Terminologische Merkmalslogik in der Formalen Begriffsanalyse

Susanne Prediger

Erscheint in: G. Stumme / R. Wille (ed.): Begriffliche Wissensverarbeitung.
Methoden und Anwendungen, Springer Berlin 1998

Inhalt

1. Einleitung

In den letzten Jahren gab es immer wieder Anstöße, logische Sprachelemente in die *Formale Begriffsanalyse* einzuführen. Vor allem bei den Aktivitäten im Bereich der begrifflichen Wissensverarbeitung entstand zunehmend das Bedürfnis nach formal-logischen Ausdrucksmitteln. Den Anlaß, eine logische Sprache für die Formale Begriffsanalyse zu entwerfen, lieferte das Vorhaben, die von Edwin Diday entwickelte *Symbolische Datenanalyse* in engere Verbindung zur Formalen Begriffsanalyse zu bringen (vgl. [Pre96]). Dieser Anlaß legte nahe, eine Merkmalslogik mit extensionaler Semantik bereitzustellen.
Die eingeführte Sprache lehnt sich eng an die logischen Formalismen terminologischer Systeme an, wie sie im Bereich der Wissensrepräsentation entwickelt und in verschiedenen Varianten unter dem gemeinsamen Namen *terminologische Logik* (engl.: *description logics*) umgesetzt worden sind (vgl. [Ne90]). Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene Merkmalslogik orientiert sich an einer als $\mathcal{ALC}$ bezeichneten terminologischen Sprache, die erstmals in [SS91] vorgestellt wurde. Sie entspricht ihr allerdings nicht in jedem Detail, da es galt, sie den Anforderungen der Formalen Begriffsanalyse anzupassen.
Die Sprache der terminologischen Merkmalslogik wird sowohl für einwertige als auch für mehrwertige Kontexte entwickelt, wobei zusätzlich binäre Relationen auf den Gegenstandsmengen der Kontexte berücksichtigt werden können. Die Sprachen der Merkmalslogik sind so angelegt, daß für einen mehrwertigen Kontext dieselben Extensionen beschreibbar sind wie für seine einwertige nominale Ableitung. Einen besonderen Gewinn der Merkmalslogik stellt die *logische Skalierung* als vielseitig verwendbare Alternative der

begrifflichen Skalierung mehrwertiger Kontexte dar, bei der sogenannte *Terminologien* die Ableitung einwertiger Kontexte aus mehrwertigen Kontexten bestimmen.
Es wird darauf verzichtet, die benötigten Grundlagen der Formalen Begriffsanalyse in dieser Arbeit zu erläutern. Stattdessen sei für alle grundlegenden Definitionen und Resultate der Formalen Begriffsanalyse auf die ersten Kapitel des Lehrbuchs [GW96] verwiesen.

2. Die Sprache der terminologischen Merkmalslogik

Die Sprache der extensionalen terminologischen Merkmalslogik besteht aus einer Syntax der Merkmale, in der die Merkmale als einstellige Prädikate aufgefaßt werden, und einer Semantik, die durch eine extensionale Interpretation in einem relationalen Kontext erklärt ist. In Anlehnung an [Pri96] wird ein relationaler Kontext wie folgt definiert:

Definition 1. *Ein formaler Kontext (G, M, I) zusammen mit einer Familie $\mathfrak{R}$ von (zweistelligen) Relationen $R \subseteq G \times G$ auf der Gegenstandsmenge wird (binär-) relationaler Kontext genannt und mit $((G, \mathcal{R}), M, I)$ bezeichnet.*

Da in dieser Arbeit ausschließlich zweistellige Relationen betrachtet werden, wird im folgenden schlicht von relationalen Kontexten gesprochen. Weiterhin sei betont, daß in der ganzen Arbeit davon ausgegangen wird, daß die Gegenstands- und Merkmalsmengen stets endlich sind.
Durch die relationalen Kontexte wird ein Beschreibungsmittel bereitgestellt, mit dem nicht nur Beziehungen von Merkmalen und Gegenständen, sondern auch Zusammenhänge zwischen den Gegenständen formalisiert werden können. Die in der Formalen Begriffsanalyse üblichen formalen Kontexte (G, M, I) können wir als Sonderfälle der relationalen Kontexte mit leerer Relationenmenge $\mathcal{R}$ verstehen.
Ausgehend von der Definition eines relationalen Kontextes kann nun die Sprache der *terminologischen Merkmalslogik* eingeführt werden. Sie soll dazu dienen, aus einer gegebenen Menge von Merkmalen und Relationen weitere Merkmale zu konstruieren, wie im 3. Abschnitt genauer erläutert wird. Dazu werden zunächst das Alphabet der Sprache (Definition 2) und die zulässigen Wörter, die sogenannten Relations- und Merkmalsterme, definiert (Definition 3). Die Interpretation der Relations- und Merkmalsterme ergibt sich als Fortsetzung der Interpretation von Merkmals- und Relationsnamen in einem relationalen Kontext (Definition 4 und 5).
Sind Syntax und Semantik der Sprache der terminologischen Merkmalslogik bestimmt, wird durch die sogenannte Terminologie ein Sprachmittel geschaffen, um Merkmalsnamen durch gewisse Merkmalsterme zu beschreiben (Definition 8). Ein Beispiel für die Verwendung der eingeführten Sprache wird schließlich im 3. Abschnitt diskutiert.

Definition 2. *Das Alphabet* $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ *der terminologischen Merkmalslogik setzt sich zusammen aus:*

- *einer Menge* M *von Merkmalsnamen,*
- *einer Menge* $\mathcal{R}$ *von Relationsnamen,*
- *den Zeichen* $id,\ ^c,\ ^d, \top, \bot, \neg, \bigwedge, \bigvee, \exists, \forall$.

Mit diesem Alphabet bilden wir unsere Sprache, deren Wörter mit bestimmten, nicht im Alphabet aufgeführten Hilfszeichen wie Klammern, Punkten und Indizierungen wie „$k \in K$“ für endliche Indexmengen K geschrieben werden.

Definition 3. *Die Menge* $\mathcal{S}_\mathcal{R}$ *der Relationsterme und die Menge* $\mathcal{S}_M$ *der Merkmalsterme werden rekursiv durch folgende Regeln konstruiert:*

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{R}$
- $id \in \mathcal{S}_\mathcal{R}$
- $R \in \mathcal{S}_\mathcal{R} \;\Rightarrow\; R^c, R^d \in \mathcal{S}_\mathcal{R}$

- $M \subseteq \mathcal{S}_M$
- $\top, \bot \in \mathcal{S}_M$
- $t \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; \neg t \in \mathcal{S}_M$
- *für alle* $k \in K: \quad t_k \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; \bigvee_{k \in K} t_k,\ \bigwedge_{k \in K} t_k \in \mathcal{S}_M$
- $t \in \mathcal{S}_M,\ R \in \mathcal{S}_\mathcal{R} \;\Rightarrow\; \exists R.t,\ \forall R.t \in \mathcal{S}_M$

Die formale Sprache $\mathcal{S}$ *der terminologischen Merkmalslogik über dem Alphabet* $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ *besteht aus den Mengen* $\mathcal{S}_M$ *und* $\mathcal{S}_\mathcal{R}$.

Es sei hier explizit darauf hingewiesen, daß die Merkmalsterme $\exists R.t$ und $\forall R.t$ im Gegensatz zu dem in der klassischen Prädikatenlogik üblichen Gebrauch nicht als Formeln, sondern als einstellige Prädikate aufgefaßt werden.
Eine extensionale Semantik dieser Sprache erhält man durch die extensionale Interpretation i der Merkmals- und Relationsnamen in einem relationalen Kontext:

Definition 4. *Sei* $\mathcal{S}$ *die formale Sprache über dem Alphabet* $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$*,* $\mathbb{K} := ((G_\mathbb{K}, \mathcal{R}_\mathbb{K}), M_\mathbb{K}, I_\mathbb{K})$ *ein relationaler Kontext und*

$$\overline{}\colon M \,\dot\cup\, \mathcal{R} \to M_\mathbb{K} \,\dot\cup\, \mathcal{R}_\mathbb{K}$$

eine Abbildung, die jedem Relationsnamen R *eine zweistellige Relation* $\overline{R}$ *und jedem Merkmalsnamen* m *ein Merkmal* $\overline{m}$ *zuordnet. Dann heißt die Abbildung*

$$\begin{array}{rlll} i\colon & M \,\dot\cup\, \mathcal{R} & \to & \mathfrak{P}(G_\mathbb{K}) \,\dot\cup\, \mathcal{R}_\mathbb{K} \\ & R & \mapsto & \overline{R} \\ & m & \mapsto & \overline{m}^{I_\mathbb{K}} = \{g \in G_\mathbb{K} \mid (g, \overline{m}) \in I_\mathbb{K}\} \end{array}$$

eine extensionale Interpretation der Merkmals- und Relationsnamen der formalen Sprache $\mathcal{S}$ *im Kontext* $\mathbb{K}$.

Wir werden also die Semantik der terminologischen Merkmalslogik auf eine rein extensionale Semantik beschränken: Als Interpretation eines Merkmalsnamens m betrachten wir nicht sein Bild unter der Abbildung $\overline{\cdot}$, also ein Merkmal $\overline{m}$, sondern den Merkmalsumfang von $\overline{m}$. Die extensionale Interpretation i einer Menge M von Merkmalsnamen erhält man somit durch die Verknüpfung einer nicht extensionalen Interpretation $m \mapsto \overline{m}$ mit dem Ableitungsoperator $\overline{m} \mapsto \overline{m}^{I_{\mathbb{K}}}$, der jedem Merkmal $\overline{m}$ seine Extension im Kontext $\mathbb{K}$ zuordnet. Diese Verkürzung auf eine extensionale Interpretation ist in der terminologischen Logik üblich und erweist sich auch für die hier angestrebten Ziele als zweckmäßig.
Hat man eine extensionale Interpretation i der Merkmals- und Relationsnamen in einem relationalen Kontext gegeben, so erhält man die extensionale Semantik der Merkmals- und Relationsterme durch die folgende Fortsetzung von i:

Definition 5. *Ist i eine Interpretation der Merkmals- und Relationsnamen der formalen Sprache $\mathcal{S}$ im relationalen Kontext $\mathbb{K} := ((G_{\mathbb{K}}, \mathcal{R}_{\mathbb{K}}), M_{\mathbb{K}}, I_{\mathbb{K}})$, dann ist die extensionale Interpretation der formalen Sprache $\mathcal{S}$ die Fortsetzung*

$$\{\!\![\ ]\!\!\}_i\colon\ \mathcal{S} \ \to\ \mathfrak{P}(G_{\mathbb{K}}) \,\dot{\cup}\, \mathfrak{P}(G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}})$$

von i auf $\mathcal{S}$, die rekursiv definiert ist durch:

$$\begin{array}{lll}
\{\!\![R]\!\!\}_i & := & i(R) \qquad \textit{für } R \in \mathcal{R} \\
\{\!\![id]\!\!\}_i & := & \{(g,g) \mid g \in G_{\mathbb{K}}\} \\
\{\!\![R^d]\!\!\}_i & := & \{(g,h) \mid (h,g) \in \{\!\![R]\!\!\}_i\} \\
\{\!\![R^c]\!\!\}_i & := & (G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}}) \setminus \{\!\![R]\!\!\}_i \\
 & & \\
\{\!\![m]\!\!\}_i & := & i(m) \qquad \textit{für } m \in M \\
\{\!\![\top]\!\!\}_i & := & G_{\mathbb{K}} \\
\{\!\![\bot]\!\!\}_i & := & \emptyset \\
\{\!\![\neg\, t]\!\!\}_i & := & G_{\mathbb{K}} \setminus \{\!\![t]\!\!\}_i \\
\{\!\![\bigwedge_{k\in K} t_k]\!\!\}_i & := & \bigcap_{k\in K} \{\!\![t_k]\!\!\}_i \\
\{\!\![\bigvee_{k\in K} t_k]\!\!\}_i & := & \bigcup_{k\in K} \{\!\![t_k]\!\!\}_i \\
\{\!\![\exists R.t]\!\!\}_i & := & \{g \in G_{\mathbb{K}} \mid \exists\, h \in \{\!\![t]\!\!\}_i\colon (g,h) \in \{\!\![R]\!\!\}_i\} \\
\{\!\![\forall R.t]\!\!\}_i & := & \{g \in G_{\mathbb{K}} \mid \forall h \in G_{\mathbb{K}} : (g,h) \in \{\!\![R]\!\!\}_i \Rightarrow h \in \{\!\![t]\!\!\}_i\}
\end{array}$$

Falls der Bezug auf die jeweilige Interpretation i durch den Zusammenhang eindeutig ist, wird im folgenden zuweilen auch $\{\!\![t]\!\!\}$ statt $\{\!\![t]\!\!\}_i$ geschrieben.
Damit sind Syntax und Semantik der Sprache der extensionalen terminologischen Merkmalslogik festgelegt. Um sie für die Formale Begriffsanalyse fruchtbar zu machen, sind weitere Elemente der terminologischen Logik von Bedeutung, insbesondere die sogenannten terminologischen Axiome, mit denen Merkmalsnamen Merkmalsterme zugeordnet werden können. Eine endliche, zyklenfreie Menge solcher terminologischer Axiome wird in der termino-

logischen Logik eine Terminologie oder T-Box genannt (vgl. [Ne90]). Es soll zunächst definiert werden, wann wir eine Zuordnung zyklenfrei nennen:

Definition 6. *Sei $\nu : M \to \mathcal{S}_M$ eine partielle Abbildung. Der Merkmalsname $m_1 \in M$ benutzt direkt den Merkmalsnamen $m_2 \in M$, wenn m_2 im zugeordneten Merkmalsterm $\nu(m_1)$ vorkommt. Der Merkmalsname $m_1 \in M$ benutzt den Merkmalsnamen $m_n \in M$, wenn es eine Kette $m_1, m_2, \ldots, m_n$ von Merkmalsnamen gibt, so daß für jedes $k \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$ der Merkmalsname m_{k+1} den Merkmalsnamen m_k direkt benutzt.*
Die partielle Abbildung ν heißt zyklenfrei, wenn kein Merkmalsnname sich selbst benutzt.

Nun können wir den Begriff der Terminologie in Anpassung an die Bedürfnisse der Formalen Begriffsanalyse so definieren, daß die durch Merkmalsterme beschriebenen Merkmalsnamen explizit mit ausgewiesen werden:

Definition 7. *Als Terminologie bezeichnet man das Tupel $(\widetilde{M}, \nu)$, wobei ν: $M \to \mathcal{S}_M$ eine zyklenfreie partielle Abbildung ist und $\widetilde{M} := \nu^{-1}(\mathcal{S}_M)$.*
Die Menge $M_p := M \backslash \widetilde{M}$ nennt man die Menge der **primitiven Merkmalsnamen der Terminologie** *$(\widetilde{M}, \nu)$.*

Zwar werden Terminologien rein in der Syntax definiert, doch will man in der Praxis oft die Semantik mit einbeziehen. Dann wird man in einer Terminologie nicht beliebige Zuordnungen von Merkmalsnamen und Merkmalstermen treffen wollen, sondern einem Merkmalsnamen nur dann einen Merkmalsterm zuordnen, wenn beide die gleiche extensionale Interpretation haben. Dies wird durch die Eigenschaft der Konsistenz erfaßt:

Definition 8. *Die Terminologie $(\widetilde{M}, \nu)$ heißt konsistent bzgl. einer Interpretation i, wenn für jedes $m \in \widetilde{M}$ die Gleichheit $\llbracket m \rrbracket_i = \llbracket \nu(m) \rrbracket_i$ gilt.*

Eine solche Terminologie zeigt das Beispiel in Abb. 1, das in etwas abgewandelter Form aus [Ba92] entnommen ist. Ausgehend von einer Menge

$$M := \{\mathsf{Mensch}, \mathsf{Frau}, \mathsf{Mann}, \mathsf{Mutter}, \mathsf{Vater}, \mathsf{Elternteil}, \mathsf{Mutter\text{-}ohne\text{-}Tochter}, \mathsf{Großmutter}, \mathsf{Ehefrau}\}$$

von Merkmalsnamen und einer Menge $\mathcal{R} := \{\mathsf{hat\text{-}Kind}, \mathsf{verheiratet}\}$ von Relationsnamen, wird darin eine Terminologie aus dem Bereich der Familienbeziehungen definiert. Man überzeugt sich leicht, daß für die Beschreibung aller Merkmalsterme dieser Terminologie lediglich zwei primitive Merkmalsnamen benutzt werden, nämlich Frau und Mensch. Alle anderen Merkmalsterme werden letztlich mit diesen beiden konstruiert.

Das Aufstellen einer Terminologie kann in der Merkmalslogik verschiedene Funktionen erfüllen: Ganz direkt dient sie dazu, Merkmalsterme durch Merkmalsnamen zu benennen bzw. Merkmalsnamen durch Merkmalsterme zu beschreiben. Darüber hinaus erfüllt sie aber auch die ausgesprochen wichtige

Mann $\mapsto$ ¬ Frau ∧ Mensch
Mutter $\mapsto$ Frau ∧ ∃ hat-Kind.Mensch
Vater $\mapsto$ Mann ∧ ∃ hat-Kind.Mensch
Elternteil $\mapsto$ Mutter ∨ Vater
Mutter-ohne-Tochter $\mapsto$ Mutter ∧ ∀ hat-Kind.Mann
Großmutter $\mapsto$ Mutter ∧ ∃ hat-Kind.Elternteil
Ehefrau $\mapsto$ Frau ∧ ∃ verheiratet.Mann

Abbildung 1 Beispielterminologie *Familie*

Funktion, die Menge aller Merkmalsterme über einem gegebenen Alphabet $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ auf diejenigen Merkmalsterme einzuschränken, die für die jeweilige Fragestellung relevant sind, denn mit anderen Merkmalstermen als den in der Terminologie angegebenen wird im weiteren nicht mehr gearbeitet.

Zuweilen dient eine Terminologie auch dazu, die relevanten Merkmalsterme schrittweise aus den primitiven Merkmalsnamen zu konstruieren und zur Abkürzung mit Merkmalsnamen zu versehen. So können wir in unserem Beispiel die Merkmalsnamen in vier Schritten aus den primitiven Merkmalsnamen der Menge $M_p :=\{\text{Frau, Mensch}\}$ konstruieren:

0. Schritt:	M_0	$:=$	M_p	$=$	$\{\text{Frau, Mensch}\}$
1. Schritt:	M_1	$:=$	M_0	$\cup$	$\{\text{Mann, Mutter}\}$
2. Schritt:	M_2	$:=$	M_1	$\cup$	$\{\text{Vater, Mutter-ohne-Tochter}\}$
3. Schritt:	M_3	$:=$	M_2	$\cup$	$\{\text{Elternteil}\}$
4. Schritt:	M_4	$:=$	M_3	$\cup$	$\{\text{Großmutter}\}$

Entsteht eine Terminologie auf diese Weise iterativ, so wird man im allgemeinen die Interpretation der neu eingeführten Merkmalsnamen erst nach Bestimmung der Terminologie festlegen und zwar so, daß diese konsistent ist. Dann definiert man zu einer für die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M_p,\mathcal{R}}$ gegebenen Interpretation i die Interpretation der Merkmalsnamen der formalen Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ sukzessive durch

$$\llbracket m \rrbracket := \llbracket \nu(m) \rrbracket.$$

Die Grundmenge M aller möglichen Merkmalsnamen kann so in den Hintergrund treten, und man kann, ohne M und die Interpretation seiner Elemente im voraus festzulegen, eine Menge $\widetilde{M}$ von Merkmalsnamen konstruieren, die dann, vereinigt mit M_p, als Grundmenge M gesetzt wird.
Somit können wir eine Menge M_p von primitiven Merkmalsnamen mit Hilfe einer Terminologie $(\widetilde{M}, \nu)$ zu einer Menge $\widetilde{M}$ sukzessive erweitern. Die Interpretation der Elemente von $\widetilde{M}$ ist dann durch ihre Konstruktion bestimmt.

3. Kontexterweiterung mit terminologischer Merkmalslogik

Da die Fragestellungen, unter denen die terminologische Logik im allgemeinen betrieben wird, etwas anders sind als in der Formalen Begriffsanalyse, soll nun explizit beschrieben werden, wie eine terminologische Merkmalslogik im Rahmen der Formalen Begriffsanalyse genutzt werden kann: Die Einführung der Sprache der terminologischen Merkmalslogik ermöglicht es, die Erweiterung eines gegebenen Kontextes durch bestimmte Verknüpfungen von Merkmalen zu beschreiben, denn man verfügt nun über eine Sprache, in der ausgedrückt werden kann, wie sich neue Merkmale aus alten zusammensetzen.
Im allgemeinen geht man also für die Verwendung der terminologischen Merkmalslogik von einem relationalen Kontext $\mathbb{K} := ((G_{\mathbb{K}}, \mathcal{R}_{\mathbb{K}}), M_{\mathbb{K}}, I_{\mathbb{K}})$ aus. Ihn gilt es zu erweitern, um die begriffliche Struktur des Kontextes durch Verknüpfungen von Merkmalen und ggf. Relationen anzureichern, die für die jeweilige Fragestellung an die Daten interessant sind.
Dazu betrachten wir die Merkmalsmenge $M_{\mathbb{K}}$ des Kontextes $\mathbb{K}$ als Menge der primitiven Merkmalsnamen, lassen also die Merkmale mit ihren Merkmalsnamen zusammenfallen und ebenso die Relationen aus $\mathcal{R}_{\mathbb{K}}$ mit ihren Relationsnamen. Naheliegenderweise definieren wir die Interpretation i der Merkmalsnamen aus $M_{\mathbb{K}}$ in dem relationalen Kontext $\mathbb{K}$ durch die Kontextrelation $I_{\mathbb{K}}$: Für jedes $m \in M_{\mathbb{K}}$ ist $i(m) := m^{I_{\mathbb{K}}}$. Ebenso setzen wir $i(R) := R$ für jede Relation $R \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}$.
Nun muß nach inhaltlichen Gesichtspunkten entschieden werden, welche weiteren Merkmale für die Fragestellung an die Ausgangsdaten interessant sein können. Diese werden in der Menge $\widetilde{M}$ zusammengefaßt. Anschließend gibt man an, wie sie sich aus den primitiven Merkmalsnamen zusammensetzen lassen. Dies geschieht durch Aufstellen einer Terminologie $(\widetilde{M}, \nu)$ mit $\nu\colon \widetilde{M} \to \mathcal{S}_M$, die als primitive Merkmalsnamen gerade die Elemente von $M_{\mathbb{K}} \subseteq M$ hat.
Die Menge $\widetilde{M}$ bildet nun die Merkmalsmenge des erweiterten Kontextes, dessen Relation durch die Interpretation $\{\!\!\{\ \}\!\!\}_i$ der zugeordneten Merkmalsterme

