichungen
15.30 – 15.50	*R. Picard:* Force–free magnetic fields revisited
15.50 – 16.10	*R. Racke:* Exponentielle Stabilität bei thermoelastischen Anfangsrandwertaufgaben

Vortragszusammensfassungen

Multikanalstreuung nichtlinearer Schröderingergleichungen

ROLF LEIS

Universität Bonn

In den letzten Jahren ist eine ganze Reihe von Anfangsrandwertaufgaben zu nichtlinearen Gleichungen untersucht worden, und es ist gelungen, die Existenz bezüglich der Zeit globaler glatter Lösungen für kleine Anfangsdaten zu zeigen.

Im Vortrag behandelt werden Schröderingergleichungen der Form

$$i\partial_t u = Hu + \lambda |u|^2 u\,, \quad u(0) = u_0$$

mit

$$H = (i\nabla + A)^2 + V\,.$$

Dabei ist A das magnetische und V das elektrische Potential. Das Spektrum des linaeren Operators H besteht aus seinem stetigen Anteil auf der positiven reellen Achse und höchstens abzählbar unendlich vielen diskreten negativen Eigenwerten. Die Asymptotik der Eigenfunktionen ist völlig verschieden von der Asymptotik von $u_0 \in P_{ac}(H)$. Die Differentialgleichung besitzt verschiedene "Lösungskanäle". Hierin liegt die Schwierigkeit in der Themenstellung; der nichtlineare Term wünscht diese verschiedenen Asymptotiken.

Im Vortrag wird der einfache Fall zweier Kanäle, also der nur eines Eigenwertes, behandelt. Es gibt spezielle Kastenpotentiale, die auf ein H mit dieser Eigenschaft führen. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung wird ein "Solitonensatz" gemacht und ein Differentialgleichungssystem aufgestellt, für das die Existenz globaler glatter Lösungen bei kleinen Daten bewiesen werden kann.

Ein allgemeiner Zugang zur Niederfrequenzasymptotik in Außengebieten, erläutert am Beispiel der Helmholtzschen Schwingungsgleichung

K. J. WITSCH

Universität – GH – Essen

$G_\omega f$ bezeichne die Lösung eines Außenraumproblems zu

$$(\mathcal{L} - \omega^2)u = f\,, \qquad \text{Strahlungsbedingung an } u$$

mit einem stark elliptischen Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: &= -\Delta - \partial_i(L_{ij}\partial_j) + b\,, \\ \nabla b_{ij}, b_{ij}, b &= O(r^{-\tau})\,, \quad \tau > 1\,. \end{aligned}$$

Es sollen Entwicklungen gewonnen werden vom Typ ($\omega \to 0$)

$$\|G_\omega f - \sum_{k=0}^{K} \omega^{2k} G_0^{k+1} f - \sum_{m=0}^{2K} \omega^m \Gamma_m f\| \ldots \leq c\omega^{2K+\delta} \|f\| \ldots \qquad (*)$$

in gewissen gewichteten Normen. Die Ordnung, bis zu der man die Entwicklung treiben kann, hängt ab von einer Abfallrate für f, welche wiederum durch τ bestimmt ist. Es wird erläutert, wie die Potenzen G_0^k und die endlich–dimensionalen Korrekturoperatoren gewonnen werden. Insbesondere wird ein Raum ("Raum der regulären Konvergenz") ausgezeichnet, in dem Formel ($*$) mit $\Gamma_m f = 0$ gilt. Das Resultat erhält man schließlich mit einer Projektionstechnik.

Niederfrequenzasymptotik in Außengebieten für die verallgemeinerten Gleichungen der Elastizitätstheorie

N. WECK

Universität - GH - Essen

Identifiziert man den Verschiebungsvektor mit einer Differentialform vom Rang $q = 1$, so nimmt der "Lamé–Operator" $a\,$rot rot $-b\,$grad div die Form $\mathcal{E}_o := -a\,$div rot $-b\,$rot div an, wobei rot := d nun das Differential und div := $\pm * \mathrm{d} *$ das Co–Differential bezeichnet. Für Außenraumprobleme im $\mathbf{R}^N$ mit geeigneten Rand– und Strahlungsbedingungen zu $\mathcal{E}_o u + \mathcal{B}u - \omega^2 u = f$ kann eine Lösungstheorie in gewichteten L^2–Räumen (Grenzabsorption, Fredholmsche Alternative, polynomiales Abklingen der Eigenlösungen, keine Häufungspunkte der Eigenwerte) aufgebaut werden, und zwar bei beliebigen N und $q \in \{0, \ldots, N\}$ und auch, wenn die Störung $\mathcal{B}$ keinen kompakten Träger hat, sondern nur mit einer Rate abklingt. Für den Grenzübergang $\omega \to 0$ erhält man bei ungeradem N in gewichteten L^2–Räumen für den Lösungsoperator G_ω eine analoge Asymptotik

