Vorlesung Topologie
SS 2022

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Analysisvorlesung haben wir mit den metrischen Räumen ein abstraktes Konzept kennen gelernt, in dessen Rahmen wir zahlreiche grundlegende Begriffe (wie den der Konvergenz einer Folge oder der Stetigkeit einer Funktion) definieren und zentrale Sätze beweisen konnten. Ein typisches Beispiel ist der Banachsche Fixpunktsatz, der eine Aussage über Kontraktionen in vollständigen metrischen Räumen macht und eine wesentliche Rolle beim Beweis des Satzes über implizite Funktionen und des Satzes von Picard-Lindelöf über die lokale Lösbarkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit lipschitzstetiger rechter Seite spielt.

Beim Banachschen Fixpunktsatz ist die Metrik unverzichtbar. Bei vielen Konzepten (wie der Konvergenz und der Stetigkeit) ist aber die konkrete Metrik in dem Sinn unerheblich, dass man diese Konzepte allein mit Hilfe von offenen Mengen und Umgebungen erklären kann. Dies führt auf den Begriff eines topologischen Raumes, bei dem man sich lediglich die offenen Teilmengen einer Menge vorgibt und der für viele Situationen einen natürlichen Rahmen liefert. Wir werden z. B. sehen, dass sich der Zwischenwertsatz und der Satz, dass jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Maximum und Minimum annimmt, auf sehr natürliche Weise in topologischen Räumen formulieren und beweisen lassen, wenn man die Begriffe Kompaktheit und Zusammenhang geeignet erklärt.

Wir werden auch sehen, dass die topologischen Räume den Rahmen der metrischen Räume deutlich überschreiten. So kann man z. B. die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge oder die Konvergenz von Riemannsummen gegen das entsprechende Integral im allgemeinen *nicht* als Konvergenz einer Folge von Punkten eines metrischen Raumes verstehen, wohl aber als Konvergenz bzgl. einer geeigneten Topologie. Dabei taucht ein grundlegend neuer Aspekt auf: Punkte in topologischen Räumen können „sehr viele“ Umgebungen besitzen. Eine Konsequenz davon ist, dass z. B. konvergente Folgen nicht mehr ausreichend sind, um die Stetigkeit von Funktionen zu erklären. Dies wird uns zu Netzen und Filtern als Verallgemeinerungen von Folgen führen.

Während wir in der ersten Hälfte der Vorlesung im wesentlichen mit der Entwicklung der Sprache der topologischen Räume beschäftigt sein werden, geht es in der zweiten Hälfte um wichtige topologische Werkzeuge für andere Bereiche der Mathematik wie Funktionalanalysis, Spektraltheorie, Operatoralgebren und Differentialgeometrie. Typische Beispiele sind der Satz von Tychonov über die Kompaktheit von Produkten kompakter Räume, der Satz von Stone-Weierstraß und der Satz von Arzela-Ascoli über kompakte Mengen in Räumen stetiger Funktionen. Im letzten Abschnitt schauen wir uns Überlagerungen topologischer Räume und Fundamentalgruppen an.

Dieses Skript orientiert sich sehr stark am (englischsprachigen) Skript von Herrn Neeb aus dem SS 2009, welches noch auf der Lehrmaterialseite des FB verfügbar sein sollte. Daneben gibt es eine ganze Reihe guter Einführungen und

Lehrbücher zur Topologie, von denen ich nur einige wenige hervorheben möchte:

- Jänich „Topologie“ (sehr gut lesbar, viele Erläuterungen + Kommentare),
- von Querenburg „Mengentheoretische Topologie“,
- Dugundji „Topology“,
- Kelley „General Topology“ (ein Klassiker),
- Kowalsky „Topologische Räume“,
- Armstrong „Basic Topology“.

1 Grundbegriffe

Wir führen hier die grundlegenden Begriffe aus der Theorie der topologischen Räume ein. Wir beginnen mit der axiomatischen Definition topologischer Räume, beschreiben stetige Abbildungen und beschäftigen uns mit dem Begriff des Zusammenhangs.

1.1 Topologische Räume

1.1.1 Offene Mengen

Für jede Menge X bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Eine* Topologie *auf X ist eine Teilmenge τ von $\mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(O1) *Die Vereinigung jeder Familie von Mengen aus τ gehört zu τ.*

(O2) *Der Durchschnitt jeder* endlichen *Familie von Mengen aus τ gehört zu τ.*

Ist τ eine Topologie auf X, so heißt das Paar (X, τ) ein topologischer Raum. *Die Elemente von X heißen die* Punkte *des topologischen Raumes (X, τ), und die Elemente von τ die* offenen Teilmengen *von X. Ist die spezielle Wahl von τ nicht wichtig oder klar aus dem Kontext, spricht man oft auch vom topologischen Raum X.*

Vereinigung und Durchschnitt einer Familie $(A_j)_{j\in J}$ von Teilmengen von X sind wie üblich erklärt:

$$\bigcup_{j\in J} A_j := \{x \in X : \text{es gibt ein } j \in J \text{ mit } x \in A_j\},$$

$$\bigcap_{j\in J} A_j := \{x \in X : \text{für alle } j \in J \text{ ist } x \in A_j\}.$$

Für $J = \emptyset$ folgt insbesondere $\bigcup_{j\in\emptyset} A_j = \emptyset$ und $\bigcap_{j\in\emptyset} A_j = X$. Da $\emptyset$ endlich ist, ist in (O1) und (O2) die leere Familie zugelassen, und wir sehen, dass jede Topologie auf X die leere Menge und ganz X enthält. Mitunter ersetzt man (O2) durch das Axiom

Der Durchschnitt je zweier Mengen aus τ gehört zu τ.

Dann hat man $X \in \tau$ zusätzlich zu fordern.

Teilmengen topologischer Räume kann man auf natürliche Weise zu topologischen Räumen machen.

Lemma 1.2 (und Definition) *Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist*

$$\tau|_Y := \{O \cap Y : O \in \tau\}$$

eine Topologie auf Y*, die* Einschränkung *von* τ *auf* Y *oder die* Teilraumtopologie.

Beispiel 1.3 (a) Für jede Menge X ist $\tau = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X. Da jede Topologie $\emptyset$ und X enthält, ist dies die kleinste Topologie auf X. Sie heißt die *indiskrete* (oder chaotische) Topologie.
(b) Für jede Menge X ist $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X. Sie ist offenbar die größte Topologie auf X und heißt die *diskrete* Topologie. In dieser Topologie sind alle Teilmengen von X offen. ∎

Für weitere Beispiele wiederholen wir den Begriff des metrischen Raumes.

Definition 1.4 (a) *Sei* X *eine Menge. Eine Funktion* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ *heißt eine* Metrik *auf* X*, wenn*

(M1) $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$ *für* $x, y \in X$*,*

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$ *(Symmetrie),*

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Gilt anstelle von (M1) *die schwächere Bedingung*

(M1') $d(x, x) = 0$ *für alle* $x \in X$*,*

so heißt d *eine* Semimetrik*. Ist* d *eine (Semi-)Metrik auf* X*, so heißt das Paar* (X, d) *ein* (semi-)metrischer Raum*.*
(b) *Sei* (X, d) *ein semimetrischer Raum. Für* $p \in X$ *und* $r \in \mathbb{R}^+$ *heißt*

$$B_r(p) := \{x \in X : d(p, x) < r\}$$

die offene Kugel *vom Radius* r *um* p*. Eine Teilmenge* O *von* X *heißt* offen*, wenn es für jedes* $x \in X$ *ein* $\varepsilon > 0$ *gibt mit* $B_\varepsilon(x) \subseteq O$*.*

Lemma 1.5 *Für jeden semimetrischen Raum* (X, d) *ist die Menge* τ_d *der offenen Teilmengen von* X *eine Topologie auf* X*.*

Beweis. Sei $(O_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Teilmengen von X. Wir zeigen zuerst, dass $O := \bigcup_{j \in J} O_j$ wieder offen ist. Ist $x \in O$, so gibt es ein $j \in J$ mit $x \in O_j$. Da O_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq O_j$. Dann ist aber auch $B_\varepsilon(x) \subseteq O$. Da $x \in O$ beliebig war, ist O offen. Also gilt (O1).

Sei nun J endlich. Wir zeigen, dass dann $U := \bigcap_{j \in J} O_j$ offen ist. Für $J = \emptyset$ ist $U = X$, und X ist offen, da es jede Kugel enthält. Sei also $J \neq \emptyset$. Ist $x \in U$, so ist $x \in O_j$ für jedes $j \in J$. Da die O_j offen sind, gibt es zu jedem $j \in J$ ein $\varepsilon_j > 0$ mit $B_{\varepsilon_j}(x) \subseteq O_j$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_j : j \in J\}$. Da J endlich ist, ist $\varepsilon > 0$ und es ist $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Da $x \in U$ beliebig war, ist U offen. Somit gilt auch (O2). ∎

Beispiel 1.6 (a) Für jede Menge X definiert

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik, die sogenannte *diskrete Metrik*. In dieser ist $B_{1/2}(x) = \{x\}$; d.h. für jeden Punkt $x \in X$ ist $\{x\}$ offen. Damit ist *jede* Teilmenge von X bzgl. d offen, d.h. $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ ist die diskrete Topologie.

(b) Hat X wenigstens zwei verschiedene Punkte, so ist die Topologie $\{\emptyset,\ X\}$ *nicht* von der Gestalt τ_d mit einer Metrik d auf X. Nicht jede Topologie wird also durch eine Metrik erzeugt.

(c) Auf $X = \mathbb{R}$ definieren die diskrete Metrik und die Standardmetrik $d(x,y) := |x-y|$ unterschiedliche Topologien. Z. B. ist $\{0\}$ nicht offen bzgl. der Standardmetrik.

(d) Ist τ die durch die Standardmetrik auf $X = \mathbb{R}$ definierte Topologie, so ist $[0,1) \subseteq [0,1] =: Y$ bzgl. $\tau|_{[0,1]}$ offen.

Beispiel 1.7 (a) Auf $X = \mathbb{C}^n$ definiert jede der Funktionen

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}$$

und

$$d_\infty(x,y) := \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

eine Metrik. Allgemeiner ist für $p \in [1,\ \infty)$

$$d_p(x,y) := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p}$$

eine Metrik auf $\mathbb{C}^n$.

(b) Auf der Menge $X = C([a,b],\ \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definiert jede der Funktionen

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx, \quad d_\infty(f,g) := \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik. Allgemeiner ist für jedes $p \in [1,\ \infty)$

$$d_p(f,g) := \Big(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx\Big)^{1/p}$$

eine Metrik auf $C([a,b],\ \mathbb{R})$.

(c) Es definieren $d(x,y) := |x_1 - y_1|$ eine Semimetrik auf $X = \mathbb{C}^2$ und

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

eine Semimetrik auf $C([0,2],\mathbb{R})$. Keine dieser Semimetriken ist eine Metrik. ■

1.1.2 Abgeschlossene Mengen und Umgebungen

Definition 1.8 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(*a*) *Eine Teilmenge A von X heißt* abgeschlossen, *wenn ihr Komplement $A^c := X \setminus A$ offen ist.*

(*b*) *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt* Umgebung *von $x \in X$, wenn es eine offene Menge $O \subseteq X$ gibt mit $x \in O \subseteq U$. Wir schreiben $\mathcal{U}(x)$ für die Menge aller Umgebungen von $x \in X$.*

(*c*) *(X, τ) heißt ein* Hausdorffraum *oder hausdorffsch, wenn es für beliebige Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen O_x, O_y gibt mit $x \in O_x$, $y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$.*

Anmerkungen. (*a*) Die diskrete Topologie auf X ist immer hausdorffsch. Die indiskrete Topologie ist nur dann hausdorffsch, wenn X höchstens ein Element hat.

(*b*) Umgebungen sind nicht notwendig offen. Jede Obermenge einer Umgebung von x ist wieder eine Umgebung von x. ■

Lemma 1.9 *Sei (X, τ) topologischer Raum.*

(*a*) *Der Durchschnitt jeder Familie abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen. Insbesondere ist X abgeschlossen.*

(*b*) *Die Vereinigung jeder endlichen Familie abgeschlossener Teilmengen von X ist abgeschlossen. Insbesondere ist $\emptyset$ abgeschlossen.*

Dies folgt sofort aus (O1) und (O2) durch Komplementbildung und Beachtung der de Morganschen Regeln

$$\Big(\bigcup_{j\in J} O_j\Big)^c = \bigcap_{j\in J} O_j^c, \quad \Big(\bigcap_{j\in J} O_j\Big)^c = \bigcup_{j\in J} O_j^c$$

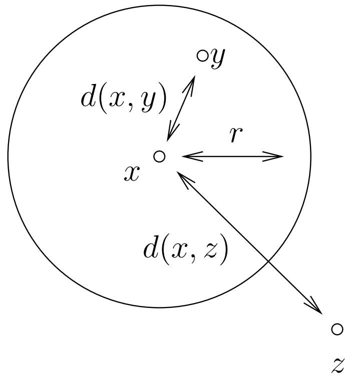
Lemma 1.10 *Sei (X, d) ein semimetrischer Raum.*

(*a*) *Für $x \in X$ und $r > 0$ ist $B_r(x)$ offen und $B_{\leq r}(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ abgeschlossen.*

(*b*) *(X, d) ist genau dann hausdorffsch, wenn d eine Metrik ist.*

Beweis. (a) Sei $y \in B_r(x)$. Dann ist $s := r - d(x,y) > 0$. Wir zeigen, dass $B_s(y) \subseteq B_r(x)$. Wegen der Dreiecksungleichung ist für alle $w \in B_s(y)$ tatsächlich

$$d(w,x) \leq d(x,y) + d(y,w) < d(x,y) + s = r,$$



also $w \in B_r(x)$. Somit ist $B_r(x)$ offen. Um die zweite Aussage von (a) zu beweisen, zeigen wir, dass $B_{\leq r}(x)^c$ offen ist. Sei $z \in B_{\leq r}(x)^c$. Dann ist $s := d(z,x) - r > 0$. Wir zeigen, dass $B_s(z) \subseteq B_{\leq r}(x)^c$. Sei $w \in B_s(z)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(x,w) \geq d(x,z) - d(z,w) > d(x,z) - s = r,$$

also $w \in B_{\leq r}(x)^c$. Somit ist $B_{\leq r}(x)^c$ offen und $B_{\leq r}(x)$ abgeschlossen. (Man beachte, wie gut die Anschauung aus dem $\mathbb{R}^2$ funktioniert.)

