# www.amustud.de

# Materialien für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht

*von Regina Bruder und Maria Ingelmann, Darmstadt*

*Unter der Adresse www.amustud.de stehen seit 2004 frei zugängliche Materialien für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht ab Klasse 5 aller Schulformen einschließlich beruflicher Schulen zur Verfügung, die von Lehramtsstudierenden im Rahmen einer jeweils im Wintersemester an der TU Darmstadt stattfindenden Lehrveranstaltung mit Projektcharakter entwickelt und teilweise bereits im Unterricht erprobt wurden. Im Beitrag wird ein Einblick in die erarbeiteten Materialien gegeben und das dahinter stehende Konzept für einen in einem weiten Sinne anwendungsorientierten Mathematikunterricht erläutert.*

## 1 Angebot der Materialplattform www.amustud.de

Die Materialplattform www.amustud.de existiert seit 2004 und wurde mit dem Ziel eingerichtet, Lehramtsstudierenden an der TU Darmstadt Gelegenheit zu geben, ihre Arbeitsergebnisse einem breiten Interessentenkreis zu präsentieren. Alle Teilnehmer an dem Projektseminar „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht" gestalten alleine oder in einer Kleingruppe eine eigene homepage zu einem mit Mitteln der Mathematik bearbeitbaren Thema mit den dazu ggf. erforderlichen Hintergrundinformationen und entwickeln geeignete Aufgaben verschiedener Formate mit Lösungsvorschlägen. Die 27 bisher online gestellten Seiten bieten interessante und größtenteils auch authentische Fragen bzw. Aufgabenstellungen an unter den folgenden Rubriken:

**Kunst und Geschichte** (Imperium Romanum, Kartographie, Fantasy, Mathematik und Musik, Kunst)

**Schule** (Schulfest, Imaginäre Schule, Chemie)

**Geld** (Kassensturz, Projekt private Altersvorsorge, Projekt Marketing, Geld-Bank und Börse)

**Alltag und Freizeit** (Fußball-WM 2006, Tour de France, mit dem Auto unterwegs, Olympische Spiele, Prozentrechnen, Spiele in der Mathematik, Mathebrille im Alltag)

**Bau und Technik** (GPS, Schwimmbad, Fernsehturm, Bau-Projekte, die Mathebaustelle, Solar-Projekt, Flugzeuge).

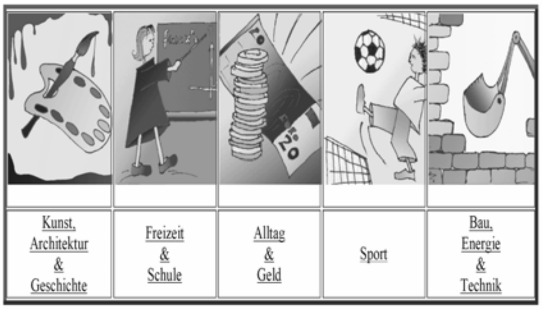


**Abbildung 1: Startseite der Plattform**

Zum Abschluss der Lehrveranstaltung präsentieren die Studierenden Teile ihrer Homepage mit ihren Arbeitsprodukten an zwei Nachmittagen vor Referendaren und Studienseminar- bzw. Fachleitern aus dem Darmstädter Umkreis. Ziel ist das Bilden von Tandems zwischen Studierenden und Referendaren, die in der vorlesungsfreien Zeit gemeinsam die entwickelten Aufgaben und Konzepte im Unterricht erproben. Eine Betreuung erfolgt durch die Fachleiter vor Ort. Auf diese Weise kann eine für alle Beteiligten motivierende und inhaltlich sinnvoll eingebundene Kooperation zwischen erster und zweiter Ausbildungsphase realisiert werden. Die Erfahrungsberichte werden nachträglich in die Homepage eingefügt wie z.B. bei M. Brunner zu „Prozentrechnen“ in der Rubrik „Alltag und Freizeit“ oder münden bereits in eine eigene Publikation wie bei Gose [1], Rubrik „Kunst“.

