Seifenfilme

Lange Nacht der Mathematik 2024

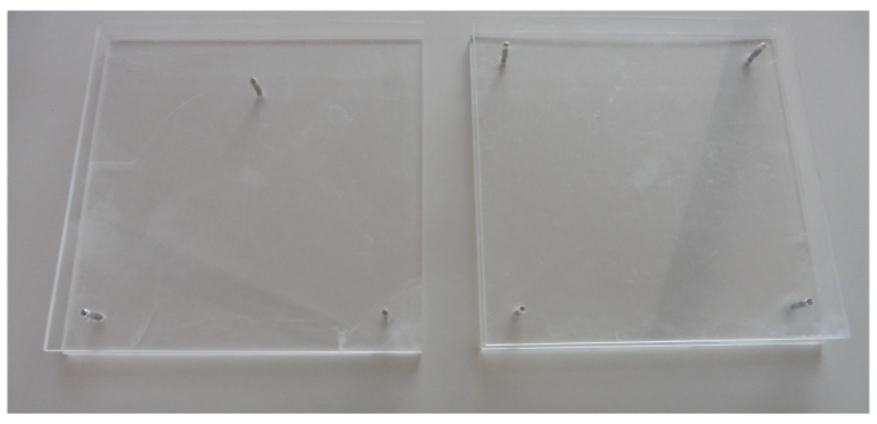
Seifenhäute und Minimierung

Seifenhäute bilden ebenso faszinierende wie ästhetische Formen. Was bestimmt ihre Form? Es ist die Oberflächenspannung, die zu Flächen im Gleichgewicht führt: Sie lässt die Seifenhaut sich so verformen, dass sie den **kleinsten möglichen Flächeninhalt** besitzt. Was hier ganz automatisch durch physikalische Kräfte passiert, kann man mathematisch simulieren.

Die **Minimierung** ist ein universelles Prinzip in Natur und Technik, vielleicht das wichtigste überhaupt: Sie beschreibt den Fall des Apfels vom Baum, die Gestalt des Universums, und sie ist der entscheidende Schritt in Algorithmen, wie sie beispielsweise in der KI angewendet werden. Experimentiere selbst, um dieses Prinzip wirken zu sehen!

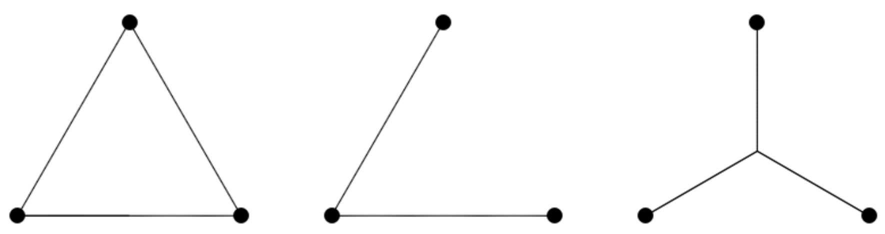
A) Ebene Netzwerke aus Seifenfilm

Tauche die Platten in die Lösung ein, und ziehe sie vorsichtig heraus. Es entsteht ein Film aus Streifen zwischen den Platten, der an den Nägeln endet. Es sollen zunächst keine geschlossenen Zellen dabei sein, etwas Schaum am Rand ist ok.



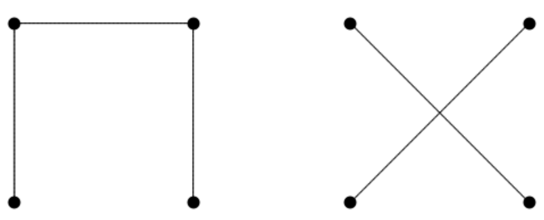
1. Nimm eine der Platten und tauche sie nur so tief ein, dass gerade 2 Nägel in der Lösung liegen und ziehe sie wieder heraus. Siehst Du dann die Antwort auf die Frage: Was ist die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei Punkten?

2. Nimm die Platte mit 3 Nägeln. Bilde einen Film der in den Nägeln endet (und keine geschlossenen Blasen einschließt). Überlege, welche der folgenden Konfigurationen du siehst. Was sind ihre Längen?