(b) Ist d keine Metrik, so gibt es Punkte x, $y \in X$ mit $d(x,y) = 0$, aber $x \neq y$. Dann ist $y \in B_r(x)$ für jedes $r > 0$, d.h. y liegt in *jeder* offenen Teilmenge von X, die x enthält. Dann ist X nicht hausdorffsch.

Sei umgekehrt d eine Metrik und x, $y \in X$ mit $x \neq y$. Dann ist $r := d(x,y)/2 > 0$. Wir zeigen, dass $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$. Angenommen, es gäbe ein $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$. Mit der Dreiecksungleichung ist dann

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2 \cdot \frac{1}{2} d(x,y) = d(x,y),$$

ein Widerspruch. Also sind die offenen Mengen $B_r(x)$ und $B_r(y)$ disjunkt, und X ist hausdorffsch. ∎

Definition 1.11 *Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $E \subseteq X$. Dann heißt*

$$\operatorname{clos} E = \bar{E} := \bigcap \{F \subseteq X : E \subseteq F \text{ und } F \text{ abgeschlossen}\}$$

die Abschließung *von E,*

$$\operatorname{int} E = E^\circ := \bigcup \{O \subseteq X : O \subseteq E \text{ und } O \text{ offen}\}$$

das Innere *von E, und $\partial E := \bar{E} \setminus E^\circ$ der* Rand *von E. Schließlich heißt E* dicht *in X, wenn $\bar{E} = X$.*

Es ist also $\bar{E}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die E umfasst. Offenbar ist E genau dann abgeschlossen, wenn $E = \bar{E}$. Analog ist E° die größte offene Menge, die in E enthalten ist, und eine Menge E ist genau dann offen, wenn $E = E^\circ$.

Lemma 1.12 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $E \subseteq X$ und $x \in X$. Dann ist*

$$
\begin{array}{lll}
(a)\ x \in E^\circ & \Leftrightarrow & \textit{es gibt eine Umgebung } U \textit{ von } x \textit{ mit } U \subseteq E \Leftrightarrow E \in \mathcal{U}(x). \\
(b)\ x \in \bar{E} & \Leftrightarrow & \textit{für jede Umgebung } U \textit{ von } x \textit{ ist } U \cap E \neq \emptyset \Leftrightarrow E^c \notin \mathcal{U}(x). \\
(c)\ x \in \partial E & \Leftrightarrow & \textit{für jede Umgebung } U \textit{ von } x \textit{ ist } U \cap E \neq \emptyset \textit{ und } U \cap E^c \neq \emptyset.
\end{array}
$$

Beweis. (a) Die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:

- $x \in E^\circ$.
- Es gibt eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq E$.
- Es gibt eine Umgebung U von x mit $U \subseteq E$.
- E ist eine Umgebung von x.

(b) Die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:

- $x \in \bar{E}$.
- Jede abgeschlossene Menge, die E umfasst, enthält auch x.
- Es gibt keine offene Menge O mit $x \in O$ und $O \cap E = \emptyset$.
- Jede Umgebung von x hat einen nichtleeren Durchschnitt mit E.
- E^c ist keine Umgebung von x.

(c) Dies folgt nun unmittelbar aus (a) und (b). Es ist ja $x \in \partial E$ genau dann, wenn $x \in \bar{E}$, aber $x \notin E^\circ$. ■

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen zu alternativen Definitionen topologischer Räume. Ausgangspunkt für unsere Definition 1.1 war eine axiomatische Beschreibung der Menge der offenen Mengen. Mit Lemma 1.9 kann man eine ähnliche Definition geben, in der die Menge der abgeschlossenen Mengen axiomatisiert wird. Auch die Begriffe der Umgebung und der Abschließung lassen sich axiomatisieren und führen zu alternativen (aber äquivalenten) Definitionen eines topologischen Raumes. Den Zugang über Umgebungen wählte Felix Hausdorff in seiner ursprünglichen Definition topologischer Räume.

Als Beispiel sehen wir uns die Definition mittels der *Kuratovskischen Hüllenaxiome* an, die die Eigenschaften des Abschließungsoperators axiomatisieren.

Definition 1.13 *Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, ^-)$ aus einer Menge X und einer Abbildung $^- : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(H1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

(H2) $A \subseteq \bar{A}$ *für alle* $A \subseteq X$.

(H3) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ *für alle* $A \subseteq X$.

(H4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *für alle* $A, B \subseteq X$.

HA: Überlegen Sie sich, dass der Operator der Abschließung $A \mapsto \bar{A}$ gemäß Definition 1.11 die Eigenschaften (H1)-(H4) hat und dass man umgekehrt im Kontext von Definition 1.13 die abgeschlossenen Mengen durch die Eigenschaft $A = \bar{A}$ charakterisieren und dann die offenen Mengen als Komplemente abgeschlossener Mengen einführen kann. Diese genügen den Axiomen (O1) und (O2).

1.2 Stetige Abbildungen

Stetige Abbildungen sind Abbildungen zwischen topologischen Räumen, die die Struktur (in einem gewissen Sinn) erhalten. Hier ist die offizielle Definition.

Definition 1.14 *Seien* (X, τ_X) *und* (Y, τ_Y) *topologische Räume.*

(a) *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* stetig, *wenn für jede offene Menge* $O \subseteq Y$ *ihr Urbild* $f^{-1}(O)$ *offen in* X *ist. Wir schreiben* $C(X, Y)$ *für die Menge der stetigen Abbildungen von* X *nach* Y.

(b) *Eine stetige Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt ein* Homöomorphismus *(oder ein topologischer Isomorphismus), wenn es eine stetige Abbildung* $g : Y \to X$ *mit* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ *und* $g \circ f = \mathrm{id}_X$ *gibt.*

(c) *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *heißt* offen *(abgeschlossen), wenn für jede offene (abgeschlossenen) Menge* $O \subseteq X$ *ihr Bild* $f(O)$ *offen (abgeschlossen) in* Y *ist.*

Lemma 1.15 *Sind* $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ *stetig, so ist auch* $g \circ f : X \to Z$ *stetig.*

Beweis. Ist O offen in Z, so ist $g^{-1}(O)$ offen in Y und $f^{-1}(g^{-1}(O))$ offen in X. Wegen $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ folgt die Behauptung. ∎

Lemma 1.16 (a) *Ist* $f : X \to Z$ *stetig und* $Y \subseteq X$, *so ist die Einschränkung* $f|_Y : Y \to Z$ *stetig bzgl. der Teilraumtopologie* $\tau|_Y$ *auf* Y.

(b) *Sei* $f : X \to Z$ *eine Abbildung und* $Y \subseteq Z$ *enthalte* $f(X)$. *Dann ist* f *genau dann stetig, wenn die Koeinschränkung* $f|^Y : X \to Y$ *bzgl. der Teilraumtopologie auf* Y *stetig ist.*

Beweis. (a) Ist $O \subseteq Z$ offen, so ist $(f|_Y)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap Y$ offen in der Teilraumtopologie. Also ist $f|_Y$ stetig.

(b) Für jede Teilmenge O von Z ist $f^{-1}(O) = f^{-1}(O \cap Y) = (f|^Y)^{-1}(O \cap Y)$. Daher ist f genau dann stetig, wenn $f|^Y$ stetig ist. ∎

Die Umkehrung von Aussage (a) gilt nicht: Die Einschränkung der Dirichlet-Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

auf $\mathbb{Q}$ ist stetig; auf $\mathbb{R}$ ist f aber in jedem Punkt unstetig.

In Definition 1.14 haben wir *globale* Stetigkeit definiert. Stetigkeit *in einem Punkt* erklären wir mit Hilfe von Umgebungen.

Definition 1.17 *Seien (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologische Räume und $x \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig in x, *wenn es für jede Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x gibt mit $f(U) \subseteq V$.*

Eine äquivalente Bedingung ist: Für jede Umgebung V von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

Anmerkung. Sind speziell (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig in $x \in X$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

Es ist nämlich V genau dann eine Umgebung von $f(x)$, wenn V eine Kugel $B_\varepsilon(f(x))$ enthält, und $U \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn es eine Kugel $B_\delta(x)$ enthält. ■

Lemma 1.18 *Seien X, Y, Z topologische Räume. Ist eine Abbildung $f : X \to Y$ stetig in $x \in X$ und eine Abbildung $g : Y \to Z$ stetig in $f(x)$, so ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in x.*

Beweis. Sei $V \subseteq Z$ eine Umgebung von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Da g in $f(x)$ stetig ist, ist $g^{-1}(V)$ eine Umgebung von $f(x)$. Da außerdem f in x stetig ist, ist $f^{-1}(g^{-1}(V))$ eine Umgebung von x. Dann ist aber $(g \circ f)^{-1}(V)$ eine Umgebung von x, d.h. $g \circ f$ ist in x stetig. ■

Lemma 1.19 *Für jede Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist (global) stetig.*
(b) *f ist in jedem Punkt $x \in X$ stetig.*
(c) *Urbilder abgeschlossener Mengen in Y sind abgeschlossen in X.*
(d) *Für jede Teilmenge M von X ist $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.*

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Dann ist V° eine offene Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, ist $U := f^{-1}(V^\circ)$ offen in X. Wegen $x \in U$ ist U eine Umgebung von x mit $f(U) \subseteq V$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $O \subseteq Y$ offen. Ist $f^{-1}(O) = \emptyset$, so ist $f^{-1}(O)$ offen. Andernfalls wählen wir ein $x \in f^{-1}(O)$. Da O eine Umgebung von $f(x)$ und f stetig in x

ist, ist $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von x. Da $x \in f^{-1}(O)$ beliebig ist, ist die Menge $f^{-1}(O)$ eine Umgebung jedes ihrer Punkte. Dann ist $f^{-1}(O)$ aber offen.

$(a) \Leftrightarrow (c)$: Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist A^c offen. Wegen (a) ist dann $f^{-1}(A^c)$ offen und folglich $f^{-1}(A^c)^c$ abgeschlossen. Wegen $f^{-1}(A^c)^c = f^{-1}(A)$ ist schließlich $f^{-1}(A)$ abgeschlossen. Die Implikation $\Leftarrow$ folgt genauso.

$(c) \Rightarrow (d)$: Das Urbild $f^{-1}(\overline{f(M)})$ ist abgeschlossen. Da $M \subseteq f^{-1}(\overline{f(M)})$, ist also auch $\overline{M} \subseteq f^{-1}(\overline{f(M)})$, also $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

$(d) \Rightarrow (c)$: Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen und $M := f^{-1}(A)$. Wegen (d) ist

$$f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{A} = A,$$

also $\overline{M} \subseteq f^{-1}(A) = M$. Wegen $\overline{M} \subseteq M$ ist M abgeschlossen. ■

Lemma 1.20 *Seien X, Y topologische Räume. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) f ist ein Homöomorphismus.
(b) f ist bijektiv und $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig.
(c) f ist bijektiv und offen.
(d) f ist bijektiv und abgeschlossen.

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Umkehrabbildung einer stetigen Bijektion i. Allg. nicht wieder stetig ist. Beispiele dafür haben wir in der Analysisvorlesung kennengelernt.

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$: Ist f ein Homöomorphismus, so gibt es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dann ist f bijektiv, und $f^{-1} = g$ ist stetig. Ist umgekehrt f bijektiv und f^{-1} stetig, so sieht man mit $g := f^{-1}$, dass f ein Homöomorphismus ist.

$(b) \Leftrightarrow (c)$: Dies folgt sofort aus $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O)$ für jede Menge $O \subseteq X$. Ist nämlich $O \subseteq X$ offen und f^{-1} stetig, so ist $(f^{-1})^{-1}(O)$ offen. Ist umgekehrt $O \subseteq X$ offen und f offen, so ist $f(O)$ offen.

$(b) \Leftrightarrow (d)$: Dies folgt wie die vorige Äquivalenz, wenn man Lemma 1.19 (c) als Charakterisierung der Stetigkeit benutzt. ■

1.3 Folgen und Abzählbarkeitsaxiome

Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kann man mit Hilfe konvergenter Folgen charakterisieren. Die folgenden Ergebnisse deuten an, dass dies für Abbildungen zwischen topologischen Räumen nicht zu erwarten ist. Dies wird uns später auf Verallgemeinerungen des Folgenbegriffs führen. Vorab einige Definitionen.

