



# Kombinatorische Spiele



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

## Lange Nacht der Mathematik 2024

### Kombinatorische Spiele

Ein kombinatorisches Spiel ist bestimmt durch eine Folge von Spielpositionen mit folgenden Eigenschaften:

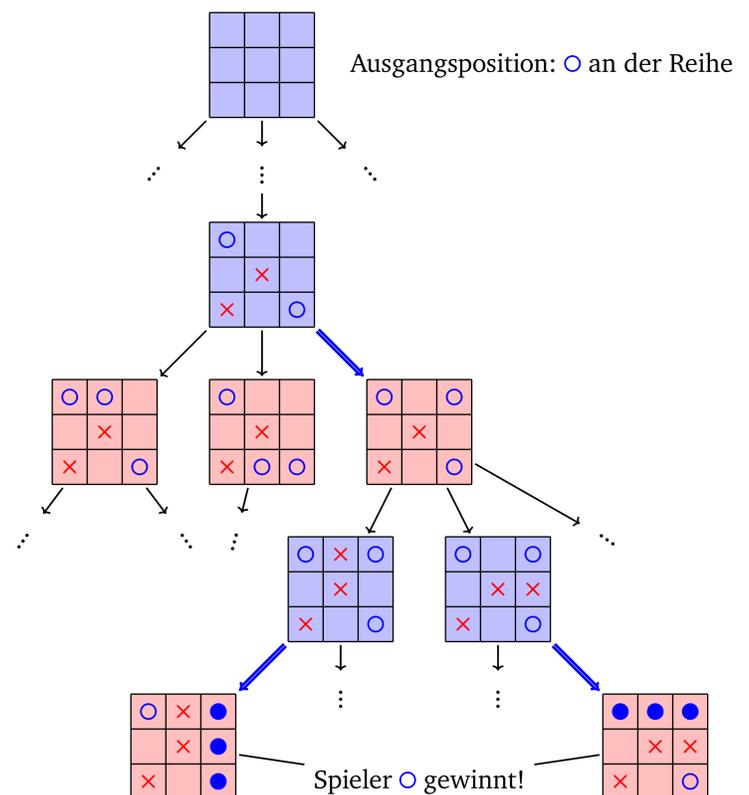
- es gibt **zwei Spieler:innen**, die abwechselnd ziehen,
- der bisherige Spielverlauf ist **komplett bekannt**,
- es gibt **keine zufälligen Züge**,
- die Spielregeln sind so definiert, dass das Spiel immer irgendwann **endet**,
- die **letzte Position** bestimmt den Ausgang des Spiels: Sieg, Unentschieden oder Niederlage.

### Gewinnstrategien

In kombinatorischen Spielen sind Taktik und Strategie essentiell. Die Frage ist stets, ob der/die Spieler:in am Zug aus der aktuellen Spielposition heraus einen Sieg erzwingen kann, und welche Züge dazu ausgeführt werden müssen. Ist dies der Fall, sagt man, dass der/die Spieler:in **eine Gewinnstrategie** hat. Gewinnstrategien können zum Beispiel aus dem **Spielbaum** abgelesen werden.

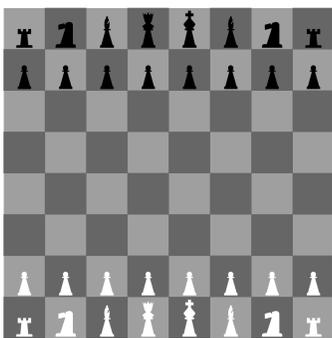
Dieser fasst alle möglichen Spielzustände zusammen und markiert mit Pfeilen die möglichen Züge.

### Spielbaum vom Tic-Tac-Toe



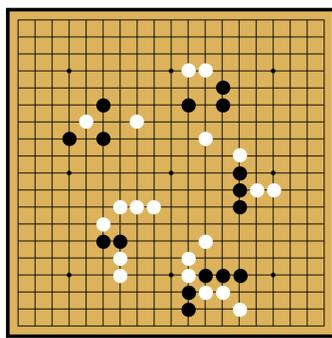
### Beispiele

Schach



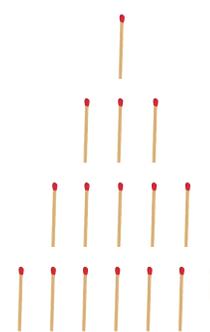
Optimale Strategie existiert, aber unbekannt

Go



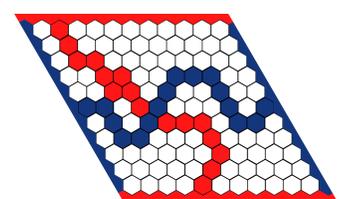
Optimale Strategie existiert, aber unbekannt

Nim



Gewinnstrategie bekannt

Hex

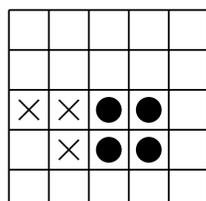
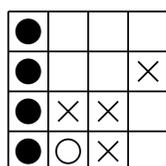


Startspieler:in hat eine unbekannte Gewinnstrategie

### Verallgemeinerungen

Verallgemeinerungen sind ein wichtiges Konzept in der Mathematik. Wie könnten beispielsweise verallgemeinerte Versionen des Tic-Tac-Toe-Spiels aussehen? Einige Ideen:

1. größere Felder,
2. andere Gewinnbedingungen, z. B. Quadrate statt Zeilen,
3. mehr Spieler:innen.



### Gemeinsamkeiten

Verschiedene kombinatorische Spiele weisen oft Gemeinsamkeiten auf, sodass wir sie auf ähnliche Weise untersuchen können.

**Strategy stealing.** In Spielen, in denen ein zusätzlicher Zug niemals einen Nachteil liefert, kann der/die zweite Spieler:in keine Gewinnstrategie haben. Andernfalls könnte der/die erste Spieler:in einen beliebigen ersten Zug ausführen und in den nächsten Zügen die Gewinnstrategie anwenden („stehlen“). Dann haben beide Spieler:innen eine Gewinnstrategie, ein Widerspruch.

Folglich hat der/die erste Spieler:in eine Strategie, um mindestens ein Unentschieden zu erzielen. Es ist aber nicht klar, wie man eine solche Strategie **findet!**