Der Besuch einer solchen Lehrveranstaltung ist eher zum Ende des Hauptstudiums vorgesehen. Diese Veranstaltung wird mit vier Semesterwochenstunden ausgewiesen und findet seit 2003 jeweils im Wintersemester wöchentlich zweistündig als Präsenzseminar statt. Die anderen beiden Stunden sind für die Arbeit mit einer webbasierten Lernplattform (Moodle) vorgesehen, vgl. www.proLehre.de. Weitere Details zu dieser E-Learning Veranstaltung sind in Bruder [2] dargestellt.

## 2 Konzeption für die Arbeitsprodukte auf der Materialplattform

Ziel der projektartigen Wahlpflichtveranstaltung „Anwendungsorientierter Mathematikunterricht“ ist es, Kenntnisse und Handlungskompetenzen zur Vorbereitung und Reflexion eines in einem weiten Sinne anwendungsorientierten Mathematikunterrichts zu erwerben. Es bedarf dazu einerseits überzeugender, übertragbarer Beispiele für gelingende Unterrichtskonzepte, mit denen eine Beispiel- bzw. „Musterorientierung“ als Vermittlungsqualität erworben werden kann. Die verschiedenen Orientierungslevel (Probierorientierung – Musterorientierung – Feldorientierung) in der Tätigkeitstheorie nach Lompscher, Galperin u.a. werden in [3] beschrieben. Darüber hinaus sind konzeptionelle Kenntnisse und Fähigkeiten notwendig, um selbst eigene Beispiele generieren zu können und damit die angestrebte „Feldorientierung“ als Maß für eine hohe Professionalität zu erreichen.

Im Folgenden wird auf methodische Aspekte zur Realisierung eines in einem weiten Sinne anwendungsorientierten Mathematikunterrichts fokussiert. Es lassen sich drei Zugänge unterscheiden, vgl. auch Bruder [3]:

**A) Ein Anwendungsfeld wird projektartig mit mathematischen Mitteln erschlossen:**

**- Reale Fragestellungen und Probleme dominieren und strukturieren den Kurs,**

**- Es wird i.w. die Mathematik entwickelt und geübt, die tatsächlich „gebraucht“ wird.**

Themenbeispiele findet man dazu u.a. in allen ISTRON-Materialien und bei der MUED (www.mued.de) z.B. zur Finanzmathematik, Verpackungsoptimierung, Vermessung usw. Dieser Ansatz ist im Sinne von Weinert [4] besonders geeignet, Handlungskompetenzen bei den Lernenden auszubilden, weniger jedoch, intelligentes mathematisches Wissen auf der Ebene einer „Feldorientierung“ hervorzubringen.

C. Klaas hat auf seiner website „Fußballweltweisterschaft 2006“ solche Aufgaben beschrieben. Hier ein Beispiel:

***Verkehrsprobleme***

*In der Allianz Arena in München finden 69.900 Menschen Platz. Da es jedoch vor Ort nur 9.800 PkW-Parkplätze, 1.200 VIP-Parkplätze und 350 Busparkplätze gibt, müssen viele Fans das Stadion mit der U-Bahn erreichen.*

*Schätzt zunächst wie viele Menschen mit der U-Bahn fahren. Modelliert dann, in welchen Zeitabständen nach Spielende U-Bahnen am Stadion fahren müssen, damit es zu keinen großen Wartezeiten kommt.*

**B) Ein Mathematisierungskonzept wird mit Aufgabensequenzen systematisch mathematisch und mit typischen Anwendungen erschlossen sowie mit Vorwissen vernetzt entwickelt und reflektiert**

Die Themenfelder Wachstum (linear, quadratisch, exponentiell, logistisch), Mittelwerte oder z.B. auch Verpackungsoptimierung (wie viel Oberfläche wird jeweils mindestens benötigt, um ein Volumen von 1dm³ in verschiedenen geometrischen Formen zu verpacken? – vgl. auch Bruder [5]) eignen sich sehr gut für eine solche Vorgehensweise, in der nicht ein einzelnes komplexes Problem oder Projekt im Mittelpunkt steht sondern ein vielseitiges Mathematisierungskonzept mit typischen Anwendungssituationen. Das Mathematisierungskonzept erschließt sich über eine Folge von aufeinander bezogenen Fragestellungen und Vernetzungen zu bereits Bekanntem, die auch durch bestimmte Problemlösestrategien zusammen gehalten werden können.