$\mathbb{K}$	Mensch	Frau
Elizabeth	×	×
Diana	×	×
Charles	×	
Andrew	×	
William	×	

$$
\begin{aligned}
\textsf{hat-Kind} &= \{(\text{Elizabeth, Charles}),\\
&\quad (\text{Elizabeth, Andrew}),\\
&\quad (\text{Diana, William}),\\
&\quad (\text{Charles,William})\}\\
\textsf{verheiratet} &= \{(\text{Charles, Diana}),\\
&\quad (\text{Diana, Charles})\}
\end{aligned}
$$

Abbildung 2 Relationaler Kontext *Königsfamilie*

$\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$	Mensch	Frau	Mann	Mutter	Vater	Elternteil	Mutter-ohne-Tochter	Großmutter	Ehefrau
Elizabeth	×	×		×		×	×	×	
Diana	×	×		×		×	×		×
Charles	×		×		×	×			
Andrew	×		×						
William	×		×						

Abbildung 3 Erweiterter Kontext *Königsfamilie* bzgl. der Terminologie *Familie*

eindeutig bestimmt ist. Wir sprechen dann von dem bzgl. der Terminologie $(\widetilde{M}, \nu)$ abgeleiteten Kontext:

Definition 9. *Sei* $\mathbb{K} := ((G_{\mathbb{K}}, \mathcal{R}_{\mathbb{K}}), M_{\mathbb{K}}, I_{\mathbb{K}})$, *ein relationaler Kontext und* $\mathcal{S}$ *die formale Sprache über dem Alphabet* $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}_{\mathbb{K}}}$ *mit* $M_{\mathbb{K}} \subseteq M$ *und extensionaler Interpretation* i *im Kontext* $\mathbb{K}$. *Ist* $\mathcal{T} := (\widetilde{M}, \nu)$ *eine bzgl.* i *konsistente Terminologie, deren primitive Merkmalsnamen aus* $M_{\mathbb{K}}$ *sind, so heißt der formale Kontext* $\mathbb{K}^{\mathcal{T}} := (G_{\mathbb{K}}, \widetilde{M}, E)$ *mit*

$$g\, E\, \widetilde{m} \;:\Longleftrightarrow\; g \in [\![\nu(\widetilde{m})]\!]_i$$

der bzgl. der Terminologie $\mathcal{T}$ *abgeleitete Kontext von* $\mathbb{K}$. *Ist* $\mathbb{K}$ *ein Teilkontext von* $\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$, *so heißt* $\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$ *auch der bzgl. der Terminologie erweiterte Kontext von* $\mathbb{K}$.

Als Beispiel für eine solche Kontexterweiterung soll hier das in [Ba92] vorgestellte Modell der englischen Königsfamilie (auf dem Stand von ca. 1990) aufgenommen werden: Abb. 2 zeigt den vorausgesetzten relationalen Kontext *Königsfamilie*, dessen Gegenstandsmenge aus einigen Mitgliedern des englischen Königshauses besteht, während die Merkmale und Relationen dem Beispiel aus Abb. 1 entnommen sind. Nun wird die Merkmalsmenge $M_{\mathbb{K}} :=$ {Mensch, Frau} auf die in der Terminologie *Familie* festgelegte Menge

$$\widetilde{M} := \{\textsf{Mensch, Frau, Mann, Mutter, Vater, Elternteil,} \\ \textsf{Mutter-ohne-Tochter, Großmutter, Ehefrau}\}$$

von Merkmalsnamen erweitert, deren Elemente durch die in Abb. 1 definierte Abbildung $\nu\colon \widetilde{M} \to \mathcal{S}_M$ beschrieben werden. Dann kann der erweiterte Kontext $\mathbb{K}^{\mathcal{T}} := (G_{\mathbb{K}}, \widetilde{M}, E)$ mit Hilfe der Interpretation der zugeordneten

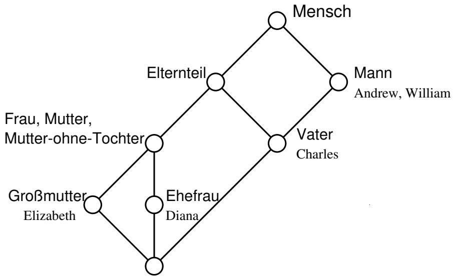

Abbildung 4 Begriffsverband des erweiterten Kontextes *Königsfamilie*

Merkmalsterme bestimmt werden. So erhält man den in Abb. 3 abgebildeten erweiterten Kontext *Königsfamile* bzgl. der Terminologie *Familie* aus Abb. 1. Wie der Begriffsverband des erweiterten Beispielkontextes *Königsfamilie* in Abb. 4 zeigt, läßt sich auf diese Weise aus dem relationalen Kontext *Königsfamilie*, der nur ein einziges interessantes Merkmal, aber zusätzlich Relationen auf den Gegenständen besitzt, bereits eine relativ komplexe begriffliche Struktur entwickeln, indem man nach inhaltlichen Gesichtspunkten aus den alten Merkmalen und den Relationen mit Hilfe der Sprache der Merkmalslogik neue Merkmale konstruiert.

4. Teilsprachen der terminologischen Merkmalslogik und spezielle Kontexterweiterungen

4.1 Boolesche Erweiterungen

Man kann die terminologische Merkmalslogik selbstverständlich auch zur Erweiterung gewöhnlicher formaler Kontexte verwenden, wenn man diese als relationale Kontexte mit leerer Relationenmenge versteht. Da man als Merkmalsterme für eine Terminologie nur diejenigen zulassen kann, die ohne Relationen gebildet werden, beschränkt sich die Sprache der terminologischen Merkmalslogik auf die üblichen logischen Verknüpfungen Disjunktion, Konjunktion und Negation. Eine Terminologie, deren Termmenge nur Merkmalsterme umfaßt, die ohne Relationen gebildet werden, nennen wir *Boolesche Terminologie*:

Definition 10. *Sei $\mathcal{S}$ die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ und $T_b \subseteq \mathcal{S}_M$ die Termmenge über M, die rekursiv durch die folgenden Regeln definiert ist:*

- $M \subseteq T_b$
- $\top, \bot \in T_b$
- $t \in T_b \Rightarrow \neg\, t \in T_b$
- *für alle* $k \in K: \quad t_k \in T_b \Rightarrow \bigvee_{k\in K} t_k,\ \bigwedge_{k\in K} t_k \in T_b$.

Dann wird T_b die Boolesche Termmenge über M und jede Terminologie $(\widetilde{M}, \nu)$ mit $\nu(\widetilde{M}) \subseteq T_b$ eine Boolesche Terminologie von $\mathcal{S}$ genannt.

Die Erweiterung eines Kontextes bzgl. einer Booleschen Terminologie nennen wir Boolesche Erweiterung:

Definition 11. *Sei $\mathbb{K}$ ein relationaler Kontext und $\mathcal{S}$ die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M_{\mathbb{K}},\mathcal{R}_{\mathbb{K}}}$ mit extensionaler Interpretation i im Kontext $\mathbb{K}$. Ist $\mathcal{T}_b := (\widetilde{M}, \nu)$ eine bzgl. i konsistente Boolesche Terminologie von $\mathcal{S}$, so heißt der bzgl. der Terminologie $\mathcal{T}_b$ abgeleitete Kontext $\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$ eine Boolesche Erweiterung von $\mathbb{K}$.*

Die bis auf Bereinigung größte Boolesche Erweiterung $\mathbb{K}$ ist unter dem Namen *Boolescher Kontext* bereits in [St94] untersucht worden: Es ergibt sich, daß ihr Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ für jeden Kontext $\mathbb{K}$ eine vollständig distributive vollständige Boolesche Algebra ist.
Ebenso wie im relationalen Fall ist es allerdings im Booleschen Fall selten notwendig, tatsächlich alle Merkmalsterme zuzulassen. Daher wird man sich im allgemeinen nicht für die größte Boolesche Erweiterung, sondern für die Erweiterung bzgl. einer kleineren Booleschen Terminologie interessieren. Auch hier bleibt also die Terminologie ein wichtiges Mittel, um die Termmenge auf diejenigen Merkmalsterme zu begrenzen, die für die jeweiligen Fragestellungen relevant sind.
Man sieht jedoch leicht ein, daß jede beliebige Boolesche Erweiterung eines Kontextes bis auf Bereinigung und Benennung der Merkmale einen Teilkontext von $\mathbb{K}$ bildet. Der zugehörige Begriffsverband ist somit stets isomorph zu einem $\bigwedge$-Unterhalbverband des Booleschen Begriffsverbandes $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}^b)$.

4.2 Konjunktiv-Disjunktive Erweiterungen

Eine weitere für die Anwendungen wichtige Einschränkung der (Booleschen) terminologischen Merkmalslogik ist die *konjunktiv–disjunktive Teilsprache*:
Es gibt Kontexte, in denen die Beziehung $(g, m) \notin I$ nicht bedeutet, daß der Gegenstand g das Merkmal m tatsächlich nicht besitzt, sondern beispielsweise das Merkmal m für den Gegenstand g irrelevant ist oder man über die Information nicht verfügt. Wenn man aber das Merkmal m nicht dichotom auffassen kann, ist eine Erweiterung des Kontextes durch das Merkmal $\neg\, m$ nicht angemessen, denn nach Definition der Relation E des erweiterten Kontextes würde der Gegenstand g zu $\neg\, m$ in Relation gesetzt. Daher ist es

zuweilen zweckmäßig, die Merkmalsterme auf Verknüpfungen von Konjunktionen und Disjunktionen zu beschränken und die Negation auszuschließen.

Definition 12. *Sei $\mathcal{S}$ die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,\mathcal{R}}$ und $T_{kd} \subseteq \mathcal{S}_M$ die Termmenge über M, die rekursiv durch die folgenden Regeln definiert ist:*

- $M \subseteq T_{kd}$
- $\top, \bot \in T_{kd}$
- *für alle* $k \in K$: $t_k \in T_{kd} \;\Rightarrow\; \bigvee_{k\in K} t_k,\; \bigwedge_{k\in K} t_k \in T_{kd}$.