$$\left| G_\omega f - \sum_{k=0}^{K} \omega^{2k} G_0^{k+1} f - \sum_{j=1}^{2K} \omega^j \Gamma_j f \right| = |f|\, o(\omega^{2K}) \quad , \qquad (1)$$

wie sie von der Helmholtzschen Schwingungsgleichung bekannt ist. Dabei sind die Operatoren Γ_j endlich–dimensional und G_o geeignete Erweiterungen des Lösungsoperators für den statischen Fall. Insbesondere kann ein Raum $H_{s,reg}$ mitsamt einem endlich–dimensionalen Komplement explizit angegeben werden, so daß für $f \in H_{s,reg}$ die Entwicklung (1) ohne Korrekturoperatoren richtig ist. (Der Vortrag basiert auf "N. Weck + K. J. Witsch: *Generalized linear elasticity in exterior domains – I (radiation problems) ; – II (low frequency asymptotics)*, Math. Meth. Appl. Sci. , to appear".)

Hoch- und Nieder-Frequenzasymptotik des Lösungsoperators und seiner Frequenzableitungen zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung für ein Dirchlet-Außenraumproblem in zwei Dimensionen

Burkhard Peter

Universität - GH - Essen

Für ein glattes Außengebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ sei A die L^2-Realisierung von $-\Delta$ zu homogenen Dirichlet-Randdaten.
$G_\omega := (A - \omega^2)^{-1}$ ist als Resolventenabbildung für $\omega^2 \notin \sigma(A) = [0, \infty)$ ein wohldefinierter stetiger Operator und kann als L^2-Abbildung iteriert werden.
In gewissen gewichteten Sobolev-Räumen gilt das Prinzip der Grenzabsorption, d. h. für $\omega \in (0, \infty)$ existiert $\lim_{\varepsilon \to 0} G_{\omega + i\varepsilon}$ im starken Sinne und der Grenzwert ist eine bestimmte Strahlungslösung.

Es wird für $\omega \notin [0, \infty)$ die Gültigkeit einer Zerlegung

$$G_\omega^{k+1} = Z(G_\omega, \ldots, G_\omega^k) \tag{1}$$

gezeigt, bei der die Operatoren G_ω^j nur auf Terme angewendet werden, die in gewissen gewichteten Sobolevräumen liegen, in denen dann das Prinzip der Grenzabsorption auf die Iterierten G_ω^k und damit auf die Frequenzableitungen $\left(\frac{d}{d\omega}\right)^\ell G_\omega$ übertragen werden kann.

Setzt man an Ω eine „non-trapping"-Bedingung voraus, kann man mithilfe der Zerlegung (1) eine Asymptotik der Form

$$\left(\frac{d}{d\omega}\right)^\ell G_\omega f = \mathcal{O}(|\omega|^{-2}) \quad \text{für} \quad |\omega| \to \infty \tag{2}$$

herleiten, die in jenen oben erwähnten gewichteten Sobolev-Räumen Gültigkeit hat, sofern f noch einige Randbedingungen erfüllt.

Für die Asymptotik für kleine ω setzt man voraus, daß das G_ω bei 0 eine Neumann-Entwicklung bis zu einer gewissen Ordnung aufweist, was durch endlich viele Orthogonalitäts-Bedingungen an das f erreicht wird. Dann erhält man

$$\left(\frac{d}{d\omega}\right)^\ell G_\omega f = \mathcal{O}(|\ln(\omega)\omega|^{-1}) \quad \text{für} \quad \omega \to 0. \tag{3}$$

Zum Schluß ein Anwendungsbeispiel: Sei f derart, daß die Asymptotik (2) und (3) gilt. Sei weiter $u(t)$ die Lösung der Wellengleichung $(\partial_t^2 + A)u(t) = 0$ mit den Anfangswerten $u(0) = 0$, $u'(0) = f$.
$u(t)$ läßt sich als Fourier-Sinus-Transformierte von $G_\omega f - \overline{G_\omega f}$ bezüglich ω darstellen, und damit folgt aus der Differenzierbarkeitsordnung bezüglich ω eine entsprechende Asymptotik für große t.

