



Die Kürzeste Station: Der große Krabbel-Kontest

Lange Nacht der Mathematik 2025



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Motivation

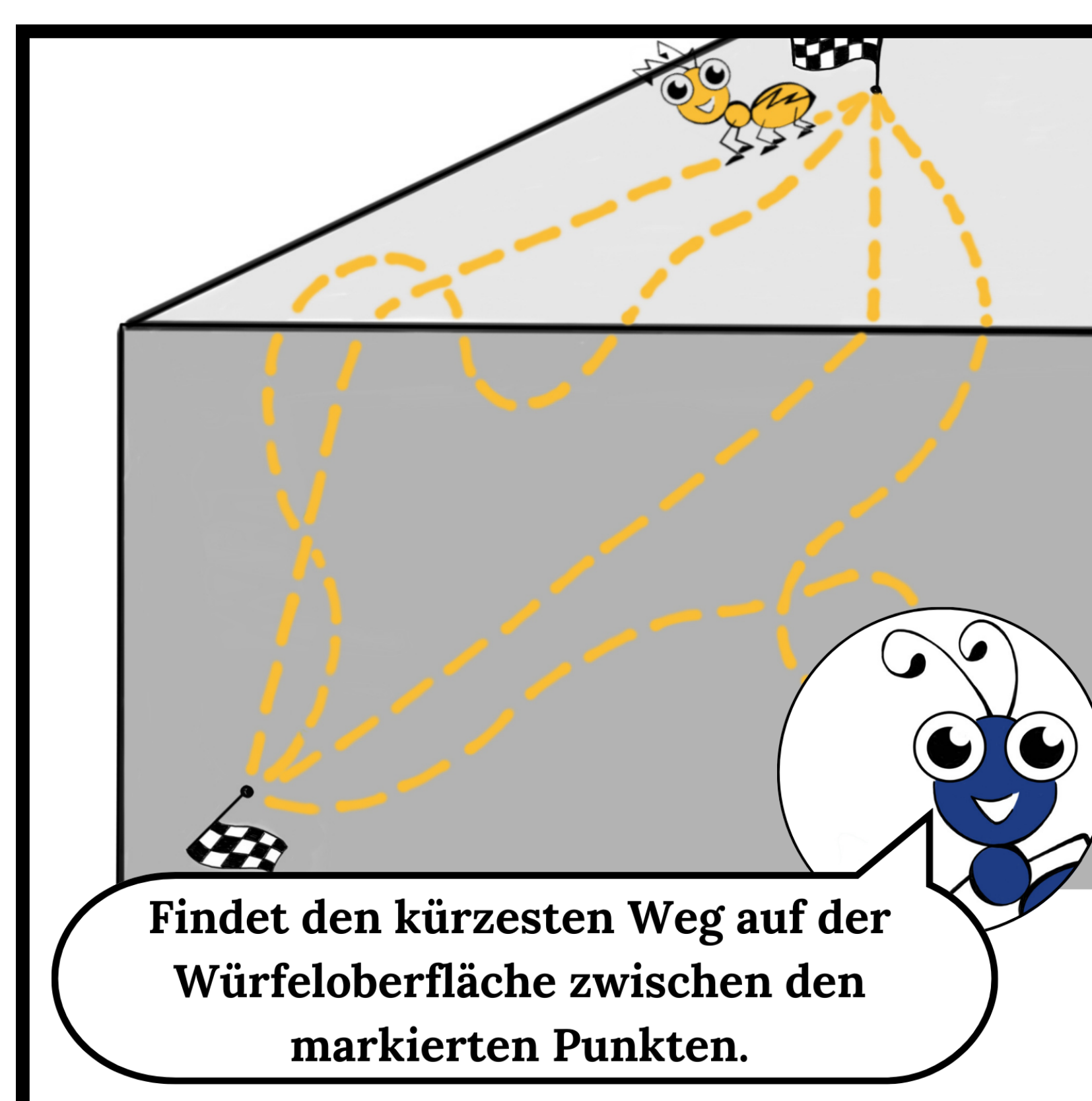
Das Auffinden kürzester Wege zwischen zwei Orten ist ein alltägliches Problem: Wie weit liegen entfernte Orte auseinander? Wie kommt man in einem engen örtlichen Straßenraster am schnellsten von A nach B? Manchmal ist dies ein Teilproblem in einem größeren Zusammenhang, wie z.B. bei der Verlegung von Leitungsnetzen oder bei der Verdrahtung von Chips. Auch in abstrakterem Kontext ist das Problem in den Naturwissenschaften allgegenwärtig: Das Prinzip der Energie-Minimierung läuft auf das Aufsuchen kürzester Wege in geeigneten Räumen hinaus.