Definition 1.21 *Eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in einem topologischen Raum* X konvergiert *gegen* $p \in X$*, wenn es für jede Umgebung* U *von* p *ein* $n_U \in \mathbb{N}$ *gibt mit* $x_n \in U$ *für alle* $n \geq n_U$*. In diesem Fall schreiben wir* $x_n \to p$*.*

Eine Folge in einem topologischen Raum kann gegen mehrere Punkte konvergieren. Ist z. B. X mit der indiskreten Topologie versehen, so konvergiert *jede* Folge in X gegen *jeden* Punkt aus X. Die Hausdorff-Eigenschaft rettet die Eindeutigkeit des Grenzwertes (HA). Ist der Grenzwert eindeutig bestimmt, schreiben wir auch $p = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Definition 1.22 *Ein topologischer Raum* X

(a) *genügt dem* ersten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, d.h. wenn es für jedes* $p \in X$ *eine Folge* (U_n) *von Umgebungen von* p *gibt, so dass jede Umgebung von* p *eine der Mengen* U_n *enthält.*

(b) *genügt dem* zweiten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn* X *eine höchstens abzählbare Basis aus offenen Mengen besitzt, d.h. wenn es eine höchstens abzählbare Familie* (U_n) *offener Mengen in* X *gibt, so dass für jedes* $p \in X$ *und jede offene Umgebung* V *von* p *ein* U_n *mit* $x \in U_n \subseteq V$ *gibt.*

(c) *heißt* separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

In Abschnitt 2.1 werden wir ausführlicher über Basen sprechen.

Indem man in (a) erforderlichenfalls U_n durch $U'_n := U_1 \cap \ldots \cap U_n$ ersetzt, erhält man eine absteigende Umgebungsbasis $U'_1 \supseteq U'_2 \supseteq \ldots$ von p.

Erfüllt ein topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste und ist separabel (HA).

Metrische Räume erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom: Für jeden Punkt p bildet die Folge der Mengen $U_n = B_{1/n}(p)$ eine Umgebungsbasis. Metrische Räume erfüllen genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn sie separabel sind (HA).

Teilmengen separabler metrischer Räume sind wieder separabel (HA); das folgende Beispiel zeigt, dass Teilmengen separabler topologischer Räume nicht separabel sein müssen.

Beispiel 1.23 (Sorgenfrey-Ebene) Sei $X = \mathbb{R}^2$. Die Menge aller halboffenen Rechtecke $[a, b) \times [c, d)$ mit $a < b$ und $c < d$ bildet die Basis einer Topologie auf X. Die Menge $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von X (jedes halboffene Rechteck enthält Punkte aus $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$); somit ist X separabel.

Sei $M \subset X$ die Antidiagonale $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, versehen mit der Teilraumtopologie (vgl. Lemma 1.2). Für jeden Punkt $(x, -x) \in M$ ist $[x, x+1)\times[-x, -x+1)$ eine offene Umgebung in X mit

$$\{(x, -x)\} \cap \big([x, x + 1) \times [-x, -x + 1)\big) = \{(x, -x)\}.$$

Somit ist jeder Punkt in M bezüglich der Teilraumtopologie isoliert. Da M überabzählbar ist, kann M nicht separabel sein (jeder isolierte Punkt muss zu jeder dichten Teilmenge gehören). ■

Lemma 1.24 (a) *Ist* $f : X \to Y$ *eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und* (x_n) *eine Folge in* X*, die gegen ein* $p \in X$ *konvergiert, so gilt* $f(x_n) \to f(p)$*. Kurz: stetige Abbildungen sind folgenstetig.*

(b) *Gilt* $f(x_n) \to f(p)$ *für jede Folge* (x_n) *mit* $x_n \to p$ *und genügt* X *dem ersten Abzählbarkeitsaxiom, so ist* f *stetig.*

Beweis. (a) Sei zunächst f stetig in p und (x_n) eine Folge mit $x_n \to p$. Sei V eine Umgebung von $f(p)$. Wegen der Stetigkeit gibt es eine Umgebung U von p mit $f(U) \subseteq V$. Wählen $n_U \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U$ für $n \geq n_U$. Dann ist $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ für $n \geq n_U$, also $f(x_n) \to f(p)$.

(b) Sei $f(x_n) \to f(p)$ für jede Folge $x_n \to p$. Wir zeigen, dass f in p stetig ist. Da X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine *absteigende* Umgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von p.

Angenommen, f wäre nicht stetig in p. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(p)$ mit $f(U_n) \not\subseteq V$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere finden wir für jedes n ein $x_n \in U_n$ mit $f(x_n) \notin V$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen p. Für jede Umgebung U von p gibt es nämlich ein n_U mit $U_{n_U} \subseteq U$, und da (U_n) absteigend ist, gilt

$$x_n \in U_n \subseteq U_{n_U} \subseteq U \qquad \text{für alle } n \geq n_U.$$

Andererseits ist $f(x_n) \not\to f(p)$ nach Konstruktion. Widerspruch. ■

Beispiel 1.25 Für dieses Beispiel müssen wir etwas vorgreifen; die Details folgen in Abschnitt 2.2. Sei X die Menge der messbaren Funktionen $f : [0,1] \to [0,1]$. Man kann auf dieser Menge eine Topologie definieren, bzgl. derer eine Folge (f_n) genau dann gegen ein f konvergiert, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ (die sogenannte Topologie der punktweisen Konvergenz). Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz ist die Abbildung

$$I : X \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$$

folgenstetig, d. h. aus $f_n \to f$ folgt $I(f_n) \to I(f)$ (beachte, dass $|f_n(x)| \leq 1$ und dass die konstante Funktion $x \mapsto 1$ ist eine integrierbare Majorante ist). Die Abbildung I ist aber nicht stetig! Es ist nämlich $I(f) = 0$ für jede Funktion f, die nur in höchstens endlich vielen Stellen von 0 verschieden ist. Andererseits liegt die Funktion $x \mapsto 1$ in der Abschließung der Menge M aller Funktionen mit dieser Eigenschaft (vgl. wieder Abschnitt 2.2). Wäre f stetig, so wäre $I(\overline{M}) \subseteq \overline{I(M)}$, was offenbar falsch ist. Also ist f zwar folgenstetig, aber nicht stetig. ■

1.4 Zusammenhang

Wir versehen das Intervall $[0,1]$ und die Menge $\{0,1\}$ mit der Einschränkung der Standard-Topologie von $\mathbb{R}$. Die Topologie auf $\{0,1\}$ ist also die diskrete.

Definition 1.26 *(a) Ein topologischer Raum X heißt* zusammenhängend*, wenn in jeder Zerlegung $X = O_1 \cup O_2$ von X in zwei disjunkte offene Mengen O_1, O_2 eine der Mengen O_i leer ist.*

(b) Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ heißt ein Weg *und ihr Bild $\gamma([0,1]) \subseteq X$ eine* Kurve*. Der topologische Raum X heißt* wegzusammenhängend*, wenn es für beliebige Punkte $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Dann heißt γ ein* Weg von x nach y*.*

Lemma 1.27 *Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion $f : X \to \{0,1\}$ konstant ist.*

Beweis Sei X zusammenhängend und $f : X \to \{0,1\}$ stetig. Dann sind $O_1 := f^{-1}(\{0\})$ und $O_2 := f^{-1}(\{1\})$ offene Teilmengen von X mit $O_1 \cup O_2 = X$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Da X zusammenhängend ist, ist eine dieser Mengen leer. Dann ist f aber konstant.

Sei nun X nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere offene Teilmengen O_1, O_2 von X mit $O_1 \cup O_2 = X$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Die Funktion

$$f : X \to \{0,1\}, \quad f(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in O_1 \\ 1 & \text{wenn } x \in O_2 \end{cases}$$

ist korrekt definiert, stetig, und nimmt beide Werte 0 und 1 an. ■

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ (mit der Standard-Topologie) lassen sich komplett beschreiben.

Lemma 1.28 *Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn I ein Intervall ist, d.h. wenn aus $x, z \in I$ und $x < y < z$ folgt $y \in I$.*

Beweis. Ist I ein Intervall, so ist nach dem Zwischenwertsatz jede stetige Funktion $f : I \to \{0,1\}$ konstant. Nach Lemma 1.27 ist I zusammenhängend. Ist dagegen I kein Intervall, so gibt es Punkte x, $z \in I$ und $y \in \mathbb{R} \setminus I$ mit $x < y < z$. Dann sind $O_1 := I \cap (-\infty, y)$ und $O_2 := I \cap (y, \infty)$ nichtleere disjunkte offene Mengen mit $O_1 \cup O_2 = I$, und I ist nicht zusammenhängend. ■

Es folgt noch ein Beweis der Implikation "I Intervall $\Rightarrow$ I zusammenhängend", der ohne den Zwischenwertsatz auskommt.

Alternativer Beweis. Angenommen, I ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es nichtleere offene Mengen O_1, $O_2 \subset I$ mit $O_1 \cup O_2 = I$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Seien $u \in O_1$, $v \in O_2$ und (o.E.d.A.) sei $u < v$. Weiter sei

$$S := \{s \in I : [u, s] \subseteq O_1\} \quad \text{und} \quad s_0 := \sup S.$$

Dann ist $u \leq s_0 \leq v$. Da I ein Intervall ist, folgt $s_0 \in I$. Es ist also entweder $s_0 \in O_1$ oder $s_0 \in O_2$. Ist $s_0 \in O_1$, so gibt es ein Intervall $[s_0,\ s_0+\varepsilon)$, das komplett in O_1 liegt. Dann ist s_0 nicht das Supremum von S. Ist $s_0 \in O_2$, so gibt es ein Intervall $(s_0 - \varepsilon,\ s_0]$, das komplett in O_2 liegt. Wieder ist s_0 nicht das Supremum von S. In jedem Fall führt unsere Annahme auf einen Widerspruch. ∎

Lemma 1.29 *Ist $f : X \to Y$ stetig und X (weg-)zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ (weg-)zusammenhängend.*

Beweis. Sei X zusammenhängend und $h : f(X) \to \{0, 1\}$ stetig. Dann ist $h \circ f : X \to \{0, 1\}$ stetig und folglich konstant nach Lemma 1.27. Dann ist aber h konstant und $f(X)$ zusammenhängend, wieder nach Lemma 1.27.

Sei nun X wegzusammenhängend und a, $b \in f(X)$. Dann gibt es Punkte x, $y \in X$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$ sowie einen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Dann ist $f \circ \gamma : [0, 1] \to f(X)$ ein Weg in $f(X)$, der a mit b verbindet. Also ist $f(X)$ wegzusammenhängend. ∎

Lemma 1.30 *Wegzusammenhängende topologische Räume sind zusammenhängend.*

Die Umkehrung dieser Aussage ist bereits im $\mathbb{R}^2$ falsch (HA).

Beweis. Sei X wegzusammenhängend und $f : X \to \{0, 1\}$ stetig. Wir zeigen, dass f konstant ist. Seien x, $y \in X$ beliebig. Dann gibt es einen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ von x nach y. Die Funktion $f \circ \gamma : [0, 1] \to \{0, 1\}$ ist stetig und nach Lemma 1.27 und 1.28 konstant. Also ist $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$. Da x, y beliebige Punkte aus X waren, ist f konstant. ∎

Lemma 1.31 *Für Wege $\alpha : [0, 1] \to Y$ und $\beta : [0, 1] \to Y$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ sei*

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t - 1) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Dann ist $\alpha * \beta : [0, 1] \to Y$ stetig, also wieder ein Weg.

Beweis. Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann ist

$$(\alpha * \beta)^{-1}(U) = \{t \in [0, 1/2] : \alpha(2t) \in U\} \cup \{t \in [1/2, 1] : \beta(2t - 1) \in U\}.$$

Wir zeigen, dass $\{t \in [0, 1/2] : \alpha(2t) \in U\}$ offen ist. Sei $\gamma(t) := \alpha(2t)$ für $t \in [0, 1/2]$. Dann ist

$$\{t \in [0, 1/2] : \alpha(2t) \in U\} = \{t \in [0, 1/2] : \gamma(t) \in U\} = \gamma^{-1}(U)$$

offen in $[0,1/2]$, da γ stetig ist. Analog ist $\{t \in [1/2,1] : \beta(2t-1) \in U\}$ offen in $[1/2,1]$. Man sieht leicht, dass die Vereinigung beider Mengen offen in $[0,1]$ ist (beachte: $1/2$ gehört zu beiden offenen Mengen oder zu keiner der beiden). ■

Lemma 1.32 *Sei X topologischer Raum und $(Y_j)_{j\in J}$ eine Familie (weg-)zusammenhängender Teilmengen von X mit $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{j\in J} Y_j$ (weg-) zusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in \bigcap_{j\in J} Y_j$ und $Y := \bigcup_{j\in J} Y_j$.

Seien zunächst die Y_j zusammenhängend und sei $f : Y \to \{0,1\}$ stetig. O.E.d.A. können wir $f(x) = 0$ annehmen. Da die Einschränkung $f|_{Y_j} : Y_j \to \{0,1\}$ stetig und Y_j zusammenhängend ist, ist $f|_{Y_j} = 0$. Folglich ist $f = 0$, d. h. f ist konstant, und Y ist zusammenhängend.

