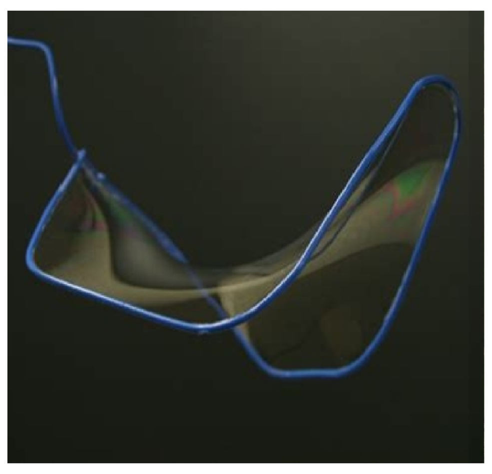
Geometrie in Natur und Technik

Arbeitsgruppe Geometrie und Approximation
Technische Universität Darmstadt
Kai Bouaraba, Philipp Käse

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Natürliche Strukturen sind optimal

Kräfte formen natürliche Objekte zu einer optimalen Struktur. So wird ein Seifenfilm durch die Oberflächenspannung straff gezogen und erreicht ein stabiles Gleichgewicht, wenn sein Oberflächeninhalt kleiner ist als der Inhalt jeder nahen Fläche mit gleichem Rand. Gleichermaßen minimieren Seifenblasen den Inhalt einer Fläche, welche ein festes Volumen umschließt.




Der Architekt Frei Otto wandte dieses natürliche Konzept bei seinem berühmten Design des Olympiaparks in München von 1972 sowie auch beim Bahnprojekt Stuttgart 21 an.


Das Plateau-Problem

Der belgische Physiker Joseph Plateau experimentierte im 19. Jahrhundert mit Seifenfilmen. Die zugehörige geometrische Fragestellung wurde bekannt als das **Plateau-Problem**:

Finde zu einer vorgegebenen Randkurve die Fläche mit minimalem Flächeninhalt.

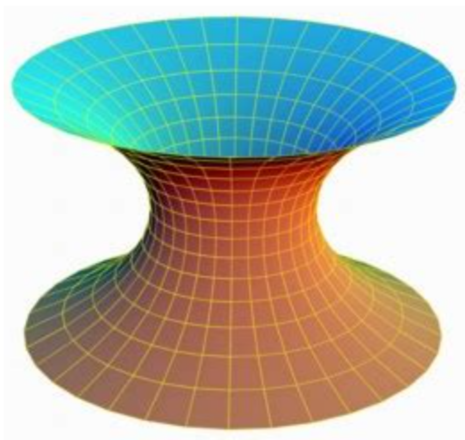
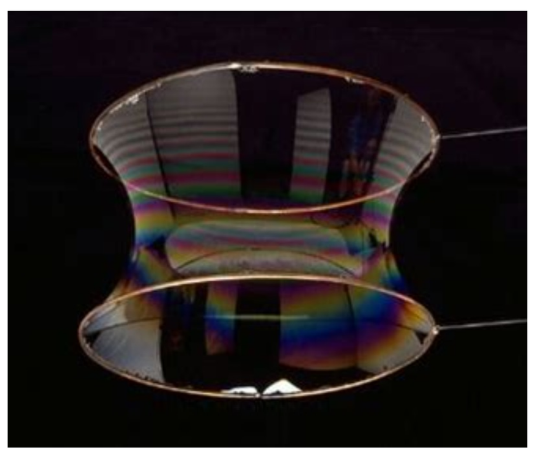
Douglas und Rado bewiesen 1930 unabhängig voneinander die Existenz einer solchen Fläche. Douglas erhielt für seine Arbeiten 1936 die Fields-Medaille. Die Lösungen sind gegeben durch **Minimalflächen**. Diese sind charakterisiert durch eine überall verschwindende mittlere Krümmung $H = 0$.

Beispiele für Minimalflächen

Im Laufe der Jahre wurde eine Vielzahl an Minimalflächen gefunden. Hier ein paar Beispiele:

