Die Einstein-Kachel

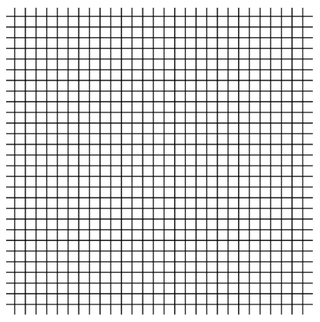
Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

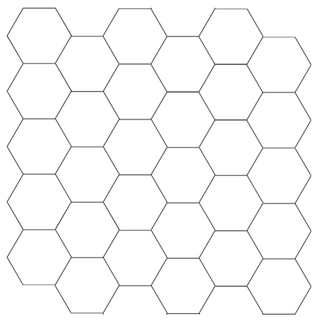
Kachelungen der Ebene

Die Geschichte der Kachelungen der Ebene reicht Jahrhunderte zurück und durchzieht den Wandteppich der Mathematik sowie der Kunst. Die Ebene zu kacheln bedeutet im mathematischen Sinne das Bedecken der Ebene (einer unendlichen flachen Oberfläche) mit sich nicht überlappenden Kacheln, ohne dabei Lücken zu lassen. Dabei gibt es verschiedene Unterarten von Kachelungen, welche in der Mathematik ausgiebig untersucht wurden. Zu den wichtigsten gehören: regelmäßige Kachelungen (nur aus regelmäßigen n-Ecken), semireguläre Kachelungen (aus verschiedenen regelmäßigen n-Ecken), quasireguläre Kachelungen und so weiter.

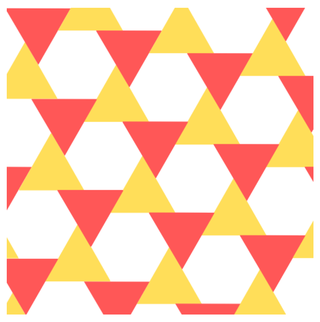
Dreiecksgitter



Quadratgitter



Sechsecksgitter

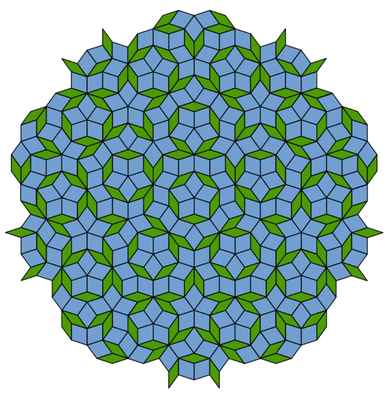


Semireguläre Parkettierung

Periodische und aperiodische Kachelungen

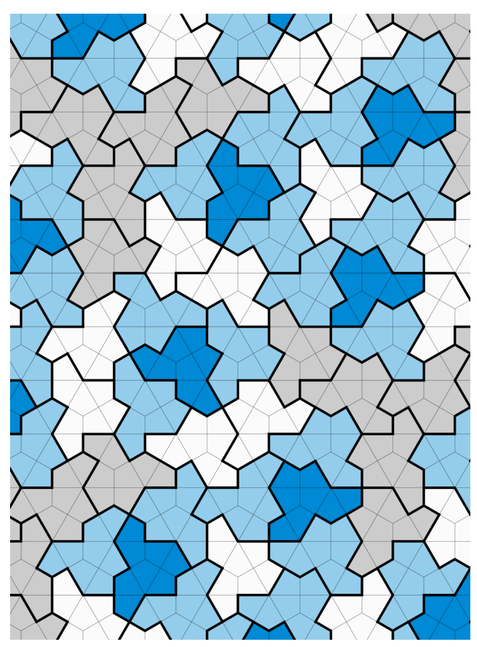
Eine **periodische Kachelung** ist eine Kachelung einer unendlichen ebenen Fläche, die sich in regelmäßigen Abständen wiederholt. Mit anderen Worten: Das Kachelmuster setzt sich unendlich fort, und man kann das gesamte Muster um eine bestimmte Strecke verschieben, ohne das Muster zu verändern. Das bedeutet, dass die Kacheln eine **Translationssymmetrie** zulassen. Beispiele für periodische Kachelungen sind die Quadratgitter, das Dreiecksgitter oder das Sechsecksgitter.