Dann wird T_{kd} die konjunktiv-disjunktive Termmenge über M und jede Terminologie $(M_p, \widetilde{M}, \nu)$ mit $\nu(\widetilde{M}) \subseteq T_{kd}$ eine konjunktiv-disjunktive Terminologie von $\mathcal{S}$ genannt.

Die Erweiterung eines Kontextes bzgl. einer konjunktiv-disjunktiven Terminologie nennen wir eine konjunktiv-disjunktive Erweiterung:

Definition 13. *Sei $\mathbb{K}$ ein relationaler Kontext und $\mathcal{S}$ die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M_\mathbb{K},\mathcal{R}_\mathbb{K}}$ mit extensionaler Interpretation i im Kontext $\mathbb{K}$. Ist $\mathcal{T} := (\widetilde{M}, \nu)$ eine bzgl. i konsistente konjunktiv-disjunktive Terminologie von $\mathcal{S}$, so heißt der bzgl. der Terminologie $\mathcal{T}$ abgeleitete Kontext $\mathbb{K}^\mathcal{T}$ eine konjunktiv-disjunktive Erweiterung von $\mathbb{K}$.*

Auch die bis auf Bereinigung größte konjunktiv-disjunktive Erweiterung ist (unter dem Namen *positiv-Boolescher Kontext*) in [St94] bereits untersucht worden. Dort wurde gezeigt, daß ihr Begriffsverband stets ein vollständig distributiver vollständiger Verband ist, in dem sich der Begriffsverband des Ausgangskontextes als $\bigwedge$-Unterhalbverband wiederfindet.
Auch hier muß die Möglichkeit erwähnt werden, vor der Erweiterung des Kontextes in der Terminologie eine eingegrenzte Menge $\nu(\widetilde{M})$ von relevanten Merkmalstermen auszuwählen, denn selbst in der konjunktiv-disjunktiven Teilsprache steigt die Zahl der möglichen Merkmalsterme exponentiell mit der Zahl der Merkmale.

5. Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte

Im folgenden soll die bisher nur für einwertige Kontexte eingeführte Merkmalslogik auf mehrwertige Kontexte erweitert werden.
Ein *mehrwertiger Kontext* ist ein Quadrupel (G, M, W, I), bestehend aus einer Gegenstandsmenge G, einer Menge M von (mehrwertigen) Merkmalen, einer Wertemenge W und einer dreistelligen Relation $I \subseteq G \times M \times W$ mit der Eigenschaft, daß aus $(g, m, v) \in I$ und $(g, m, w) \in I$ stets $v = w$ folgt. Daher können die Merkmale m als partielle Abbildungen aus G in eine Wertemenge $W_m \subseteq W$ gedeutet werden. Man schreibt dann zuweilen $(W_m)_{m\in M}$ statt W

und $m(g) = w$ statt $(g, m, w) \in I$. Der Urbildbereich $\{g \in G \mid \exists w \in W : m(g) = w\}$ wird mit $dom(m)$ bezeichnet.
Um die begriffliche Struktur eines mehrwertigen Kontextes untersuchen zu können, muß er in einen formalen (einwertigen) Kontext umgewandelt werden. Dazu ist die Methode der begrifflichen Skalierung entwickelt worden, die in [GW89] ausführlich dargestellt ist und hier nur kurz wiederholt werden soll:

5.1 Begriffliche Skalierung mehrwertiger Kontexte

Unter *begrifflicher Skalierung* versteht man den Interpretationsvorgang, bei dem jedes mehrwertige Merkmal durch die Skalenmerkmale einer geeignet gewählten Skala ersetzt wird. Dabei ist eine *Skala* $\mathbb{S}_m$ zu einem Merkmal $m \in M$ ein formaler Kontext $\mathbb{S}_m := (G_m, M_m, I_m)$ mit $W_m \subseteq G_m$. Die Auswahl der Skala wird nach inhaltlichen Aspekten getroffen: Man versucht, der den Ausprägungsmengen inhärenten Strukturen und vor allem den Fragestellungen an die Daten gerecht zu werden und wählt auf diesem Hintergrund die Skalenmerkmale und -relationen.
Hat man zu einem mehrwertigen Kontext (G, M, W, I) für jedes Merkmal $m \in M$ einen Skalenkontext $\mathbb{S}_m := (G_m, M_m, I_m)$ ausgewählt, so muß entschieden werden, wie die verschiedenen mehrwertigen Merkmale kombiniert werden können. Dazu wird formal ein Produktoperator definiert, der aus den einzelnen Skalen eine gemeinsame *komponierte Skala* bildet:

$$\Pi_{m \in M} \, \mathbb{S}_m := (\times_{m \in M} G_m, N_\Pi, I_\Pi)$$

Für die Wahl des Produktoperators Π gibt es verschiedene Möglichkeiten, die in [GW89] dargestellt sind. In der Praxis wird bislang fast ausschließlich mit dem Halbprodukt ⧖ der Skalenkontexte gearbeitet, bei dem sich die Kombinationsmöglichkeiten der Merkmale auf die Konjunktion von Merkmalen beschränken. Es ist auf die folgende Weise definiert:

$$\mathbb{S} := \text{⧖}_{\gtrdot \in \mathbb{M}} \, \mathbb{S}_{\gtrdot} := (\times_{\gtrdot \in \mathbb{M}} \mathbb{G}_{\gtrdot}, \bigcup_{\gtrdot \in \mathbb{M}} \mathbb{M}_{\gtrdot}, \nabla)$$

mit $\dot{M}_m := \{m\} \times M_m$ und $(w_k)_{k \in M} \nabla (m, n) :\iff w_m \, I_m \, n$. Ein mehrwertiger Kontext (G, M, W, I) zusammen mit einer so komponierten Skala $\mathbb{S}$ heißt *schlicht skalierter mehrwertiger Kontext.* (Für andere Skalenkompositionen als dem Halbprodukt spricht man allgemein von dem skalierten mehrwertigen Kontext $((G, M, W, I), \Pi_{m \in M} \, \mathbb{S}_m)$.) Von dem skalierten Kontext kann man nun zu einem einwertigen Kontext übergehen:
Zu einem schlicht skalierten Kontext $\big((G, M, W, I), \text{⧖}_{m \in M} \, \mathbb{S}_m\big)$ ist der *abgeleitete Kontext* definiert als Kontext

$$(G, \bigcup_{m \in M} \dot{M}_m, J) \quad \text{mit} \quad g \, J \, (m, n) :\iff m(g) \, I_m \, n.$$

Die Gegenstände des abgeleiteten Kontextes sind also die Gegenstände des mehrwertigen Kontextes, die Merkmale sind die Merkmale der komponierten Skala, und die Relation J wird durch die Skalenrelationen I_m induziert.
Durch die Sprache der *Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte* soll mit der *logischen Skalierung* nun eine alternative Methode zur begrifflichen Skalierung bereitgestellt werden, um einen mehrwertigen Kontext in einen einwertigen zu überführen. Ähnlich wie in der Merkmalslogik einwertiger Kontexte wird dabei eine Formalisierung der Ausgangsdaten in einem relationalen mehrwertigen Kontext zugrunde gelegt:

5.2 Relationale mehrwertige Kontexte

Der Ansatz der Formalisierung von Daten durch einen relationalen mehrwertigen Kontext ist geprägt von dem Grundgedanken des Messens, wie er in der Meßtheorie entwickelt worden ist. Hierbei geht man davon aus, daß Voraussetzung allen Messens das Vorhandensein einer *„Menge beobachtbarer Dinge“* ist, *„die aufgrund unterschiedlicher Ausprägungen einer ihnen gemeinsamen Eigenschaft in beobachtbaren Relationen zueinander stehen.“* Eine solche, mit einer Familie von Relationen ausgestattete Menge von Gegenständen wird *empirisches Relativ* genannt. Unter Messen versteht man nun *„die Bestimmung der Ausprägung einer Eigenschaft eines Dinges“*, wenn sie durch eine strukturerhaltende Abbildung der Gegenstände auf Werte einer mit Relationen desselben Typs ausgestatteten Wertemenge, dem sogenannten *numerischen Relativ*, erfolgt (vgl. [Or74, S. 18]). Im Gegensatz zu den bisher betrachteten einwertigen relationalen Kontexten werden also in der Meßtheorie die beobachtbaren Relationen zwischen Gegenständen durch Relationen auf Wertemengen mehrwertiger Merkmale formalisiert.
Für die bisher in der Formalen Begriffsanalyse üblichen mehrwertigen Kontexte bedeuten die meßtheoretischen Überlegungen andererseits, daß immer, wenn man die Ausprägungen gewisser Gegenstände bzgl. eines bestimmten Merkmales durch die Zuordnung von Werten formalisieren will, ein Vorverständnis über die sogenannte Meßstruktur der Gegenstandsmenge bzgl. dieses Merkmals mit einfließt. Dabei wird unter Meßstruktur ein empirisches Relativ verstanden, dessen Eigenschaften explizit formuliert sind. Eine angemessene Formalisierung, eine Messung, erhält man aber nur dann, wenn auch die Wertemenge mit Relationen mit den gleichen Eigenschaften ausgestattet sind.
Folglich ist es zweckmäßig, die aus Messungen im Sinne der Meßtheorie gewonnenen Daten in einem relationalen mehrwertigen Kontext zu formalisieren:

Definition 14. *Ein mehrwertiger Kontext* (G, M, W, I) *zusammen mit einer Menge* $\mathcal{R}$ *von (zweistelligen) Relationen auf der Wertemenge* W *wird (binär-) relationaler mehrwertiger Kontext genannt und im allgemeinen mit* $(G, M, (W, \mathcal{R}), I)$ *bezeichnet.*

Wir gehen also im Fall des mehrwertigen relationalen Kontextes von Relationen auf der Wertemenge aus, von denen im Sinne der Meßtheorie auf Relationen auf der Gegenstandsmenge zurückgeschlossen werden kann. Daß diese Verlagerung in der Formalisierung für die Ausdrucksmöglichkeiten der Sprache der mehrwertigen Merkmalslogik keine Einschränkung bedeutet, wird im 7. Abschnitt ausgeführt.
Wir beschränken uns auch hier im folgenden auf die binären Relationen, um den Formalismus möglichst einfach zu halten. Natürlich lassen sich alle folgenden Definitionen auf beliebige n-stellige Relationen verallgemeinern, was insbesondere nützlich ist, um auch Operationen wie die Addition auf numerischen Werten formalisieren zu können.

5.3 Syntax und extensionale Semantik der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte

Die Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte wird in weitgehender Analogie zur Merkmalslogik einwertiger Kontexte entwickelt, allerdings ergeben sich durch die Einbeziehung einer zusätzlichen Wertemenge W gewisse Abweichungen.

