



Karten der Erde

Lange Nacht der Mathematik 2025



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Karten einer Fläche

Eine *Karte* einer Fläche ist eine 1:1-Abbildung f von einer Teilmenge der Fläche in $\mathbb{R}^3$ auf eine Teilmenge U einer Ebene. Wir möchten *differenzierbare* Karten betrachten, d.h. die Umkehrabbildung $f^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar und an jeden Punkt der Fläche kann man in erster Ordnung eine Ebene (*Tangentialebene*) anlegen.

Besondere Karten

Um Abstände auf der Erde (ungefähr eine Kugeloberfläche) korrekt mit einer Karte abzubilden, wäre eine längentreue Karte ideal. Leider gibt es diese aber **nicht**, siehe ganz rechts.

Hier am Stand lernen Sie auch, dass der **Abstand** (die kürzeste Verbindung) zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche die **Länge des Großkreisbogens** ist, der die beiden Punkte verbindet. Der Abstand ist damit immer kleiner oder gleich πR , wobei R der Radius der Kugel ist.

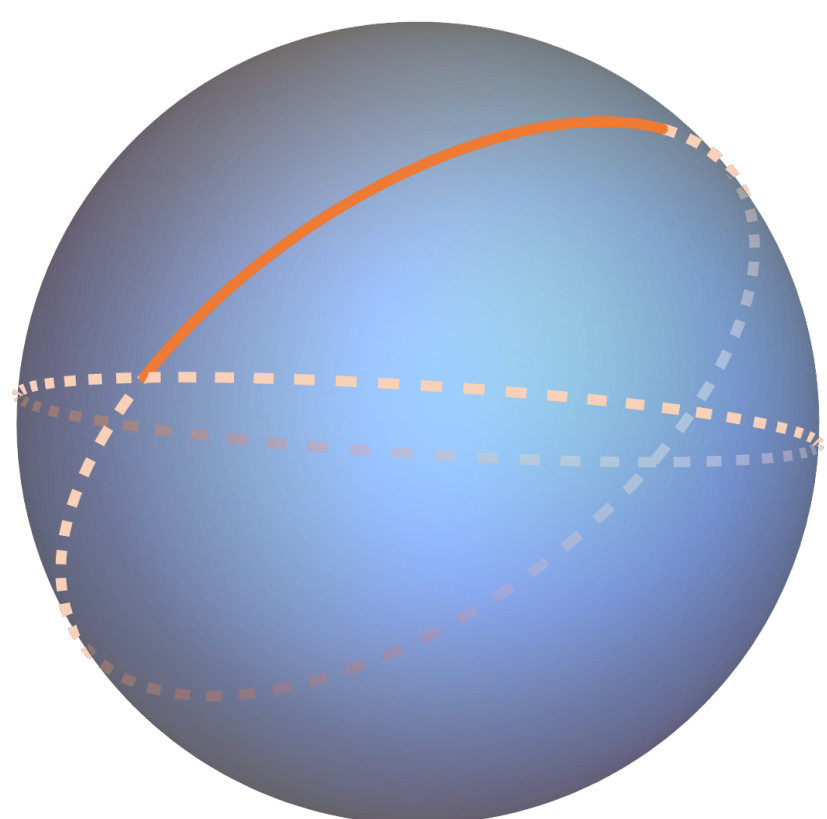
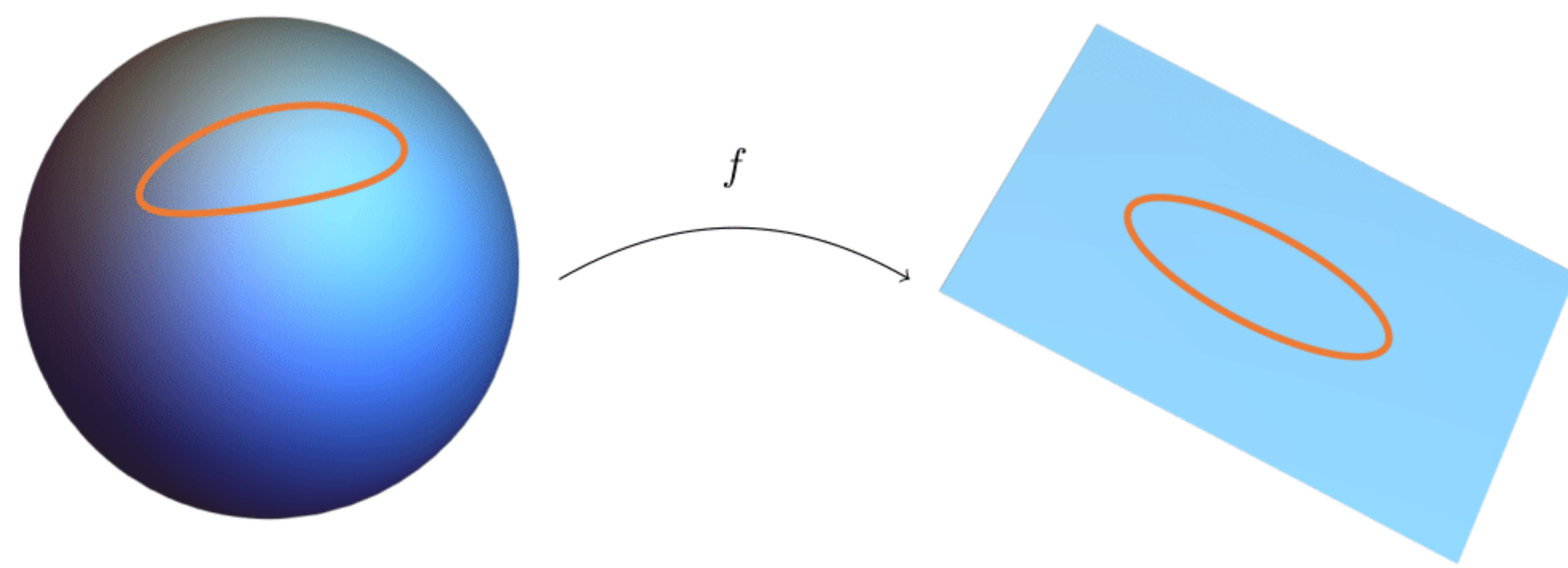


