



Eckig kann auch rollen

Lange Nacht der Mathematik 2025

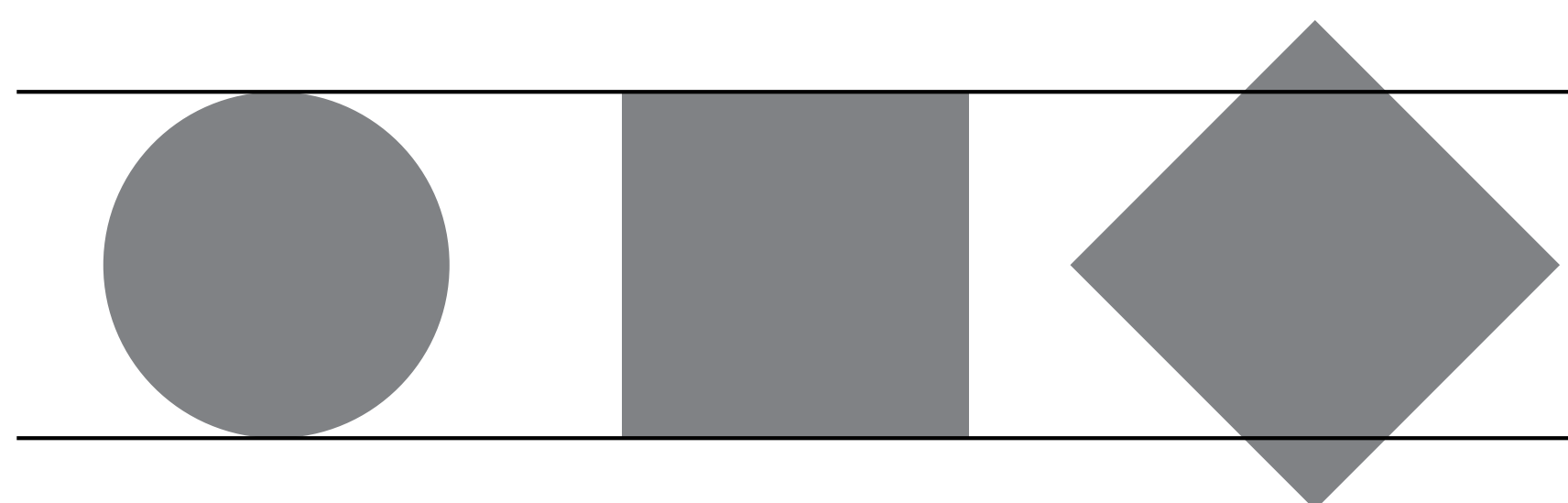


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Flächen konstanter Breite

Flächen konstanter Breite sind Flächen in der Ebene, die in jeder Richtung gleich breit sind. Intuitiv bedeutet dies Folgendes: Klemmt man die Fläche zwischen zwei parallele Geraden, haben diese immer den gleichen Abstand, unabhängig von der Richtung. Flächen konstanter Breite lassen sich also zwischen zwei parallelen Geraden genauso glatt rollen wie ein Kreis.

Die einfachste Fläche konstanter Breite ist ein Kreis: In jeder Richtung ist seine Breite genau sein Durchmesser. Im Gegensatz dazu hat ein Quadrat zwar vertikal und horizontal die gleiche Breite, diagonal aber nicht.