Definition 15. *Das Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$ der terminologischen Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte setzt sich zusammen aus:*

- *einer Menge M von Merkmalsnamen,*
- *einer Menge W von Wertenamen,*
- *einer Menge $\mathcal{R}$ von Relationsnamen,*
- *und den Zeichen $id, {}^c, {}^d, \top, \bot, \bigwedge, \bigvee, \neg$.*

Insbesondere wird in der Sprache der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte auf die Zeichen $\exists$ und $\forall$ verzichtet, was im Zusammenhang mit dem 7. Abschnitt begründet werden kann. Die Elemente der Menge W von Wertenamen werden zur besseren Übersichtlichkeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit einem Merkmalnamen zugeordnet und in der Form (m, w) geschrieben.
Nun sollen als Elemente der Sprache wiederum nur gewisse Wörter zugelassen werden:

Definition 16. *Die Menge $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ der Relationsterme und die Menge $\mathcal{S}_M$ der Merkmalsterme werden rekursiv durch folgende Konstruktionsregeln definiert:*

- $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{R}}$
- $id \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}}$
- $R \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \;\Rightarrow\; R^c, R^d \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}}$

- $W \subseteq \mathcal{S}_M$
- $(m, \top), (m, \bot) \in \mathcal{S}_M$ *für alle* $m \in M$
- $\top, \bot \in \mathcal{S}_M$
- $(m, w) \in W, R \in \mathcal{S}_\mathcal{R} \;\Rightarrow\; (m, R.w) \in \mathcal{S}_M$
- $(m, n) \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; (m, \neg n) \in \mathcal{S}_M$
- $t \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; \neg t \in \mathcal{S}_M$
- *für alle* $k \in K:\; (m, n_k) \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; (m, \bigvee_{k \in K} n_k) \in \mathcal{S}_M$
- *für alle* $k \in K:\; (m, n_k) \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; (m, \bigwedge_{k \in K} n_k) \in \mathcal{S}_M$
- *für alle* $k \in K:\; t_k \in \mathcal{S}_M \;\Rightarrow\; \bigvee_{k \in K} t_k,\; \bigwedge_{k \in K} t_k \in \mathcal{S}_M$

Die formale Sprache $\mathcal{S}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$ setzt sich aus der Menge $\mathcal{S}_\mathcal{R}$ der Relationsterme und der Menge $\mathcal{S}_M$ der Merkmalsterme zusammen.

Eine extensionale Semantik dieser Sprache erhält man durch die extensionale Interpretation in einem relationalen mehrwertigen Kontext, der im folgenden stets mit $\mathbb{K} := (G_\mathbb{K}, M_\mathbb{K}, (W_\mathbb{K}, \mathcal{R}_\mathbb{K}), I_\mathbb{K})$ bezeichnet werden soll:

Definition 17. *Gegeben sei die formale Sprache $\mathcal{S}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$, ein relationaler mehrwertiger Kontext $\mathbb{K}$ und eine Abbildung $\overline{\cdot}$, die jedem $m \in M$ ein Merkmal $\overline{m} \in M_\mathbb{K}$, jedem Wertenamen $(m, w) \in W$ einen Wert $\overline{w} \in W_\mathbb{K}$ und jedem Relationsnamen $R \in \mathcal{R}$ eine zweistellige Relation $\overline{R}$ aus $\mathcal{R}_\mathbb{K}$ zuordnet. Dann heißt die Abbildung*

$$i : W \,\dot\cup\, \mathcal{R} \quad \to \quad \mathfrak{P}(G_\mathbb{K}) \,\dot\cup\, \mathcal{R}_\mathbb{K},$$

mit

$$\begin{array}{lll} R & \mapsto \; \overline{R} & \text{für } R \in \mathcal{R} \\ (m, w) & \mapsto \; \{g \in G_\mathbb{K} \mid \overline{m}(g) = \overline{w}\} & \text{für } (m, w) \in W \end{array}$$

eine extensionale Interpretation der Namen der formalen Sprache $\mathcal{S}$ im Kontext $\mathbb{K}$.

Analog zur einwertigen Merkmalslogik läßt sich die Einschränkung der extensionalen Interpretation i auf W als Verknüpfung der nicht extensionalen Interpretation $\overline{\cdot} : W \to W_\mathbb{K}$, die jedem Wertenamen (m, w) eine Ausprägung $\overline{w}$ zuordnet, und dem Operator, der jedem Wert $\overline{w} \in W_\mathbb{K}$ seine Extension in $G_\mathbb{K}$ zuweist, darstellen.
Hat man eine extensionale Interpretation in einem relationalen mehrwertigen Kontext gegeben, so läßt sich die extensionale Semantik der Merkmals- und Relationsterme durch folgende Regeln beschreiben:

Definition 18. *Ist i eine extensionale Interpretation der Namen der formalen Sprache $\mathcal{S}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$ im relationalen mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} := (G_\mathbb{K}, M_\mathbb{K}, (W_\mathbb{K}, \mathcal{R}_\mathbb{K}), I_\mathbb{K})$, dann ist die extensionale Interpretation der formalen Sprache $\mathcal{S}$ die Fortsetzung*

$$\{\!\![\ ]\!\!\}_i\colon \mathcal{S}_\mathcal{R} \cup \mathcal{S}_M \to \mathfrak{P}(W_\mathbb{K} \times W_\mathbb{K}) \ \dot\cup\ \mathfrak{P}(G_\mathbb{K})$$

von i, die wie folgt rekursiv definiert wird:

$$\begin{array}{lcll}
\{\!\![R]\!\!\}_i & := & i(R) & \text{für } R \in \mathcal{R} \\
\{\!\![id]\!\!\}_i & := & \{(\overline{w},\overline{w}) \mid \overline{w} \in W_\mathbb{K}\} & \\
\{\!\![R^d]\!\!\}_i & := & \{(\overline{v},\overline{w}) \mid (\overline{w},\overline{v}) \in \{\!\![R]\!\!\}_i\} & \\
\{\!\![R^c]\!\!\}_i & := & (W_\mathbb{K} \times W_\mathbb{K}) \setminus \{\!\![R]\!\!\}_i & \\
\{\!\![(m,w)]\!\!\}_i & := & i(m,w) & \text{für } (m,w) \in W \\
\{\!\![(m,\top)]\!\!\}_i & := & dom(\overline{m}) & \\
\{\!\![(m,\bot)]\!\!\}_i & := & \emptyset & \\
\{\!\![(m,R.w)]\!\!\}_i & := & \{g \in G_\mathbb{K} \mid (\overline{m}(g),\overline{w}) \in \{\!\![R]\!\!\}_i\} & \\
\{\!\![(m,\neg n)]\!\!\}_i & := & dom(\overline{m}) \setminus \{\!\![(m,n)]\!\!\}_i & \\
\{\!\![(m,\bigwedge_{k\in K} n_k)]\!\!\}_i & := & \bigcap_{k\in K} \{\!\![(m,n_k)]\!\!\}_i & \\
\{\!\![(m,\bigvee_{k\in K} n_k)]\!\!\}_i & := & \bigcup_{k\in K} \{\!\![(m,n_k)]\!\!\}_i & \\
\{\!\![\top]\!\!\}_i & := & G_\mathbb{K} & \\
\{\!\![\bot]\!\!\}_i & := & \emptyset & \\
\{\!\![\neg t]\!\!\}_i & := & G_\mathbb{K} \setminus \{\!\![t]\!\!\}_i & \\
\{\!\![\bigwedge_{k\in K} t_k]\!\!\}_i & := & \bigcap_{k\in K} \{\!\![t_k]\!\!\}_i & \\
\{\!\![\bigvee_{k\in K} t_k]\!\!\}_i & := & \bigcup_{k\in K} \{\!\![t_k]\!\!\}_i &
\end{array}$$

Damit sind Syntax und Semantik der formalen Sprache $\mathcal{S}$ festgelegt. Ebenso wie im einwertigen Fall wird nun auch in der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte eine Terminologie definiert, um diejenigen Merkmalsterme festlegen zu können, die für die jeweilige Fragestellung relevant sind. Dabei verzichten wir zwar auf die iterative Konstruktion neuer Merkmalsterme, nicht aber auf die Möglichkeit, die Merkmalsterme mit Namen zu versehen:

Definition 19. *Es sei $\mathcal{S}$ die formale Sprache über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$ und $\widetilde{M}$ eine Menge, deren Elemente Merkmalsnamen genannt werden. Dann heißt die surjektive Abbildung $\nu\colon \widetilde{M} \to T \subseteq \mathcal{S}_M$ eine Benennung von T und das Tupel $\mathcal{T} := (\widetilde{M},\nu)$ eine Terminologie von $\mathcal{S}$.*

Die Merkmalsnamen aus $\widetilde{M}$ gehören nicht zur bereits definierten formalen Sprache $\mathcal{S}$, denn sie sind Namen von einwertigen Merkmalen, während die Elemente von M merhwertigen Merkmale benennen. Daher wird die Interpretation erst durch die zugeordneten Merkmalsterme bestimmt, und so müssen Konsistenzüberlegungen hier nicht angestellt werden. Eine sich anbietende Erweiterung der Sprache, in der auch mit den Merkmalsnamen aus $\widetilde{M}$ sukzessive neue Terme gebildet werden können, soll hier nicht näher diskutiert werden.

6. Logische Skalierung mehrwertiger Kontexte

6.1 Ableitung mehrwertiger Kontexte mit Merkmalslogik

Mit der bereitgestellten Sprache einer Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte ergibt sich nun eine neue Möglichkeit, einen relationalen mehrwertigen Kontext in einen einwertigen Kontext umzuwandeln, die wir in Analogie zur begifflichen Skalierung im folgenden *logische Skalierung* nennen wollen. Gegeben sei ein relationaler mehrwertiger Kontext

$$\mathbb{K} := (G, M, (W, \mathcal{R}), I).$$

Nun wollen wir die Merkmale eines abgeleiteten Kontextes mit Hilfe einer formalen Sprache $\mathcal{S}$ der Merkmalslogik konstruieren. Wir betrachten die Merkmalsmenge M als Menge von Merkmalsnamen, die Wertemenge W als Menge von Wertenamen und die Relationenmenge $\mathcal{R}$ als Menge von Relationsnamen. Aus der Menge aller möglichen Merkmalsterme wird eine Termmenge $T \subseteq \mathcal{S}_M$ festgelegt, deren Elemente durch eine Benennung ν gewissen Merkmalsnamen zugeordnet werden, bzgl. derer der mehrwertige Kontext abgeleitet werden soll. Die Relation des abgeleiteten Kontextes ist dann durch die Interpretation der den Merkmalsnamen zugeordneten Merkmalsterme bestimmt:

Definition 20. *Sei $\mathbb{K} := (G, M, (W, \mathcal{R}), I)$ ein relationaler mehrwertiger Kontext und $\mathcal{T} := (\widetilde{M}, \nu)$ eine Terminologie der Sprache $\mathcal{S}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,\mathcal{R}}$ mit extensionaler Interpretation i im Kontext $\mathbb{K}$. Dann heißt der Kontext $\mathbb{K}^{\mathcal{T}} := (G, \widetilde{M}, E)$ mit*

$$(g, \widetilde{m}) \in E \ :\Longleftrightarrow\ g \in [\![\nu(\widetilde{m})]\!]_i$$

der bzgl. der Terminologie $\mathcal{T}$ abgeleitete Kontext von $\mathbb{K}$.