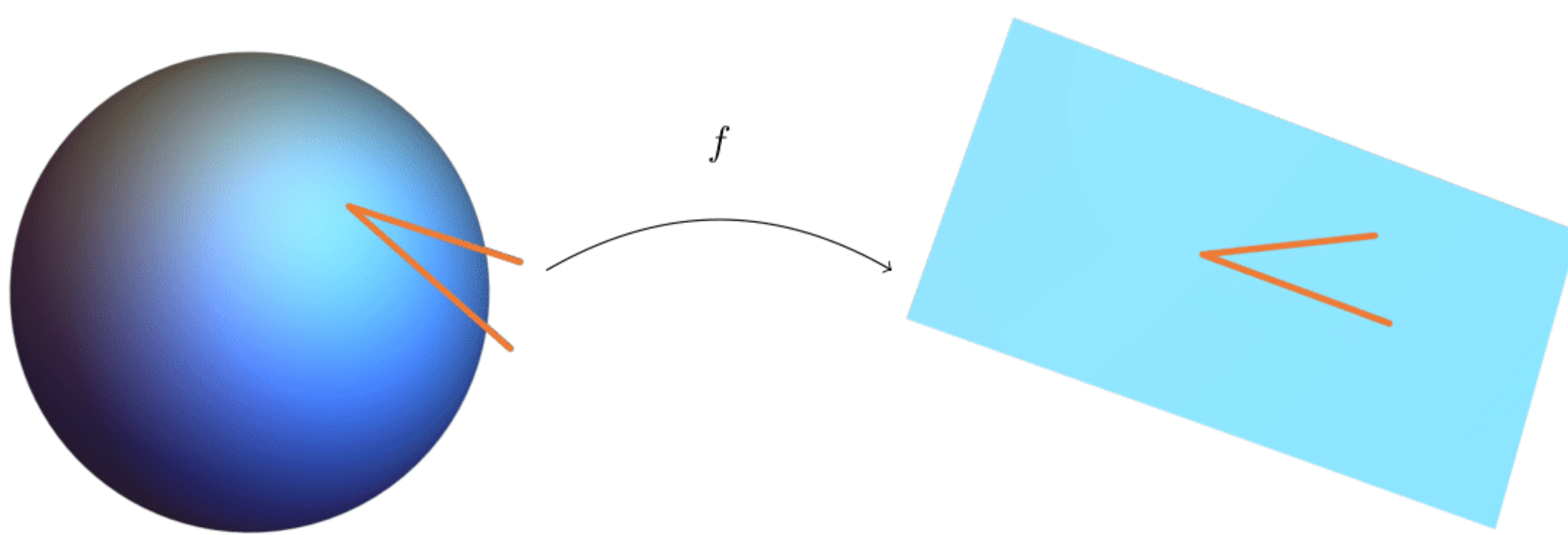
Bild: Distanzen auf einer Kugeloberfläche sind Längen von Großkreisbögen