Eine Einführung in die Kreislehre von Brückner [6] ist nach dem hier mit intendierten Prinzip einer Arbeitsplanung mit den Lernenden aufgebaut.
Ein solcher Ansatz ist im Sinne von Weinert [4] geeignet, um in Verbindung mit intelligentem mathematischen Wissen und Anwendungswissen auch Metakompetenzen wie etwa das sinnvolle Strukturieren eines Arbeitsprozesses auszubilden. Für die Ausbildung von Handlungskompetenzen im jeweiligen Themenfeld wären projektorientierte Arbeitsphasen zu ergänzen bzw. vorzuschalten.

Auf der Materialplattform bieten die Seiten von U. Müller zur privaten Altersvorsorge oder von T. Scheuermann zum Finden einer optimalen Anlagestrategie jeweils in der Rubrik „Geld“ einige bereits ausgearbeitete Anregungen in dieser Richtung.

Für die berufliche Schule hat J.-O. Stock ein reales Bauprojekt aufbereitet – Rubrik „Bau und Technik“. Hier geht es um den Neubau einer Tiefgarage, der auch so stattgefunden hat.

**Abbildung 2: Baustelle einer Tiefgarage**

Die mit konkreten Daten formulierten Fragestellungen beginnen mit Problemen beim Abstecken des Arials und reichen vom Aushub über das Gießen der Bodenplatte aus Beton bis zu Schalung und Stützen.

**C) In einen stärker an der mathematischen Sachlogik orientierten Unterricht werden abschnittsweise Anwendungsaufgaben „eingestreut“**

Eine Unterrichtseinheit kann z.B. mit einer lebensweltbezogenen Fragestellung zum Thema Optimierung, Wachstum, Vermessung o.ä. beginnen und nach einer systematischen Behandlung mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren nach innermathematischer Logik werden erneut Anwendungen in einzelnen voneinander unabhängigen (auch offenen) Aufgaben in den Übungen aufgegriffen und bearbeitet.

Auf diesem Wege kann intelligentes mathematisches Wissen effektiv entwickelt und eingeübt werden. Für die Ausbildung von Handlungskompetenzen im Themenfeld sind eingestreute Anwendungsaufgaben jedoch meist nicht ausreichend und intensive projektartige Arbeitsphasen besser geeignet. Für die Entwicklung von Metakompetenzen wären ergänzende Reflektionen und Vernetzungen notwendig. Wünschenswert wären solche Aufgabenformate, die eine Verknüpfung des Potenzials zum Generieren von intelligentem Wissen mit Handlungskompetenzen ermöglichen.

Die folgende Aufgabe von K.Gose geht in diese Richtung:

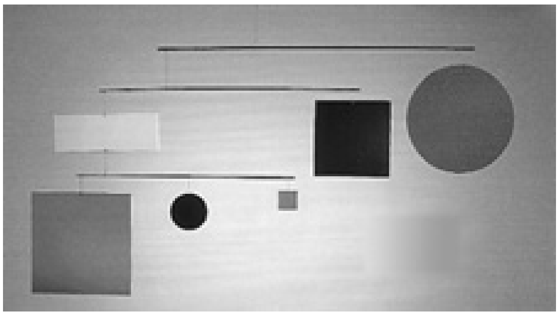

**Abbildung 3: Greenberg-Mobile 1998**

*Bei diesem Mobile (Abb.3) handelt es sich um ein Kunstwerk, welches 1998 von Kingsley Greenberg für das Guggenheim Museum in New York entworfen wurde. Das Mobile soll nachgebaut werden. Dazu ist zu berechnen, an welchen Stellen die Fäden des Mobiles befestigt werden müssen.*

Mathematische Kenntnisse sind erforderlich, um die Flächeninhalte der geometrischen Figuren zu berechnen und zu vergleichen. Weiterhin ist der Umgang mit Maßstäben und Brüchen gefordert, vgl. das Arbeitsblatt auf der Plattform bzw. in [1].

In den Beispielen auf der Materialplattform wird gerne auf geschlossene Formate zurück gegriffen mit Variationsoptionen auch im Sinne von Biermann/Wiegand/Blum [7], um zielführend entweder mathematische Wissenselemente zu entwickeln oder an Anwendungskompetenzen (Modellieren, Problemlösen, Argumentieren) zu arbeiten.