Eine **aperiodische Kachelung** lässt keine Translationssymmetrie zu. 1961 stellte der Logiker Hao Wang die Vermutung auf, dass, wenn eine endliche Menge von Formen die Ebene kacheln kann, dies auch periodisch möglich ist. Sieben Jahre später wurde er jedoch von seinem Doktoranden Robert Berger widerlegt. Dieser hatte ein Set von ca. 20 000 Formen konstruiert, von denen er beweisen konnte, dass sich mit ihnen zwar die Ebene kacheln lässt, dies aber nur aperiodisch. 1974 verbesserte Roger Penrose diese Schranke erheblich, als er entdeckte, dass auch schon zwei Formen ausreichen, um eine aperiodische Kachelung zu erzwingen.



Die Einstein-Kachel

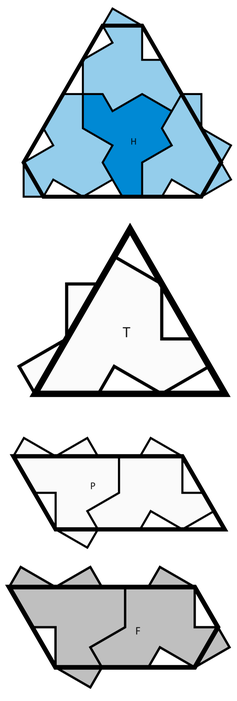
Offen blieb die Frage, ob es auch eine einzige Form gebe, mit der sich die Ebene nur aperiodisch kacheln lässt. Für eine solche Form hat sich international der Begriff **Einstein-Kachel** durchgesetzt, eine Anspielung an den deutschen Begriff *ein Stein*. Die Antwort auf die Frage nach der Existenz einer Einstein-Kachel wurde im Jahr 2023 von Smith, Myers, Kaplan und Goodman-Strauss gegeben. Smith, ein pensionierter Drucktechniker und Hobby-Mathematiker, ging einer seiner Lieblingsbeschäftigungen nach, er spielte mit Formen, als er eine Form fand, die er nun **Hut** oder **T-Shirt** nannte und die eine Kachelung ergab, die er zuvor noch nicht gesehen hatte. Nachdem er bekannten Geometern von seiner Entdeckung berichtete, gelang es ihnen zu beweisen, dass der Hut die Ebene kachelt, dies aber nur aperiodisch möglich ist.

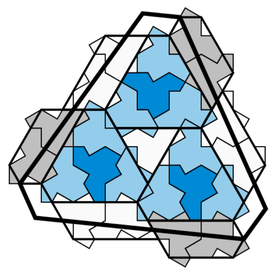


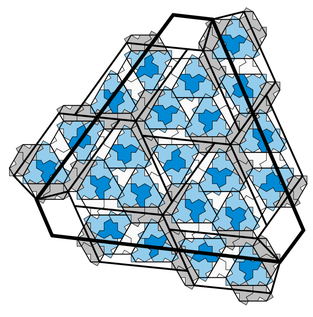
Die Einstein-Kachel ist aperiodisch

Der Beweis folgte einer Idee, die von Bergers Arbeit aus den 1960er Jahren inspiriert war. Dieser zeigte, dass seine Formen immer in größen Mustern vorkommen mussten, die sich wiederum in größeren Kopien ihrer selbst befinden mussten, sodass jede Kachelung der ebene eine **hierarchische Struktur** haben musste.

Myers leitete den Prozess ein, indem er vier aus Hüten konstruierte Zwischenformen identifizierte, die als H, T, P und F bezeichnet werden. Myers zeigte, dass man durch die Kombination dieser vier Formen auf verschiedene Weise größere, komplexere Strukturen erzeugen kann. Zur Veranschaulichung könnte man ein größeres H erzeugen, indem man ein T mit drei H-Formen umgibt und dann diese Anordnung mit einer Mischung aus P- und F-Formen umgibt.







Dies bot eine Methode, um immer größere Hutmuster zu erstellen und so eine immer größere Hierarchie von ineinander verschachtelten Formen zu konstruieren. Die Wissenschaftler wiesen nach, dass sich die Muster, die sich aus diesen verschachtelten Konstruktionen ergeben, niemals wiederholen. Sie stellten auch fest, dass die Konstruktion dieser speziellen Hierarchien die einzige Methode zur Erstellung von Hutmustern ist!

Die Ergebnisse und Bilder stammen aus der arXiv Veröffentlichung "An aperiodic monotile" (2303.10798) von David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan und Chaim Goodman-Strauss (2023).

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Didaktik

Die lange Nacht der Mathematik