Flächentreue Karte



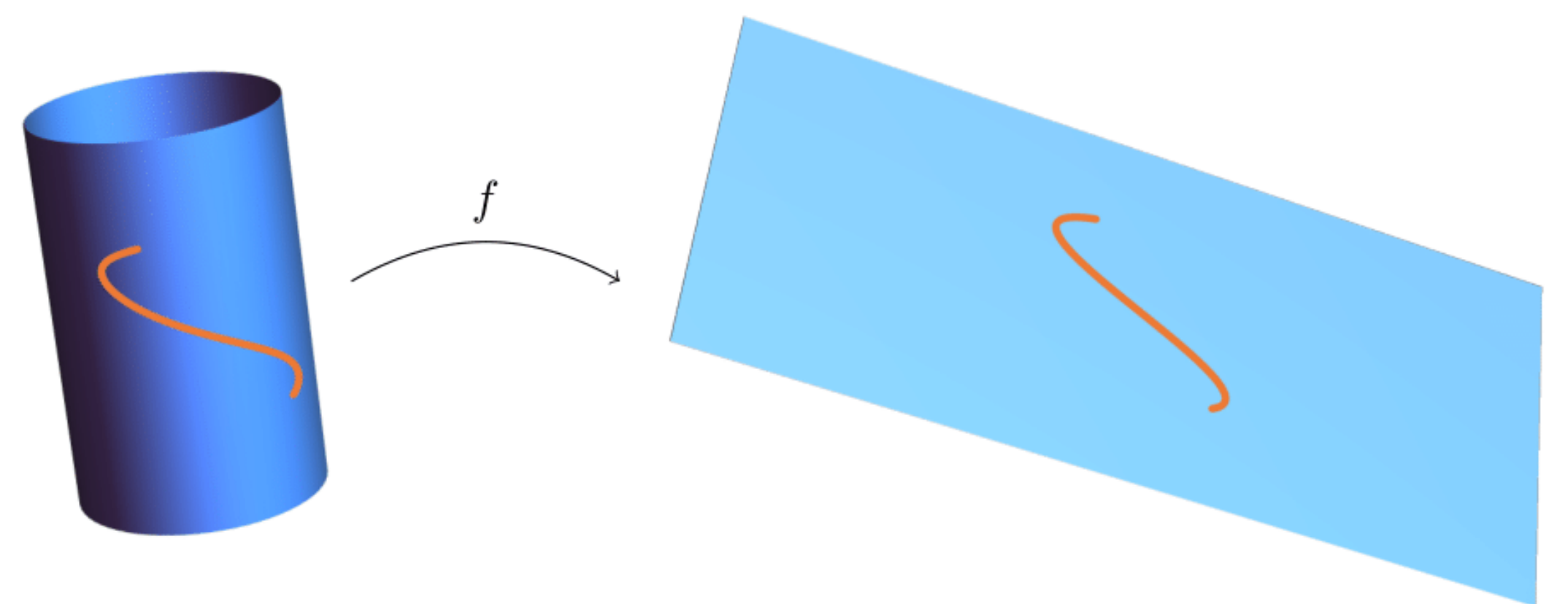
Eine Karte f heißt *flächentreu*, wenn jede Teilmenge V der Fläche denselben Flächeninhalt hat wie $f(V)$. Im obigen Beispiel ist V das ellipsenartige Flächenstück links und $f(V)$ die Fläche, die von der Ellipse rechts berandet wird.