6.2 Beispiel einer logischen Skalierung

Zur Veranschaulichung soll beispielhaft ein relationaler mehrwertiger Kontext logisch skaliert werden. Dazu betrachten wir den mehrwertigen Kontext *Schlafsäcke* in Abb. 5, der einem Ausrüstungskatalog für Camping- und Wanderbedarf [KF96] entnommen ist. Seine Gegenstände sind Schlafsäcke unter 1,85 m Länge, denen durch die mehrwertigen Merkmale Hersteller H, minimale Komforttemperatur (kurz Temperatur T), Gewicht G, Preis P und Füllmaterial F bestimmte Ausprägungen zugeordnet werden.
Zu jedem Merkmal m der Merkmalsmenge $M := \{H, T, G, P, F\}$ (außer H) ist außerdem genau eine Relation auf W_m gegeben: Die Wertemenge W_T, W_G, W_P verstehen wir als linear geordnete Mengen, nämlich als Teilmengen der geordneten Menge $(\mathbb{Z}, \leq)$ bzw. $(\mathbb{N}, \leq)$.

$\mathbb{K}$	Hersteller H	Temperatur T	Gewicht G	Preis P	Füllmaterial F
One Kilo Bag	Wolfskin	7° C	940 g	149,-	Liteloft
Sund	Kodiak	3° C	1880 g	139,-	Hohlfaser
Kompakt Basic	Ajungilak	0° C	1280 g	249,-	MTI Loft
Finmark Tour	Finmark	0° C	1750 g	179,-	Hohlfaser
Interlight Lyx	Caravan	0° C	1900 g	239,-	Thermolite
Kompakt	Ajungilak	-3° C	1490 g	299,-	MTI Loft
Touch the Cloud	Wolfskin	-3° C	1550 g	299,-	Liteloft
Cat's Meow	The North Face	-7° C	1450 g	339,-	Polarguard
Igloo Super	Ajungilak	-7° C	2060 g	279,-	Terraloft
Donna	Ajungilak	-7° C	1850 g	349,-	MTI Loft
Tyin	Ajungilak	-15° C	2100 g	399,-	Ultraloft
Travellers Dream	Yeti	3° C	970 g	379,-	Gänsedaune
Yeti light	Yeti	3° C	800 g	349,-	Gänsedaune
Climber	Finmark	-3° C	1690 g	329,-	Entendaune
Viking	Warmpeace	-3° C	1200 g	369,-	Gänsedaune
Eiger	Yeti	-3° C	1500 g	419,-	Gänsedaune
Climber light	Finmark	-7° C	1380 g	349,-	Gänsedaune
Cobra	Ajungilak	-7° C	1460 g	449,-	Entendaune
Cobra Comfort	Ajungilak	-10° C	1820 g	549,-	Entendaune
Foxfire	The North Face	-10° C	1390 g	669,-	Gänsedaune
Mont Blanc	Yeti	-15° C	1800 g	549,-	Gänsedaune

Abbildung 5 Mehrwertiger Kontext *Schlafsäcke*

Die Ausprägungen des Merkmals F (Füllmaterial) werden durch ihre Materialbeschaffenheit klassifiziert. Dies wird durch die Äquivalenzrelation α formalisiert, deren Äquivalenzklassen wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} W_F/\alpha \;=\; & \{\{\text{Hohlfaser, Thermolite, Polarguard}\},\\ & \{\text{Liteloft, MTI Loft, Terraloft, Ultraloft}\},\\ & \{\text{Entendaune, Gänsedaune}\}\}. \end{aligned}$$

Für den auf diese Weise definierten relationalen mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} := (G, M, ((W_m)_{m\in M}, \mathcal{R}), I)$ wollen wir nun eine Terminologie festlegen. Dazu wird zuerst eine Menge $\widetilde{M}$ von Merkmalsnamen bestimmt, etwa

$$\widetilde{M} := \{\text{billig, mittel-teuer, teuer, Daune, Kunstfaser, gut, akzeptabel, schlecht}\}.$$

Die Festlegung einer Benennung ν, also die Zuordnung von Merkmalstermen aus $\mathcal{S}_M$ zu den Merkmalsnamen aus $\widetilde{M}$, vollzieht sich nicht automatisch,

$$
\begin{array}{lllcl}
\nu\colon & \widetilde{M} & \to & T \\
& \textsf{billig} & \mapsto & (P, \leq .\, 250) \\
& \textsf{mittel-teuer} & \mapsto & (P, > .\, 250 \wedge \leq .\, 400) \\
& \textsf{teuer} & \mapsto & (P, > .\, 400) \\
& \textsf{Daune} & \mapsto & (F, \ \alpha.\ \text{Gänsedaune}) \\
& \textsf{Kunstfaser} & \mapsto & (F, \ \neg \ \alpha.\ \text{Gänsedaune}) \\
& \textsf{gut} & \mapsto & ((T, > .\, 0 \wedge \leq .\, 7) \ \wedge (G, \leq .\, 1000)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -7 \ \wedge \leq .\, 0) \wedge (G, \leq .\, 1400)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -15 \ \wedge \leq .\ -7) \wedge (G, \leq .\, 1700)) \ \vee \\
& & & \quad\ (T, \leq .\ -15) \wedge (G, \leq .\, 2000)) \\
& \textsf{akzeptabel} & \mapsto & ((T, > .\, 0 \wedge \leq .\, 7) \wedge (G, \leq .\, 1400)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -7 \wedge \leq .\, 0) \wedge (G, \leq .\, 1700)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -15 \wedge \leq .\ -7) \wedge (G, \leq .\, 2000)) \ \vee \\
& & & \quad\ (T, \leq .\ -15) \\
& \textsf{schlecht} & \mapsto & ((T, > .\, 0 \wedge \leq .\, 7) \wedge (G, > .\, 1400)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -7 \wedge \leq .\, 0) \wedge (G, > .\, 1700)) \ \vee \\
& & & \quad ((T, > .\ -15 \wedge \leq .\ -7) \wedge (G, > .\, 2000))
\end{array}
$$

Abbildung 6 Beispiel für eine Terminologie

sondern ist Teil der Interpretation der Datenzusammenhänge. Daher muß in die Wahl der Benennung stets eine inhaltliche Deutung der Merkmalsnamen aus $\widetilde{M}$ eingehen.

In der Terminologie in Abb. 6 ist eine mögliche Benennung ν angegeben, in der die Merkmale gut, akzeptabel und schlecht auf das Verhältnis von minimalen Temperaturen und Gewicht bezogen sind: Je leichter ein Schlafsack ist, desto weniger ist er im allgemeinen für niedrige Temperaturen geeignet. Das Verhältnis von Gewicht und Temperatur wird dann als schlecht bezeichnet, wenn ein Schlafsack trotz hohem Gewicht nicht für niedrige Temperaturen geeignet ist, genauer gesagt: Ein Schlafsack soll im abgeleiteten Kontext das Merkmal schlecht besitzen, wenn er eine Temperatur zwischen 0° und 7° C aushält und ein Gewicht über 1400 g hat, oder wenn er bei einer Temperatur zwischen 0° und -7° C über 1700 g wiegt, oder wenn er trotz eines Gewichtes von über 2000 g nur Temperaturen über -15° C verträgt. Analog sind akzeptabel und gut definiert, wobei davon ausgegangen wird, daß jeder gute Schlafsack insbesondere akzeptabel ist.

Für die Merkmale billig, mittel-teuer und teuer wurden gewisse Preisintervalle festgelegt, und die Merkmale Daune und Kunstfaser sind durch die Äquivalenzklassen der Relation α bestimmt. Das Merkmal Hersteller wird in dieser Terminologie nicht einbezogen.

$\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$	billig	mittel-teuer	teuer	Daunen	Kunstfaser	gut	akzeptabel	schlecht
One Kilo Bag	×				×	×	×	
Sund	×				×			×
Kompakt Basic	×				×	×	×	
Finmark Tour	×				×			×
Interlight Lyx	×				×			×
Kompakt		×			×		×	
Touch the Cloud		×			×		×	
Cat's Meow		×			×	×	×	
Igloo Super		×			×			×
Donna		×			×		×	
Tyin		×			×		×	
Travellers Dream		×		×		×	×	
Yeti light		×		×		×	×	
Climber		×		×			×	
Viking		×		×		×	×	
Eiger			×	×			×	
Climber light		×		×		×	×	
Cobra			×	×		×	×	
Cobra Comfort			×	×			×	
Foxfire			×	×		×	×	
Mont Blanc			×	×		×	×	

Abbildung 7 Abgeleiteter Kontext *Schlafsäcke*

Nun setzt man $T := \nu(\widetilde{M})$ und erhält mit dem Tupel $\mathcal{T} := (\widetilde{M}, \nu)$ eine Terminologie, mit der Zusammenhänge von Preis, Materialbeschaffenheit und dem Verhältnis von Gewicht zu Kältefestigkeit betrachtet werden können.
Abb. 7 zeigt den bzgl. dieser Terminologie abgeleiteten Kontext $\mathbb{K}^{\mathcal{T}}$, dessen Gegenstände die Schlafsäcke und dessen Merkmale die Elemente der Menge $\widetilde{M}$ von Merkmalsnamen sind. Die Kontextrelation ist durch die extensionale Interpretation der mittels ν den Merkmalsnamen zugeordneten Merkmalsterme bestimmt.
An dem in Abb. 8 dargestellten Begriffsverband lassen sich nun interessante Zusammenhänge ablesen: So sind etwa Daunenschlafsäcke tendenziell teurer als Kunstfaserschlafsäcke (es gibt keinen einzigen billigen Daunenschlaf-

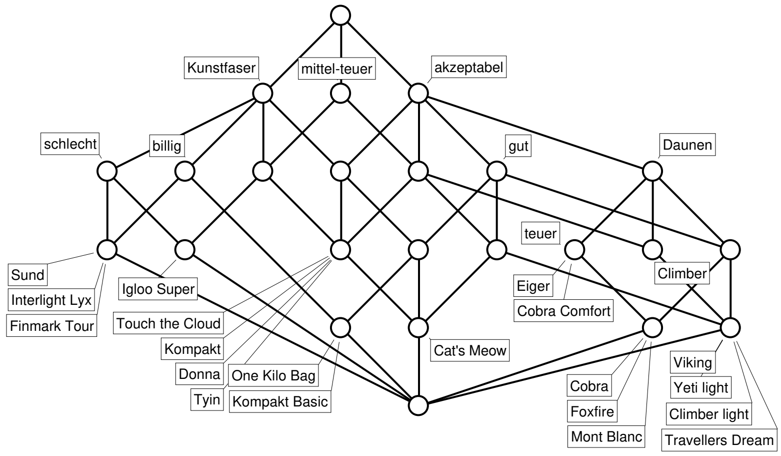

Abbildung 8 Begriffsverband des logisch skalierten Kontextes *Schlafsäcke*

sack, dafür sind alle teuren Schlafsäcke aus Daunen), sie schneiden aber in dem Verhältnis von Gewicht zu Kältefestigkeit im allgemeinen besser ab: Es gibt keinen Daunenschlafsack mit schlechtem Verhältnis von Gewicht und Kältefestigkeit. Nach den hier aufgestellten Kriterien empfehlen sich daher zwei Kategorien von Schlafsäcken: Zum einen die billigen, aber im Gewicht-Temperatur-Verhältnis guten Kunstfaserschlafsäcke „Kompakt Basic" und „One Kilo Bag" und zum anderen die ebenfalls guten Daunenschlafsäcke der mittleren Preisklasse „Viking"„Yeti light", „Climber light" und „Travellers Dream".