   Wenn sich 3 Streifen in einem Punkt in der Mitte treffen, wie rechts zu sehen, in welchem **Winkel** treffen sie sich? Versuche das Ergebnis durch Kraftwirkung der Oberflächenspannung auf den Schnittpunkt zu erklären!

3. Nimm die Platte mit 4 Nägeln. Kannst Du die folgenden Netzwerke darstellen?

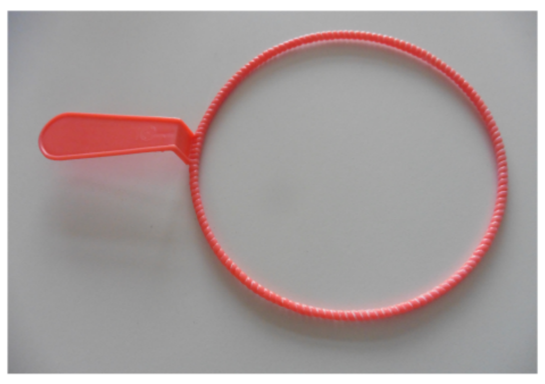
   Was ist die jeweilige Gesamt-**Länge**, wenn die Nägel Abstand 1 haben? Eventuell hilft die Kenntnis des Winkels. Was bedeutet das für **Symmetrie** und **Eindeutigkeit** des Seifenfilms?

4. Nun spielen die Nägel keine Rolle. Versuche ein paar große Zellen einzuschließen; In welchem **Winkel** treffen sich nun die Streifen? Was sind die Zellwände geometrisch? Es gibt auch noch eine faszinierende Eigenschaft der **Krümmungsradien** in Tripelpunkten – sprich uns an!

B) Glatte Flächen im Raum

Experimentiere mit Flächen aus Seifenhaut, bei denen keine Schnittlinien auftreten.

1. Tauche den roten Kreis ein. Oder baue eine **ebene Konfiguration** aus den zoomtool-Kugeln und -Kanten, z.B. Quadrat, Sechseck, etc. Welche Geometrie hat der Seifenfilm und warum, z.B. im Hinblick auf **Krümmung**?

2. Baue aus zoomtool einen Ring als Randkurve, der räumlich ist, also *nicht* in einer Ebene liegt. Im Bild unten rechts siehst Du zwei Beispiele dafür. Welche Eigenschaften hat die berandete Minimalfläche? Gibt es z.B. **lokale Maxima**, **Sattelpunkte**, steht die Fläche aus der Randkurve heraus (**konvexe Hülle**)?

3. Kann man aus zoomtool eine Kurve konstruieren, die ein **Möbiusband** aus Seifenfilm berandet?

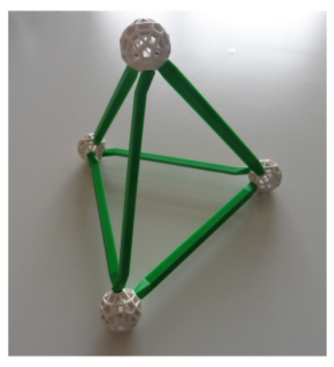
   David Benbennick, CC BY-SA 2.0, Wikimedia Commons

4. Roter Kreis: Tauche ihn parallel zum Flüssigkeitsspiegel ein, und ziehe ihn langsam immer höher heraus, weiterhin in horizontaler Lage. Wie trifft der entstehende Seifenfilm, genannt **Katenoid**, den Flüssigkeitsspiegel? Wie hoch kommt man, ohne dass der Film zerreißt?

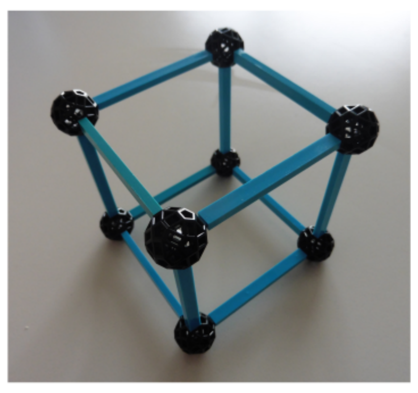
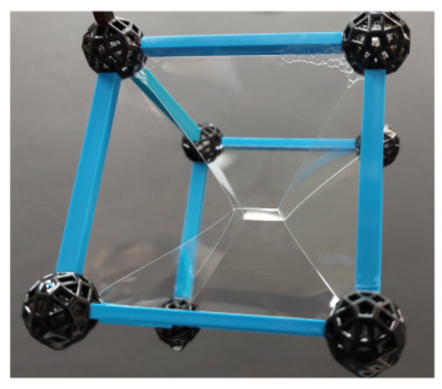
C) Seifenfilme in Polyedern

Lerne die Prinzipien kennen, denen die Zellen von Schäumen genügen. Man kann sie auch gut in Saftflaschen, bei Bierschaum, usw. beobachten.