Seien nun die Y_j wegzusammenhängend, und seien y, $z \in Y$. Wir wählen i, $j \in J$ mit $y \in Y_i$ und $z \in Y_j$ sowie Wege $\alpha : [0,1] \to Y_i$ mit $\alpha(0) = y$, $\alpha(1) = x$ und $\beta : [0,1] \to Y_j$ mit $\beta(0) = x$, $\beta(1) = z$. Nach Lemma 1.31 ist $\alpha * \beta$ ein Weg in $Y_i \cup Y_j \subseteq Y$, der y mit z verbindet. Also ist Y wegzusammenhängend. ■

Definition 1.33 *Sei X topologischer Raum und $x \in X$.*

(a) Die Zusammenhangskomponente *C_x von x ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.*

(b) Die Wegkomponente *A_x von x ist die Vereinigung aller wegzusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten.*

Anmerkung 1.34 (*a*) Wegen Lemma 1.32 ist jede Zusammenhangskomponente zusammenhängend und jede Wegkomponente wegzusammenhängend.

(*b*) Wegen Lemma 1.30 ist $A_x \subseteq C_x$ für alle $x \in X$.

(*c*) Die Zusammenhangskomponenten von X bilden eine *Zerlegung* von X, d. h. es ist $\bigcup_{x\in X} C_x = X$, und je zwei Zusammenhangskomponenten sind entweder gleich oder disjunkt. Wir überlegen uns letzteres. Sind C_x, C_y Komponenten mit nichtleerem Durchschnitt, so ist nach Lemma 1.32 $C_x \cup C_y$ zusammenhängend. Dann ist nach Definition $C_x \cup C_y \subseteq C_x$ und $C_x \cup C_y \subseteq C_y$, also $C_x = C_y$.

(*d*) Die Wegkomponenten von X bilden eine Zerlegung von X (HA).

(*e*) C_x ist abgeschlossen. Zur Begründung zeigen wir: Ist A zusammenhängend, so auch der Abschluß $\bar{A}$. Angenommen, es ist $\bar{A} \subseteq X$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es in X offene Mengen O_1, O_2 mit $\bar{A} \subseteq O_1 \cup O_2$, $\bar{A} \cap O_1 \neq \emptyset$, $\bar{A} \cap O_2 \neq \emptyset$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ist $\bar{a} \in \bar{A} \cap O_1$, so ist O_1 eine offene Umgebung von $\bar{a}$. In dieser gibt es einen Punkt $a \in A$. Also ist $A \cap O_1 \neq \emptyset$. Analog ist $A \cap O_2 \neq \emptyset$. Dann ist aber A nicht zusammenhängend; ein Widerspruch.

(*f*) C_x ist nur unter zusätzlichen Annahmen offen (z.B. wenn X *lokal zusammenhängend* ist, d.h. wenn jeder Punkt eine zusammenhängende Umgebung besitzt, HA). Beispielsweise bildet für $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ jede einelementige Teilmenge $\{x\}$ eine Zusammenhangskomponente, aber $\{0\}$ ist nicht offen. ■

Lemma 1.35 *Sei X ein topologischer Raum, in dem jeder Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Dann sind alle Wegkomponenten von X offen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ sei U_x eine wegzusammenhängende Umgebung von x. Nach Definition ist $U_x \subseteq A_x$, d. h. A_x ist eine Umgebung von x. Nach Anmerkung 1.34 (d) ist $A_y = A_x$ für jeden Punkt $y \in A_x$. Folglich ist die Menge A_x eine Umgebung jedes ihrer Punkte, d.h. A_x ist offen.

Aus Anmerkung 1.34 (b) wissen wir, dass $A_x \subseteq C_x$ für alle $x \in X$. Angenommen, $C_x \setminus A_x$ ist nicht leer für ein $x \in X$. Für jedes $y \in C_x \setminus A_x$ ist $A_x \cap A_y = \emptyset$ nach Anmerkung 1.34 (d) und folglich $A_y \subseteq C_x \setminus A_x$. Es ist daher

$$C_x \setminus A_x = \bigcup_{y \in C_x \setminus A_x} A_y$$

eine Vereinigung offener Mengen, also offen in C_x. Dann ist C_x die Vereinigung der disjunkten offenen und nichtleeren Mengen A_x und $C_x \setminus A_x$, kann also nicht zusammenhängend sein. Widerspruch. ∎

Definition 1.36 *Ein topologischer Raum heißt eine n-*dimensionale *(topologische)* Mannigfaltigkeit*, wenn jeder seiner Punkte eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (mit der Standardtopologie) homöomorph ist.*

Da offene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend sind und durch Homöomorphismen wieder auf offene und wegzusammenhängende Mengen abgebildet werden, gilt Lemma 1.35 insbesondere für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

1.5 Trennungsaxiome

Wir haben bereits gesehen, dass metrische Räume stets hausdorffsch sind. Andererseits ist der Begriff des topologischen Raumes so weit gefasst, dass er auch Topologien zulässt, die die Punkte des Raumes nicht unterscheiden oder trennen können (wie z. B. die indiskrete Topologie). In praktisch allen interessanten Situationen besitzen die auftretenden topologischen Räume zusätzliche Trennungseigenschaften.

Definition 1.37 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum.*

(T_0) *X heißt T_0-*Raum*, wenn von je zwei verschiedenen Punkten wenigstens einer eine offene Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält.*

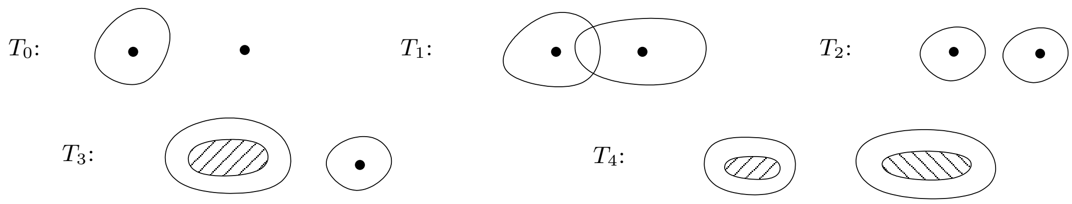
(T_1) *X heißt T_1-*Raum*, wenn von je zwei verschiedenen Punkten jeder eine offene Umgebung besitzt, die den anderen nicht enthält.*

(T_2) *X heißt T_2-*Raum *oder* hausdorffsch*, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.*

(T_3) *Ein T_1-Raum heißt T_3-*Raum *oder* regulär*, wenn es für jede abgeschlossene Teilmenge A von X und jeden Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Umgebungen gibt.*

(T_4) *Ein T_1-Raum heißt T_4-*Raum *oder* normal*, wenn es für je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen disjunkte offene Umgebungen gibt.*

Unter einer offenen Umgebung einer abgeschlossenen Menge A verstehen wir eine offene Menge U mit $A \subseteq U$.



Anmerkung 1.38 (a) Das T_0-Axiom besagt, dass die Punkte von X bestimmt werden durch die Menge der offenen Mengen, in denen sie liegen.

(b) Das T_1-Axiom ist äquivalent zu: *Für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.* Tatsächlich: Jeder Punkt $y \in \{x\}^c$ hat eine offene Umgebung, die x nicht enthält, also in $\{x\}^c$ liegt. Somit ist $\{x\}^c$ offen und $\{x\}$ abgeschlossen. Ist umgekehrt $x \neq y$ und $\{x\}$ abgeschlossen, so ist $\{x\}^c$ eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält.

(c) Offenbar gilt dann $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

(d) Metrische Räume sind normal (HA). ■

Lemma 1.39 *Ein Hausdorffraum X ist genau dann regulär, wenn jede Umgebung eines Punktes eine abgeschlossene Umgebung dieses Punktes enthält.*

Beweis. Sei zunächst X regulär. Sei $x \in X$ und V eine offene Umgebung von x. Dann ist V^c abgeschlossen und $x \notin V^c$. Wegen (T_3) gibt es disjunkte offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ mit $x \in U_1$ und $V^c \subseteq U_2$. Dann ist also $x \in U_1 \subseteq U_2^c \subseteq V$, d. h. U_2^c ist eine abgeschlossene Umgebung von x, die in V enthalten ist.

Sei umgekehrt X ein Hausdorffraum mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung eines Punktes eine abgeschlossene Umgebung dieses Punktes enthält. Sei $x \in X$ und A eine abgeschlossene Teilmenge von X, die x nicht enthält. Dann ist A^c eine offene Umgebung von x. Diese enthält nach Voraussetzung eine abgeschlossene Umgebung U von x. Dann sind U° und U^c disjunkte offene Mengen mit $x \in U^\circ$ und $A \subseteq U^c$. ■

2 Erzeugung von Topologien

Es gibt verschiedene Verfahren, aus gegebenen Topologien neue zu generieren. In diesem Kapitel schauen wir uns die Konstruktion der Initial- und der Finaltopologie an und wenden diese an auf die Erzeugung der Produkt- und Quotiententopologie. Wir beginnen mit der Konstruktion von Topologien aus Teilmengen der Potenzmenge.

2.1 Basen und Subbasen von Topologien

Definition 2.1 *Seien τ, σ Topologien über der gleichen Menge X. Dann heißt τ* feiner (gröber) *als σ, wenn $\sigma \subseteq \tau$ ($\tau \subseteq \sigma$) als Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$.*

Lemma 2.2 *Sei $(\tau_j)_{j\in J}$ eine Familie von Topologien auf X. Dann ist $\bigcap_{j\in J} \tau_j$ eine Topologie auf X. Diese ist die feinste Topologie auf X, die gröber als alle τ_j ist.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass $\tau := \bigcap_{j\in J} \tau_j$ eine Topologie auf X ist. Offenbar ist $\tau \subseteq \tau_j$ für jedes $j \in J$.

Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von τ und $O := \bigcup_{i\in I} O_i$. Da $O_i \in \tau_j$ für jedes i und jedes j, ist auch $O \in \tau_j$ für jedes j und daher $O \in \tau$. Also gilt ($O1$). Für ($O2$) sei I endlich und $O := \bigcap_{i\in I} O_i$. Da wieder $O_i \in \tau_j$ für jedes i und j, ist auch $O \in \tau_j$ für jedes j und daher $O \in \tau$. ∎

Definition 2.3 *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist nach Lemma 2.2*

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{\text{top}} := \cap \{\sigma : \sigma \textit{ ist Topologie auf } X \textit{ und } \mathcal{A} \subseteq \sigma\} \tag{2.1}$$

eine Topologie auf X, und zwar die gröbste Topologie, die $\mathcal{A}$ umfasst. Sie heißt die durch $\mathcal{A}$ erzeugte Topologie (*man beachte, dass der Durchschnitt in* (2.1) *wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nicht über der leeren Menge gebildet wird*). *Ist eine Topologie τ durch eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugt, so heißt $\mathcal{A}$ eine* Subbasis *von τ. Die Menge $\mathcal{A}$ heißt eine* Basis *von τ, wenn jedes Element von τ die Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{A}$ ist.*

Lemma 2.4 *Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \tau$ ist genau dann eine Subbasis von τ, wenn τ aus allen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{A}$ besteht.*

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, und σ bezeichne die Menge aller Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{A}$. Wir zeigen, dass σ eine Topologie auf X ist. Offenbar liegen beliebige Vereinigungen von Mengen aus σ wieder in σ. Der Durchschnitt einer leeren Familie aus σ ist X, und es ist $X \in \sigma$, da X der Durchschnitt der leeren Familie aus $\mathcal{A}$ ist. Wir zeigen, dass auch alle nichtleeren endlichen Durchschnitte von Mengen aus σ wieder in σ liegen. Seien also $O_1, \dots, O_n \in \sigma$. Wir schreiben jedes O_i als $O_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{ij}$, wobei die A_{ij} endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{A}$ sind. Dann ist

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j \in J_i} A_{ij} \right) = \bigcup_{j_i \in J_i,\, i \in \{1,\dots,n\}} (A_{1j_1} \cap \dots \cap A_{nj_n})$$

wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{A}$. Es ist also $O_1 \cap \dots \cap O_n \in \sigma$, und somit ist σ eine Topologie.

Sei nun $\mathcal{A} \subseteq \tau$. Dann ist offenbar $\mathcal{A}$ genau dann eine Subbasis für τ, wenn $\tau = \sigma$. Das ist aber die Behauptung. ■

Lemma 2.5 *Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume, und $\mathcal{B}$ sei eine Subbasis von τ_Y. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ das Urbild $f^{-1}(B)$ offen ist.*

Die Kenntnis einer Subbasis erleichtert also den Nachweis der Stetigkeit, da die Offenheit von $f^{-1}(B)$ nur für die Mengen aus $\mathcal{B}$ und nicht für alle $B \in \tau_Y$ gezeigt werden muss.

Beweis. Für eine beliebige Familie $\{U_j\}_{j \in J}$ von Teilmengen von Y gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} U_j \right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(U_j).$$

Folglich ist die Menge

$$\{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \tau_X\} \tag{2.2}$$

eine Topologie auf Y. Nun ist f genau dann stetig, wenn τ_Y zu dieser Menge gehört. Da $\mathcal{B}$ die Topologie τ_Y erzeugt, gilt dies genau dann, wenn $\mathcal{B}$ zur Menge (2.2) gehört. ■

2.2 Die Initial- und Finaltopologie

Im Beweis von Lemma 2.5 haben wir mit Hilfe einer Abbildung $f : X \to Y$ aus einer Topologie auf X eine Topologie auf Y konstruiert. Genauer: ist $f : X \to Y$ und τ_X eine Topologie auf X, so ist

$$f_* \tau_X := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \tau_X\}$$

eine Topologie auf Y, die auch *push forward von τ_X durch f* heißt. Versieht man Y mit der Topologie $f_* \tau_X$, so wird f offenbar stetig, und $f_* \tau_X$ ist die feinste Topologie aus Y mit dieser Eigenschaft.