Coercive limits for a subclass of monotone constitutive equations in the theory of inelastic material behaviour of metals

KRZYSZTOF CHEŁMIŃSKI

Darmstadt University of Technology

Systems of equations describing inelastic deformation of metals consist of partial differential equations resulting from mechanical balance laws and of a set of so called constitutive equations, which are always dependent of the material under consideration. One way to derive the constitutive relations is to assume that there exists a finite set of internal variables, whose evolution uniquely determine the state of the material. Therefore in the literature we find constitutive equations in the form of ordinary (often nonlinear) differential equations or differential inclusions for the internal variables. Thus we study here a linear system of partial differential equations coupled with a nonlinear system of ordinary differential equations (or general differential inclusions). Mathematical analysis of such systems of equations began in the seventies with works of J.J. Moreau, B. Halphen and Nguyen Quoc Son, and G. Duvant and J.L. Lions. Then the research was continued by many authors, for example P. Suquet, R. Temam, P. LeTallec. All the above mentioned authors deal with special constitutive equations or with a "small" class thereof. H.D. Alber in [1] was the first to try to classify constitutive equations applied in the theory of inelastic material behaviour of metals. The author defined the class of constitutive relations "of monotone type", for which the natural mathematical tool to study such equations is the theory of evolution equations for monotone operators. With the theory of H. Brezis [2] H.D. Alber proved existence and uniqueness of strong, global in time solutions for all constitutive equations of monotone type provided the coercivity assumption for the free energy function. However there are many examples of constitutive equations for which the above assumption fails. This is the starting point of this work. We describe here a subclass of constitutive equations of monotone type without the coercivity assumption, which we can approximate by coercive problems of monotone type.

Literature:

[1] H.-D. Alber: Initial-Boundary Value Problems for the Inelastic Material Behavior of Metals. Lecture Notes in Math. in preparation

[2] H. Brézis: Operateurs maximaux monotones. North Holland, Amsterdam, 1973

Existence and uniqueness theorem for the Chan-Bodner-Linholm model

PIOTR GWIAZDA

Warsaw University
Institute of Applied Mathematics and Mechanics

We shall consider the dynamic problem for a system of equations modelling the non-elastic deformation of metal. The model proposed by K.S. Chen, S.R. Bodner, U.S. Lindholm [3] is an extension of the Bodner-Partom model [2]. The extension is based on introducing directional hardening properties. All main results proved in this article are also true for the Bodner-Partom model (which is a special case of our model). To prove existence and uniqueness results we used the theory of monotone operators.

Literatur:

[1] Alber, H.D.: Initial-Boundary Value Problems for the Inelastic Material Behaviour of Metals

[2] Bodner, S.R., Partom, Y. : Constitutive Equations for Elastic–Viscoplastic Strain–Hardening Materials – J. of Appl Mech. p. 385-389, 1975

[3] Chan, K.S. Bodner, S.R. Lindholm, U.S.: Phenomenological Modeling of Hardening, and Thermal Recovery in Metals – J. of Engineering Materials and Technology JANUARY 1988, Vol. 110/1

[4] Gwiazda Piotr: Existence and uniqueness theorem for the Chan-Bodner-Linholm model (in preparation)

Vergleich der Schalentheorien im Sinne von Kirchhoff und Cosserat

Stefan Ebenfeld

Technische Universität Darmstadt

Wir untersuchen eine elastische Platte, welche sich in einem äußeren Kraftfeld befindet und an ihrem äußeren Rand eingespannt ist. Ausgehend von einer elastizitätstheoretischen Variationsformulierung des Problems verwenden wir einen bzgl. der Plattenhöhe 2ε linearisierten Ansatz für die Deformationsabbildung. Während die Anfangs– und Dirichlet–Randbedingungen der Elastizitätstheorie ebensolche Bedingungen für die Schalentheorie liefern, liefern die natürlichen oder Neumann–Randbedingungen der Elastizitätstheorie einen Satz von Nebenbedingungen für die Schalentheorie, welche den Direktor als Normaleneinheitsvektor der Plattenmittelfläche festlegen. Das Berücksichtigen bzw. Verwerfen dieser Nebenbedingungen legt die Klassifizierung als Schalentheorie im Sinne von Kirchhoff bzw. Cosserat fest. Für verschiedene physikalische Anordnungen des Systems zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, untersuchen die Existenz asymptotischer Entwicklungen bzgl. ε und vergleichen die Lösungen des Kirchhoff'schen und Cosserat'schen Schalenproblems im Limes $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Das Statische Problem. Wir untersuchen das Durchbiegen der Platte unter einer statischen, senkrechten Last proportional zu ε^2. Zunächst stellen wir fest, daß die Kirchhoff'sche Lösung unabhängig von ε ist. Die Cosserat'sche Lösung ist i.a. nicht in eine asymptotische Reihe bzgl. ε entwickelbar. Wenn die Kirchhoff'sche Lösung einer Zusatzbedingung genügt, welche z.B. für radialsymmetrische Anordnungen des Systems erfüllt ist, dann ist die Cosserat'sche Lösung ein Polynom in ε. In jedem Fall stimmen die Kirchhoff'sche und die Cosserat'sche Lösung im Limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ asymptotisch von der Ordnung ε überein.