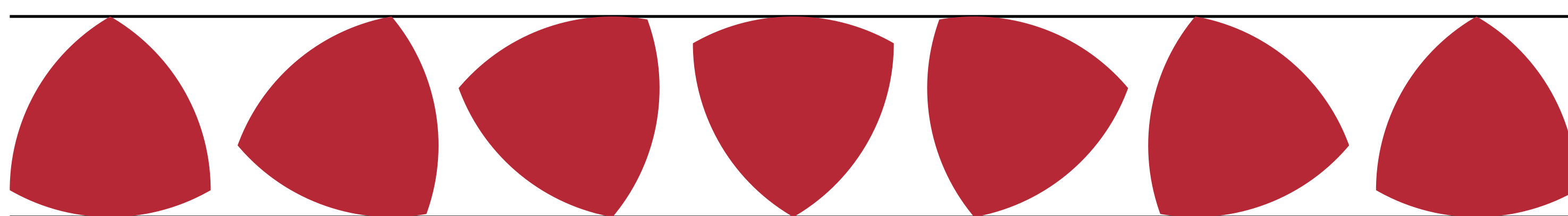
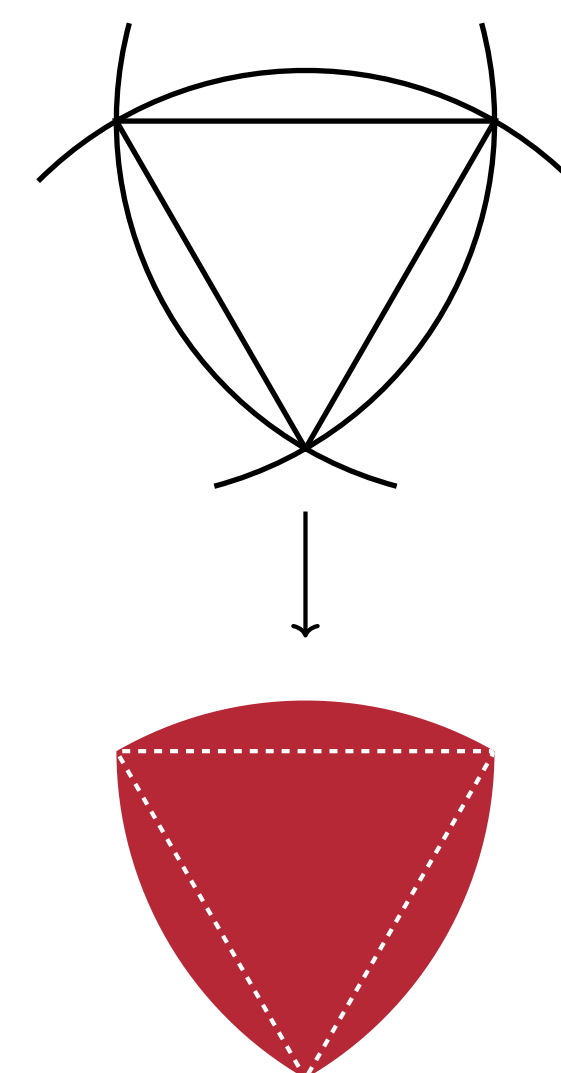


Gibt es außer dem Kreis überhaupt noch Flächen konstanter Breite?

Das Reuleaux-Dreieck

Überraschenderweise ist die Antwort auf diese Frage ja; es gibt sogar unendlich viele andere Flächen, die auch in alle Richtungen gleich breit sind. Die einfachste solche Fläche ist das *Reuleaux-Dreieck*. Benannt ist es nach dem deutschen Ingenieur Franz Reuleaux, der im 19. Jahrhundert maßgeblich zur Entwicklung des Reuleaux-Dreiecks für mechanische Anwendungen beitrug.

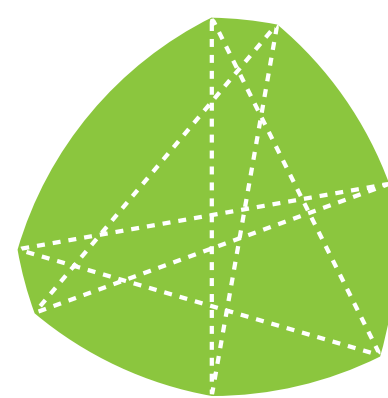
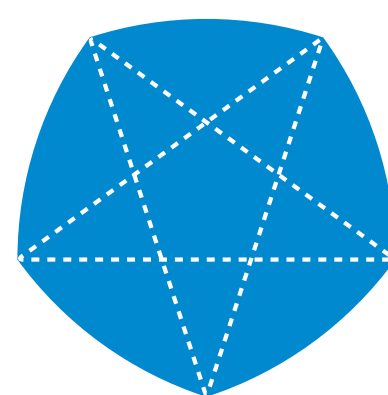
Das Reuleaux-Dreieck kann aus einem gleichseitigen Dreieck konstruiert werden, indem man je zwei benachbarte Eckpunkte mit einem Kreisbogen verbindet, dessen Mittelpunkt der gegenüberliegende Eckpunkt ist. Äquivalent ist das Reuleaux-Dreieck genau die Schnittmenge dieser drei Kreise. Unter allen Flächen konstanter Breite hat das Reuleaux-Dreieck die kleinste Fläche, während der Kreis die größte hat [1, 2].



Reuleaux-Polygone und Meißner-Polyeder

Die Konstruktion des Reuleaux-Dreiecks lässt sich verallgemeinern zu *Reuleaux-Polygonen*, die aus endlich vielen aneinandergesetzten Kreisbögen bestehen. So lässt sich jedes regelmäßige n -Eck mit ungeradem n analog zum Reuleaux-Dreieck zu einer Fläche konstanter Breite ergänzen, es gibt aber auch unregelmäßige solche Flächen.

Genau wie das Reuleaux-Dreieck lassen sich Reuleaux-Polygone als Schnittfläche von Kreisen auffassen. Es gibt jedoch auch andere Flächen konstanter Breite, die nicht von Kreissegmenten begrenzt sind.



Flächen konstanter Breite lassen sich auf drei oder mehr Dimensionen verallgemeinern. Im Dreidimensionalen lassen sich neben Kugeln z.B. auch sogenannte *Meissner-Polyeder* glatt zwischen zwei parallelen Ebenen rollen. Auch diese Körper sparen im Vergleich zur Kugel gleicher Breite Material. Es ist aber unbekannt, welche Körper konstanter Breite das kleinste Volumen haben.

Aktuelle Forschung in höheren Dimensionen

Oded Schramm fragte 1988, wie viel Material man in höherdimensionalen Räumen im Vergleich zur Kugel sparen kann. Mathematisch formalisiert stellte er die Frage:

Kann man in *jeder* Dimension einen Körper konstanter Breite konstruieren, dessen Volumen exponentiell kleiner ist als das Volumen der Kugel?

Wie Reuleaux-Polygone sind auch Meißner-Polyeder Teilmengen des Schnittkörpers mehrerer Kugeln. Einen ähnlichen Ansatz verfolgten 2024 fünf Forscher, um höherdimensionale Körper konstanter Breite mit kleinem Volumen zu konstruieren [3].



Sie beginnen mit einer initialen Menge von Punkten und zeichnen dann um jeden der Punkte eine Kugel. Anschließend konzentriert man sich auf die Geometrie ihrer Schnittmenge, um darin einen Körper konstanter Breite zu finden. Die Forscher experimentierten mit verschiedenen Initialmengen, bis sie eine unendliche Initialmenge fanden, die genau einen Körper konstanter Breite definiert.

Theorem ([3]). Für jede Dimension n existiert ein Körper $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konstanter Breite 1, dessen Volumen höchstens das $0,9^n$ -fache des Volumens der n -dimensionalen Kugel mit Durchmesser 1 beträgt.

Anwendungen

In niedrigen Dimensionen wurden die Reuleaux-Polygone bereits auf verschiedene Weise eingesetzt:

- Bohraufsätze in Form eines Reuleaux-Dreiecks eignen sich zum Bohren quadratischer Löcher: Ein Reuleaux-Dreieck kann innerhalb eines Quadrats rotieren und deckt beim Rotieren fast das gesamte Quadrat ab.
- Münzen haben oft konstante Breite, damit Münzautomaten den Münztyp leicht an der Breite ertasten können. So sind etwa britische 20- und 50-Pence-Münzen Reuleaux-Siebenecke.



Referenzen

- [1] H. Lebesgue, Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante. *Bull. Soc. Math. France* (7) 4 (1921)67–96.
- [2] W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, *Math. Ann.* 76 (1915)504–513. doi:10.1007/BF01458221
- [3] A. Arman, A. Bondarenko, F. Nazarov, A. Prymak, D. Radchenko, Small volume bodies of constant width. *arXiv preprint* (2024) arXiv:2405.18501.