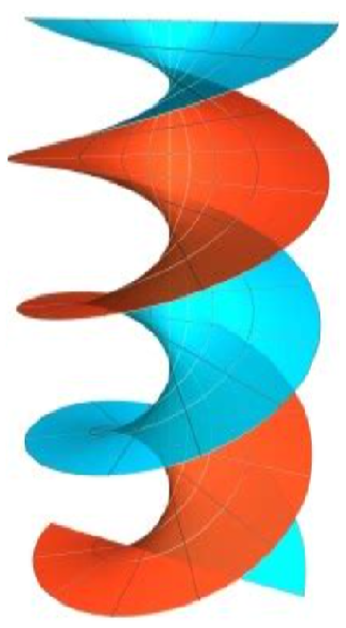
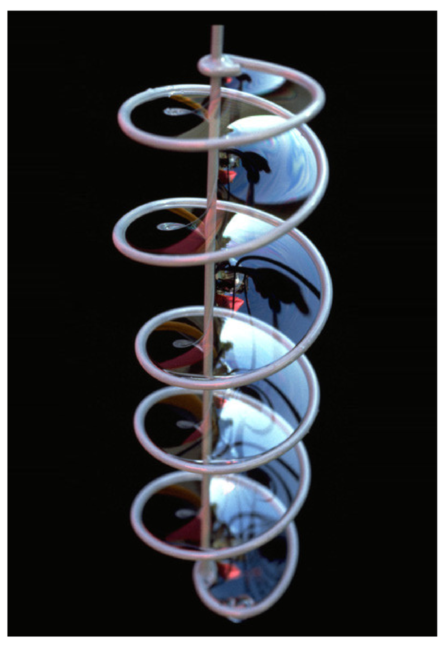
Das Katenoid

Das Katenoid, 1741 von Euler entdeckt, entsteht durch Rotation einer Kettenlinie. Unter allen solchen **Rotationsflächen** ist es die einzige Minimalfläche und löst das Plateau-Problem für zwei koaxiale Kreise.

Das Helikoid

Das Helikoid wurde 1776 von Meusnier entdeckt. Es entsteht durch Windung einer Geraden um eine Rotationsachse. Solche Flächen, die nur aus Geraden bestehen, nennt man auch **Regelflächen**.

Das Gyroid

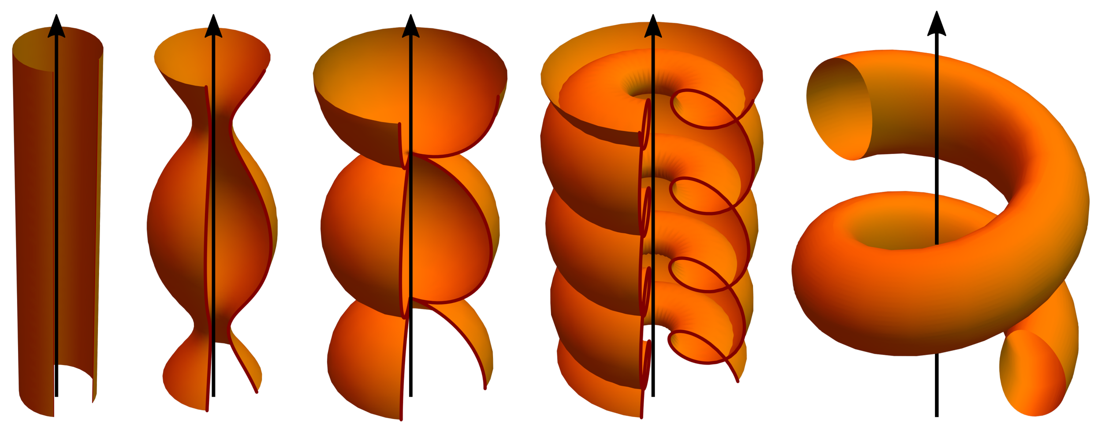
Das Gyroid, im Jahr 1970 von Schoen entdeckt, ist eine dreifach periodische Minimalfläche. Es beinhaltet keine Geraden (Osserman 1986) und keine Selbstschnitte (Große-Brauckmann/Wohlgemuth 1996). Die Klassifizierung solcher **TPMS-Flächen** (Triply Periodic Minimal Surface) ist ein offenes Problem.


CMC-Flächen

Lösungen der verwandten Fragestellung, Flächen minimalen Inhalts zu finden, welche ein festes Volumen umschließen, sind **CMC-Flächen** (Constant Mean Curvature) mit konstanter Krümmung $H = \text{const.} \neq 0$.

Delaunay untersuchte 1841 CMC-Rotationsflächen. Diese nach ihm benannten **Delaunay-Flächen** sind **Zylinder**, **Unduloid**, **Sphäre** und **Nodoid**.

Untersucht man CMC-Flächen nicht im euklidischen Raum, sondern in gekrümmten Räumen, tritt unter den Delaunay-Flächen eine neue Art von Fläche auf: **CMC-Tubes** (rechts im Bild). Diese Flächen sind Gegenstand der aktuellen Forschung.



Anwendungen

Minimalflächen und CMC-Flächen haben sich zu einem intensiven Forschungsgebiet mit vielen Anwendungen entwickelt. Dank ihrer optimalen Form spielen sie eine wichtige Rolle in der molekularen Biotechnologie, den Materialwissenschaften und der Zellbiologie. In der allgemeinen Relativitätstheorie bilden sie einen krümmungsbasierten Zugang die Ränder schwarzer Löcher zu verstehen.