Das Vereinfachte dynamische Problem. Wir untersuchen das freie Schwingen der Platte unter der vereinfachenden Annahme, daß die Schallgeschwindigkeit c in dem Material so groß ist, daß in den Gleichungen Terme der Ordnung ε^2 gegenüber solchen der Ordnung $\varepsilon^2 c^2$, 1 vernachlässigt werden können. Sowohl die Kirchhoff'sche als auch die Cosserat'sche Lösung können in eine asymptotische Reihe bzgl. ε entwickelt werden. Sie stimmen im Limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ asymptotisch von der Ordnung ε^4 überein.

Das dynamische Problem. Wir untersuchen das freie Schwingen der Platte, ohne vereinfachende Zusatzannahmen zu treffen. Die Kirchhoff'sche Lösung ist in eine asymptotische Reihe bzgl. ε entwickelbar, die Cosserat'sche Lösung i.a. nicht. Falls die Anfangsbedingungen einer Zusatzbedingung genügen, dann ist die Cosserat'sche Lösung unabhängig von ε. In jedem Fall stimmen die Kirchhoff'sche und die Cosserat'sche Lösung im Limes $\varepsilon \longrightarrow 0$ asymptotisch von der Ordnung ε überein.

Mathematical Modelling of Avalanches

R. Balean

Technische Universität Darmstadt

We consider a simplification of a 1-D Savage-Hutter model for granular avalanches (Savage & Hutter, J. Fluid. Mech. 199, pp. 177-215, 1989)

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \tfrac{1}{2}\beta h^2)_x &= hg(x,u) \\ h(0,x) &= h_0(x) \geq 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

where, $h = h(t,x)$ is the height of the avalanche, and $u = u(t,x)$ is the depth-averaged velocity. In this simplfied model, the pressure coefficient, β, is taken to be constant. the function g is at least Lipschitz continuous and has the form:

$$g(x,u) := \sin\zeta - s(u)\tan\delta\cos\zeta - \beta b'(x)$$

Here, ζ is the average slope angle, δ is the friction angle and $b = b(x)$ describes the fixed base. The function $s = s(u)$ is an approximation of the function $u/|u|$ appearing in the Savage-Hutter model.

We use recent results of Fang and Ito (PRS. Edin. 127A, 261-280, 1997) and of Lions, Perthame and Souganidis (CPAM, XLIX, 599-638, 1996), to prove the existence of an entropy solution of this system.

The method is based on vanishing viscosity and a compensated compactness argument. The basic steps are as follows:

1. Approximation by a parabolic system through the addition of small viscosity terms.
2. Local existence of classical solutions for this approximate system.
3. Derivation of *a priori* estimates to prove global existence and to establish the existence of a weak-$*$ convergent subsequence.
4. Entropy estimates to show that the requirements of the div-curl lemma are satisfied.
5. Reduction of the Young measure to a Dirac measure, and thus strong convergence of the approximate solutions to an entropy solution of the original system.

Konstitutivgleichungen bei granularen Medien und ihre Anwendungen in Scherströmungen

KOLUMBAN HUTTER

Institut für Mechanik,
Technische Universität Darmstadt

Es wird ein Überblick über das Materialverhalten von Kontinuun gegeben, welche aus einer großen Anzahl von Festkörperpartikeln bestehen und sowohl schneller als auch quasistatischer Deformation unterworfen sind. Fließen von relativ dichten Granulatpackungen wird studiert für Bedingungen bei denen das Gas oder Fluid, welches den Zwischenraum ausfüllt, keine Rolle spielt.

Ausgehend von viskometrischen Experimenten wird ein für Scherströmungen angesetztes Materialverhalten auf drei Dimensionen verallgemeinert. Anwenden der postulierten Konstitutivgleichungen auf "physikalisch vernünftige" Problemstellungen zwingt zu Verallgemeinerung der postulierten Gesetze. Dabei werden Methoden der phänomenlogischen Kontinuumsmechanik, aber auch der statistischen Mechanik eingesetzt, und es wird auch darauf eingegangen, daß Randbedingungen, die zur Lösung von Randwertproblemen angesetzt werden, mit zur physikalischen Modellbildung gehören und das mathematische Problem beeinflussen.

Die Problematik wird erläutert an der Formulierung der quasistatischen und dynamischen Spannungsanteile und der resultierenden Randwertprobleme.

Hyperbolische Feldgleichungen für poröse Medien

KRZYSZTOF WILMAŃSKI

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik
Berlin

Die Arbeit enthält die Analyse der Feldgleichungen, die die isothermen Vorgänge in zweikomponentigen porösen Körpern beschreiben. Es wird angenommen, daß man die folgenden Felder sucht:

$\rho_+^s(\underline{x}, t)$ – augenblickliche Massendichte des Skeletts
$\rho_+^F(\underline{x}, t)$ – augenblickliche Massendichte der Flüssigkeit
$\underline{v}^s(\underline{x}, t)$ – Geschwindigkeit des Skeletts
$\underline{v}^F(\underline{x}, t)$ – Geschwindigkeit der Flüssigkeit
$n(\underline{x}, t)$ – Porosität (Volumenanteil der Hohlräume).