Umgekehrt definiert jede Topologie τ_Y auf Y durch

$$f^* \tau_Y := \{f^{-1}(O) : O \in \tau_Y\}$$

eine Topologie auf X. Versieht man X mit dieser Topologie, so wird f stetig, und $f^*\tau_Y$ ist die gröbste Topologie auf X mit dieser Eigenschaft. Wir erweitern diese Konzepte auf Familien von Abbildungen.

Definition 2.6 *Sei X eine Menge und $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume.*
(*a*) *Für jedes $i \in I$ sei $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung. Dann heißt*

$$\tau := \langle f_i^*\tau_i : i \in I\rangle_{\text{top}} = \langle\{f_i^{-1}(O_i) :\ O_i \in \tau_i, i \in I\}\rangle_{\text{top}}$$

die durch die Familie $\{(f_i, Y_i)\}_{i\in I}$ definierte Initialtopologie *auf X. Die Initialtopologie ist also die gröbste Topologie auf X, die alle Urbilder $f_i^{-1}(O_i)$ mit $O_i \in \tau_i$ und $i \in I$ enthält.*
(*b*) *Für jedes $i \in I$ sei $f_i : Y_i \to X$ eine Abbildung. Dann heißt*

$$\tau := \{U \subseteq X : \textit{für alle } i \in I \textit{ ist } f_i^{-1}(U) \in \tau_i\} = \bigcap_{i\in I} f_{i,*}\tau_i$$

die durch die Familie $\{(f_i, Y_i)\}_{i\in I}$ definierte Finaltopologie *auf X.* (*Dass τ eine Topologie ist, sieht man wie im Beweis von Lemma* 2.5.)

Diese Topologien machen nicht nur alle Abbildungen f_i stetig; sie haben auch gewisse extremale und universelle Eigenschaften.

Lemma 2.7 *Die durch die Familie der Abbildungen $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, definierte Initialtopologie auf X ist die gröbste Topologie, in der alle Abbildungen f_i stetig sind. Sie hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist Z ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $h : Z \to X$ genau dann stetig, wenn* jede *Abbildung $f_i \circ h : Z \to Y_i$ stetig ist.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar, ebenso die Implikation

$$h \text{ stetig } \Rightarrow f_i \circ h \text{ stetig für alle } i \in I.$$

Wir zeigen die umgekehrte Implikation. Die Mengen $f_i^{-1}(O_i)$ mit $O_i \in \tau_i$ und $i \in I$ bilden eine Subbasis der Initialtopologie auf X. Die Stetigkeit von h folgt daher mit Lemma 2.5, wenn wir zeigen können, dass jede Menge $h^{-1}\big(f_i^{-1}(O_i)\big)$ offen ist. Wegen $h^{-1}\big(f_i^{-1}(O_i)\big) = (f_i \circ h)^{-1}(O_i)$ und der vorausgesetzten Stetigkeit von $f_i \circ h$ ist dies aber klar. ■

Lemma 2.8 *Die durch die Familie der Abbildungen $f_i : Y_i \to X$, $i \in I$, definierte Finaltopologie auf X ist die feinste Topologie, in der alle Abbildungen f_i stetig sind. Sie hat die folgende universelle Eigenschaft: Ist Z ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $h : X \to Z$ genau dann stetig, wenn* jede *Abbildung $h \circ f_i : Y_i \to Z$ stetig ist.*

Beweis. Wir zeigen wieder nur die Implikation

$$h \circ f_i \text{ stetig für alle } i \in I \Rightarrow h \text{ stetig.}$$

Sei O offen in Z. Nach Definition der Finaltopologie auf X ist $h^{-1}(O)$ genau dann offen in X, wenn für jedes $i \in I$ die Menge $f_i^{-1}\big(h^{-1}(O)\big)$ offen in Y_i ist. Wegen $f_i^{-1}\big(h^{-1}(O)\big) = (h \circ f_i)^{-1}(O)$ und der vorausgesetzten Stetigkeit von $h \circ f_i$ ist dies der Fall. ■

Beispiel 2.9 Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$. Weiter sei $id_Y : Y \to X$ die kanonische Einbettung von Y in X (die $y \in Y$ das Element $y \in X$ zuordnet). Die durch id_Y definierte Initialtopologie auf Y ist gegeben durch

$$id_Y^* \tau = \{id_Y^{-1}(U) : U \in \tau\} = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

und stimmt mit der Teilraumtopologie (vgl. Definition 1.2) auf Y überein. ■

Wir betrachten einige weitere Konstruktionen von Topologien, die sich ebenfalls als Spezialfälle der Final- und Initialtopologien erweisen werden.

Definition 2.10 *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Mit $[x]$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und mit $X/\!\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Die durch die kanonische Abbildung*

$$q : X \to X/\!\sim, \quad x \mapsto [x]$$

induzierte Finaltopologie auf $X/\!\sim$ heißt die Quotiententopologie.

Nach Definition 2.6 ist eine Menge $U \subseteq X/\!\sim$ genau dann offen bzgl. der Quotiententopologie, wenn ihr Urbild $q^{-1}(U)$ offen in X ist. Nach Lemma 2.8 ist eine Abbildung $h : X/\!\sim \to Z$ in einen topologischen Raum Z genau dann stetig, wenn die Abbildung $h \circ q : X \to Z$ stetig ist.

Beispiel 2.11 (a) Sei X ein topologischer Raum und $S \subseteq X$ nicht leer. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch Vorgabe der Äquivalenzklassen. Für $x \in S$ sei $[x] := S$, und für $x \in X \setminus S$ sei $[x] := \{x\}$. Für den Quotientenraum $X/\!\sim$ schreibt man auch X/S. Er entsteht durch „Zusammenziehen von S auf einen Punkt".

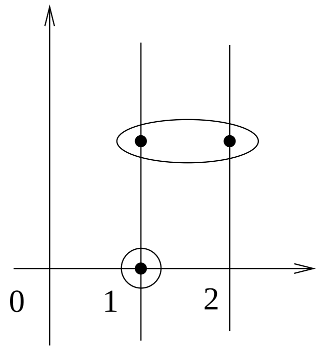
(b) Wir versehen die Menge $X := (\{1\} \times \mathbb{R}) \cup (\{2\} \times \mathbb{R})$ mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^2$ und definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch Vorgabe der Äquivalenzklassen

$$[(i, x)] = \begin{cases} \{(1, x), (2, x)\} & \text{falls } x \neq 0 \\ \{(i, x)\} & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Den Quotientenraum

$$M := X/\!\sim\, = \big\{[(1,x)] : x \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{[(2,0)]\big\} = \big\{[(2,x)] : x \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{[(1,0)]\big\}$$

kann man sich als Vereinigung der reellen Geraden mit einem zusätzlichen Punkt vorstellen. Man beachte, dass die beiden Punkte $[(1,0)]$ und $[(2,0)]$ keine disjunkten offenen Umgebungen besitzen und dass die Mengen $\{[(j,x)] : x \in \mathbb{R}\}$ offen in M sind (HA).



Wir zeigen, dass tatsächlich jede der Teilmengen $U_j := \{[(j,x)] : x \in \mathbb{R}\}$, $j = 1,2$, von M homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Die Abbildung

$$\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}, \quad [(j,x)] \mapsto x$$

ist offenbar eine Bijektion. Wir können φ_j zu einer Abbildung φ

$$\varphi : M \to \mathbb{R}, \quad [(j,x)] \mapsto x$$

auf ganz $M = X/\!\sim$ fortsetzen. Die Abbildung φ ist stetig, da die Abbildung

$$\varphi \circ q : X \to \mathbb{R}, \quad (j,x) \mapsto x$$

stetig ist (vgl. Anmerkung nach Definition 2.10). Dann ist aber auch $\varphi_j = \varphi|_{U_j}$ stetig. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung φ_j^{-1} ist ebenfalls klar; diese setzt sich zusammen aus den stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \to X$, $x \mapsto (j,x)$ und $q : X \to X/\sim$, $(j,x) \mapsto [(j,x)]$. ■

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und $X := \prod_{i\in I} X_i$ ihr Produkt. Die Elemente von X stellen wir uns als Tupel $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in X_i$ vor oder - besser - als Funktionen $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit der Eigenschaft, dass $x_i := x(i) \in X_i$ für jedes $i \in I$. Es ist durchaus nicht selbstverständlich, dass es solche Funktionen überhaupt gibt. Dazu später mehr.

Mit dem Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist eine Familie von Projektionen verknüpft:

$$p_i : X \to X_i, \quad (x_j)_{j\in I} \mapsto x_i \quad \text{für } i \in I. \tag{2.3}$$

Von nun an seien die X_i topologische Räume. Unser Ziel ist die Definition einer geeigneten Topologie auf X.

Definition 2.12 *Die Initialtopologie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ bzgl. der Familie der Projektionen* (2.3) *heißt die* Produkttopologie *auf X. Wird X mit dieser Topologie versehen, spricht man auch vom* topologischen Produkt *der Räume X_i, $i \in I$.*

Mit der Definition der Initialtopologie ist klar, dass die Mengen $p_i^{-1}(O_i)$ mit offenen Mengen $O_i \subseteq X_i$ und $i \in I$ eine Subbasis der Produkttopologie bilden. Mit Lemma 2.4 ist dann klar, dass die Mengen der Gestalt $\prod_{i \in I} O_i$, wobei die O_i offen in X_i sind und *nur endlich viele* der O_i von X_i verschieden sind, eine Basis der Produkttopologie bilden.

Beispiel 2.13 Typische Beispiele für Produkträume sind der $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$. Die vorangegangene Anmerkung zeigt, dass z. B. die offenen Quader $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ mit $a_i < b_i$ eine Basis der Produkttopologie des $\mathbb{R}^n$ bilden. Allgemeiner kann man zeigen, dass für jede endliche Familie $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ von metrischen Räumen jede der Metriken

$$d^{(1)}(x, y) := \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \text{ und } d^{(\infty)}(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\}$$

die Produkttopologie auf $\prod_{i=1}^n X_i$ definiert (HA). ■

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.7 erhalten wir:

Lemma 2.14 *Sei Y ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ von Y in ein topologisches Produkt ist genau dann stetig, wenn jede der Komponenten $f_i := p_i \circ f : Y \to X_i$ stetig ist.*

Beispiel 2.15 In diesem Beispiel sehen wir uns die Topologie der punktweisen Konvergenz an (vgl. auch Beispiel 1.25). Wir identifizieren die Menge $\mathcal{F}(X, Y)$ aller Abbildungen von X nach Y mit dem Produkt $Y^X := \prod_{x \in X} Y$. Ist Y ein topologischer Raum, so liefert die Produkttopologie auf Y^X eine Topologie auf $\mathcal{F}(X, Y)$, die sogenannte *Topologie der punktweisen Konvergenz*. Wir werden später sehen, dass diese Bezeichnung gerechtfertigt ist, wenn wir über Konvergenz in topologischen Räumen sprechen. Nach Definition der Produkttopologie ist die Topologie der punktweisen Konvergenz die gröbste Topologie auf $\mathcal{F}(X, Y)$, bezüglich der alle Abbildungen

$$\delta_x : \mathcal{F}(X, Y) \to Y, \quad f \mapsto f(x)$$

stetig sind (diese entsprechen ja genau den Projektionen $p_x : Y^X \to Y$). ■

Beispiel 2.16 Sei X eine Menge und $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Ist auf jeder Menge X_i eine Topologie τ_i gegeben, so können wir auf X die Finaltopologie τ bzgl. der Familie $f_i : X_i \to X$ der Einbettungen von X_i in X definieren. Eine Teilmenge O von X ist genau dann offen, wenn $f_i^{-1}(O) = O \cap X_i$ für jedes i offen in X_i ist, und eine Abbildung

$h : X \to Z$ in einen topologischen Raum Z ist genau dann stetig, wenn jede Einschränkung

$$h|_{X_i} = h \circ f_i : X_i \to Z$$

stetig ist. ■

2.3 Topologische Gruppen

Nachdem nun der Begriff der Produkttopologie zur Verfügung steht, können wir topologische Gruppen betrachten.

Definition 2.17 *Eine* topologische Gruppe *ist ein Paar (G, τ) aus einer Gruppe G und einer (Hausdorffschen) Topologie τ auf G, für die die Gruppenoperationen*

$$m_G : G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy \text{ und } \eta_G : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

stetig sind (wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen ist).

Anstelle der Stetigkeit der beiden Abbildungen m_G und η_G kann man auch die Stetigkeit der Abbildung

$$\varphi : G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

verlangen. In der Tat, die Inversion η_G ist wegen $\eta_G(x) = x^{-1} = \varphi(e, x)$ (wobei e das Einselement von G bezeichne) zusammengesetzt aus der stetigen Abbildung $G \to G \times G$, $x \mapsto (e, x)$ und der Abbildung φ. Aus der Stetigkeit von φ folgt also die Stetigkeit von η_G. Aus der Stetigkeit von η_G folgt dann die Stetigkeit der Abbildung

$$id_G \times \eta_G : G \times G \to G \times G, \quad (x, y) \mapsto (x, y^{-1}).$$

(HA). Folglich ist $m_G = \varphi \circ (id_G \times \eta_G)$ stetig. Ähnlich sieht man, dass die Stetigkeit von m_G und η_G die von φ impliziert.