Um die zugrunde liegenden Prinzipien aufzuspüren, befasst man sich in der Mathematik gern mit den einfachsten, prinzipiellen Situationen. Als Beispiel betrachten wir in unserer Station die Oberflächen von Polyedern, speziell die Würfeloberfläche. Darauf werden kürzeste Verbindungskurven zwischen verschiedenen Punkten gesucht.

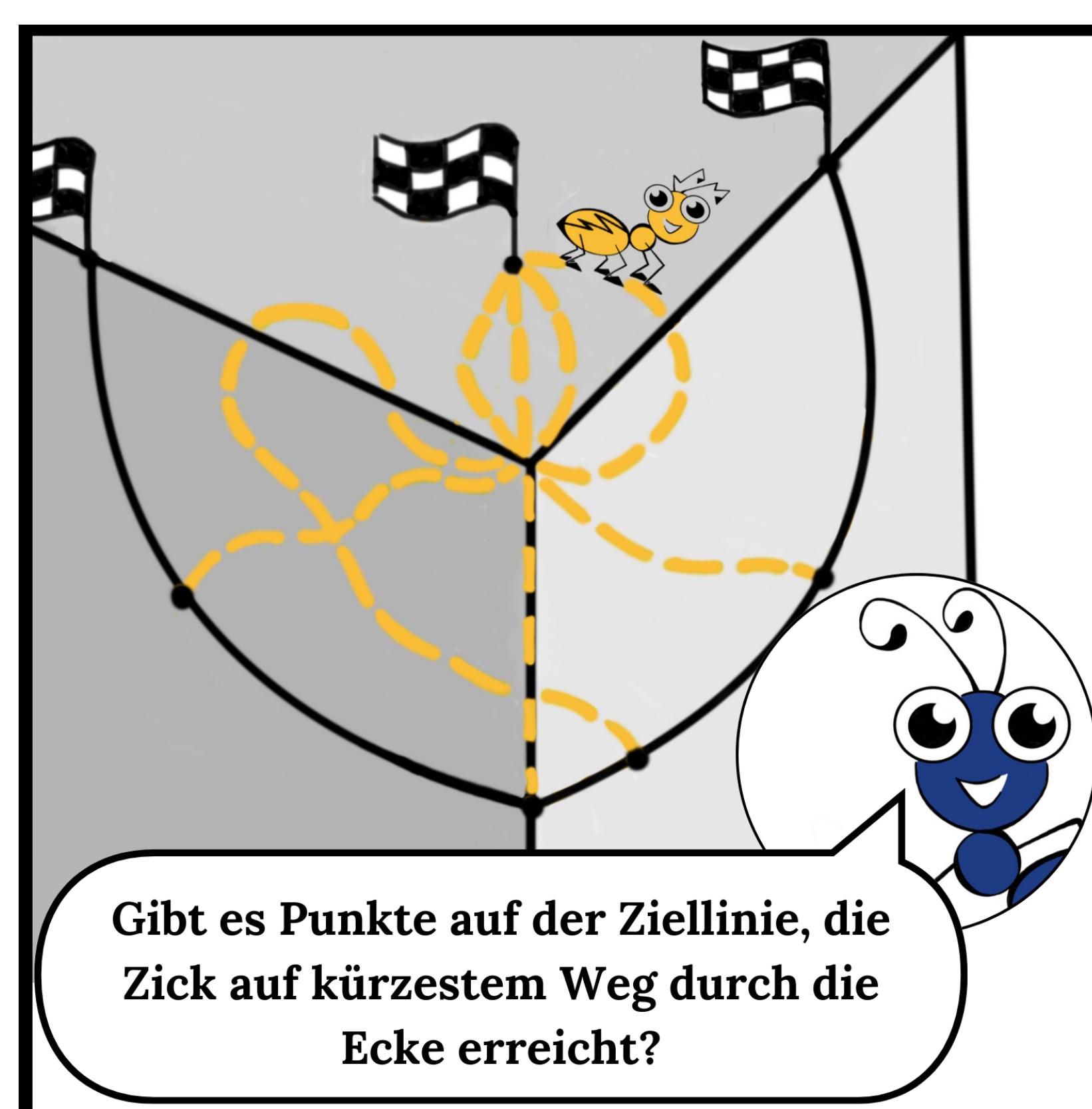


Der **große Krabbel-Kontest** steht an und die ehrgeizige Ameise **Zick** möchte die Krabbel-Krone unbedingt gewinnen. Deshalb habe ich - **Zack** - ein Training vorbereitet. Bitte helft Zick die **kürzesten Wege** zu finden!