Die Feldgleichungen folgen aus Bilanzgleichungen mit der Annahme, daß das Skelett elastisch ist, die Flüssigkeit barotrop ist und die Quellen lineare isotrope Funktionen der relativen Geschwindigkeit und der Abweichung der Porosität von dem Gleichgewichtswert sind.

Es wird gezeigt, daß die Hyperbolizität der Feldgleichungen die gewünschte Struktur der Schallwellen erzeugt. Es wird nämlich gezeigt, daß die sogenannte langsame longitudinale Welle ($P2$) existiert. Es wird bewiesen, daß wegen der nichtlinearen Form des

Stoffgesetzes für das Fluid die Existenzzeit der klassischen Lösungen endlich ist. Nach dieser Zeit breiten sich starke Diskontinuitäten (Stoßwellen) aus. Die Struktur dieser Wellen folgt aus verallgemeinerten Rankine – Hugoniot Bedingungen. Eine Ähnlichkeit dieser Bedingungen mit klassischen Bedingungen der Gasdynamik wurde deutlich gemacht. Die Lösungen konnten bis jetzt nicht konstruiert werden.

Kontinuumsthermodynamische Modelle für poröse und granulare Materialien

BOB SVENDSEN

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung,
Berlin

Als Kontinua sind Granulate oder poröse Materialien vor allem dadurch charakterisiert, daß jeder ihrer materiellen Punkte zusätzliche kinematische Freiheitsgrade gegenüber einem klassischen materiellen Punkt besitzt. Es soll gezeigt werden, daß diese zusätzlichen Freiheitsgrade sich als die Faser eines Faserbündels über dem klassischen Kontinuum darstellen lassen. Mit Hilfe dieses erweiterten Konzeptes eines materiellen Körpers werden Kinematik und Bilanzgleichungen für Granulate und poröse Materialien hergeleitet. Schließlich sollen die Einschränkungen der Evolutions- und Konstitutivgleichungen für solche Materialien, die aus dem zweiten Hauptsatz in der Form des MÜLLER-LIU-Entropieprinzips gewonnen werden, hergeleitet bzw. untersucht werden.

Instabile Lösungen der 2d–Eulergleichung für inkompressible Flüssigkeiten

HERBERT KOCH

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg,
Im Neuenheimer Feld 294, D–69120 Heidelberg, Germany

Die Eulergleichungen beschreiben inkompressible viskositätsfreie Flüssigkeiten. Das Verständnis ihrer Lösungen ist unter anderem wichtig für das Verständnis von Turbulenz. Es gibt sehr viele stationäre Lösungen. In meinem Vortrag habe ich gezeigt, dass diese stationären Lösungen instabil in $C^{1,\alpha}$ sind, falls sie einen hyperbolischen Fixpunkt haben. Der Beweis arbeitet direkt mit der nichtlinearen Gleichung, da die Abbildung der Anfangswerte auf die Lösung zur Zeit t nicht differenzierbar ist und damit Argumente wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht anwendbar sind.

High order finite volume schemes for multidimensional systems of conservation laws

SEBASTIAN NOELLE

Institute of Applied Mathematics,
Bonn University, Germany

In recent years, several new third and higher order accurate TVB- and MUSCL-type finite difference schemes for the numerical simulation of hyperbolic conservation laws have been proposed, see e.g. [1, 2, 3].. All authors mentioned above develop and test their schemes in the one-dimensional scalar context. In [4], the author has developed, implemented and tested a new third order accurate MUSCL-type finite volume scheme for the two-dimensional Euler equations of compressible fluid flow. Here we briefly summarize that development.

Let us sketch the buildingblocks of the third order scheme: In order to test the scheme in a well-defined context, we implement it on uniform cartesian and hexagonal grids. Hexagonal grids are the most isotropic grids in two space dimensions. The finite volume fluxes which leave a hexagonal cell across its sides influence all neighboring cells, while for a cartesian grid, the corner cells are neglected.

The next choice to be made is the coordinate frame in the space of dependent variables in which we want to perform the multi-dimensional reconstruction and limiting. We rule out characteristic variables, because they are based upon a one-dimensional diagonalization of the system. Conservative variables (ρ, m, n, e) (density, momentum and total energy) have the property that the discrete values U_K represent cell averages of the conserved quantities over cell K. This makes them natural candidates for higher than second order schemes, where the reconstruction is not piecewise linear anymore, and one has to distinguish carefully between cell averages and point values at the cell center. On the other hand, the primitive variables (ρ, u, v, p) have desirable properties as well: limiting the spatial reconstruction in these variables guarantees a nonnegative internal energy in the spatial reconstruction. Moreover, velocities and pressure remain constant across a contact discontinuity, while all components of the conservative variables have jumps across such waves.