Der bzgl. dieser Terminologie abgeleitete Kontext enthält jedoch keine Informationen mehr über das tatsächliche Gewicht der einzelnen Schlafsäcke. Wenn dies für die Kaufentscheidung eine Rolle spielt, muß die Terminologie daher entsprechend erweitert werden, indem man wiederum neue Merkmalsnamen angibt und ihnen durch eine Benennungsfunktion einen Merkmalsterm zuordnet. So lassen sich mit Hilfe der Sprache der Merkmalslogik auf einfache Weise Merkmale für einen abgeleiteten Kontext konstruieren. Ihre inhaltliche Deutung wird durch die Angabe einer syntaktischen Beschreibung in der Terminologie stets offengelegt, so daß die Auswahl der Merkmale des abgeleiteten Kontextes jederzeit diskutierbar bleibt.

6.3 Begriffliche und logische Skalierung

Nach der Diskussion des Beispiels soll im folgenden kurz darauf eingegangen werden, wie begriffliche und logische Skalierung zusammenhängen, da sich die begriffliche Skalierung mit Standardskalen auch durch die Sprache der Merkmalslogik erfassen läßt:
Gegeben sei ein mehrwertiger Kontext $\mathbb{K} := (G, M, (W_m)_{m \in M}, I)$, den wir als relationalen Kontext mit leerer Relationenmenge auffassen können, und eine Familie $(\mathbb{S}_{\mathbb{m}})_{\mathbb{m} \in \mathbb{M}}$ von Skalenkontexten $\mathbb{S}_{\mathbb{m}} := (\mathbb{G}_{\mathbb{m}}, \widetilde{\mathbb{M}}_{\mathbb{m}}, \mathbb{I}_{\mathbb{m}})$. Mit der schlichten (begrifflichen) Skalierung erhält man den abgeleiteten Kontext $\mathbb{K}^{\mathbb{S}} := (G, \dot{\bigcup}_{m \in M} \widetilde{M}_m, J)$ mit $(g, (m, n)) \in J \iff m(g)\, I_m\, (m, n)$.
Den gleichen abgeleiteten Kontext erhält man durch logische Skalierung, wenn man für jedes $m \in M$ die Mengen $\widetilde{M}_m$ der Skalenmerkmale in einer Terminologie so durch eine Termmenge $T_{\mathbb{S}_{\mathbb{m}}}$ über W beschreibt, daß die extensionale Interpretation des dem Skalenmerkmal (m, n) zugeordneten Merkmalstermes $\nu(m, n)$ gerade dem Merkmalsumfang von (m, n) im abgeleiteten Kontext $\mathbb{K}^{\mathbb{S}}$ entspricht.
Als Beispiel für solche Zuordnungen sind in Abb. 9 verschiedene aus [GW89] entnommene Standardskalen $\mathbb{S}_{\mathbb{m}}$ und die entsprechenden Termmengen $T_{\mathbb{S}_{\mathbb{m}}}$ über einer mit $(P, \leq)$ bezeichneten (geordneten) Wertemenge bzgl. des Merkmals m aufgeführt:

Skala $\mathbb{S}_{\mathbb{m}}$		Termmenge $T_{\mathbb{S}_{\mathbb{m}}}$
Nominalskala	$\mathbb{N}_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, =)$	$\{(m, p) \mid p \in P\}$
Kontranominalskala	$\mathbb{N}_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, \neq)$	$\{(m, \neg\, p) \mid p \in P\}$
Ordinalskala	$\mathbb{O}_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq)$	$\{(m, \leq . p) \mid p \in P\}$
Interordinalskala	$\mathbb{I}_{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \mathbb{P}, \leq) \mid (\mathbb{P}, \mathbb{P}, \geq)$	$\{(m, \leq . p) \mid p \in P\} \;\dot{\cup}\; \{(m, \geq . p) \mid p \in P\}$
Boolesche Skala	$\mathbb{B}_{\mathbb{P}} = (\mathfrak{P}(\mathbb{P}), \mathfrak{P}(\mathbb{P}), \subseteq)$	$\{\bigvee_{p \in V} (m, p) \mid V \subseteq P\}$

Abbildung 9 Standardskalen in der Merkmalslogik

Hat man für jedes $m \in M$ eine entsprechende Termmenge $T_{\mathbb{S}_{\mathbb{m}}}$ und eine Benennung ν_m gefunden, so kann nun die Terminologie bestimmt werden, bzgl. der der Kontext abgeleitet werden muß, um zu $\mathbb{K}^{\mathbb{S}}$ zu gelangen: Der Kombination der Skalen durch schlichte Skalierung entspricht in der logischen Skalierung gerade die Vereinigung der Termmengen $T_{\mathbb{S}_{\mathbb{m}}}$. Daher betrachtet man die Terminologie $(\dot{\bigcup}_{m \in M} \widetilde{M}_m, \nu)$, wobei die Benennung ν durch die Einschränkungen ν_m stückweise definiert ist. Der bzgl. dieser Terminologie abgeleitete Kontext ist schließlich genau der gesuchte Kontext $\mathbb{K}^{\mathbb{S}}$.
Damit können wir also eine begriffliche Skalierung immer dann auch durch logische Skalierung erfassen, wenn die Skalenmerkmale durch Merkmalsterme über den Wertenamen beschrieben werden können.

Umgekehrt ist es i. a. nicht möglich, eine logische Skalierung durch begriffliche Skalierung zu erfassen, da die Sprache der Merkmalslogik komplexere Möglichkeiten für die Konstruktion von Merkmalen des abgeleiteten Kontextes aus Werten verschiedener Merkmale bereitstellt. So sind etwa die Merkmale gut, akzeptabel und schlecht aus dem oben diskutierten Beispiel *Schlafsäcke* (vgl. Abb. 6) mit den bisher entwickelten Methoden der begrifflichen Skalierung als Merkmale einer komponierten Skala nur dann zu erfassen, wenn man Kombinationen von mehrwertigen Merkmalen selbst wieder als skalierbares Merkmal auffaßt.
Insgesamt stellt sich die logische Skalierung daher als interessantes Mittel dar, einen mehrwertigen Kontext in einen einwertigen umzuwandeln. Diese neue Methode kann die begriffliche Skalierung gewinnbringend ergänzen, denn sie setzt in der Datenanalyse andere Schwerpunkte:
Während man mit Hilfe der begrifflichen Skalierung eher eine globale Sicht auf die Datenzusammenhänge bekommt, ist die logische Skalierung eher für spezifischere Fragestellungen geeignet, denn der Experte muß im Vorfeld Entscheidungen über die relevanten Prädikate fällen, die er dann explizit in der Terminologie angibt. Da das Aufstellen einer Terminologie für ungeübte Anwender intuitiv leichter zugänglich ist als die Konstruktion einer Skala, können die beiden Methoden auch kombiniert werden, indem man mit Hilfe der logischen Skalierung konkrete begiffliche Skalen konstruiert. (Für eine ausführlichere Diskussion der Unterschiede zwischen begifflicher und logischer Skalierung vgl. [Pre97].)

7. Entsprechung der Merkmalslogik für einwertige und mehrwertige Kontexte

Im folgenden sollen die Sprachen der Merkmalslogik einwertiger und mehrwertiger Kontexte miteinander in Beziehung gesetzt werden, um zu veranschaulichen, daß sich die beiden Sprachen im endlichen Fall in ihren Ausdrucksmöglichkeiten entsprechen. Das bedeutet, daß bei endlichen Gegenstands-, Merkmals- und Wertemengen in beiden Sprachen die gleichen Extensionen beschrieben werden können.
Gegeben sei die formale Sprache $\mathcal{S}$ der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte über dem Alphabet $\mathcal{A}_{M,W,R}$ mit einer extensionalen Interpretation i in dem relationalen mehrwertigen Kontext

$$\mathbb{K} := (G_{\mathbb{K}}, M_{\mathbb{K}}, ((W_{(\overline{m},\mathbb{K})})_{\overline{m}\in M_{\mathbb{K}}}, \mathcal{R}), I_{\mathbb{K}}).$$

Wir konstruieren nun dazu die formale Sprache $\mathcal{S}^{\diamond}$ der Merkmalslogik einwertiger Kontexte mit extensionaler Interpretation $i^{\diamond}$ in einem relationalen (einwertigen) Kontext $\mathbb{K}^{\diamond}$. Dazu muß zunächst der mehrwertige Kontext $\mathbb{K}$ in einen einwertigen umgewandelt werden. Dies geschieht durch nominale

schlichte Skalierung und geeignete Übertragung der Relationen auf die Gegenstandsmenge.
Wir gehen dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß es zu jeder Relation $\overline{R} \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}}$ ein Merkmal $\overline{m} \in M_{\mathbb{K}}$ gibt, so daß gilt $\overline{R} \subseteq W_{(\overline{m},\mathbb{K})} \times W_{(\overline{m},\mathbb{K})}$, also die Relation nur auf Werten dieses Merkmals existiert. Dann schreiben wir auch $\overline{R} \in \mathcal{R}_{(\overline{m},\mathbb{K})}$. Nun können wir zu jeder Relation $\overline{R} \in \mathcal{R}_{(\overline{m},\mathbb{K})}$ eine Relation

$$\widehat{R} := \{(g,h) \in G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} \mid (\overline{m}(g), \overline{m}(h)) \in \overline{R}\} \quad \text{definieren.}$$

Der *zu* $\mathbb{K}$ *gehörige relationale einwertige Kontext* wird dann definiert durch $\mathbb{K}^{\diamond} := ((G_{\mathbb{K}}, \widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{K}}), N_{\mathbb{K}}, J_{\mathbb{K}})$, dessen Merkmalsmenge durch $N_{\mathbb{K}} := \bigcup_{\overline{m} \in M_{\mathbb{K}}} (\{\overline{m}\} \times W_{(\overline{m},\mathbb{K})})$, die Relationen durch $\widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{K}} := \{\widehat{R} \subseteq G_{\mathbb{K}} \times G_{\mathbb{K}} \mid \exists\, \overline{m} \in M_{\mathbb{K}}\colon\ \overline{R} \in \mathcal{R}_{\mathbb{K}\overline{m}}\}$ und die Inzidenzrelation durch

$$(g, (\overline{m}, \overline{w})) \in J_{\mathbb{K}} :\Longleftrightarrow (g, \overline{m}, \overline{w}) \in I_{\mathbb{K}} \quad \text{definiert wird.}$$