Beispiel 2.18 (a) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche topologische Gruppe.

(b) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche topologische Gruppe, und $(\mathbb{T}, \cdot)$ mit $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist eine (kompakte) Untergruppe.

(c) Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen ist eine topologische Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation. Die Stetigkeit der Inversion folgt aus der Cramerschen Regel, die eine explizite Beschreibung der Inversen mittels Determinanten und rationalen Funktionen liefert.

(d) Untergruppen topologischer Gruppen sind topologische Gruppen bzgl. der Unterraumtopologie.

(e) Jede Gruppe ist topologisch bzgl. der diskreten Topologie. ■

3 Konvergenz in topologischen Räumen

Wir haben in Abschnitt 1.2 die Stetigkeit einer Funktion über Urbilder offener Mengen erklärt. Aus der Analysisvorlesung wissen wir, dass man die Stetigkeit einer Funktion zwischen metrischen Räumen auch als Folgenstetigkeit charakterisieren kann: Für jede Folge $x_n \to x$ ist $f(x_n) \to f(x)$. Für Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind die Begriffe Stetigkeit und Folgenstetigkeit aber nicht mehr äquivalent; ein Beispiel hierfür haben wir bereits angesprochen (Beispiel 1.25). Der Begriff einer konvergenten Folge ist also im Allgemeinen nicht ausreichend, um alle Aspekte der Konvergenz in topologischen Räumen abzudecken. Der wesentliche Grund ist, dass jeder Punkt x eines metrischen Raumes eine *abzählbare* Umgebungsbasis besitzt - etwa die Mengen $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für Punkte in topologischen Räumen gilt dies i. Allg. nicht.

Wir werden zwei Konzepte der Konvergenz in topologischen Räumen diskutieren. Zuerst betrachten wir (konvergente) Netze. Betrachtet man eine Folge in X als Abbildung $\mathbb{N} \to X$, so ersetzt man für die Definition eines Netzes die Menge $\mathbb{N}$ durch eine beliebige gerichtete Menge $(I, \leq)$. Die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ lässt sich dann wieder so charakterisieren, dass für jedes konvergente Netz $x_\tau \to x$ in X gilt $f(x_\tau) \to f(x)$ in Y.

Der Begriff eines Netzes bereitet jedoch unerwartete Schwierigkeiten, wenn man z. B. versucht, einen Satz wie

> Sei K kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann hat jede Folge in K eine konvergente Teilfolge.

auf kompakte Teilmengen topologischer Räume und Netze zu verallgemeinern. Dies erfordert eine sehr spezielle Definition des Begriffs „Teilnetz“, und das Arbeiten mit Teilnetzen wird schnell unübersichtlich. Dagegen werden wir sehen, dass mit dem Begriff eines Filters ein Konvergenzkonzept zur Verfügung steht, welches sehr natürlich und elegant an die Struktur topologischer Räume angepasst ist.

Beispiel 3.1 (Punktweise Konvergenz) Wir haben bereits in der Einleitung bemerkt, dass man punktweise Konvergenz i. Allg. *nicht* als Konvergenz in einem metrischen Raum verstehen kann und wollen dies nun explizit herausarbeiten, indem wir folgende Aussage zeigen.

Lemma 3.2 *Sei S nichtleer und $\ell^\infty(S)$ die Menge aller beschränkten Funktionen von S nach $\mathbb{R}$. Wenn es auf $\ell^\infty(S)$ eine Metrik d so gibt, dass für jede Funktionenfolge (f_u) in $\ell^\infty(S)$ gilt*

$$f_n \to f \text{ punktweise} \quad \Leftrightarrow \quad d(f_u, f) \to 0, \tag{3.1}$$

dann ist S höchstens abzählbar.

Beweis. Für $s \in S$ sei $\chi_s : S \to \mathbb{R}$ die Funktion, die an der Stelle s den Wert 1 annimmt und sonst überall gleich 0 ist. Ist (s_n) eine Folge paarweise verschiedener Punkte aus S, so konvergiert die Folge (χ_{s_n}) punktweise gegen die Nullfunktion. Nach Voraussetzung (3.1) ist also

$$d(\chi_{s_n}, 0) \to 0.$$

Folglich ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$S_n := \{s \in S : \quad d(\chi_s, 0) > 1/n\}$$

endlich. Dann ist aber $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ höchstens abzählbar. ∎

Ist dagegen S höchstens abzählbar, so gibt es dagegen auf $\ell^\infty(S)$ (und sogar auf der Menge *aller* Funktionen von S nach $\mathbb{R}$) eine Metrik d, so dass (3.1) gilt. Für endliches $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ wählt man z. B.

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{n} |f(s_k) - g(s_k)|,$$

für abzählbares $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ etwa

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(s_k) - g(s_k)|}{1 + |f(s_k) - g(s_k)|} \qquad \text{(HA)}.$$

3.1 Netze

Definition 3.3 *(a) Eine Relation $\leq$ auf einer Menge M heißt* partielle Ordnung, *wenn*

(P1) *$a \leq a$ für alle $a \in M$ (Reflexivität),*

(P2) *$a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ für alle $a, b, c \in M$ (Transitivität),*

(P3) *$a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$ für alle $a, b \in M$ (Antisymmetrie).*

Ist $\leq$ eine partielle Ordnung auf M, so heißt das Paar $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge.

(b) Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt gerichtet, *wenn es für je zwei Elemente $a, b \in I$ ein $c \in I$ gibt mit $a \leq c$ und $b \leq c$.*

(c) Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $x : I \to X$ in eine Menge X heißt ein Netz in X. *An Stelle von $x(i)$ schreibt man auch x_i, und das Netz x schreibt man gern als $(x_i)_{i \in I}$.*

(d) Sei X ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und $p \in X$. Das Netz

$(x_i)_{i\in I}$ konvergiert gegen p, *wenn es für jede Umgebung* U *von* p *ein* $i_U \in I$ *gibt mit* $x_j \in U$ *für alle* $i_U \leq j$. *In diesem Fall schreiben wir auch* $x_i \to p$. *Die Schreibweise* $\lim x_i = p$ *reservieren wir für den Fall, dass* p *der einzige Punkt ist, gegen den das Netz* (x_i) *konvergiert.*

Beispiel 3.4 (a) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist bzgl. $\leq$ gerichtet. Jede Folge ist also ein Netz. Gemäß Definition 3.3 (c) konvergiert eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen p, wenn es für jede Umgebung U von p ein $n_U \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_i \in U$ für alle $i \geq n_U$. Ist (x_i) eine Folge in einem metrischen Raum, so kann man sich auf Umgebungen U der Form $B_\varepsilon(p)$ mit $\varepsilon > 0$ beschränken. Obige Definition der Konvergenz fällt also mit der üblichen Definition der Konvergenz einer Folge in metrischen Räumen zusammen.

(b) Das halboffene Intervall $[0,1)$ ist bzgl. $\leq$ gerichtet. Jede Funktion $f : [0,1) \to X$ in einen topologischen Raum X ist also ein Netz. Dieses Netz konvergiert genau dann gegen $p \in X$, wenn der übliche linksseitige Grenzwert $\lim_{x\nearrow 1} f(x)$ existiert und gleich p ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Wir wollen zeigen: *Jeder Punkt* $x \in \bar{A} \setminus A$ *ist Grenzwert eines Netzes in* A.

Für jedes $x \in X$ ist die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x ist eine bzgl. der Relation $\supseteq$ gerichtete Menge. Sei nun $x \in \bar{A} \setminus A$. Nach Lemma 1.12 ist für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ der Durchschnitt $U \cap A$ nicht leer. Für jede Umgebung U von x können wir also einen Punkt $x_U \in U \cap A$ wählen und erhalten ein Netz

$$\mathcal{U}(x) \to X, \quad U \mapsto x_U$$

in A. Wir zeigen, dass dieses Netz gegen x konvergiert. Sei U eine Umgebung von x. Diese spielt bereits die Rolle des i_U aus Definition 3.3(c). Für alle $W \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \supseteq W$ ist nämlich $x_W \in W \subseteq U$. ■

Anmerkung 3.5 Im Beweis zu Teil (c) des vorigen Beispiels haben wir zur Kostruktion eines Netzes in A, welches gegen ein vorgegebenes $x \in \bar{A} \setminus A$ konvergiert, das Auswahlaxiom benutzt. Geht es auch ohne dieses?

JA. Dazu betrachten wir die Menge

$$I = \{(u,U) : U \text{ ist eine Umgebung von } x, \text{ und } u \in U \cap A\}.$$

Diese ist gerichtet bzgl. der Relation

$$(u,U) \leq (u',U') \quad \Leftrightarrow \quad U' \subseteq U.$$

Dann ist $I \to A$, $(u,U) \mapsto u$ ein Netz in A, das gegen x konvergiert.

ABER $\leq$ ist keine partielle Ordnung mehr, sondern nur noch eine Quasiordnung. Für beliebige $u, u' \in U$ ist ja $(u,U) \leq (u',U)$ und $(u',U) \leq (u,U)$, d.h. die

Antisymmetrie ist verletzt.

ALSO: Dies ist ein weiterer Vorteil von Filtern. Wir werden später sehen, dass

$$\{A \cap U : U \text{ ist Umgebung von } x\}$$

eine Filterbasis in A ist, die gegen x konvergiert (und hierbei spielt das Auswahlaxiom keinerlei Rolle). ■

Lemma 3.6 *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig in $p \in X$, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X mit $x_i \to p$ gilt $f(x_i) \to f(p)$.*

Beweis. (a) Sei zunächst f stetig in p und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz, das gegen p konvergiert. Sei V eine Umgebung von $f(p)$ in Y. Dann gibt es eine Umgebung U von p mit $f(U) \subseteq V$ (Definition 1.17). Wir wählen $i_U \in I$ so, dass $x_i \in U$ für $i \geq i_U$. Dann ist aber $f(x_i) \in f(U) \subseteq V$ für $i \geq i_U$, d. h. $f(x_i) \to f(p)$.

(b) Wir nehmen nun an, dass für jedes Netz $x_i \to p$ gilt $f(x_i) \to f(p)$ und zeigen, dass f dann in p stetig ist. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, f sei nicht stetig in p. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(p)$, für die $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist (Definition 1.17). Für jede Umgebung U von x finden wir daher ein $x_U \in U$ mit $f(x_U) \notin V$. Wie in Beispiel 3.4(c) erhalten wir ein Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$, das gegen p konvergiert. Für dieses Netz konvergiert aber $f(x_U)$ nicht gegen $f(p)$ auf Grund unserer Konstruktion. ■

Lemma 3.7 *Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann Hausdorffsch, wenn jedes konvergente Netz in X genau einen Grenzwert hat.*

Beweis. Sei zuerst X ein Hausdorffraum, und sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X mit $x_i \to p$ und $x_i \to q$. Wäre $p \neq q$, so gäbe es disjunkte offene Mengen O_p, O_q mit $p \in O_p$ und $q \in O_q$. Nach Definition der Konvergenz gibt es dann $i_p, i_q \in I$ so, dass $x_i \in O_p$ für alle $i \geq i_p$ und $x_i \in O_q$ für alle $i \geq i_q$ ist. Für $i \in I$ mit $i \geq i_p$ und $i \geq i_q$ ist dies unmöglich.

Sei nun X nicht Hausdorffsch. Dann gibt es zwei verschiedene Punkte $p, q \in X$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei offene Mengen $A, B \subseteq X$ mit $p \in A$ und $q \in B$ gilt $A \cap B \neq \emptyset$. Wir konstruieren ein Netz, das sowohl gegen p als auch gegen q konvergiert. Dazu ordnen wir die Menge

$$I := \{(A, B) \in \tau \times \tau : p \in A,\ q \in B\}$$

vermöge der Relation

$$(A, B) \leq (C, D) \quad \Leftrightarrow \quad A \supseteq C \text{ und } B \supseteq D$$

und erhalten eine gerichtete Menge $(I, \leq)$. Für jedes Paar $(A, B) \in I$ wählen wir ein Element $x_{(A,B)} \in A \cap B$ und erhalten ein Netz $(x_{(A,B)})_{(A,B) \in I}$ in X.

Wir zeigen, dass dieses Netz gegen p konvergiert (die Konvergenz gegen q folgt analog). Sei U eine Umgebung von p. Wir wählen irgendeine Umgebung V von q. Dann ist $(U, V) \in I$, und für $(A, B) \geq (U, V)$ gilt $x_{(A,B)} \in A \subseteq U$. Es ist also tatsächlich $x_{(A,B)} \to p$. ∎

Den bereits erwähnten Begriff eines Teilnetzes sehen wir uns in Kapitel 4 an.

3.2 Filter

3.2.1 Konvergenz von Filtern und Stetigkeit

Definition 3.8 *Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt eine* Filterbasis, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(FB1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(FB2) *Kein Element von $\mathcal{F}$ ist leer, also $\emptyset \notin \mathcal{F}$.*

(FB3) *Für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{F}$ gibt es ein $C \in \mathcal{F}$ mit $C \subseteq A \cap B$.*

Definition 3.9 (*a*) *Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt ein* Filter, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(F2) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F3) *Für $A, B \in \mathcal{F}$ ist $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

(F4) *Aus $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B$ folgt $B \in \mathcal{F}$.*

(*b*) *Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Filter in X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, so heißt $\mathcal{F}$* gröber als *$\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}$* feiner als *$\mathcal{F}$. Ein Filter $\mathcal{U}$ heißt ein* Ultrafilter, *wenn es keinen feineren Filter verschieden von $\mathcal{U}$ gibt.*

(*c*) *Ist $\mathcal{F}$ eine Filterbasis, so ist*

$$\hat{\mathcal{F}} := \{A \subseteq X : \text{ es gibt ein } B \in \mathcal{F} \text{ mit } B \subseteq A\}$$

ein Filter. Dieser heißt der durch $\mathcal{F}$ erzeugte Filter, und $\mathcal{F}$ heißt eine Filterbasis von $\hat{\mathcal{F}}$.