Die Schulfestaufgabe von C. Reeg ist ein solches Beispiel:

***Schulfest***

*Die Albert-Einstein-Schule veranstaltet ein großes Schulfest. Die 10. Klassen betreiben einen Grillstand, an dem Steaks und Bratwürstchen verkauft werden sollen. Für den Einkauf legt die Schule bis zu 250€ vor. Paul soll sich um die Bestellung der Waren kümmern. Da er keine Idee hat wie viele Würstchen und Steaks gebraucht werden, befragt er Sandra und Andreas, deren Klassen in den vorangegangenen Jahren den Grillstand organisiert haben.*

*Sandra: „Ihr werdet maximal doppelt so viele Würstchen wie Steaks brauchen.“*

*Andreas: „Mindestens die Hälfte eures Einkaufs sollten Würstchen sein.“*

*Sandra: „Ihr solltet außerdem darauf achten, dass ihr mindestens 150 Portionen zur Verfügung habt.“*

*Andreas: „Und natürlich sollte das von der Schule vorgestreckte Geld für die gesamte Bestellung ausreichen, damit ihr nicht an eure Klassenkasse gehen müsst.“*

*Die Bratwürstchen und die Steaks sollen jeweils mit Brötchen und Ketchup serviert werden. Paul hat dazu die folgenden Preise ausgehandelt:*

*1 Bratwurst 1,00€*

*1 Steak 1,50€*

*1 Brötchen 0,20€*

*1 Portion Ketchup 0,05€*

*Der Grill, Strom und Geschirr werden von der Schule kostenlos gestellt.*

- *Bestimme alle den Tipps entsprechenden Kombinationsmöglichkeiten von Würstchen- und Steak-Stückzahlen.*
- *Welche Mengen muss Paul bestellen, damit der Gewinn maximal wird, wenn ein Bratwürstchen mit Beilagen für 2,50€ und ein Steak mit Beilagen für 4,00€ verkauft wird?*
- *Wie hoch ist dieser Gewinn?*

**Lösung:**

Anzahl der Bratwürstchen: $x$ Anzahl der Steaks: $y$

Aus den Hinweisen von Andreas und Sandra und der begrenzten Startkapital erhält man folgendes Ungleichungssystem:

$x + y \geq 150$
$2y \geq x$
$x \geq y$
$1{,}25x + 1{,}75y \leq 250$

Alle entsprechenden Kombinationsmöglichkeiten von Würstchen- und Steak-Stückzahlen liegen innerhalb des von den Geraden eingeschlossenen Planungsgebietes, das in der Abb.4 markiert ist. Der Gewinn *G* wird durch die folgende Funktion *G(x,y) = 1,25x+2,25y* beschrieben. Löst man diese Gleichung nach y auf erhält man eine Schar von parallelen Geraden der Form y=-5/9x+4/9G. Alle Wertepaare, die auf einer solchen Geraden liegen, werfen bei verschiedenen Wertepaaren *(x,y)* den selben Gewinn *G* ab.

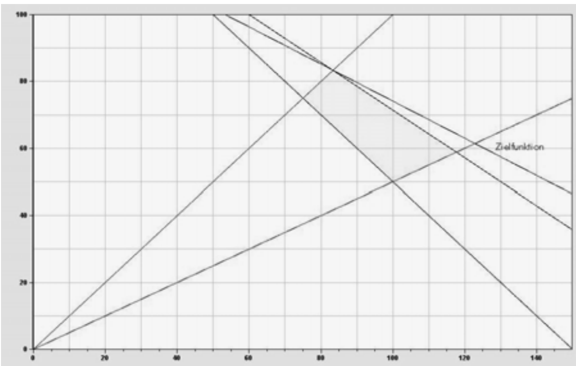


**Abbildung 4: Lösungsraum**

Die Gerade, die den maximalen Gewinn beschreibt, berührt das Planungsgebiet in seinem höchsten Punkt *(83,33; 83,33)* und ist in der Abbildung braun dargestellt. Da man keine Drittel-Würstchen verkauft, wird das Ergebnis abgerundet.

Es gilt damit $G_{max} = G((83; 83)) = 290{,}5$.

D.h. bei einem Einkauf von 83 Würstchen und 83 Steaks der Gewinn mit 290,50€ maximal wird, sofern alle Ware wirklich verkauft werden kann.