Damit läßt sich für die zugehörige einwertige formale Sprache $\mathcal{S}^{\diamond}$ über dem Alphabet $\mathcal{A}_{N,\mathcal{R}}$ mit $N := W$ die extensionale Interpretation $i^{\diamond}$ im Kontext $\mathbb{K}^{\diamond}$ auf folgende Weise festlegen:

$$\begin{array}{llll} i^{\diamond}\colon & N \,\dot{\cup}\, \mathcal{R} & \to & \mathfrak{P}(G_{\mathbb{K}}) \,\dot{\cup}\, \widehat{\mathcal{R}}_{\mathbb{K}} \\ & (m,w) & \mapsto & i\,(m,w) = (\overline{m}, \overline{w})^{J_{\mathbb{K}}} \\ & R & \mapsto & \widehat{R} \end{array}$$

Die so definierte formale Sprache $\mathcal{S}^{\diamond}$ mit extensionaler Interpretation $i^{\diamond}$ heißt die *zu* $\mathcal{S}$ *gehörige formale Sprache einwertiger Kontexte*. Mit diesen Begrifflichkeiten kann für endliche Kontexte der folgende Satz formuliert werden. Dieser läßt sich auf unendliche Kontexte dann leicht übertragen, wenn man Probleme der Entscheidbarkeit ausklammert, denn es müßten insbesondere unendliche Konjunktionen und Disjunktionen zugelassen werden:

Satz. *Die Extensionen der formalen Sprache* $\mathcal{S}$ *mit extensionaler Interpretation* i *in einem relationalen mehrwertigen Kontext* $\mathbb{K}$ *sind genau die Extensionen der zugehörigen formalen Sprache* $\mathcal{S}^{\diamond}$ *mit extensionaler Interpretation* $i^{\diamond}$ *in dem zugehörigen relationalen einwertigen Kontext* $\mathbb{K}^{\diamond}$.

Beweis. Wir betrachten rekursiv die verschiedenen Merkmalsterme der formalen Sprache $\mathcal{S}$ und geben durch die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{S}_M \to \mathcal{S}_M^{\diamond}$ jeweils einen Merkmalsterm in $\mathcal{S}^{\diamond}$ mit gleicher extensionaler Interpretation an:

t	$\varphi(t)$	$\{\!\!\{t\}\!\!\}_i = \{\!\!\{\varphi(t)\}\!\!\}_{i^\diamond}$
$(m,w) \in W$	$(m,w) \in N$	$\{g \in G_{\mathbb{K}} \mid (g, \overline{m}, \overline{w}) \in I_{\mathbb{K}}\}$
$(m,\top)$	$\bigvee_{w\in W}(m,w)$	$\{g \in G_{\mathbb{K}} \mid \exists\, \overline{w} \in W_{(\overline{m},\mathbb{K})}\colon \overline{m}(g) = \overline{w}\}$
$(m,\bot)$	$\bot$	$\emptyset$
$(m,R.w)$	$\exists\, R.(m,w)$	$\{g \in G_{\mathbb{K}} \mid (\overline{m}(g), \overline{w}) \in \{\!\!\{R\}\!\!\}_i\}$
$(m, \neg\, n)$	$\neg\, \varphi(m,n) \wedge \bigvee_{w\in W}(m,w)$	$\{\!\!\{(m,\top)\}\!\!\}_i \setminus \{\!\!\{(m,n)\}\!\!\}_i$
$(m, \bigwedge_{k\in K} n_k)$	$\bigwedge_{k\in K} \varphi(m,n_k)$	$\bigcap_{k\in K}\{\!\!\{(m,n_k)\}\!\!\}_i$
$(m, \bigvee_{k\in K} n_k)$	$\bigvee_{k\in K} \varphi(m,n_k)$	$\bigcup_{k\in K}\{\!\!\{(m,n_k)\}\!\!\}_i$
$\top$	$\top$	$G_{\mathbb{K}}$
$\bot$	$\bot$	$\emptyset$
$\neg\, t$	$\neg\, \varphi(t)$	$G_{\mathbb{K}} \setminus \{\!\!\{t\}\!\!\}_i$
$\bigwedge_{k\in K} t_k$	$\bigwedge_{k\in K} \varphi(t_k)$	$\bigcap_{k\in K}\{\!\!\{t_k\}\!\!\}_i$
$\bigvee_{k\in K} t_k$	$\bigvee_{k\in K} \varphi(t_k)$	$\bigcup_{k\in K}\{\!\!\{t_k\}\!\!\}_i$

Folglich sind alle Extensionen der Sprache $\mathcal{S}$ auch Extensionen der Sprache $\mathcal{S}^\diamond$. Analog können wir nun umgekehrt auch zu jedem Merkmalsterm der Sprache $\mathcal{S}_M^\diamond$ einen Term in $\mathcal{S}_M$ direkt angeben. Genauer müssen lediglich die Terme $(\exists\, R.t)$ und $(\forall\, R.t)$ betrachtet werden: Hier gilt

$$\{\!\!\{(\forall\, R.\, t)\}\!\!\}_{i^\diamond} = G_{\mathbb{K}} \setminus \{\!\!\{\neg\, \exists\, R. \neg\, t)\}\!\!\}_{i^\diamond}$$

Der Merkmalsterm $(\exists\, R.t)$ ist nur mit Rückgriff auf die Interpretation in die Sprache $\mathcal{S}$ der mehrwertigen Kontexte zu übersetzen: Sei $\overline{m} \in M_{\mathbb{K}}$ so, daß $\{\!\!\{R\}\!\!\}_{i^\diamond} \subseteq W_{(\overline{m},\mathbb{K})} \times W_{(\overline{m},\mathbb{K})}$ ist, und stehe ferner die Bezeichung „w_h" als Abkürzung für einen der Wertenamen, denen durch die Interpretation i der Wert $\overline{m}(h)$ zugewiesen wird. Mit diesen Bezeichnungen haben die Merkmalsterme $(\exists\, R.t)$ und $\bigvee_{h\in\, \{\!\!\{\psi(t)\}\!\!\}_{i^\diamond}}(m,\, R.\, w_h)$ dieselbe Extension, können also aufeinander abgebildet werden, wie folgende Überlegung zeigt:

$$\begin{aligned}
\{\!\!\{\exists\, R.t\}\!\!\}_{i^\diamond} &:= \{g \in G_{\mathbb{K}} \mid \exists\, h \in \{\!\!\{t\}\!\!\}_{i^\diamond}\colon (g,h) \in \{\!\!\{R\}\!\!\}_{i^\diamond}\} \\
&= \{g \in G_{\mathbb{K}} \mid \exists\, h \in \{\!\!\{t\}\!\!\}_{i^\diamond}\colon (\overline{m}(g), \overline{m}(h)) \in \{\!\!\{R\}\!\!\}_i\} \\
&= \textstyle\bigcup_{h\in\{\!\!\{t\}\!\!\}_{i^\diamond}} \{g \in G_{\mathbb{K}} \mid (\overline{m}(g), \overline{m}(h)) \in \{\!\!\{R\}\!\!\}_i\} \\
&= \textstyle\bigcup_{h\in\{\!\!\{t\}\!\!\}_{i^\diamond}} \{\!\!\{m, R.w_h\}\!\!\}_i \\
&= \{\!\!\{\textstyle\bigvee_{h\in\{\!\!\{\psi(t)\}\!\!\}_i}(m,\, R.\, w_h)\}\!\!\}_i
\end{aligned}$$

□

Durch die Tatsache, daß die in der Merkmalslogik einwertiger Kontexte eingeführten Ausdrücke mit beschränkten Quantoren gerade die Entsprechungen einfacher Merkmalsterme der „quantorenfreien" Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte darstellen, wird nachträglich gerechtfertigt, warum genau diese Ausdrücke im Einwertigen (wie auch in der terminologischen Logik allgemein) eingeführt wurden.

Umgekehrt sind die im Einwertigen eingeführten Quantorenausdrücke im Mehrwertigen nur durch sehr komplexe Merkmalsterme und unter Rückgriff auf die Interpretation zu übersetzen. Daher wäre es hilfreich, auch die Sprache der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte um die beschränkten Quantoren zu erweitern. Dies setzt eine Formalisierung der Ausgangsdaten in mehrwertigen Kontexten voraus, die auch mit Relationen auf der Gegenstandsmenge ausgestattet sein können. Das wäre auch aus einem anderem Grund hilfreich: Zwar können im Sinne der Meßtheorie formal alle Relationen auf der Gegenstandsmenge mit Hilfe eines mehrwertigen Merkmals auf Relationen einer Wertemenge übertragen werden und umgekehrt, doch bedeutet dies oft eine nicht notwendige Kodierung der eigentlich relevanten Information. Daher wäre eine Erweiterung der Sprache der Merkmalslogik mehrwertiger Kontexte, die mit einer erweiterten Formalisierungsmöglichkeit für die Ausgangsdaten verbunden ist, eine wünschenswerte Bereicherung der hier eingeführten terminologischen Merkmalslogik, die auch für weitere Anwendungen der Merkmalslogik fruchtbar gemacht werden könnte.

Literatur

[Ba92] F. Baader: Logische Methoden in der Wissensrepräsentation am Beispiel terminologischer Repräsentationssprachen, RWTH Aachen 1992

[GW89] B. Ganter, R. Wille: Conceptual scaling, in: F. Roberts (Hrsg.): Applications of combinatorics and graph theory to the biological and social sciences, Springer-Verlag, New York 1989, 139 – 167

[GW96] B. Ganter, R. Wille: Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg 1996

[KF96] Kleine Fluchten: Ausrüstungskatalog 1996 der Finmark-Gruppe, Würzburg 1996

[Ne90] B. Nebel: Reasoning and Revision in Hybrid Representation Systems, Lecture Notes in Artificial Intelligence 422, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg 1990

[Or74] B. Orth: Einführung in die Theorie des Messens, Stuttgart Kohlhammer 1974

[Pre96] S. Prediger: Symbolische Datenanalyse und ihre begriffsanalytische Einordnung, Staatsexamenarbeit, FB Mathematik, TH Darmstadt 1996

[Pre97] S. Prediger: Logical Scaling in Formal Concept Analysis, in: D. Lukose et.al. (Hrsg.): Conceptual Dream, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1257, Springer, Berlin 1997, 332–341.

[Pri96] U. Priß: The formalization of WordNet by methods of relational concept analysis, in: C. Fellbaum (Hrsg.): WordNet – An electronic lexical database and some of its applications, MIT-Press 1996

[SS91] M. Schmidt-Schauß, G. Smolka: Attributive concept descriptions with complements, in: Artificial Intelligence 48 (1991), 1 – 26

[St94] G. Stumme: Boolesche Begriffe, Diplomarbeit, FB Mathematik, TH Darmstadt 1994