Kürzeste auf der Erde

Lange Nacht der Mathematik 2025

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Was ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Erde?

Diese Frage ist für uns alle relevant, da durch die Kenntnis der kürzesten Strecke Energie- und Zeitersparnisse möglich sind. Insbesondere gilt dies für die Luft- und Schifffahrt, da durch eine suboptimale Route potentiell siginifikant höhere ökonomische und ökologische Folgen zu tragen sind. Um die folgenden Berechnungen zu vereinfachen und uns auf die grundlegende Geometrie zu konzentrieren, vernachlässigen wir die Unebenheit der Erdoberfläche. Das heißt wir fassen die Erde nun als idealisierte Kugel auf. Ziel dieser Station ist es, eine Charakterisierung aller kürzesten Strecken auf einer Kugel zu erhalten. Diese Fragestellung wird im folgenden Abschnitt mathematisch modelliert.

Mathematische Modellierung

Ein Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ liegt auf einer Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, falls er in der Menge

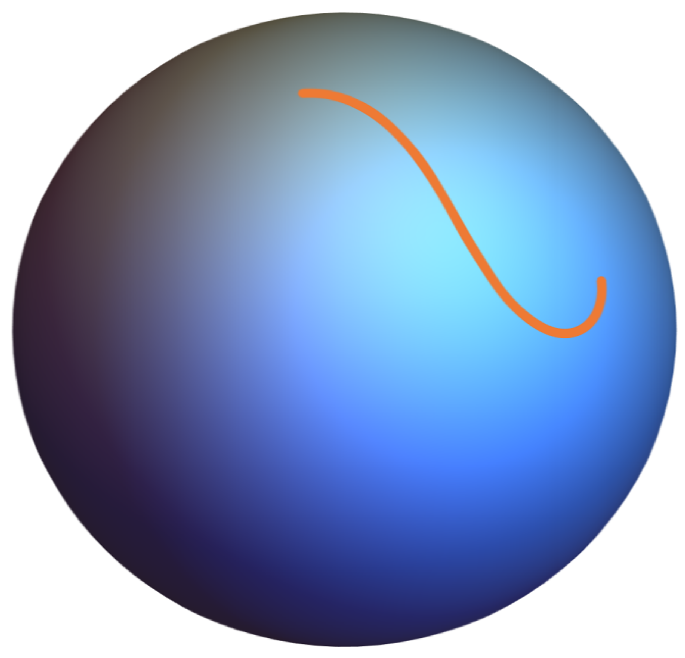
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \; .$$

liegt. Seien nun A und B zwei Punkte auf der (Erd-)kugel, dann kann man eine beliebige Verbindung von A nach B auf K als Kurve $c(t)$ darstellen. Hierbei ist c eine stetige Funktion $c : [0, 1] \mapsto K$, die $c(0) = A$ und $c(1) = B$ erfüllt. Nun suchen wir unter allen Kurven c von A nach B diejenige Kurve c^* mit minimaler Länge. Die Kürzeste erfüllt also

$$L\left(c^*\right) \leq L\left(c\right) \quad \text{für alle Kurven } c \text{ von } A \text{ nach } B \; ,$$

wobei $L(c)$ die Länge der Kurve c angibt.

Beispiel einer Kurve auf einer Kugeloberfläche



Die Gerade ist nicht immer der schnellste Weg

In einer Ebene ist es schnell ersichtlich, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A und B durch die Verbindungsstrecke gegeben ist. Im Fall von Kürzesten auf einer Kugel reicht es dagegen nicht aus, die Punkte A und B auf einer Karte der Erde, also einer Projektion der Kugeloberfläche in die Ebene, zu verbinden. Dies kann man zum Beispiel an der kürzesten Strecke zwischen Frankfurt und San Francisco erkennen. Dafür sind in der Karte rechts die gerade Verbindungsstrecke (in Gelb) und die Kürzeste (in Rot) eingezeichnet. Die Kürzeste wurde hierbei durch das Einspannen eines Fadens zwischen dem Start- und Endpunkt auf einem Globus erhalten und dann auf die Karte projiziert. Es fällt auf, dass die kürzeste Kurve in Rot augenscheinlich deutlich länger als die gelbe Kurve ist. Diese Diskrepanz resultiert aufgrund der Kartenprojektion, die eine Verzerrung der Längenverhältnisse erwirkt.

Einmal über den Atlantik

Mathematische Auflösung

Durch das oben beschriebene Einspannen eines Fadens erkennt man, dass die Kürzeste eine Teilmenge eines Kreises ist, der die Punkte A und B enthält. Dies ist auch anhand von Abbildung 1 leicht ersichtlich. An Abbildung 2 sehen wir, dass Kreise als Schnitt der Kugel mit einer Ebene erzeugt werden können. Allerdings existieren unendlich viele Ebenen, die als Schnittebene verwendet werden können. Um diejenige Ebene auszuwählen, deren Schnitt mit der Kugel die Kürzeste enthält, berechnen wir die Länge des Weges von A und B, die jede Ebene induziert. Abbildung 3 visualisiert in Rot den Teil eines Kreisbogens mit Radius r. Dieser Radius wird durch die Wahl der Schnittebene festgelegt. Mithilfe von trigonometrischen Argumenten und Abbildung 3 lässt sich die Länge des roten Kreissegmentes als