We combine the advantages of conservative and primitive variables by the following procedure: In a first step, we derive a two-dimensional piecewise quadratic central reconstruction of the conservative variables based on given cell averages. From this, we obtain a reconstruction of the primitive variables by matching the coefficients of a quadratic expansion of these variables with those of the conservative variables. If, for example, quadratic reconstructions $\rho_K(x, y)$ and $m_K(x, y)$ of density and momentum are given, we define the quadratic reconstruction $u_K(x, y)$ of the velovity by prescribing that

$$\rho_K(x,y)\, u_K(x,y) = m_K(x,y) + O(|(x - x_K, y - y_K)|^2),$$

where (x_K, y_K) denotes the barycenter of cell K. This will lead to a third order accurate reconstruction in primitive variables.

In the next step, we limit this reconstruction. Let V_K be the vector of primitive variables corresponding to the cell averages U_K of the conservative variables, and suppose that $\tilde{\phi}_K(x, y)$ is a given quadratic reconstruction of the primitve variables over cell K. Then the limited reconstruction is given by

$$\phi_K(x,y) := \alpha\,\tilde{\phi}_K(x,y) + (1-\alpha)\,V_K,$$

where $\alpha \in [0,1]$ is the largest number such that at all quadrature points $(x_l, y_l) \in \partial K$,

$$\min_{K'\cap K\neq\emptyset} V_{K'} \leq \phi_K(x_l,y_l) \leq \max_{K'\cap K\neq\emptyset} V_{K'}$$

holds componentwise. This limiting procedure is inherently multidimensional. It does not enforce any monotonicity constraints on the reconstruction, and the piecewise quadratic reconstruction is allowed to possess extrema in the interior of the cell K. It is remarkable that such a weak form of a limiter leads to a stable scheme even in the presence of strong shocks.

In order to obtain accuracy in time, we extrapolate the spatial reconstruction over each cell using the differential equation. For problems involving strong shocks, this should be done locally at a quadrature point in order to avoid nonphysical values. In our experience, time-extrapolation yields faster codes and more accurate results than a Runge-Kutta timestep iteration. The scheme is completed by applying an approximate Riemann solver at the quadrature points, using two-point Gaussian quadrature both in space and time.

In the following, we present a detailed comparison of the new third order schemes on cartesian and hexagonal grids with corresponding standard second order schemes. We begin with a plane sine wave travelling obliquely across the two-dimensional grids. The experimental orders of convergence (EOC) converge neatly towards 3.0 for the unlimited third order scheme both in L^1- and L^∞-norms. The convergence rate is slightly better for the hexagonal than for the cartesian grid. The EOC's for the unlimited second order schemes are as high as 2.7 for the coarsest grids, and drop slowly towards 2.0 as the grid is refined. In order to come to a practical conclusion, we compare the efficiency of the schemes as follows: given schemes A and B, we define the relative efficiency of the two schemes by

$$\mathcal{E} := \frac{cpu(B,h_*)}{cpu(A,h)}$$

where $cpu(A,h)$ is the CPU-time of scheme A on a grid with size h, h_* is the grid size on which scheme B obtains the same error as scheme A does with grid size h, and $cpu(B,h_*)$ is the respective CPU-time for scheme B. The break-even point is reached when $\mathcal{E} = 1$. It turns out that even though the unlimited third order schemes always give smaller errors than the unlimited second order schemes, they only become more efficient on very fine grids of about 160 points per period of the sine wave. For these grids, the error is already of order 10^{-6}. The limited third order schemes are less efficient than the limited second order schemes even on our finest grids.

The next problem involves Lax' shocktube, computed in various directions obliquely to the grids. All schemes give satisfactory oscillation-free results. The EOC's in the L^1-norm are about 0.8 in the density and about 1.0 in velocity and pressure. The errors are of the same order of magnitude for the third and second order schemes on cartesian and hexagonal grids, since they are dominated by the error in the discontinuity. We also study the local L^1-errors in regions of smooth flow (and define a general procedure how to determine these regions automatically). The EOC's are now between 1.5 and 1.7 for the density and between 1.9 and 2.3 for velocity and pressure, indicating the high order of accuracy of the schemes. However, the third order schemes do not perform significantly better than the second order ones, and neither do those on hexagonal grids when compared to schemes on cartesian grids.

We go on to more challenging test problems. For a radially symmetric strong blast wave which was used by LeVeque and Walder, the four schemes produce almost perfectly radially symmetric solutions (in this case the schemes on hexagonal grids are somewhat superior). We carefully evaluate global and local L^1-errors by comparing the two-dimensional solutions with that of a resolved one-dimensional calculation. Again, the schemes produce comparable errors. Finally, we test the schemes on Colella and Woodward's double mach reflection problem. They all do well, but the second order scheme on the cartesian grid is the fastest.