1. Trainingseinheit: Kanten



2. Trainingseinheit: Konvexe Ecken



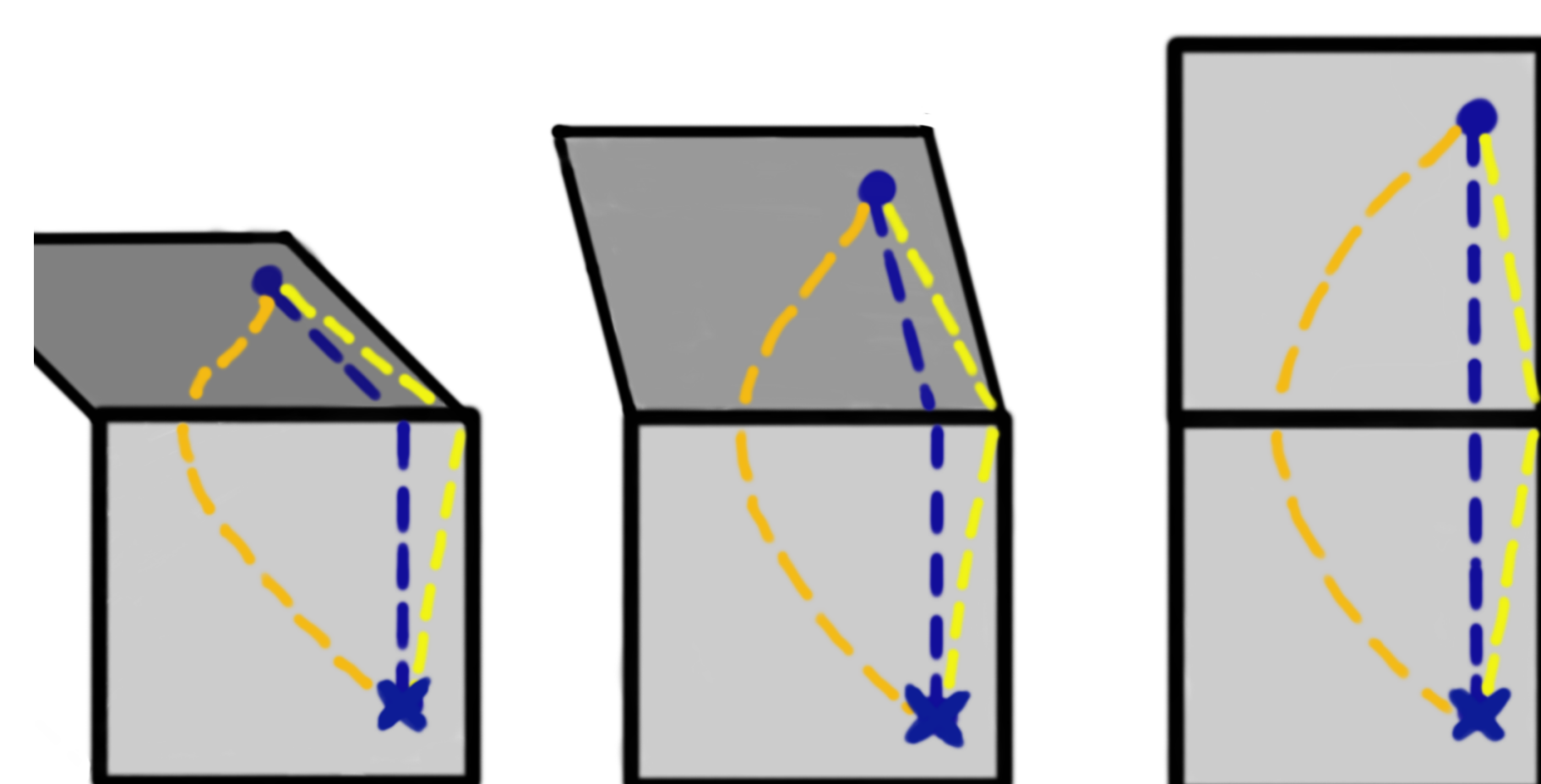
3. Trainingseinheit: Konkave Ecken



Kurz gedacht - Kürzer gemacht!