Im Abschluss einer Unterrichtsreihe sollten offenere Aufgabenformate eingesetzt werden mit Reflektionsanteilen wie Entwicklung einer Mindmap oder eigenen Anwendungsbeispielen, die viel Spielraum aber auch eine klare Orientierung zur Reflektion und Beschreibung des individuellen Lernzuwachses geben. Diese Aufgabenstellungen sind entscheidend für die Weiterentwicklung der bis dahin ausgebildeten „Beispielorientierung“ möglichst hin zu einer „Feldorientierung“ bei den Schüler/innen.

Von den Studierenden werden im Verlauf der Lehrveranstaltung zwei zu präsentierende Arbeitsergebnisse erwartet: Ein **Aufgabenset** für einen Mathematikunterricht mit „eingestreuten“ Anwendungsaufgaben zu einem selbst gewählten Stoffgebiet (Variante C) und ein Konzept für eine projektartige anwendungsorientierte Unterrichtsreihe – möglichst im gleichen Anwendungskontext wie das Aufgabenset mit Orientierung an Variante A oder B. Die gelungendsten Aufgaben werden auch in der Aufgabendatenbank für Mathematiklehrkräfte www.madaba.de veröffentlicht. Diese Datenbank bietet den Studierenden gleichzeitig Anregung und Unterstützung für das Erstellen eines eigenen Aufgabensets und für eine kritische Auseinandersetzung mit anwendungsorientierten Aufgaben.

Ein **Aufgabenset** in unserem Konzept umfasst verschiedene Anforderungen zu einem mathematischen Thema (also zu einem zentralen Begriff, Satz, Verfahren), die eine Art Geländerfunktion für nachhaltiges Lernen haben. Sie reichen von der Grundaufgabe zum Thema, deren Abwandlung und Erweiterung über eine Komplexaufgabe mit Standardcharakter der Teilaufgaben und aufsteigender Offenheit der Fragestellung (Blütenmodell) bis schließlich zur Komplexaufgabe mit Problemcharakter und ganz offenen Fragestellung (Modellierungsaufgabe als Trichtermodell), vgl. auch Bruder [8].

Ein Beispiel für eine „Blütenaufgabe“ mit Differenzierungspotenzial ist die folgende von C. Klaas im Rahmen seines Fußball-WM-Projektes entwickelte Aufgabe:

***Sportwetten***

*WM-Zeit, Sportwettenzeit. Wer kennt das nicht, vor und während der WM werden mit Freunden, Bekannten, Kollegen oder der Familie eifrig Spiele und der WM-*

*Gewinner getippt. Es gibt aber auch immer mehr professionelle Sportwettenanbieter, bei denen man sein Geld setzen kann und je nach Quote unterschiedlich viel Geld gewinnen kann. In Tabelle 1 finden wir die genauen Wettquoten für die Spiele der Gruppe A bei der Fußball-WM 2006, welche durch die Analyse von über 2000 Spielen berechnet wurden und nach neuen Partien laufend aktualisiert werden. Setzt man beispielsweise 1 Euro auf einen Sieg/ ein Unentschieden/ eine Niederlage von Deutschland gegen Polen erhält man 2,20 Euro/4,90 Euro/2,93 Euro zurück.*

*a) Angenommen du setzt 10 Euro ein, tippst drei Spiele und liegst bei allen drei Spielen richtig, wie errechnet sich dann dein Gewinn?*

*b) Mit welchem 3er-Tipp für 10 Euro könntest du am meisten Geld verdienen? Wie wahrscheinlich ist es, dass du gewinnst?*

*c) Du setzt 10 Euro ein und tippst auf Unentschieden von Polen gegen Deutschland und Siege für Polen gegen Ecuador und Costa Rica. Wie hoch ist deine Gewinnwahrscheinlichkeit und wie hoch wäre dein Gewinn? Ist die Gewinnsumme angesichts der Gewinnwahrscheinlichkeit gerecht?*