$$d^*_{A,B}(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{2\varphi(r)}{360°} = r * \frac{\pi}{90°} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{||A - B||}{2 \cdot r}\right)$$

angeben. Die Funktion d^* ist in Abbildung 4 zu sehen. Wir erkennen, dass sich die Länge des Kreissegmentes reduziert, je grösser der Radius ist. Da es keine Kreise gibt, deren Radius den Kugelradius übertreffen, wird der Abstand zwischen zwei Punkten minimiert, indem der Radius des Kreises r dem Radius der Kugel R entspricht. Daraus folgt, dass die Schnittebene den Kugelmittelpunkt enthält. Schnittkreise, die diese Zusatzbedingung erfüllen, werden auch Großkreise genannt. Somit sind kürzeste Verbindungen auf einer Kugel immer Teilmengen von Großkreisen.

Abbildung 1

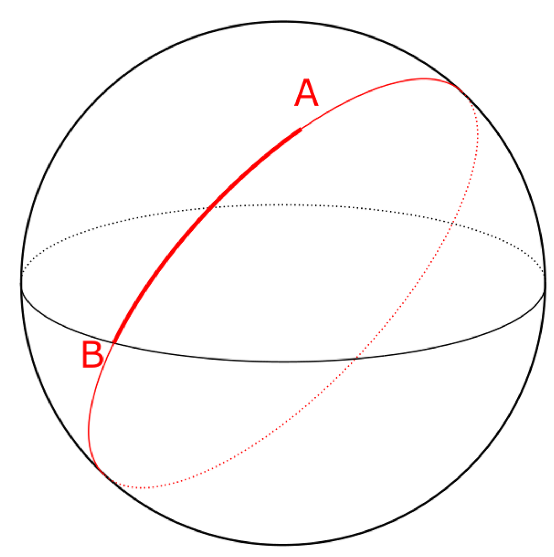


Abbildung 3

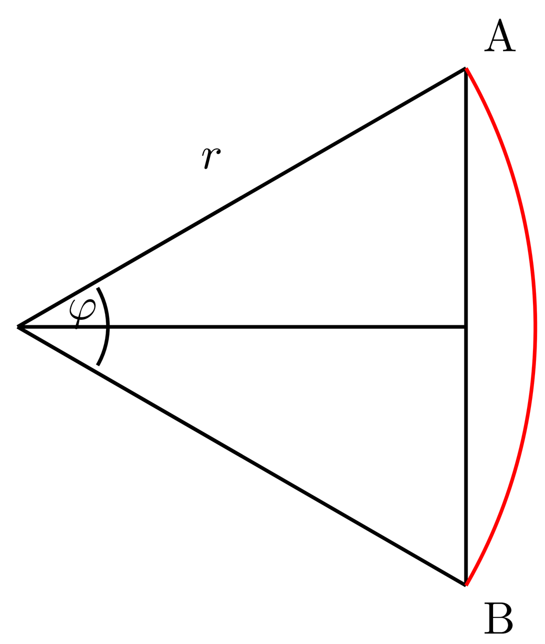


Abbildung 2

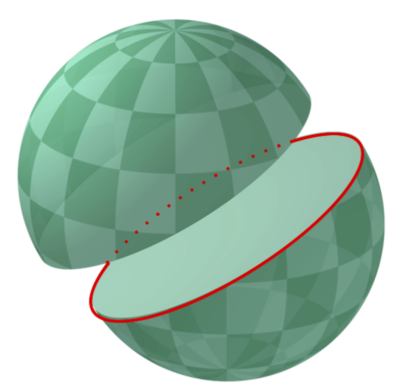
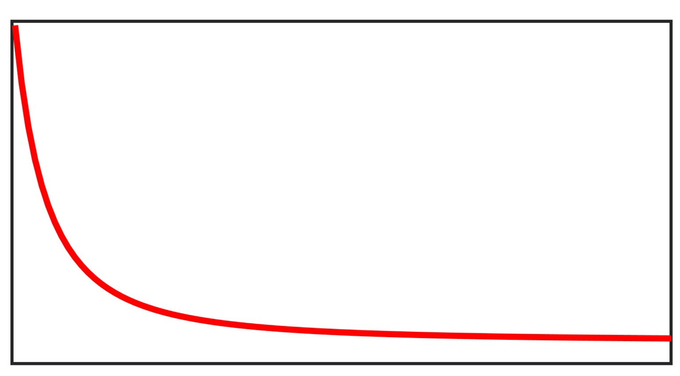


Abbildung 4



Quellen: Die Grafik für „Beispiel einer Kurve auf der der Kugeloberfläche“ sowie die Abbildungen 3 und 4 sind selbst generiert. Die Grafik zu „Einmal über den Atlantik“ wurde mit Hilfe von `https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/kuerzesteverbindung.htm` erzeugt und die Abbildungen 1 und 2 sind unter `https://de.wikiversity.org/wiki/Datei:Great_circle_passing_through_two_points.svg` bzw. `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_circle_hemispheres.png` zu finden und wurden unter den dort einsehbaren Lizenzen verwendet.

Die lange Nacht der Mathematik