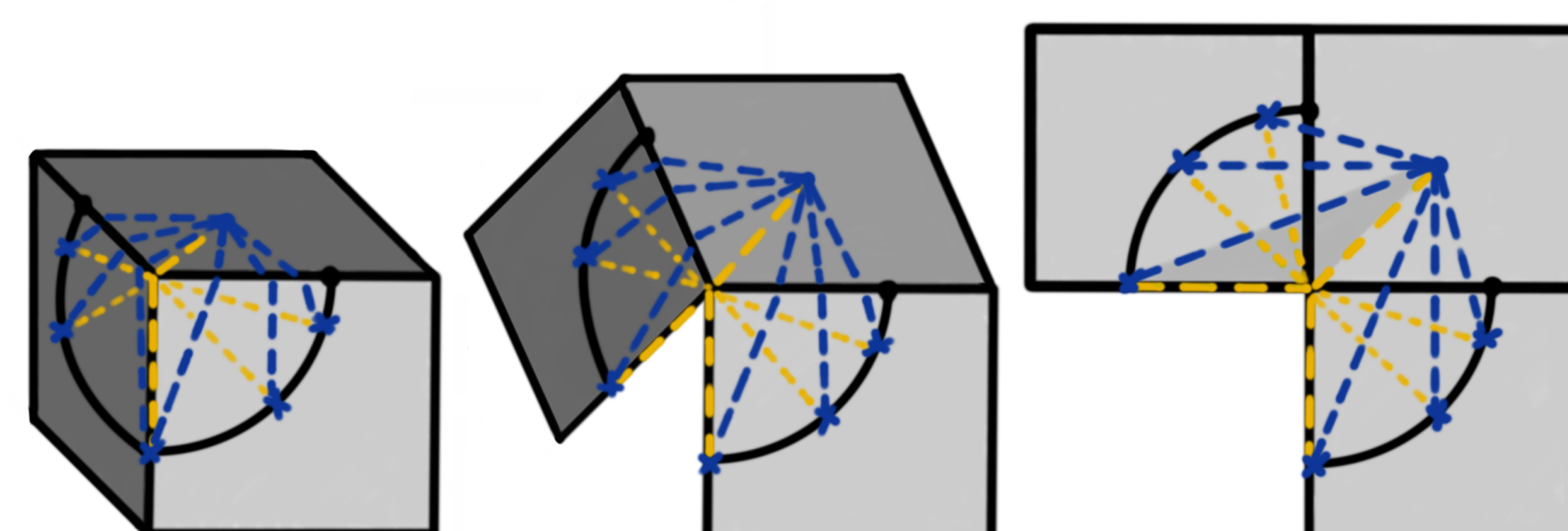


(1) Jede Teilstrecke, die Zick auf einer Fläche des Würfels zurücklegt, muss ein Geradenstück sein, denn dies ist in der Ebene die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Aber welchen Punkt sollte Zick auf dem Rand der Startfläche anvisieren? Beim Aufklappen des Würfels entlang einer Kante ändern sich die Längen der zurückgelegten Wege von Zick nicht. Daher entspricht die kürzeste Verbindung in Trainingseinheit 1 gerade der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten im aufgeklappten Würfelnetz.



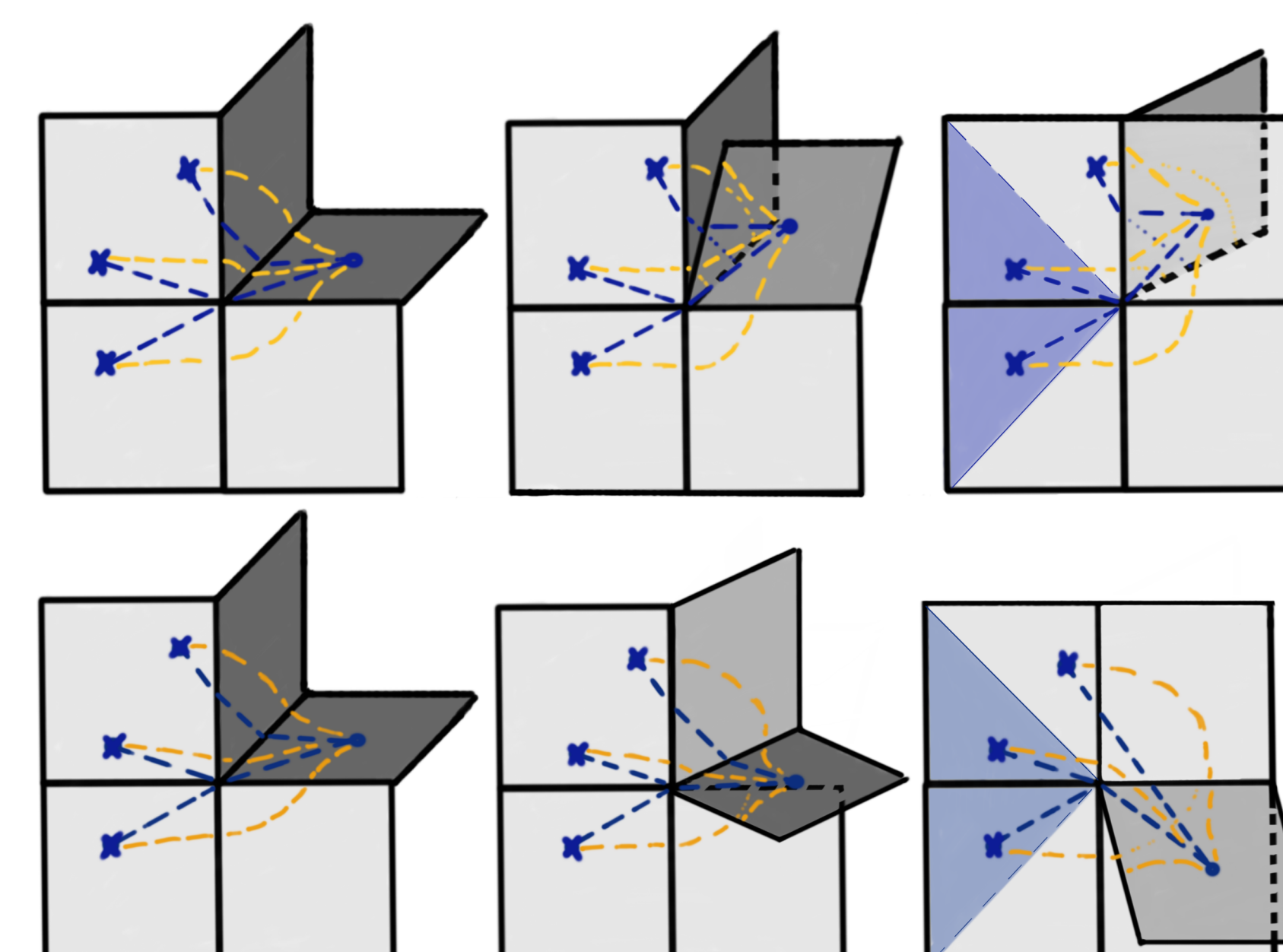
(2) In dieser Trainingseinheit wollen wir verstehen, warum es keinen Punkt auf der Ziellinie (zwischen den beiden Fahnen) geben kann, den Zick über die Ecke auf kürzestem Weg erreicht. Tatsächlich laufen kürzeste Verbindungen auf dem Würfel niemals über eine Ecke.

Wir wissen, dass in jeder Würfecke drei Quadrate zusammenkommen, nicht vier wie in der Ebene. Deshalb kann man einen Würfel rund um die Ecke auf verschiedene Weisen aufklappen. Bei geschicktem Aufklappen wird jeder Punkt der Ziellinie auf einem Nachbarquadrat zur Startfläche dargestellt. Nach Trainingseinheit 1 führt eine geradlinige Verbindung am kürzesten dorthin. Sämtliche Verbindungsstrecken treffen die Ecke aber nicht! Ein Weg über die Ecke ist daher ein Umweg.



(3) In der letzten Trainingseinheit beschäftigen wir uns mit einer anderen Art Ecke. Das L-förmige Objekt besitzt eine Ecke, in der 5 Quadrate zusammenkommen. Hier schneiden wir die 5 Quadrate rund um die Ecke auf zwei verschiedene Weisen auf, um kürzeste Wege auf einem ebenen Netz zu suchen.

Nehmen wir an Zick läuft vom Startpunkt aus vorschrittsgemäß über Kanten geradeaus rüber, aber nicht durch die Ecke. Dann kann er den blau eingefärbten Bereich nicht erreichen. Also muss Zick für Zielpunkte in diesem Bereich durch die Ecke laufen! Die kürzeste Verbindung zu Punkten in dem blauen Bereich besteht dann aus zwei Geradenstücken, die Start und Ziel über die Ecke verbinden.



Zusatz-Knobelei

Ist euch aufgefallen, dass es in **Trainingseinheit 2** einen Punkt gibt, den Zick auf **verschiedenen kürzesten Wegen** erreichen kann? Kürzeste Wege sind nämlich nicht immer eindeutig!

- 1.) Welche Punkte kann Zick von einer **Flächenmitte** aus auf mehreren kürzesten Wegen erreichen? Wie viele Wege gibt es jeweils?
- 2.) Was ändert sich, wenn Zick in einer **Ecke** startet?