Aus (F2), (F3) folgt: Alle *endlichen* Durchschnitte von Elementen eines Filters $\mathcal{F}$ sind nicht leer und gehören wieder zu $\mathcal{F}$.

Definition 3.10 *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Filter $\mathcal{F}$ in X* konvergiert gegen *x, wenn $\mathcal{F}$ jede Umgebung von x enthält. Eine Filterbasis $\mathcal{F}$ in X* konvergiert gegen *x, wenn der durch $\mathcal{F}$ erzeugte Filter $\hat{\mathcal{F}}$ gegen x konvergiert, d. h. wenn jede Umgebung von x eine Menge aus $\mathcal{F}$ enthält. Wir schreiben dann auch $\mathcal{F} \to x$ oder $x \in \lim \mathcal{F}$.*

Die Bezeichnung $x = \lim \mathcal{F}$ reservieren wir für den Fall, dass $\mathcal{F}$ gegen x und nur gegen x konvergiert.

Lemma 3.11 *Ist X ein Hausdorff-Raum, so konvergiert jeder Filter in X gegen höchstens einen Punkt.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \to p$ und $\mathcal{F} \to q$. Wäre $p \neq q$, so gäbe es offene Mengen O_p, O_q mit $p \in O_p$, $q \in O_q$ und $O_p \cap O_q = \emptyset$. Nach Definition der Konvergenz wäre $O_p \in \mathcal{F}$, $O_q \in \mathcal{F}$, woraus mit (F3) folgt $\emptyset = O_p \cap O_q \in \mathcal{F}$. Dies widerspricht (F2). Also ist $p = q$. ■

Beispiel 3.12 (a) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Die Menge $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungen von x bildet einen Filter, den *Umgebungsfilter* von x. Ein Filter konvergiert also genau dann gegen x, wenn er feiner ist als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$.

(b) Seien X, x wie vorher. Die Menge $\mathcal{U}_x$ aller Teilmengen von X, die x enthalten, ist ein Ultrafilter, der feiner ist als $\mathcal{U}(x)$. Die Ultrafiltereigenschaft kann man so sehen. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der $\mathcal{U}_x$ echt enthält. Dann enthält $\mathcal{F}$ eine Menge A, die nicht x enthält. Dann sind A und $\{x\} \in U_x \subseteq \mathcal{F}$ Mengen in $\mathcal{F}$ mit $A \cap \{x\} = \emptyset$, ein Widerspruch. ■

Wir beschreiben nun die Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe konvergenter Filter. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Filter in X. Dann ist

$$\{f(A) \subseteq Y : A \in \mathcal{F}\}$$

eine Filterbasis in Y. Der zugehörige Filter $f(\mathcal{F})$ besteht aus allen $B \subseteq Y$, die eine der Mengen $f(A)$ mit $A \in \mathcal{F}$ enthalten.

Lemma 3.13 *Seien X, Y topologische Räume und $x \in X$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent für eine Funktion $f : X \to Y$:*

(a) *f ist stetig in x.*

(b) *$f(\mathcal{F}) \to f(x)$ für jeden Filter $\mathcal{F}$ in X mit $\mathcal{F} \to x$.*

(c) *$f\big(\mathcal{U}(x)\big) \to f(x)$.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei f stetig in x und $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \to x$. Wir haben zu zeigen, dass $\mathcal{U}\big(f(x)\big) \subseteq f(\mathcal{F})$. Sei $V \in \mathcal{U}\big(f(x)\big)$. Wegen der Stetigkeit von f in x gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$. Da $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert, ist $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. Insbesondere ist also $U \in \mathcal{F}$, d. h. es gibt eine Menge $U \in \mathcal{F}$ mit $f(U) \subseteq V$. Das bedeutet aber, dass $V \in f(\mathcal{F})$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Klar, da $\mathcal{U}(x) \to x$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $f\big(\mathcal{U}(x)\big) \to f(x)$, d.h. $\mathcal{U}\big(f(x)\big) \subseteq f\big(\mathcal{U}(x)\big)$. Jede Umgebung V von $f(x)$ ist also in $f\big(\mathcal{U}(x)\big)$ enthalten, d. h. es gibt eine Menge $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Das ist aber die Stetigkeit von f in x. ■

Die folgenden Bemerkungen sollen das Verhältnis zwischen der Konvergenz von Netzen und der Konvergenz von Filtern klären.

Sei zunächst $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum X. Für $i \in I$ sei $F_i := \{x_j : j \geq i\}$. Dann ist die Menge $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ eine Filterbasis in X. Der zugehörige Filter $\hat{\mathcal{F}}$ besteht aus allen Teilmengen von X, die eine der Mengen F_i enthalten, und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- der Filter $\hat{\mathcal{F}}$ (bzw. die Filterbasis $\mathcal{F}$) konvergiert gegen ein $p \in X$.
- jede Umgebung U von p enthält eine der Mengen F_i.
- für jede Umgebung U von p gibt es ein $i \in I$ mit $x_j \in U$ für alle $j \geq i$.
- das Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert gegen p.

Die Konvergenz von Netzen ist in diesem Sinn also ein Spezialfall der Konvergenz von Filtern.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{F}$ eine Filterbasis. Dann ist $\mathcal{F}$ bzgl. der Relation $\supseteq$ eine gerichtete Menge (die Gerichtetheit folgt unmittelbar aus (FB3)). Ist aus jeder der (nichtleeren) Mengen $B \in \mathcal{F}$ ein $x_B \in B$ gegeben, erhalten wir ein Netz $(x_B)_{B\in\mathcal{F}}$ (hier benutzen wir das Auswahlaxiom!). Wir zeigen: Wenn $\mathcal{F}$ gegen $x \in X$ konvergiert, dann konvergiert auch $(x_B)_{B\in F}$ gegen x.

Es ist $\mathcal{F} \to x$ genau dann, wenn der zugehörige Filter $\hat{\mathcal{F}}$ gegen x konvergiert. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{U}(x) \subseteq \hat{\mathcal{F}}$ bzw. zu

$$\text{Für jedes } U \in U(x) \text{ gibt es ein } B \in \mathcal{F} \text{ mit } B \subseteq U.$$

Sei nun U Umgebung von x. Wie soeben festgestellt, gibt es dann ein $B \in \mathcal{F}$ mit $B \subseteq U$. Für alle $B' \in \mathcal{F}$ mit $B \supseteq B'$ gilt dann

$$x_{B'} \in B' \subseteq B \subseteq U;$$

also konvergiert $(x_B)_{B\in\mathcal{F}}$ gegen x. ∎

3.2.2 Ultrafilter

Wir haben bereits festgestellt, dass für jeden Punkt x eines topologischen Raumes X die Familie $\mathcal{U}_x$ aller Teilmengen von X, die x enthalten, einen Ultrafilter bildet. Ultrafilter dieser Gestalt heißen auch *fixiert*. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Frage, ob es auch andere Ultrafilter gibt. Die Existenz von nicht-fixierten Ultrafiltern zeigen wir auf nicht-konstruktivem Weg mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Wir benötigen diese Resultate für den Beweis des Satzes von Tychonov in Kapitel 4.

Definition 3.14 *Eine Teilmenge K einer partiell geordneten Menge $(M, \leq)$ ist eine* Kette*, wenn für je zwei Elemente $a, b \in K$ gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$ (je zwei Elemente aus K sollen also vergleichbar sein). Weiter heißt ein Element $m \in M$ eine* obere Grenze *einer Teilmenge S von M, falls $s \leq m$ für alle $s \in S$, und $m \in M$ heißt* maximal*, wenn aus $x \in M$ und $m \leq x$ folgt $m = x$.*

Ein Element ist also maximal, wenn es kein echt größeres Element gibt. Man beachte, dass M mehrere maximale Elemente besitzen kann.

Lemma 3.15 (Zornsches Lemma) *Sei $(M, \leq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge. Wenn jede Kette in M eine obere Grenze besitzt, dann gibt es in M ein maximales Element.*

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom, welches besagt, dass für jede nichtleere Familie $(X_i)_{i \in I}$ nichtleerer Mengen das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ nicht leer ist. Wir können daher das Zornsche Lemma als ein mengentheoretisches Axiom betrachten.

Das Zornsche Lemma wird oft in folgender Form benutzt.

Lemma 3.16 *Sei $(M, \leq)$ eine nichtleere partiell geordnete Menge. Wenn jede Kette in M eine obere Grenze besitzt, dann gibt es für jedes Element $a \in M$ ein maximales Element $b \in M$ mit $a \leq b$.*

Dies folgt sofort aus dem Zornschen Lemma: Sei $a \in M$. Wir betrachten die Menge $M_a := \{m \in M : a \leq m\}$. Diese ist ebenfalls bzgl. $\leq$ partiell geordnet und erfüllt die Voraussetzung des Zornschen Lemmas. Es gibt also ein maximales Element b in M_a, und für dieses gilt offenbar $a \leq b$. ∎

Lemma 3.17 *Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Sei X eine nichtleere Menge. Die Menge $\mathbb{F}$ aller Filter auf X ist bezüglich der Mengeninklusion $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(X)$ partiell geordnet. Wir zeigen, dass jede Kette $\mathbb{K}$ in $(\mathbb{F}, \subseteq)$ eine obere Grenze besitzt. Dazu zeigen wir, dass

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X : \text{ es gibt ein } \mathcal{F} \in \mathbb{K} \text{ mit } A \in \mathcal{F}\}$$

eine obere Grenze für $\mathbb{K}$ ist. Offenbar ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$ für alle $\mathcal{F} \in \mathbb{K}$. Zu zeigen ist also nur, dass $\mathcal{M}$ tatsächlich ein Filter ist, also zu $\mathbb{F}$ gehört. Wir zeigen nur die Eigenschaft (F3); die übrigen Eigenschaften sind offensichtlich. Seien also $F_1, F_2 \in \mathcal{M}$. Dann gibt es Filter $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ in $\mathbb{K}$ mit $F_1 \in \mathcal{F}_1$ und $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Da $\mathbb{K}$ eine Kette ist, ist $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ oder $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. O.E.d.A. sei $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Dann ist $F_1 \in \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ und $F_2 \in \mathcal{F}_2$ und folglich $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{M}$.

Die Behauptung folgt nun aus dem Zornschen Lemma (Lemma 3.16). ∎

Bemerkung am Rande. Das Ultrafilterlemma (Lemma 3.17) folgt aus dem Zornschen Lemma, ist aber schwächer als dieses.

Lemma 3.18 *Sei $\mathcal{F}$ Filter auf X und A Teilmenge von X mit $A^c \notin \mathcal{F}$. Dann gibt es einen Filter $\mathcal{G}$ auf X, der A enthält und feiner als $\mathcal{F}$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{F} \cap A := \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis ist. Da X zu jedem Filter gehört, ist $A = X \cap A \in \mathcal{F} \cap A$, d. h. $\mathcal{F} \cap A$ ist nicht leer (FB1). Wäre $F \cap A = \emptyset$ für ein $F \in \mathcal{F}$, so wäre $F \subseteq A^c$ und folglich $A^c \in \mathcal{F}$ im Widerspruch zur Voraussetzung (FB2). Da Durchschnittsbildung aus $\mathcal{F} \cap A$ nicht herausführt, ist auch (FB3) erfüllt.

Sei nun $\mathcal{G}$ der durch die Filterbasis $\mathcal{F} \cap A$ erzeugte Filter. $\mathcal{G}$ besteht aus allen Obermengen von Mengen der Form $F \cap A$ mit $F \in \mathcal{F}$ und enthält daher sowohl A als auch $\mathcal{F}$. ■

Mit diesem Lemma erhalten wir eine äquivalente Charakterisierung von Ultrafiltern. Offenbar können nicht sowohl A als auch A^c zu einem Filter $\mathcal{F}$ gehören, da sonst $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$ wäre.

Lemma 3.19 *Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist genau dann ein Ultrafilter wenn für jede Teilmenge A von X entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $A^c \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Sei zunächst $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $A \subseteq X$. Falls $A^c \notin \mathcal{F}$, so finden wir mit Lemma 3.18 einen Filter $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält. Da $\mathcal{F}$ aber ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{F}$.

Sei umgekehrt $\mathcal{F}$ ein Filter mit der Eigenschaft, dass er für jede Teilmenge $A \subseteq X$ entweder A oder A^c enthält. Jeder Filter $\mathcal{G}$, der echt größer ist als $\mathcal{F}$, enthält eine Menge $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{F}$. Dann ist aber $A^c \in \mathcal{F}$ und folglich $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{G}$, ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{F}$ Ultrafilter. ■

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt *frei*, wenn $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Solche Filter existieren. Beispielsweise bildet die Menge $\mathcal{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ eine Filterbasis auf $\mathbb{R}$. Der zugehörige Filter $\mathcal{F} = \hat{\mathcal{B}}$ ist frei. Er heißt der *Fréchet-Filter* auf $\mathbb{R}$. Nach Lemma 3.17 ist $\mathcal{F}$ in einem Ultrafilter enthalten, der ebenfalls frei ist. Offenbar ist jeder Ultrafilter entweder frei oder von der Gestalt $\mathcal{U}_x$ mit einem $x \in X$, also fixiert.