The simple and sobering conclusion drawn from all of these test calculations is that even though the third order schemes often give somewhat smaller errors, they are not as efficient as the corresponding second order schemes. Similarly, hexagonal grids are rarely superior to cartesian ones. These results cast a serious doubt on the future of higher than second order multi-dimensional MUSCL-type finite difference and finite volume schemes, which were so strongly advocated by several authors who developed them in the one-dimensional context.

Literatur:

[1] R. Sanders, *A third-order accurate variation nonexpansive difference scheme for single nonlinear conservation laws.* Math. Comp. 51 (1988), 535–558.
[2] B.P. Leonard, *The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection.* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 88 (1991), 17–74.
[3] X.-D. Liu and S. Osher, *Nonoscillatory high order accurate self-similar maximum principle satisfying shock capturing schemes I.* SIAM J. Numer. Anal. 33 (1996), 760–779.
[4] S. Noelle, *High order finite volume schemes for the two-dimensional compressible Euler equations.* Habilitationsschrift, Universität Bonn, Germany (1997).

Relaxationslimites bei Erhaltungssätzen

Christian Klingenberg

Institut für angewandte Mathematik
Universität Würzburg

Verbrennungsmodelle werden durch Erhaltungssätze mit steifen Relaxationstermen modelliert. Um deren numerische Simulation möglich zu machen, werden diese großen Systeme durch partielle Relaxation in einem Gleichgewichtszustand approximiert. Dies ergibt kleinere Systeme von Erhaltungssätzen zusammen mit Einschränkungen an die möglichen abhängigen Variablen. In einer Serie von Arbeiten [1], [2], [3] haben wir anhand von Modellproblemen Erhaltungsgleichungen mit Relaxationstermen untersucht. Wir bewiesen die Konvergenz der Lösung des vollen Systems zu der des reduzierten Systems.

Literatur:

[1] Klingenberg, Lu, Cauchy problem for hyperbolic conservation laws with relaxation term, Proc. Roy. Soc. Edinb, Series A, Vol 126 (1996)

[2] Klingenberg, Lu, The Cauchy problem for hyperbolic conservation laws with three

equations, J. Math. Anal. Appl., Vol. 202 (1996)

[3] Lu, Klingenberg, The relaxation limit for systems of Broadwell type, to appear in Differential and Integral Equations

Boundary Conditions for Hyperbolic Conservation Laws with Relaxation

WEN-AN YONG

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 294
69120 Heidelberg, Germany
yong@esprit.iwr.uni-heidelberg.de

Keywords: Hyperbolic relaxation problems, boundary conditions, Kreiss conditions, asymptotic expansions, stability manifolds

AMS classification: Primary 35L50; Secondary 35B25.

This work deals with initial-boundary value problems (henceforth, IBVPs) for general multi-dimensional hyperbolic conservation laws with relaxation. It is observed that usual relaxation stability conditions and the uniform Kreiss condition are not enough for the existence of the zero relaxation limit. To remedy this, we propose a so-called *generalized Kreiss condition* for the boundary conditions for the relaxation systems to be satisfied. This generalized Kreiss condition is an extension of the uniform Kreiss condition for usual hyperbolic IBVPs.

Assume the relaxation system admits a certain structural stability condition and the prescribed boundary conditions satisfy the generalized Kreiss condition. Then the solution to the relaxation IBVP admits a formal asymptotic expansion. Moreover, the leading term of the outer expansion solves the corresponding equilibrium system with a certain *reduced bounday condition* compatible in the sense of Kreiss. In the regime of smooth solutions, the validity of the expansions can be partly, but not completely due to nonlinear relaxation boundary-layers, justified under a certain stability condition and the assumption that the boundary condition is *weakly reflective*. It is shown that a weakly reflective boundary condition satisfies the generalized Kreiss condition.

The results could be used as theoretical criteria to construct relaxation approximations for IBVPs of conservation laws, which are of pratical interest.

Die nichtlinearen Gleichungen zur Hypoplastizität – das konstitutive Gesetz und die Bewegungsgleichungen

IRG JÄPEL

Technische Universität Darmstadt

Das Konzept der Hypoplastizität dient der Beschreibung des Deformationsverhaltens von Materialien mit granularer Struktur wie beispielsweise Sand oder Erde. Die Konstitutivgleichungen sind hierbei in einer einfachen geschlossenen Form gegeben: $\overset{\circ}{T} = H(D,T)$. Hierbei bezeichne D den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten, T den Cauchy'schen Spannungstensor und $\overset{\circ}{T}$ dessen Jaumann–Ableitung. Die Abbildung H : $\mathcal{S}^3 \times \mathcal{S}^3 \to \mathcal{S}^3$ soll im ersten Argument nichtlinear sein, aber idealerweise homogen ersten Grades, um ein ratenunabhängiges Modell zu liefern.