Winkeltreue Karte



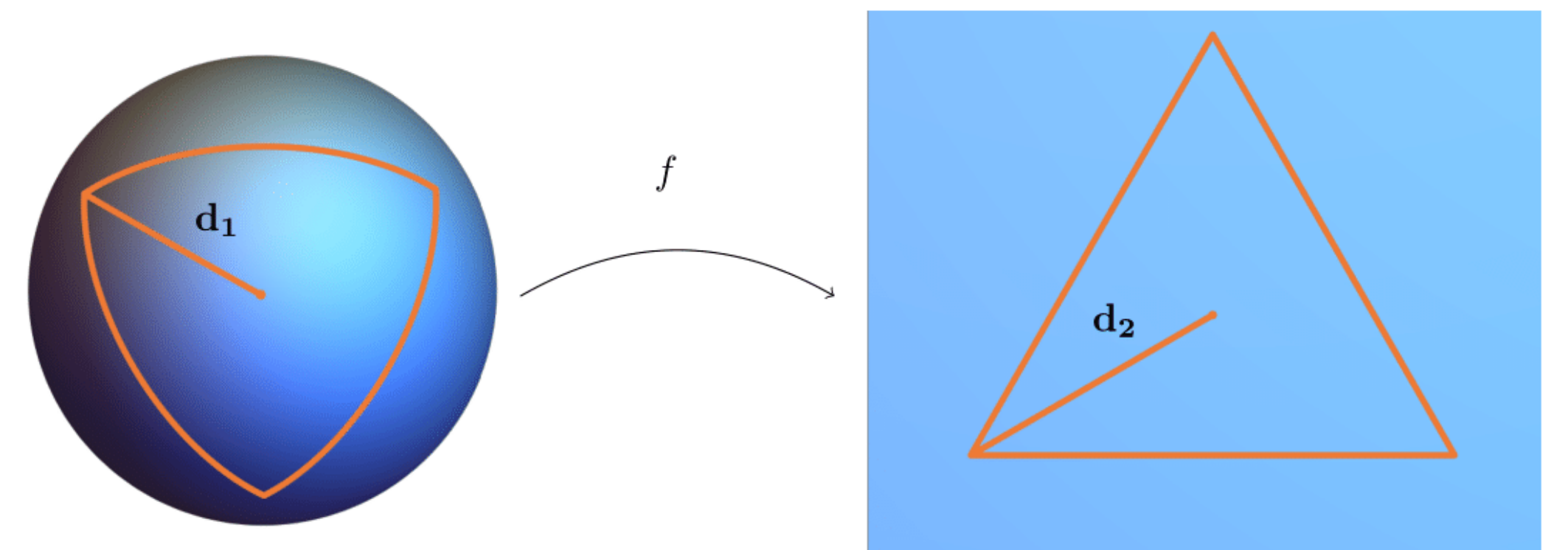
Winkeltreu heißt eine Karte dann, wenn die Winkel zwischen Tangentialvektoren von Kurven auf der Fläche (dies sind Geradenstücke) erhalten bleiben, wenn man ihre Bilder unter f betrachtet.

Längentreue Karte



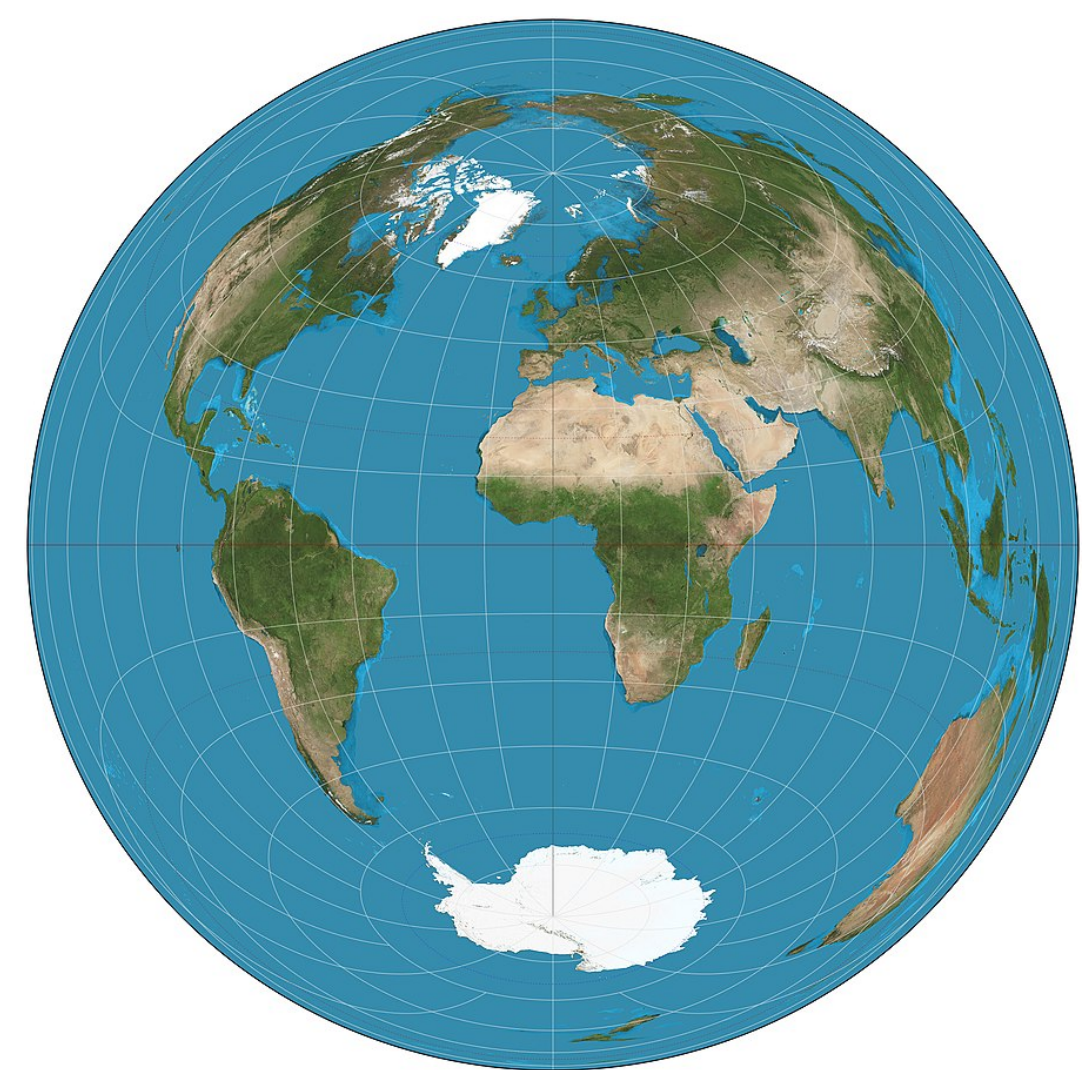
Eine Karte heißt *längentreu*, wenn jede Kurve c auf der Fläche dieselbe Länge wie $f(c)$ (also die zugehörige Kurve in U) hat.

Keine längentreue Karte der Kugeloberfläche



Wenn es eine längentreue Karte f eines Kugeloberflächenstückes gäbe, so wähle man darin drei Punkte, die voneinander dieselbe Distanz (= Länge des Großkreisbogens, der zwei Punkte verbindet) haben. Hier im Bild haben die drei Punkte die Entfernung $\frac{\pi}{3}R$, wobei R der Radius der Kugel ist. Da f nach Annahme längentreu ist, müssen auch die drei Bilder der Ecken unter f dieselbe Distanz in der Ebene (= Länge der geraden Strecke zwischen Punkten) haben. Nun finden wir in diesen beiden „Dreiecken“ einen weiteren Punkt, der von allen Ecken denselben Abstand d_1 bzw. d_2 hat. Wir berechnen, dass dieser Abstand d_1 im Urbild ca. $0,9553 \cdot R$ ist, und der im Bild $d_2 \approx 0,9069 \cdot R$ erfüllt. Insbes. $d_1 \neq d_2$ und somit war f doch nicht längentreu.

Lambert-Karte (flächentreu)



© Daniel R. Strebe, 15. August 2011

Die Lambert-Karte (1772) ist eine flächentreue Karte der Erde, das heißt zum Beispiel, dass Länder mit ihrer tatsächlichen Größe abgebildet werden. Der Preis dafür ist jedoch, dass die Form der Länder nicht der Realität entspricht. So werden zum Beispiel Regionen am Rand der Karte sehr stark in die Länge gezogen.

Zu beachten ist hier, dass der gegenüberliegende Punkt des Mittelpunkts der Karte nicht auf einen Punkt abgebildet wird, sondern auf den ganzen Rand der Karte. Viele Karten haben ihren Mittelpunkt in Europa, sodass z.B. Australien sehr verzogen dargestellt wird. Legt man den Mittelpunkt nach Australien, bekommt man eine sehr gute Karte für eben genau diesen Bereich.

Mercator-Karte (winkeltreu)

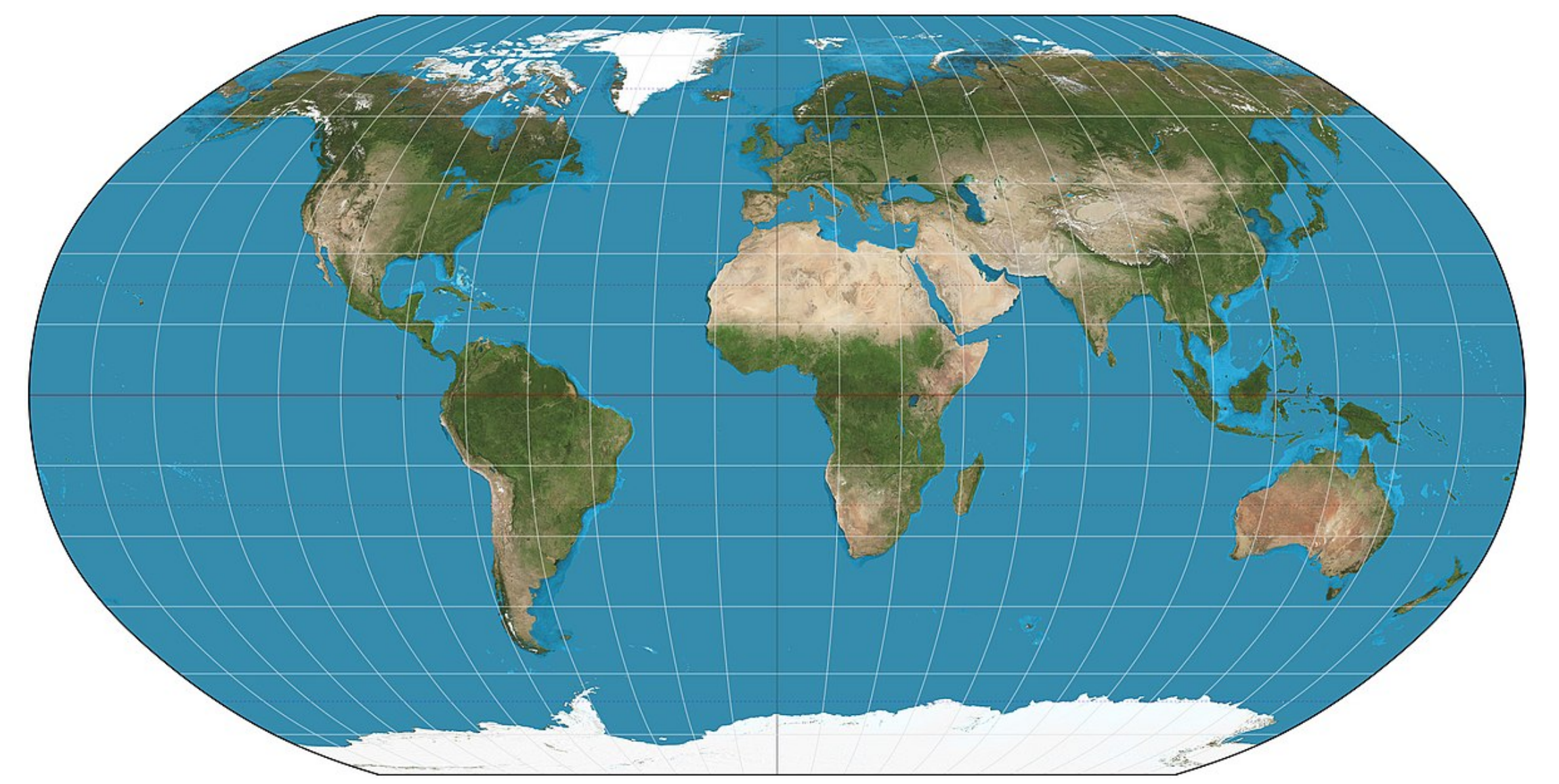


© Daniel R. Strebe, 16. Dezember 2011

Die Mercator-Karte (1569) ist eine winkeltreue Karte der Erde und wird über eine sogenannte *Zylinder-Projektion* konstruiert. Es handelt sich hierbei allerdings nicht um eine optische Projektion, das heißt, sie lässt sich nicht als Lichtstrahlen von einem Punkt ausgehend visualisieren, sondern ist mittels einer mathematischen Vorschrift konstruiert.

Zwar werden Regionen nahe der Pole sehr groß dargestellt, dafür stimmt die Form der Länder lokal mit ihrer tatsächlichen Form überein. Diese Karte eignet sich insbesondere für Seefahrende sehr gut, denn ein konstanter Kurs ist auf der Mercator-Karte eine gerade Verbindung. Diese Verbindungen heißen *Loxodrome* und ihr Längen sind nahe an denen der Großkreisbögen dran.

Robinson-Karte (vermittelnd)



© Daniel R. Strebe, 15. August 2011

Die Robinson-Karte (1963) ist weder flächentreu noch winkeltreu. Dafür ist sie aber fast überall nah dran und stellt einen Kompromiss zwischen beiden Eigenschaften dar. Sie ist nicht mithilfe einer mathematischen Formel konstruiert, sondern anhand von vielen Messdaten.

Im Gegensatz zu vielen anderen Karten, ist auf der Robinson-Karte die ganze Erdoberfläche abgebildet. Dabei werden allerdings die Pole nicht auf einen Punkt sondern auf ein Geradenstück abgebildet.

