



Kombinatorische Spiele



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lange Nacht der Mathematik 2024

Kombinatorische Spiele

Ein kombinatorisches Spiel ist bestimmt durch eine Folge von Spielpositionen mit folgenden Eigenschaften:

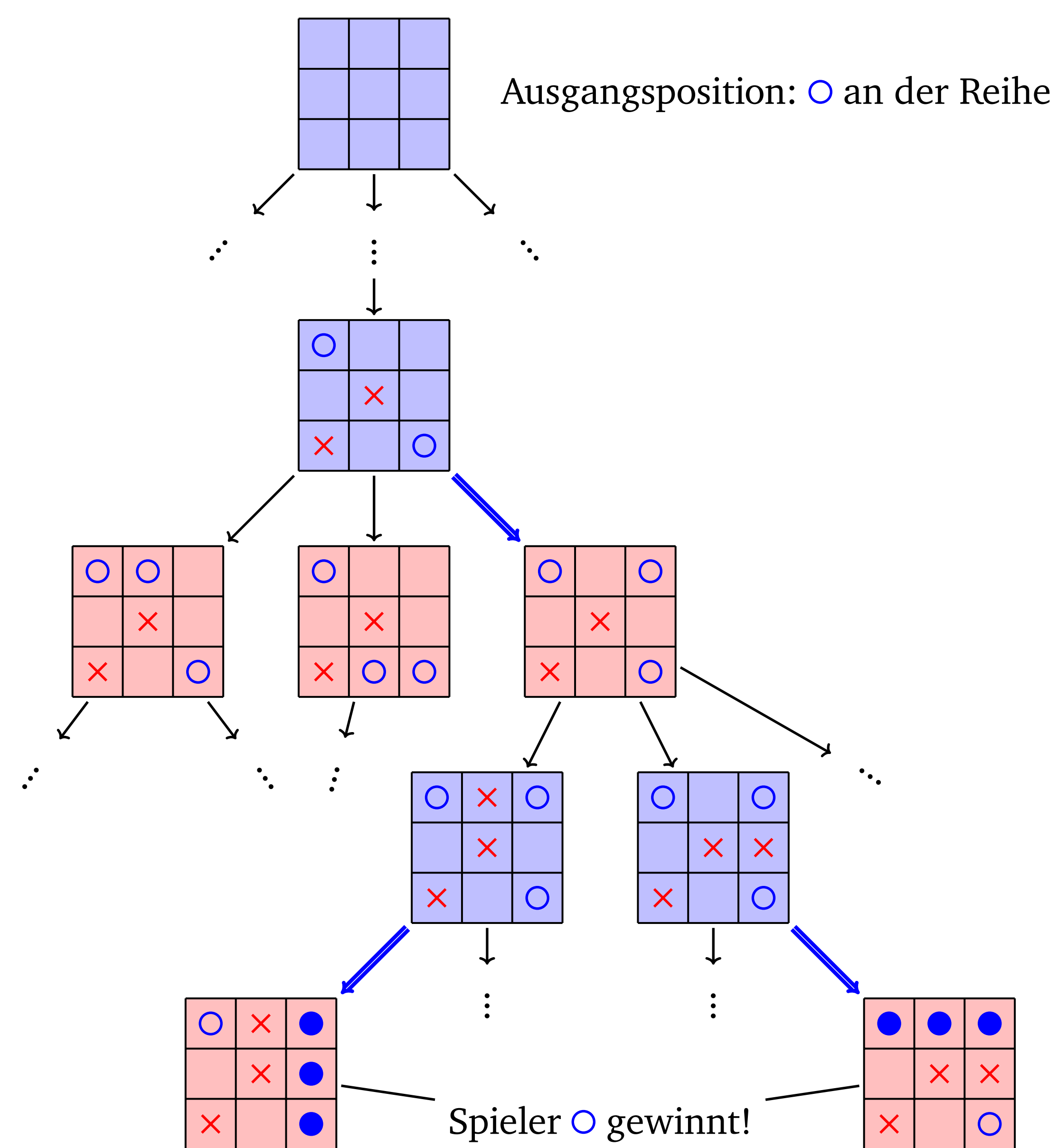
- es gibt **zwei Spieler:innen**, die abwechselnd ziehen,
- der bisherige Spielverlauf ist **komplett bekannt**,
- es gibt **keine zufälligen Züge**,
- die Spielregeln sind so definiert, dass das Spiel immer irgendwann **endet**,
- die **letzte Position** bestimmt den Ausgang des Spiels: Sieg, Unentschieden oder Niederlage.

Gewinnstrategien

In kombinatorischen Spielen sind Taktik und Strategie essentiell. Die Frage ist stets, ob der/die Spieler:in am Zug aus der aktuellen Spielposition heraus einen Sieg erzwingen kann, und welche Züge dazu ausgeführt werden müssen. Ist dies der Fall, sagt man, dass der/die Spieler:in **eine Gewinnstrategie** hat. Gewinnstrategien können zum Beispiel aus dem **Spielbaum** abgelesen werden.

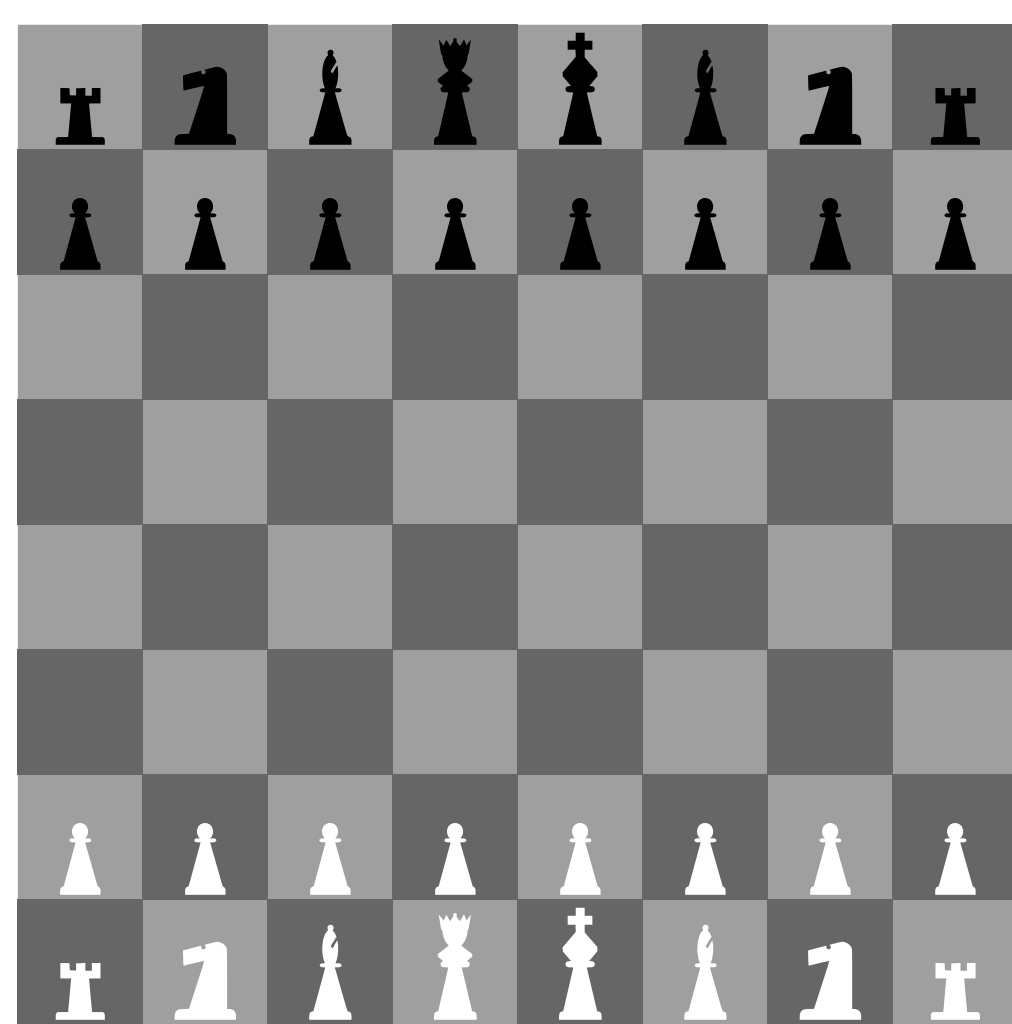
Dieser fasst alle möglichen Spielzustände zusammen und markiert mit Pfeilen die möglichen Züge.

Spielbaum vom Tic-Tac-Toe



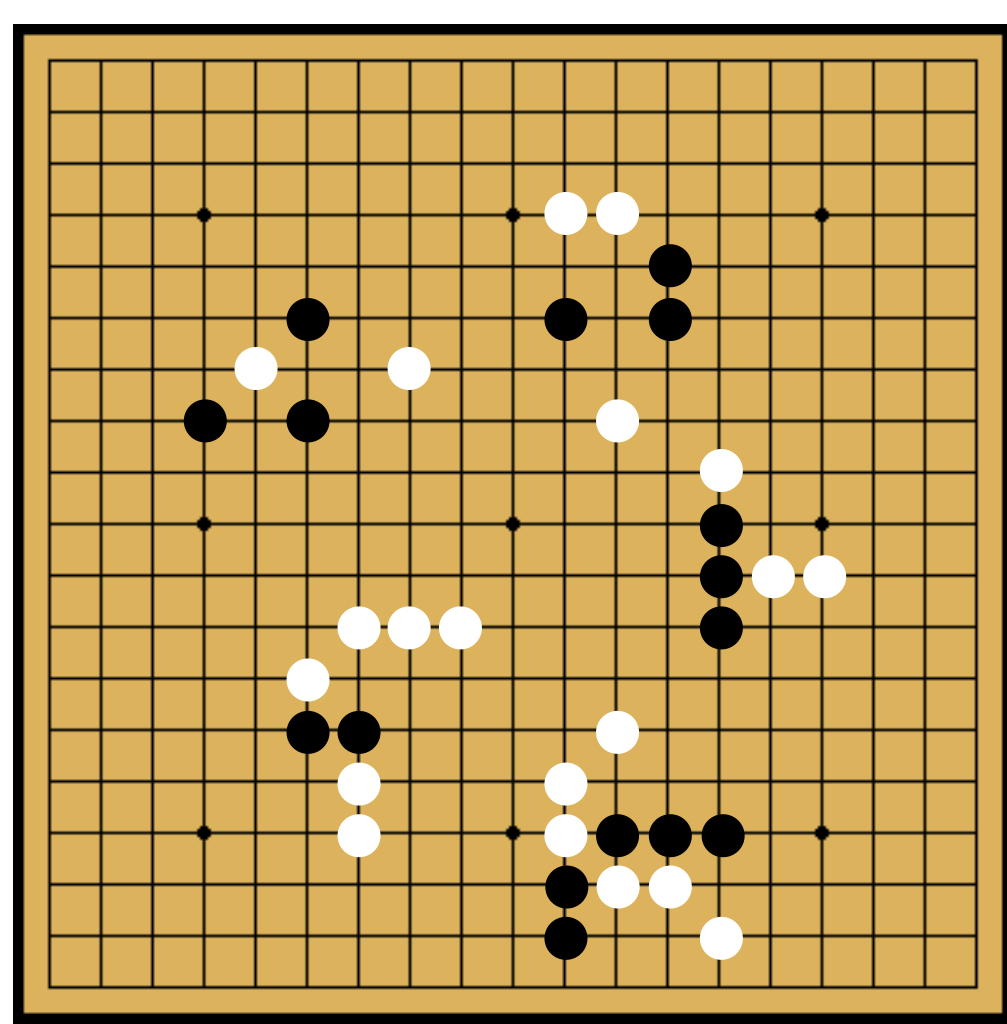
Beispiele

Schach



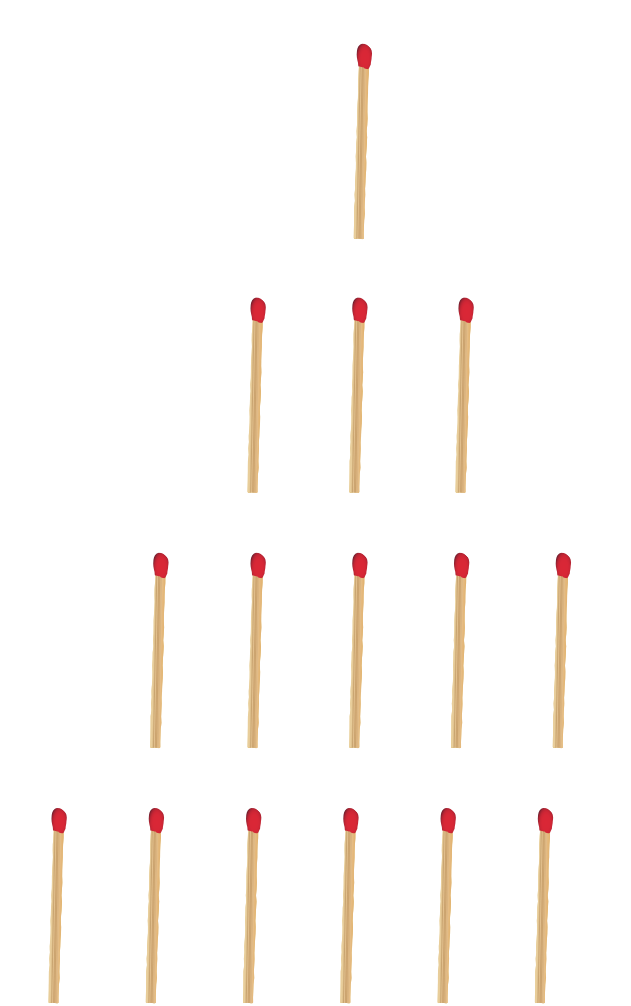
Optimale Strategie existiert, aber unbekannt

Go



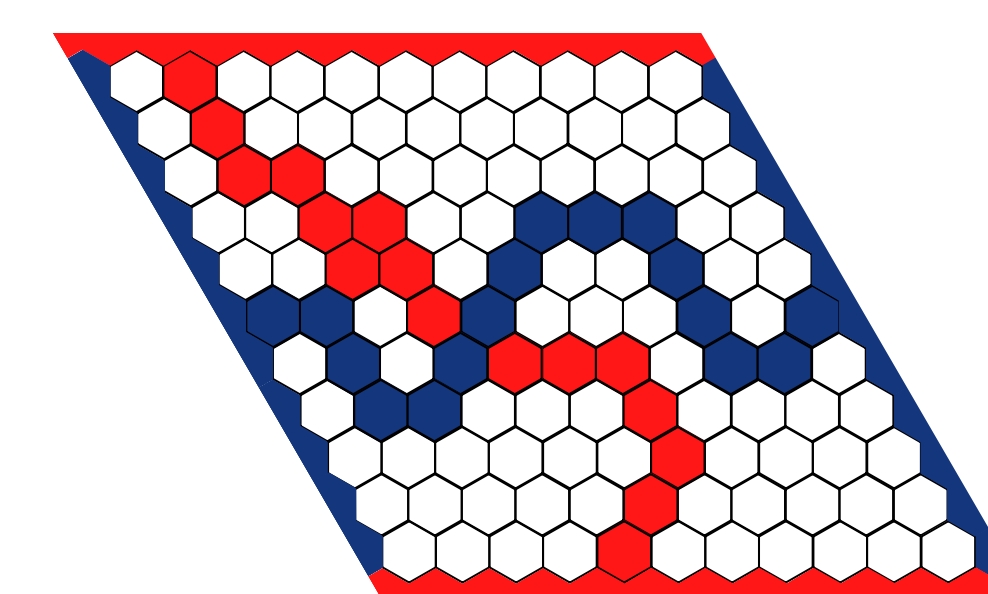
Optimale Strategie existiert, aber unbekannt

Nim



Gewinnstrategie bekannt

Hex

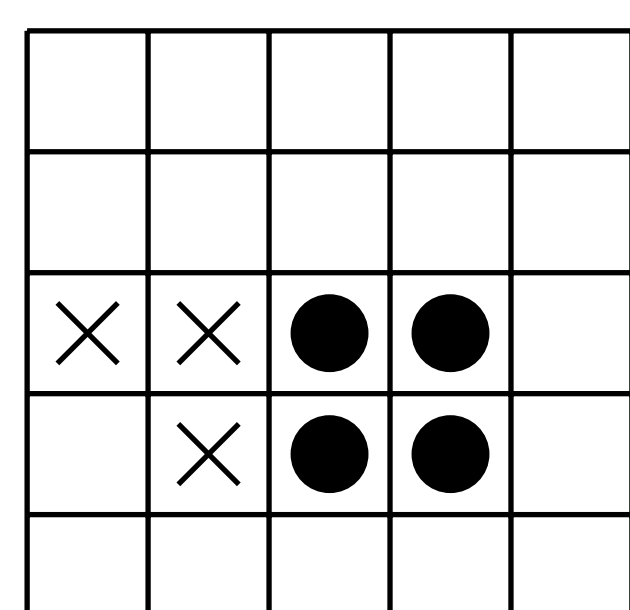
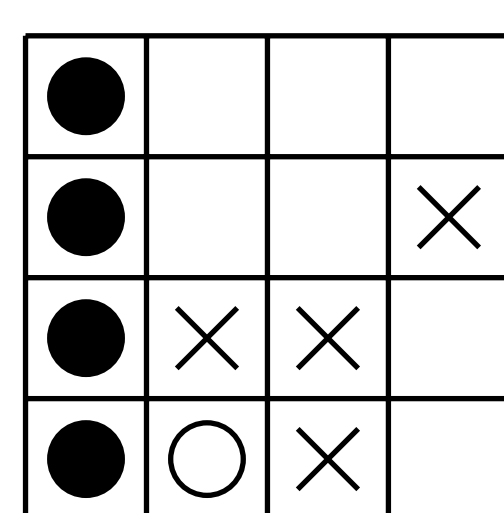


Startspieler:in hat eine unbekannte Gewinnstrategie

Verallgemeinerungen

Verallgemeinerungen sind ein wichtiges Konzept in der Mathematik. Wie könnten beispielsweise verallgemeinerte Versionen des Tic-Tac-Toe-Spiels aussehen? Einige Ideen:

1. größere Felder,
2. andere Gewinnbedingungen, z. B. Quadrate statt Zeilen,
3. mehr Spieler:innen.



Gemeinsamkeiten

Verschiedene kombinatorische Spiele weisen oft Gemeinsamkeiten auf, sodass wir sie auf ähnliche Weise untersuchen können.

Strategy stealing. In Spielen, in denen ein zusätzlicher Zug niemals einen Nachteil liefert, kann der/die zweite Spieler:in keine Gewinnstrategie haben. Andernfalls könnte der/die erste Spieler:in einen beliebigen ersten Zug ausführen und in den nächsten Zügen die Gewinnstrategie anwenden („stehlen“). Dann haben beide Spieler:innen eine Gewinnstrategie, ein Widerspruch.

Folglich hat der/die erste Spieler:in eine Strategie, um mindestens ein Unentschieden zu erzielen. Es ist aber nicht klar, wie man eine solche Strategie **findet**!