In Verbindung mit der Impulsbilanzgleichung $v_t = \mathrm{div_x T}$ führt Differentiation nach t auf ein nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die aufgrund der Nichtlinearität auftretenden mathematischen Schwierigkeiten bei der Herleitung einer Existenztheorie legen es nahe, zunächst ein vereinfachtes ein–dimensionales Problem zu studieren. Dieses werde mit Anfangs– und Randdaten versehen. Es zeigt sich, daß für dieses Problem eine lokale klassische Lösung als Grenzwert von Lösungen geeigneter strikt hyperbolischer Probleme konstruiert werden kann. Diese Hilfsprobleme werden auf der Basis des lokalen Existenzsatzes von Friedrichs gelöst.

Force–Free Magnetic Fields – Revisited

R. PICARD

Technische Universität Dresden

The investigation of magnetic fields wich vanishing Lorentz force in magnetically nonpolarisable matter – so-called force-free magnetic field $\mathcal{H}$ – leads to an eigenvalue problem of the form

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathrm{curl}\,\mathcal{H} - a\mathcal{H} & = & 0, \quad a \in C, \quad \text{in} \quad \Omega \\ n \cdot \mathrm{curl}\,\mathcal{H} & = & 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{array}}$$

After formulating this problem in a suitable Hilbert space setting it turns out that in domains with topological genus 1 or higher it has spectrum evererywhere. The condition of orthogonality of curl $\mathcal{H}$ to the Hilbert space of **harmonic Neumann vector fields**, however, turns this problem into an eigenvalue problem for a selfadjoint realization curl_* of curl. Under mild assumptions it can be seen that for bounded domains curl_* has only discrete spectrum except for $\alpha = 0$ and that a complete orthonormal system of force-free magnetic fields exists. Some applications of this fact and extensions of the result are discussed.

Exponentielle Stabilität bei thermoelastischen Kontaktproblemen

Reinhard Racke

Universität Konstanz

Wir betrachten dynamische und quasistatische Kontaktprobleme im $\mathbb{R}^n$ für einen wärmeleitenden, elastischen Körper in der Nähe eines Hindernisses. Es werden Resultate zur Existenz und zur exponentiellen Stabilität von Lösungen vorgestellt. Aus der nachstehenden gemeinsamen Arbeit mit J. E. Muñoz Rivera.)

Literatur:

Muñoz Rivera, J. E., Racke, R.: Multidimensional contact problems in thermoelasticity. Erscheint in SIAM J. Appl. Math.

Teilnehmerliste

1. Prof. Dr. H. D. Alber
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

2. Dr. R. Balean
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

3. Dr. K. Chelminski
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

4. St. Ebenfeld
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

5. Prof. Dr. R. Farwig
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

6. M. Franzke
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

7. P. Gwiazda
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

8. Prof. Dr. K. Hutter
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mechanik

9. Dr. I. Jäpel
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

10. Prof. Dr. Ch. Klingenberg
Universität Würzburg
Inst. f. Angew. Mathematik u. Statistik

11. Dr. H. Koch
Universität Heidelberg
Inst. f. Angew. Mathematik

12. Prof. Dr. R. Leis
Universität Bonn
Inst. f. Angew. Mathematik

13. Prof. Dr. O. Liess
Universita di Bologna
Dipart. d. Matematica

14. Dr. K. Mihalincic
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

15. P. Neff
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

16. Dr. N. Neuss
Universität Heidelberg
Inst. f. Angew. Mathematik

17. Dr. S. Noelle
Universität Bonn
Inst. f. Angew. Mathematik

18. B. Peter
Universität - GH - Essen
Fachbereich Mathematik

19. Prof. Dr. R. Picard
Techn. Universität Dresden
Institut f. Analysis

20. Prof. Dr. R. Racke
Universität Konstanz
Fakultät f. Mathematik u. Informatik

21. Dr. K. Rottbrand
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik

22. Dr. B. Schweizer
Universität Heidelberg
Institut f. Angew. Mathematik

23. Dr. J. Starke
Universität Heidelberg
Institut f. Angew. Mathematik

24. Dr. B. Svendsen
Bundesanstalt f. Materialforschung
und -prüfung, Berlin

25. Prof. Dr. N. Weck
Universität - GH - Essen
FB Mathematik u. Informatik

26. Prof. Dr. Ch. Wilmánski
Weierstrass–Institut f. Angew.
Analysis u. Stochastik, Berlin

27. Prof. Dr. K. J. Witsch
Universität - GH - Essen
FB Mathematik u. Informatik

28. Dr. Wen – An Yong
Universität Heidelberg
Institut f. Angew. Mathematik

29. I. Zahn
Techn. Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik