



Mandelbrot-Menge und fraktales Instrument



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2025

Die Mandelbrot-Menge (Geschichte)

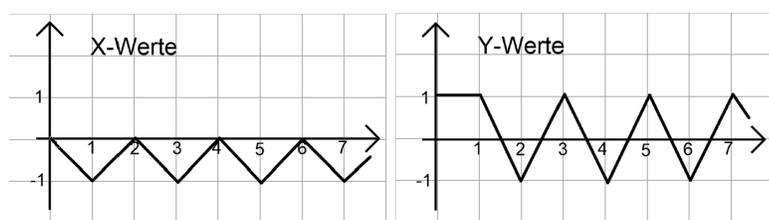
Die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} ist benannt nach dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924-2010) und besteht aus allen Punkten (x_0, y_0) in der Ebene, für welche die unten definierte Iterationsvorschrift beschränkt bleibt. In der Mandelbrot-Menge lassen sich allerhand interessante geometrische Objekte erkennen, wie z.B. Spiralen, „Seepferdchen“ oder Satelliten mit Antennen, die sich beim Hereinzoomen wiederholen. Man nennt Mengen mit dieser Eigenschaft fraktale Mengen. Diese kommen auch nicht selten in der Natur vor, z.B. beim Blumenkohl.

Umwandlung in Töne

Die Software spielt zu jedem Punkt der Mandelbrot-Menge einen Klang ab. Das funktioniert so: Für einen Punkt (x_0, y_0) aus \mathbb{M} betrachten wir die im rechten Kasten beschriebenen Folgen x_0, x_1, x_2, \dots und y_0, y_1, y_2, \dots . Wir interpretieren die Werte als Amplituden zweier Schallwellen und spielen sie auf je einem der beiden Lautsprecher ab. Nehmen wir zum Beispiel den Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$, so erhalten wir die Folgen

$$\begin{aligned}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots), \\ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots).\end{aligned}$$

Dies ergibt also die folgenden Schallwellen:



Iterationsvorschrift

Wir geben ein $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vor. Das nächste Folgenglied ist dann rekursiv definiert durch

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - y_n^2, 2x_n y_n) + (x_0, y_0).$$

Ein Start mit dem Beispiel von links, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, liefert $(x_1, y_1) = (-1, 1)$, $(x_2, y_2) = (0, -1)$, $(x_3, y_3) = (-1, 1), \dots$

Starten wir dagegen mit $(x_0, y_0) = (1, 0)$, so ergibt sich

$$(x_1, y_1) = (2, 0), \quad (x_2, y_2) = (5, 0), \quad (x_3, y_3) = (26, 0), \dots$$

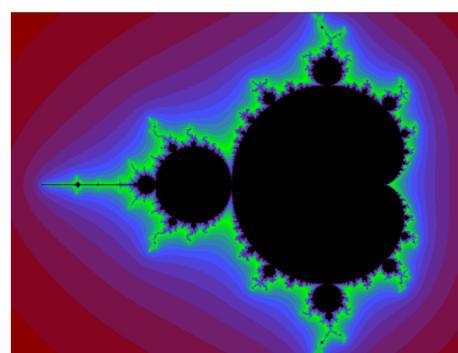


Abb. 1: Bild der Mandelbrot-Menge

Außerhalb der Menge \mathbb{M}

Für Punkte, die nicht in der Mandelbrot-Menge liegen, bleibt die Iteration nicht beschränkt, d. h. die x - oder y -Koordinate des Punktes in der Iterationsvorschrift wird beliebig groß.

Aufgaben an euch:

- 1) An welchen Stellen entstehen klare Töne, wo stoßt ihr auf bizarre Geräusche? Habt ihr eine Idee, woran das liegt? Versucht, vor dem Erzeugen des nächsten Tons vorherzusagen, wie er klingt.
- 2) Sucht euch weitere Startwerte aus und berechnet die Werte für die ersten paar Iterationen. Liegen diese Startwerte innerhalb der Mandelbrot-Menge \mathbb{M} oder nicht?

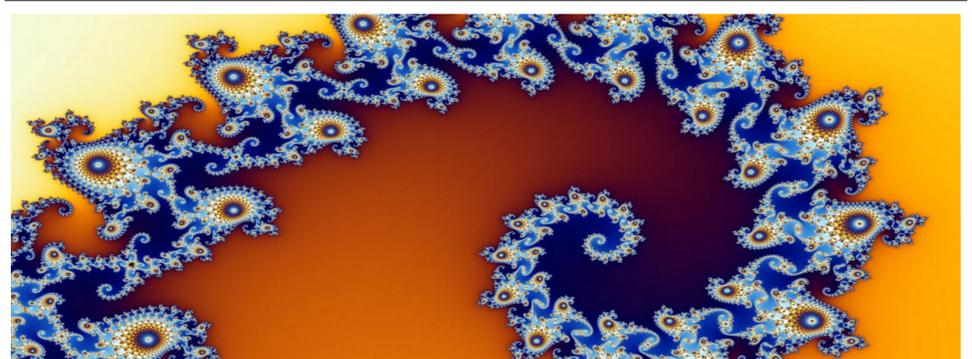


Abb. 2: Zoom in das „Tal der Seepferdchen“ in der Mandelbrot-Menge



Die Lange Nacht
der Mathematik



Link to this
Poster