1. Ein **Tetraeder** besteht aus sechs Kanten, die vier gleichseitige Dreiecke beranden. Der Seifenfilm bildet Kanten aus, in denen 3 Flächen zusammenkommen (mit welchem Winkel?). Und mit welchem Winkel treffen sich zwei solcher Kanten im zentralen Punkt? Baue aus zoomtool Tetraeder mit verschieden lange Kanten: Ändert sich die Geometrie des Seifenfilms?

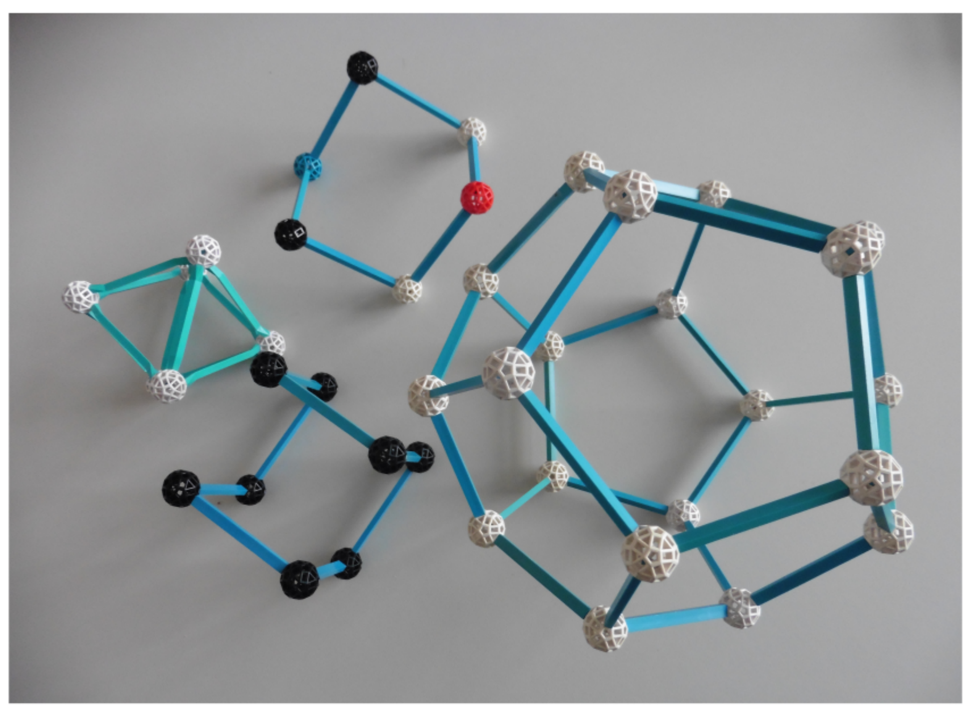
   

2. Nimm den **Würfel** und ziehe ihn so aus der Seifenlösung, dass keine Extrazellen eingeschlossen sind. Experimentiere in welcher Orientierung er am besten rausgezogen wird. Welche Winkel siehst Du? Ist die Fläche **symmetrisch** und **eindeutig**?

3. Versuche beim Würfel eine **zusätzliche** würfelförmige **Zelle** einzuschließen, z.B. durch erneutes Eintauchen der vorherigen Konfiguration. Hat die Zelle ebene Seitenflächen? Kann die Zelle von Kugelstücken berandet sein?

4. Experimentiere mit dem **Oktaeder**, das aus acht Dreiecken besteht. Oder baue weitere Modelle und deute die eingespannten Seifenhäute.

Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Darmstadt, AG Geometrie

Die lange Nacht der Mathematik