Die Kato-Vermutung für gemischte Randbedingungen

Promotionsvortrag von

Moritz Egert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20. April 2015

Wir wissen nicht, ob $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{*1/2})$ gilt. Vielleicht ist dies im Allgemeinen falsch. Aber wir kennen die Antwort nicht einmal, wenn A regulär akkretiv ist. In diesem Fall erscheint es plausibel, dass sowohl $\mathcal{D}(A^{1/2})$ als auch $\mathcal{D}(A^{*1/2})$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(a)$ der regulären Sesquilinearform, die A definiert, übereinstimmen.

Tosio Kato, 1961.

Wir wissen nicht, ob $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{*1/2})$ gilt. Vielleicht ist dies im Allgemeinen falsch. Aber wir kennen die Antwort nicht einmal, wenn A regulär akkretiv ist. In diesem Fall erscheint es plausibel, dass sowohl $\mathcal{D}(A^{1/2})$ als auch $\mathcal{D}(A^{*1/2})$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(a)$ der regulären Sesquilinearform, die A definiert, übereinstimmen.

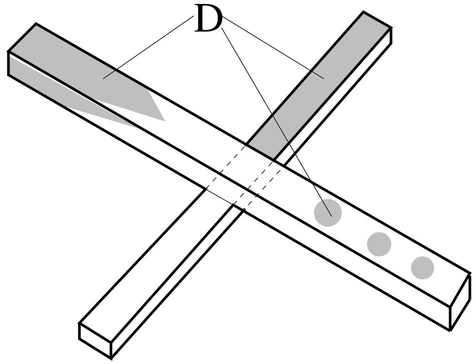
Tosio Kato, 1961.

- *Jacques-Louis Lions 1962: Gegenbeispiel.*
- *"Kato Square Root Problem": $A = -\nabla \cdot \mu \nabla$.*

Divergenzform-Operatoren und Randbedingungen

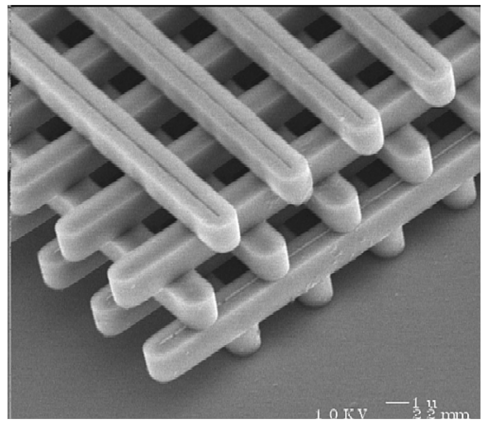
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $D \subseteq \partial\Omega$ abgeschlossen (Dirichlet-Teil), $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } D, \\ \nu \cdot \mu\nabla u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus D. \end{cases}$$



- Variationelle Formulierung in $\mathrm{H}^1(\Omega)$:

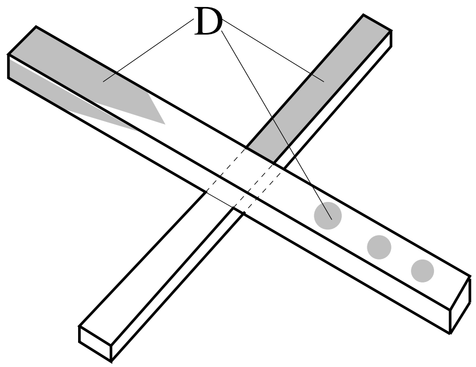
$$\underbrace{\int_\Omega \mu\nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot \overline{v}\,\mathrm{d}x}_{(f|v)_2} \qquad (v \in \mathrm{C}_D^\infty(\Omega)).$$



Divergenzform-Operatoren und Randbedingungen

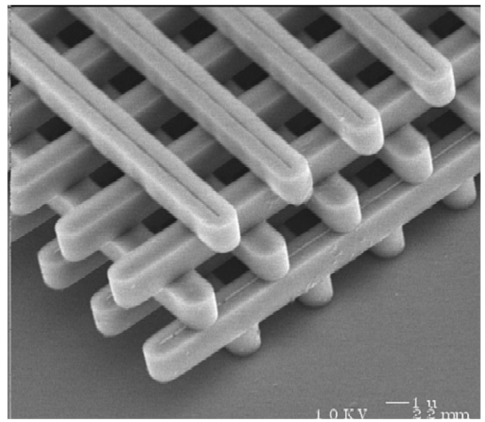
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $D \subseteq \partial\Omega$ abgeschlossen (Dirichlet-Teil), $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } D, \\ \nu \cdot \mu\nabla u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus D. \end{cases}$$



- Variationelle Formulierung in $\mathrm{H}^1(\Omega)$:

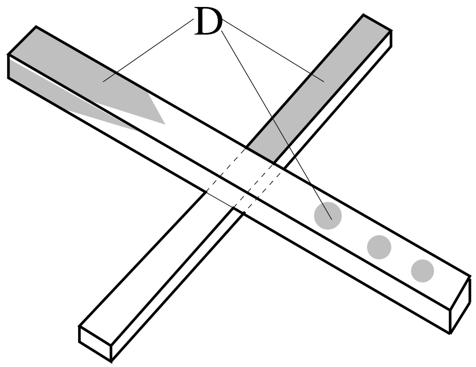
$$\underbrace{\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot \overline{v} \,\mathrm{d}x}_{(f|v)_2} \qquad (v \in \mathrm{C}_D^\infty(\Omega)).$$



Divergenzform-Operatoren und Randbedingungen

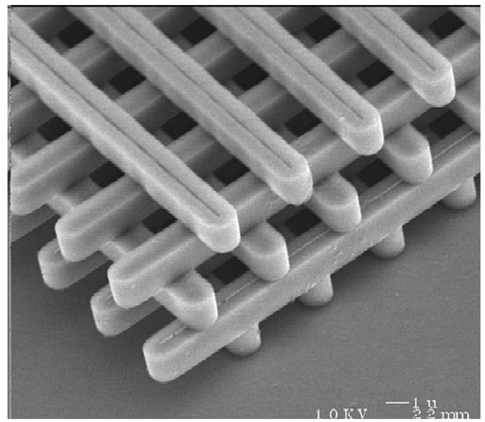
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $D \subseteq \partial\Omega$ abgeschlossen (Dirichlet-Teil), $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } D, \\ \nu \cdot \mu \nabla u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus D. \end{cases}$$



- Variationelle Formulierung in $\mathrm{H}^1(\Omega)$:

$$\underbrace{\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, \mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot \overline{v} \, \mathrm{d}x}_{(f|v)_2} \qquad (v \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)).$$

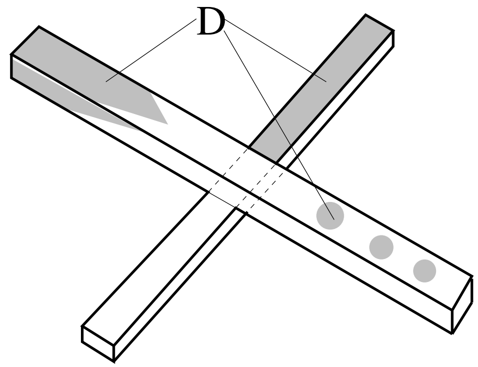


Divergenzform-Operatoren und Randbedingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

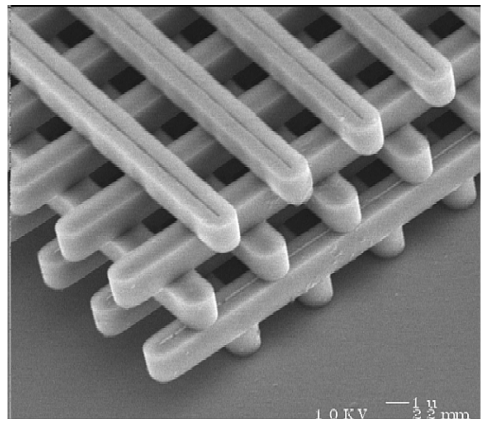
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $D \subseteq \partial\Omega$ abgeschlossen (Dirichlet-Teil), $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{d\times d})$:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mu \nabla u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } D, \\ \nu \cdot \mu \nabla u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus D. \end{cases}$$



- Variationelle Formulierung in $\mathrm{H}^1(\Omega)$:

$$\underbrace{\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, \mathrm{d}x}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot \overline{v}\, \mathrm{d}x}_{(f|v)_2} \qquad (v \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)).$$



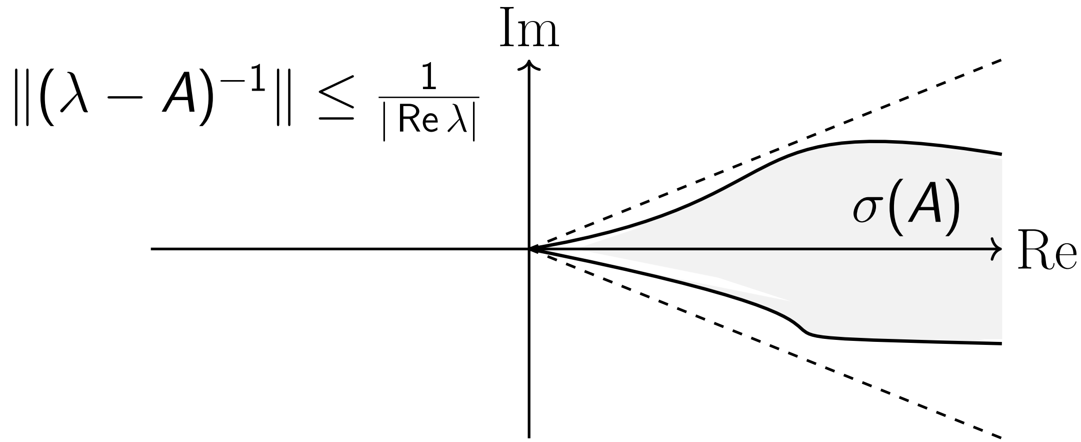
- Elliptizitätsannahme:

$$\operatorname{Re} a(v,v) \gtrsim \|\nabla v\|_2^2 \qquad (v \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)).$$

- Assoziierter Operator in $\mathrm{L}^2(\Omega)$:
$Au = f \iff u \in \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ löst $-\nabla \cdot \mu \nabla u = f$ variationell.

Die Wurzel von A

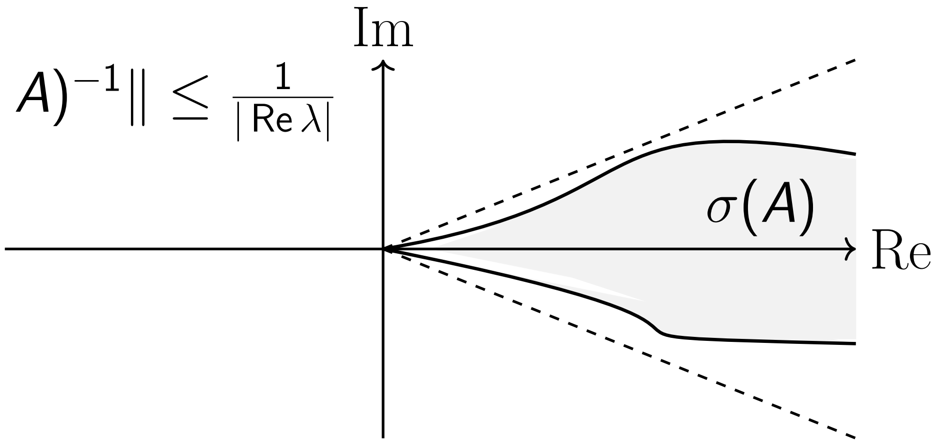
$\exists!$ max. akkr. Operator $A^{1/2}$ mit $A^{1/2}A^{1/2} = A$.



Die Wurzel von A

$\exists!$ max. akkr. Operator $A^{1/2}$ mit $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}$

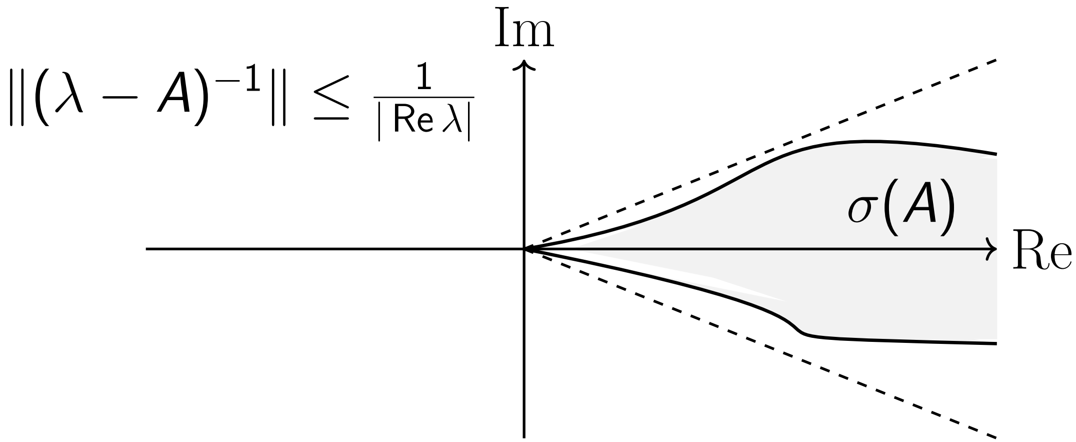


Kato-Vermutung: Es gilt $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ mit äquivalenten Normen.

- i.A. $\mathcal{D}(A) \not\subseteq \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Die Wurzel von A

$\exists!$ max. akkr. Operator $A^{1/2}$ mit $A^{1/2}A^{1/2} = A$.



Kato-Vermutung: Es gilt $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ mit äquivalenten Normen.

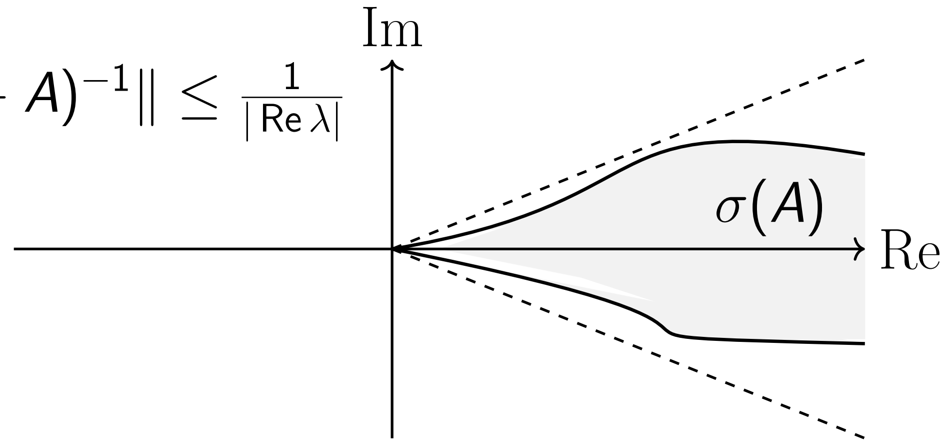
- i.A. $\mathcal{D}(A) \not\subseteq \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Anwendungsbeispiel: Elliptische Gleichungen in $\mathbb{R}^d_+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) + \nabla \cdot \mu(x) \nabla u(t,x) = 0 & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d), \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Die Wurzel von A

$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}$



$\exists!$ max. akkr. Operator $A^{1/2}$ mit $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

Kato-Vermutung: Es gilt $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ mit äquivalenten Normen.

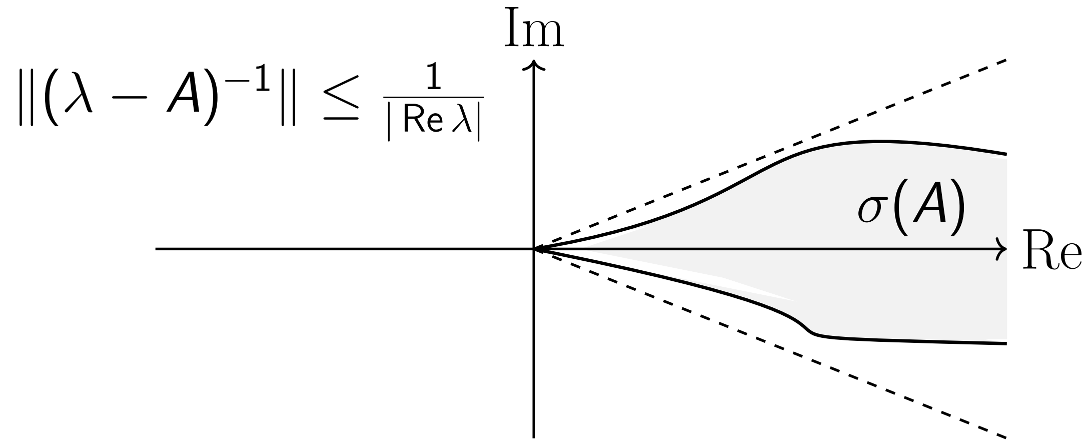
- i.A. $\mathcal{D}(A) \nsubseteq \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Anwendungsbeispiel: Elliptische Gleichungen in $\mathbb{R}^d_+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) + \overbrace{\nabla \cdot \mu(x) \nabla}^{-A} u(t,x) = 0 & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Die Wurzel von A

$\exists!$ max. akkr. Operator $A^{1/2}$ mit $A^{1/2}A^{1/2} = A$.



Kato-Vermutung: Es gilt $\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathrm{H}^1_D(\Omega)$ mit äquivalenten Normen.

- i.A. $\mathcal{D}(A) \not\subseteq \mathrm{H}^2(\Omega)$.

Anwendungsbeispiel: Elliptische Gleichungen in $\mathbb{R}^d_+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) + \overbrace{\nabla \cdot \mu(x) \nabla}^{-A} u(t,x) = 0 & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d), \\ u(0,x) = u_0(x) & (x \in \mathbb{R}^d). \end{cases}$$

- Lösung $u(t,x) = \mathrm{e}^{-tA^{1/2}} u_0(x)$.
- Kato-Vermutung $\sim$ Rellich-Abschätzung "$\|\partial_t u|_{t=0}\|_2 \sim \|\nabla u_0\|_2$".

Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u,u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.

Positive Antworten

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- $A = A^*$: Aus $a(u, u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

	$D = \emptyset,\ \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$		
$\Omega = \mathbb{R}^d$		
Ω glatt & beschränkt		
Ω Lipschitz		

Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u,u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

	$D = \emptyset,\, \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$	CM^c^M '82	
$\Omega = \mathbb{R}^d$		
Ω glatt & beschränkt		
Ω Lipschitz		

Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u, u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

	$D = \emptyset,\ \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$	CM^{c}M '82	
$\Omega = \mathbb{R}^d$	AHLM^{c}T '01	
Ω glatt & beschränkt		
Ω Lipschitz		

Positive Antworten

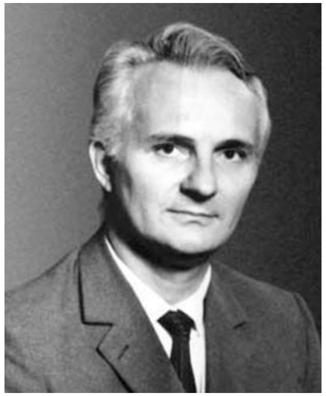
- $A = A^*$: Aus $a(u, u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

	$D = \emptyset,\ \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$	CM^{c}M '82	
$\Omega = \mathbb{R}^d$	AHLM^{c}T '01	
Ω glatt & beschränkt	AT '03	
Ω Lipschitz		

Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u, u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

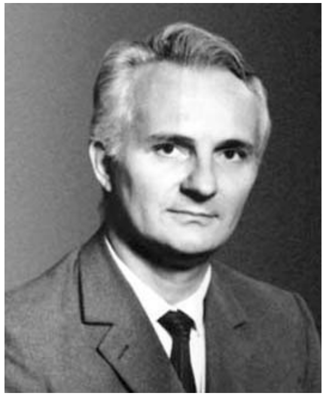
<table>
<tr><th></th><th>$D = \emptyset,\ \partial\Omega$</th><th>$D \subseteq \partial\Omega$</th></tr>
<tr><td>$\Omega = \mathbb{R}$</td><td colspan="2">CM^{c}M ’82</td></tr>
<tr><td>$\Omega = \mathbb{R}^d$</td><td colspan="2">AHLM^{c}T ’01</td></tr>
<tr><td>Ω glatt & beschränkt</td><td rowspan="2">AT ’03</td><td>AKM ’06</td></tr>
<tr><td>Ω Lipschitz</td><td>Lions’ Problem</td></tr>
</table>



Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u, u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

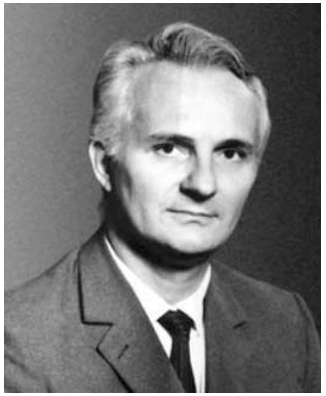
	$D = \emptyset, \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$	CM^cM '82	
$\Omega = \mathbb{R}^d$	AHLM^cT '01	
Ω glatt & beschränkt	AT '03	AKM '06
Ω Lipschitz		Lions' Problem ✓



Positive Antworten

- $A = A^*$: Aus $a(u,u) = (Au \mid u)_2 = (A^{1/2}u \mid A^{1/2}u)_2$ folgt alles.
- Allgemeiner Fall ungleich schwieriger:

	$D = \emptyset,\ \partial\Omega$	$D \subseteq \partial\Omega$
$\Omega = \mathbb{R}$	CM^{c}M '82	
$\Omega = \mathbb{R}^d$	AHLM^{c}T '01	
Ω glatt & beschränkt	AT '03	AKM '06
Ω Lipschitz		Lions' Problem ✓



Theorem (Hauptresultat)

Sei Ω eine d-Menge und Lipschitz-regulär nahe $\overline{\partial\Omega \setminus D}$. Sei D eine $(d-1)$-Menge. Dann gilt die Kato Vermutung

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathrm{H}^1_D(\Omega) \quad \textit{mit} \quad \|A^{1/2}u\|_2 \simeq \|\nabla u\|_2.$$

Beweisidee (A. M^{c}Intosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div} \mu \ \nabla$$

Beweisidee (A. M$^{\text{c}}$Intosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu \,\Big|\, \nabla$$

Beweisidee (A. M$^{\mathrm{c}}$Intosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu \,\Big|\, \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

Beweisidee (A. M^cIntosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu \ \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

2.

$$\Pi_\mu^2 = \begin{bmatrix} \color{red}{A} & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Beweisidee (A. M^c Intosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu \ \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\sqrt{\Pi_\mu^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Beweisidee (A. McIntosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu\ \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\sqrt{\Pi_\mu^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \overset{?}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix} = \Pi_\mu.$$

Beweisidee (A. M^cIntosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu\ \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\sqrt{\Pi_\mu^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \overset{?}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix} = \Pi_\mu.$$

3. Es gilt $\frac{\sqrt{z^2}}{z} = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} z)$. Hat Π_μ beschr. H^∞-Kalkül, so folgt Kato.

Beweisidee (A. M^{c}Intosh, 1980er)

1. Reduktion auf Operatoren 1. Ordnung

$$A = -\operatorname{div}\mu\ \nabla \qquad \Pi_\mu := \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

2. $$\sqrt{\Pi_\mu^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{A} & 0 \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix} \overset{?}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}\mu \\ \nabla & 0 \end{bmatrix} = \Pi_\mu.$$

3. Es gilt $\frac{\sqrt{z^2}}{z} = \operatorname{sgn}(\operatorname{Re} z)$. Hat Π_μ beschr. H^∞-Kalkül, so folgt Kato.

4. Ist $\mu = \mathrm{Id}$, so $\Pi^* = \Pi$ Dirac Operator und $\Pi^2 \sim -\Delta_D$. Interpretation von Kato als Störungsresultat für Dirac-Operatoren/für $-\Delta_D$.

Reduktionstheorem

Theorem

Existiert $\alpha > 1$ *mit* $\mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) \subseteq \mathrm{H}^\alpha(\Omega)$, *so erfüllt* Π_μ *quadratische Abschätzungen*

$$\int_0^\infty \|t\Pi_\mu(1 + t^2\Pi_\mu^2)^{-1}u\|_2^2 \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \simeq \|u\|_2^2 \qquad (u \in \overline{\mathcal{R}(\Pi_\mu)}).$$

Insbesondere hat Π_μ *beschränkten* H^∞*-Kalkül und Kato ist gelöst.*

Reduktionstheorem

Theorem

Existiert $\alpha > 1$ *mit* $\mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) \subseteq \mathrm{H}^\alpha(\Omega)$, *so erfüllt* Π_μ *quadratische Abschätzungen*

$$\int_0^\infty \|t\Pi_\mu(1 + t^2\Pi_\mu^2)^{-1}u\|_2^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \simeq \|u\|_2^2 \qquad (u \in \overline{\mathcal{R}(\Pi_\mu)}).$$

Insbesondere hat Π_μ *beschränkten* H^∞*-Kalkül und Kato ist gelöst.*

Extrapoliere Kato für $-\Delta_D \Longrightarrow$ Kato für allgemeines A

Reduktionstheorem

Theorem

Existiert $\alpha > 1$ *mit* $\mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) \subseteq \mathrm{H}^\alpha(\Omega)$, *so erfüllt* Π_μ *quadratische Abschätzungen*

$$\int_0^\infty \|t\Pi_\mu(1+t^2\Pi_\mu^2)^{-1}u\|_2^2 \,\frac{\mathrm{d}t}{t} \simeq \|u\|_2^2 \qquad (u \in \overline{\mathcal{R}(\Pi_\mu)}).$$

Insbesondere hat Π_μ *beschränkten* H^∞*-Kalkül und Kato ist gelöst.*

$$\begin{array}{ccc}
\text{Extrapoliere Kato für } -\Delta_D & \Longrightarrow & \text{Kato für allgemeines } A \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{Geometrie, Potenzial Theorie} & \leftrightsquigarrow & \text{harmonische Analysis}
\end{array}$$

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^\alpha_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{\alpha}_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^{\alpha} & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$ —— H^1_D

$\mathcal{D}^0$ —— L^2

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{\alpha}_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^{\alpha} & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] \\
\mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2
\end{tikzcd}$$

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^\alpha_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{\frac{1+\beta}{2}} \arrow[d] & \mathrm{H}^{1+\beta}_D \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] \\
\mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2
\end{tikzcd}$$

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^\alpha_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{\frac{1+\beta}{2}} \arrow[d] & \mathrm{H}^{1+\beta}_D \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[d] \arrow[r, dash] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] \\
\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[d] \arrow[r, dash] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] \\
\mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2
\end{tikzcd}$$

$$\mathfrak{J}(u) : v \mapsto \int_\Omega u \cdot \overline{v} + \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x$$

$$\mathfrak{J} : \mathrm{H}^1_D \to (\mathrm{H}^1_D)^* \text{ Isomorphismus}$$

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^{\alpha}_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^{\alpha} & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}})^* & & & (\mathrm{H}^{1-\beta}_D)^* \\
& \mathcal{D}^{\frac{1+\beta}{2}} \arrow[ul, "\mathfrak{J}"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{1+\beta}_D \arrow[ur, "\mathfrak{J}"'] \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2 &
\end{tikzcd}$$

$$\mathfrak{J}(u) : v \mapsto \int_\Omega u \cdot \overline{v} + \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x$$

$\mathfrak{J} : \mathrm{H}^1_D \to (\mathrm{H}^1_D)^*$ Isomorphismus

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^\alpha_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}})^* \arrow[rrr, equal] & & & (\mathrm{H}^{1-\beta}_D)^* \\
& \mathcal{D}^{\frac{1+\beta}{2}} \arrow[ul, "\mathfrak{J}"'] \arrow[d] & \mathrm{H}^{1+\beta}_D \arrow[ur, "\mathfrak{J}"] \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2 &
\end{tikzcd}$$

$$\mathfrak{J}(u) : v \mapsto \int_\Omega u \cdot \overline{v} + \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x$$

$\mathfrak{J} : \mathrm{H}^1_D \to (\mathrm{H}^1_D)^*$ Isomorphismus

Regularität gebrochener Potenzen von $-\Delta_D$

Theorem

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass gilt

$$\mathcal{D}^{\alpha/2} := \mathcal{D}((-\Delta_D)^{\alpha/2}) = \begin{cases} \mathrm{H}^\alpha_D & \frac{1}{2} < \alpha < 1 + \varepsilon, \\ \mathrm{H}^\alpha & 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}})^* \arrow[rrr, equal] & & & (\mathrm{H}^{1-\beta}_D)^* \\
& \mathcal{D}^{\frac{1+\beta}{2}} \arrow[ul, "\mathfrak{J}"] \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^{1+\beta}_D \arrow[ur, "\mathfrak{J}"'] \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \mathrm{H}^1_D \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^{\frac{1-\beta}{2}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \left[\mathrm{L}^2, \mathrm{H}^1_D\right]_{1-\beta} \arrow[d] & \\
& \mathcal{D}^0 \arrow[r, dash] & \mathrm{L}^2 &
\end{tikzcd}$$

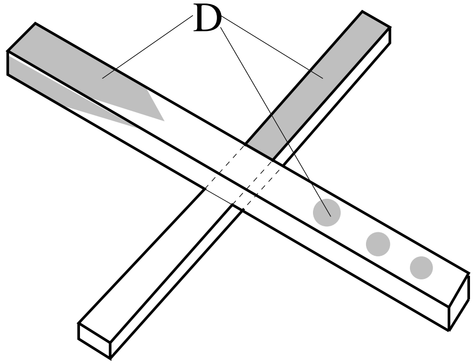
$$\mathfrak{J}(u) : v \mapsto \int_\Omega u \cdot \overline{v} + \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \,\mathrm{d}x$$

$\mathfrak{J} : \mathrm{H}^1_D \to (\mathrm{H}^1_D)^*$ Isomorphismus

Interpolationstheorie für H^α_D

Theorem (Universeller Fortsetzungsoperator)

Es existiert ein universeller Fortsetzungsoperator $E : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$*, der* $\mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\Omega) \to \mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\mathbb{R}^d)$ *für* $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ *einbettet.*



- Erlaubt Retraktion/Koretraktion auf $\mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\mathbb{R}^d)$.
- Gebrochene Hardy-Ungleichung

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}_D(x)^{-2\alpha} \, \mathrm{d}x \lesssim \|u\|^2_{\mathrm{H}^\alpha(\Omega)}$$

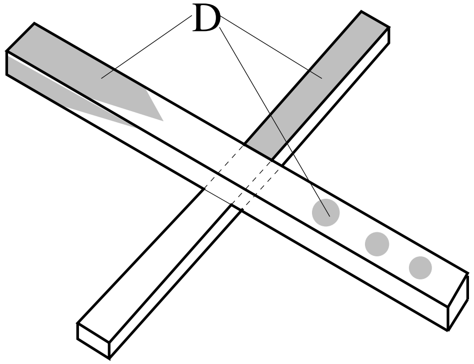
erlaubt Interpolation via Grisvard'scher Spurmethode.

Interpolationstheorie für H^α_D

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Theorem (Universeller Fortsetzungsoperator)

Es existiert ein universeller Fortsetzungsoperator $E : \mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, *der* $\mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\Omega) \to \mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\mathbb{R}^d)$ *für* $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ *einbettet.*



- Erlaubt Retraktion/Koretraktion auf $\mathrm{H}^\alpha_{(D)}(\mathbb{R}^d)$.
- Gebrochene Hardy-Ungleichung
$$\int_\Omega |u(x)|^2 \, \mathrm{d}_D(x)^{-2\alpha} \,\mathrm{d}x \lesssim \|u\|^2_{\mathrm{H}^\alpha(\Omega)}$$
erlaubt Interpolation via Grisvard'scher Spurmethode.

Theorem (Hardy-Charakterisierung)

Sei $p \in (1, \infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *beschr. Gebiet. Sei* $D \subseteq \partial\Omega$ *glm. l-dick* $(d-p<l)$ *und porös. Um* $\overline{\partial\Omega \setminus D}$ *habe* Ω *die* $\mathrm{W}^{1,p}$*-Fortsetzungseigenschaft. Dann*

$$\mathrm{W}^{1,p}_D(\Omega) = \mathrm{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathrm{L}^p(\Omega; \mathrm{d}_D^{-p}(x)\mathrm{d}x).$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!