



Wie viel Platz brauchen Kanonenkugeln?



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

Woher kommt die Frage?

Sir **Walter Raleigh**, 1554(?) – 1618, Seefahrer der britischen Krone, in Teilzeit auch als Pirat unterwegs, hat ein Problem: Wie stapelt man Kanonenkugeln am besten? Sein Assistent, der bedeutende Naturforscher **Thomas Harriot** (1560 – 1621), korrespondiert mit **Johannes Kepler** (1571 – 1630) zu Fragen der Optik und erwähnt nebenbei auch das Kanonenkugelstapelproblem.



Gestapelte Kanonenkugeln in der Burg von Burghausen an der Salzach nach dem Prinzip der dichtesten Kugelpackung. Die unterste Schicht ist hexagonal.

Keplers Antwort

Johannes Kepler stellt in seiner unterhaltsamen Studie ‚Vom sechseckigen Schnee‘ aus dem Jahr 1611 fest: Die Kugeln beanspruchen dann am wenigstens Raum, wenn man, wie an vielen Obstständen, eine unterste Schicht entweder quadratisch oder hexagonal anordnet und die Kugeln der nächsten Schicht jeweils in die Vertiefungen der darunter liegenden Schicht hineinlegt.

In der oberen ‚quadratischen Anordnung‘ (im Bild: A) berührt eine Kugel jeweils vier weitere Kugeln, in der unteren ‚hexagonalen Anordnung‘ (im Bild: B) sind es sechs.

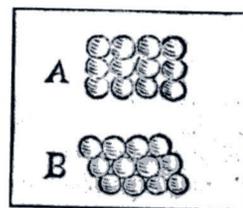
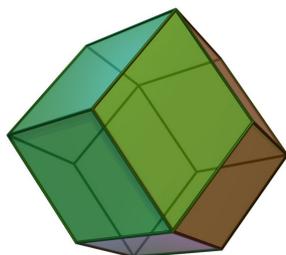


Abbildung aus Keplers Schrift
„Vom sechseckigen Schnee“



Johannes Kepler (1571 – 1630),
Gemälde im Thomasstift, Straßburg

Gequetschte Kugeln im Granatapfel



Kepler fragt sich auch: Was geschieht, wenn man eine dichteste Kugelpackung aus weichen Kugeln zusammenpresst, bis keine Hohlräume mehr bleiben? Seine Antwort: Es entstehen **Rhombendodekaeder**. Auch diese hat **Kepler** entdeckt und findet heraus, dass sich mit ihnen der Raum lückenlos füllen lässt. Er führt in seiner Schrift ‚Vom sechseckigen Schnee‘ aus, dass Bienenwaben die Form von halben Rhombendodekaedern und dass Granatapfelkerne etwa die von ganzen Rhombendodekaedern haben.

Der Beweis von Thomas Hales

Ein Beweis seiner Behauptung über die beste Kugelpackung findet sich bei **Kepler** allerdings nicht. Die ‚Kepler-Vermutung‘ bleibt für **fast 400 Jahre** eines der großen Probleme der Mathematik. Erst im Jahr 2014 gelang **Thomas Hales** und seinen Mitarbeitern ein allgemein anerkannter Beweis zumindest für unendlich ausgedehnte Kugelpackungen: **Kepler hat recht**.

Höher dimensionale Kugelpackungsprobleme

In der Mathematik kann man nicht nur nach dichtesten Packungen von Kreisen und Kugeln fragen, sondern dieselbe Frage auch in höheren Dimensionen stellen. Dies wurde in letzter Zeit besonders bedeutsam für die optimale Packung und Übertragung von Daten, aber die bestmöglichen Packungen waren bis vor kurzem unbekannt. Ein spektakulärer Fortschritt gelang im Jahr 2017 der **ukrainischen Mathematikerin Maryna Viazovska**, als sie zuerst den achtdimensionalen Fall und mit anderen kurz darauf den Fall von 24 Dimensionen lösen konnte. Dafür erhielt sie im Jahr 2022 die **Fields-Medaille**. Diese hohe Auszeichnung wird auch als Nobelpreis der Mathematik bezeichnet.