*d) In Teil c) hast du gesehen, dass Sportwetten nicht unbedingt gerecht sein müssen. Würdest du trotzdem wetten und warum?*

| | 1 | X | 2 |
|---|---|---|---|
| **Deutschland - Polen** | **2.20** (45.5%) | **4.90** (20.4%) | **2.93** (34.1%) |
| **Deutschland - Costa Rica** | **1.61** (62.1%) | **7.04** (14.2%) | **4.22** (23.7%) |
| **Deutschland - Ecuador** | **1.77** (56.5%) | **6.13** (16.3%) | **3.68** (27.2%) |
| **Polen - Costa Rica** | **1.79** (55.8%) | **6.02** (16.6%) | **3.62** (27.6%) |
| **Polen - Ecuador** | **2.01** (49.8%) | **5.32** (18.8%) | **3.18** (31.4%) |
| **Costa Rica - Ecuador** | **2.90** (34.5%) | **4.83** (20.7%) | **2.23** (44.8%) |

**Tabelle1: Wettquoten für die Gruppenspiele der Gruppe A**

Lösungshinweise befinden sich auf der Materialplattform.

Mit dem Konstrukt **Aufgabenset** wird eine Verbindung zwischen verschiedenen kompetenzfördernden geschlossenen und offenen Aufgabenformaten zu jedem Unterrichtsthema hergestellt, die es den künftigen Lehrkräften erleichtern kann, Schwerpunkte zu setzen für eine langfristige Kompetenzentwicklung der Lernenden. Ein solches Gerüst an relevanten Lernanforderungen zu einem Thema bietet Orientierung in dem oft überreichen Materialangebot von Lehrbüchern, gedruckten Aufgabensammlungen oder im Internet.

Mit der Forderung nach Kreation eines Projektbeispiels neben dem Aufgabenset soll der Blick auf alternative Einstiege oder Ausstiege in einer Unterrichtsreihe gelenkt werden, um Handlungskompetenzen bzgl. angemessener Methodenvielfalt vorzubereiten. Die exemplarisch in den Beispielen realisierten Aufgabenvariationen zeigen sehr schön das Potenzial, das in offeneren Aufgabenstellungen steckt. Allerdings sind die mathematischen Anforderungen in geschlosseneren Aufgaben meist klarer definiert und haben oft auch einen größeren Anteil an den Bearbeitungsaktivitäten der Schüler. Um eine gewisse Ausgewogenheit zwischen stringenten mathematischen Anforderungen und freien Modellierungsteilhandlungen auch zeitökonomisch zu erhalten, bieten sich die „Blütenaufgaben“ an, die mehrere Formate miteinander verbinden. Ferner zeigen die Blütenaufgaben einen Weg, wie man eine Lerngruppe auch schrittweise an die oft noch ungewohnten komplexen offeneren Aufgabenstellungen heranführen kann

Die Materialplattform www.amustud.de wird weiter ausgebaut, verbessert und angereichert werden. Die Autoren freuen sich über Rückmeldungen zu weiteren Unterrichtserfahrungen mit den entwickelten Beispielen und Themen.

## Literatur


Gose, K.(2006): Einfache Gleichungen kunstvoll lösen. In: mathematik lehren, Heft 135, S. 52-53

Bruder, R.(2004): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht – ein Blended Learning Projekt in der ersten Phase der Lehramtsausbildung. In: mathematica didactica 27 (2004) Bd. 2

Bruder, R. (2005): Ein aufgabenbasiertes anwendungsorientiertes Konzept für einen nachhaltigen Mathematikunterricht– am Beispiel des Themas „Mittelwerte“. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation. Festschrift für Werner Blum. Franzbecker: Hildesheim, Berlin, S. 241-250

Weinert, F.W. (1999): Die fünf Irrtümer der Schulreformer. Welche Lehrer/innen, welchen Unterricht braucht das Land? In: Psychologie heute, 26 (7), S. 28-34.

Bruder, R.(2002): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In: Flade, Lothar, Herget, Wilfried: Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen, S. 69-78.

Brückner, A. (1992): Für eine umfassendere Problemsicht der Schüler in der Kreislehre. In: mathematik lehren Heft 52, S. 55-59.

Biermann, M., Wiegand, B. & W. Blum (2003): Nicht „irgendwie“, sondern zielgerichtet Aufgaben verändern. In: Aufgaben. Friedrich Jahresheft XXI, S. 32-35

Bruder, R. (2003): Konstruieren – auswählen – begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Ball, H. (2003) (Hrsg): Aufgaben. Lernen fördern – Selbstständigkeit entwickeln. Friedrich Jahresheft XXI 2003. Friedrich: Seelze, 12–15