Lemma 3.20 *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so ist $f(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter in Y.*

Beweis. Wegen Lemma 3.19 ist zu zeigen, dass für jede Teilmenge B von Y entweder $B \in f(\mathcal{F})$ oder $B^c \in f(\mathcal{F})$ ist. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, ist (wieder wegen Lemma 3.19) entweder $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ oder $f^{-1}(B)^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{F}$. Im ersten Fall ist $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ und daher $B \in f(\mathcal{F})$. Im zweiten Fall erhält man analog $B^c \in f(\mathcal{F})$. ■

4 Kompaktheit

Einen Eindruck von der Bedeutung der Kompaktheit haben wir bereits in der Analysisvorlesung gewonnen. Man denke etwa an den Satz, dass jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ihr Maximum und Minimum annimmt. Wir werden nun sehen, dass die metrische Struktur für eine Reihe solcher Sätze nicht erforderlich ist (natürlich mit Ausnahmen. Z. B. macht der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen keinen Sinn, so dass sich ein Satz wie „stetige Funktionen auf kompakten metrischen Räumen sind gleichmäßig stetig" nicht übertragen lässt.) Das zentrale Resultat dieses Kapitels ist der Satz von Tychonov, der sagt, dass ein Produkt topologischer Räume genau dann kompakt ist, wenn jeder Faktor kompakt ist.

ACHTUNG: Die in diesem Kapitel benutzten Begriffe stimmen nicht mit denen aus dem Neebschen Skript überein:

hier	**Neeb**
kompakt	quasikompakt
kompakt + Hausdorffsch	kompakt
lokalkompakt + Hausdorffsch	lokalkompakt

4.1 Kompakte Räume

Definition 4.1 *Ein topologischer Raum X heißt* kompakt, *falls* jede *offene Überdeckung von X eine* endliche *Teilüberdeckung besitzt, d.h. wenn es für jede Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von X mit $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ eine endliche Teilmenge F von I gibt mit $\bigcup_{i\in F} U_i = X$.*

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist

Lemma 4.2 *Eine Teilmenge C eines topologischen Raumes (X,τ) ist genau dann bzgl. der Teilraumtopologie $\tau|_C$ kompakt, wenn jede Überdeckung von C durch offene Teilmengen von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. wenn für jede Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen von X mit $C \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq I$ existiert mit $C \subseteq \bigcup_{i\in F} U_i$.*

Offenbar sind endliche Teilmengen topologischer Räume stets kompakt. Da endliche Teilmengen nicht abgeschlossen sein müssen (z. B. ist die Teilmenge $\{1\}$ von $\{1,2\}$ bzgl. der indiskreten Topologie nicht abgeschlossen), sind - anders als in metrischen Räumen - kompakte Teilmengen topologischer Räume *nicht notwendig abgeschlossen.* Es gilt jedoch

Lemma 4.3 (*a*) *Kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen sind abgeschlossen.*

(*b*) *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*

Beweis. (a) Sei X Hausdorffraum und $C \subseteq X$ kompakt. Wir zeigen, dass $X \setminus C$ offen ist. Sei $x \in X \setminus C$. Für jedes $c \in C$ findet man wegen $c \neq x$ und der Hausdorffeigenschaft offene Mengen $U_c, V_c \subseteq X$ mit $c \in U_c$, $x \in V_c$ und $U_c \cap V_c = \emptyset$. Die Mengenfamilie $(U_c)_{c \in C}$ bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge C, aus der man eine endliche Teilüberdeckung $U_{c_1}, \ldots, U_{c_n}$ von C auswählen kann. Dann ist $V := \bigcap_{i=1}^n V_{c_i}$ eine offene Umgebung von x und

$$V \cap C \subseteq V \cap (U_{c_1} \cup \cdots \cup U_{c_n}) = \emptyset,$$

also $V \subseteq X \setminus C$. Folglich ist $X \setminus C$ offen und C abgeschlossen.

(b) Sei X kompakt und $C \subseteq X$ abgeschlossen. Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X mit $C \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann bildet die Familie $(O_i)_{i \in I}$ zusammen mit der offenen Menge $X \setminus C$ eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Wegen der Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilmenge F von I mit $X = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in F} O_i$. Dann ist aber $C \subseteq \bigcup_{i \in F} O_i$, und C ist kompakt. ∎

Lemma 4.4 *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.*

Kurz: stetige Funktionen überführen kompakte Mengen in kompakte Mengen.

Beweis. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von $f(X)$ durch offene Mengen in Y, so ist wegen der Stetigkeit $\big(f^{-1}(U_i)\big)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $F \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i \in F} f^{-1}(U_i)$. Dann ist aber

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i \in F} f\big(f^{-1}(U_i)\big) \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i,$$

d. h. $f(X)$ ist kompakt nach Lemma 4.2. ∎

Folgerung 4.5 *Sei X kompakt und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt, und $f(X)$ besitzt Minimum und Maximum.*

Beweis. Nach Lemma 4.4 ist $f(X)$ kompakt. Wäre $f(X)$ unbeschränkt, so könnte man aus der offenen Überdeckung $f(X) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0)$ keine endliche Überdeckung auswählen, was der Kompaktheit widerspricht. Also ist $f(X)$ beschränkt und (da $\mathbb{R}$ Hausdorffsch ist) nach Lemma 4.3 (a) auch abgeschlossen. Als beschränkte Menge besitzt $f(X)$ Infimum und Supremum, und da $f(X)$ abgeschlossen ist, gehören Infimum und Supremum zu $f(X)$, sind also Minimum und Maximum. ∎

Der erste Teil des Beweises bleibt (mit offensichtlichen Modifikationen) für beliebige metrische Räume richtig. Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind also beschränkt und abgeschlossen.

Das folgende Lemma benutzen wir im Beweis von Lemma 4.7, in dem eine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit der Umkehrfunktion bewiesen wird.

Lemma 4.6 *Sei $f : X \to Y$ stetig und injektiv. Ist Y ein Hausdorffraum, dann auch X.*

Beweis. Seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Wegen der Injektivität von f ist $f(x) \neq f(y)$. Da Y Hausdorffsch ist, gibt es disjunkte offene Mengen $U_x, U_y \subseteq Y$ mit $f(x) \in U_x$ und $f(y) \in U_y$. Dann sind $f^{-1}(U_x)$, $f^{-1}(U_y)$ disjunkte offene Mengen in X mit $x \in f^{-1}(U_x)$ und $y \in f^{-1}(U_y)$. Also ist X ein Hausdorffraum. ■

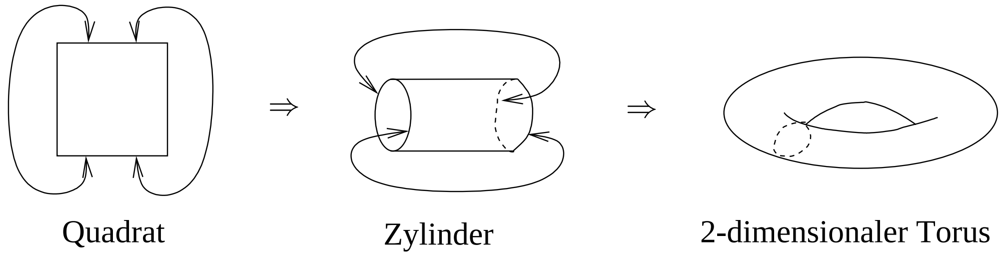
Lemma 4.7 *Sei X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung. Dann ist X Hausdorffsch, Y kompakt, und $f^{-1} : Y \to X$ ist stetig, d.h. f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Die genannten Eigenschaften von X bzw. Y folgen aus Lemma 4.6 und Lemma 4.4. Für die Stetigkeit von f^{-1} genügt es nach Lemma 1.20 zu zeigen, dass f abgeschlossen ist. Dazu sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Nach Lemma 4.3 (b) ist A kompakt. Dann ist $f(A)$ nach Lemma 4.4 kompakt und nach Lemma 4.3 (a) abgeschlossen. ■

Beispiel 4.8 Sei X ein kompakter Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X (vgl. Definition 2.10). Wir versehen den Quotientenraum $X/\sim$ mit der Quotiententopologie. Dann ist die Abbildung $x \mapsto [x]$ von X auf $X/\sim$ stetig, d. h. $X/\sim$ ist kompakt. Ist Y ein Hausdorffraum und $f : X/\sim \to Y$ stetig und bijektiv, so ist f nach Lemma 4.7 ein Homöomorphismus von $X/\sim$ auf Y. Hier sind zwei typische Beispiele, wie auf diesem Wege Quotientenräume „identifiziert" werden können.

(a) Sei $X = [0, 1]$. Zwei Punkte $x, y \in X$ sollen genau dann in der Relation $\sim$ zueinander stehen, wenn $x = y$ oder $|x - y| = 1$. Weiter sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$ und $f : X/\sim \to \mathbb{T}$, $[x] \mapsto e^{2\pi i x}$. Offenbar ist f korrekt definiert und eine stetige Bijektion. Nach Lemma 4.7 ist f ein Homöomorphismus, und $[0, 1]/\sim$ ist zu $\mathbb{T}$ homöomorph. Wir erhalten die Kreislinie $\mathbb{T}$ aus dem Intervall $[0, 1]$, indem wir seine Endpunkte miteinander identifizieren.

(b) Auf ähnliche Weise erhält man durch Identifikation gewisser Randpunkte des Quadrates $[0, 1]^2$ einen Homöomorphismus von $[0, 1]^2/\sim$ auf $\mathbb{T}^2$ vermöge $[(x, y)] \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. ■



Definition 4.9 *Eine Teilmenge eines topologischen Hausdorffraumes heißt* relativ kompakt*, wenn ihre Abschließung kompakt ist.*

Lemma 4.10 *Seien X, Y topologische Hausdorffräume und $f : X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ relativ kompakt, so ist auch $f(A)$ relativ kompakt.*

Kurz: stetige Funktionen überführen relativ kompakte Mengen in relativ kompakte Mengen.

Beweis. Da f stetig ist, gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ nach Lemma 1.19. Wir gehen in $f(A) \subseteq f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ zur Abschließung über und erhalten $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} \subseteq \overline{f(A)}$, da $\overline{A}$ kompakt und somit auch $f(\overline{A})$ kompakt, also bereits abgeschlossen ist. Es ist daher $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Mit dieser Gleichheit schließen wir: Ist A relativ kompakt, dann ist $\overline{A}$ kompakt. Also ist $f(\overline{A})$ kompakt, und damit auch $\overline{f(A)}$. Somit ist $f(A)$ relativ kompakt. ■

4.2 Charakterisierungen der Kompaktheit und Satz von Tychonov

Wir beginnen mit der Charakterisierung der Kompaktheit durch Ultrafilter.

Satz 4.11 *Für jeden topologischen Raum X sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(a) X ist kompakt.

(b) Für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$ gibt es eine endliche Teilmenge F von I mit $\bigcap_{i\in F} A_i = \emptyset$.

(c) Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Beweis. Die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$ folgt sofort durch Betrachtung der Komplemente. Die Bedingung $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$ bedeutet nämlich, dass die Familie $(A_i^c)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X bildet, und $\bigcap_{i\in F} A_i = \emptyset$ heißt, dass $(A_i^c)_{i\in F}$ eine endliche Teilüberdeckung von X ist.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $\mathcal{F}$ Ultrafilter auf X. Da $\mathcal{F}$ mit jeder Menge A auch ihre Abschließung $\bar{A}$ enthält, enthält $\mathcal{F}$ abgeschlossene Mengen. Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ abgeschlossene Mengen. Dann ist auch $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ und folglich nicht leer. Aus (b) folgt dann, dass der Durchschnitt *aller* abgeschlossenen Mengen in $\mathcal{F}$ nicht leer ist. Sei x ein Element dieses Durchschnitts. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ gegen x konvergiert.

Sei U eine offene Umgebung von x. Dann ist $X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge von X, die x nicht enthält und folglich nicht zu $\mathcal{F}$ gehört. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, muss dann aber U zu $\mathcal{F}$ gehören (Lemma 3.19). $\mathcal{F}$ enthält also jede offene Umgebung von x und daher jede Umgebung von x. Also ist $\mathcal{F} \to x$.

$(c) \Rightarrow (b)$: Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X. Angenommen, alle endlichen Durchschnitte von Mengen aus dieser Familie sind nichtleer. Dann ist

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i\in F} A_i : F \text{ endliche Teilmenge von } I \right\}$$

eine Filterbasis. ((FB1) und (FB2) sind unmittelbar klar, und (FB3) gilt, da Durchschnittsbildung nicht aus $\mathcal{B}$ herausführt.) Sei $\mathcal{F}$ der durch B erzeugte Filter und sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält. Nach Voraussetzung (c) konvergiert $\mathcal{U}$ gegen einen Punkt $x \in X$. Sei $i \in I$ und U eine Umgebung von x. Aus $A_i \in \mathcal{U}$ und $U \in \mathcal{U}$ folgt $A_i \cap U \in \mathcal{U}$ und insbesondere $A_i \cap U \neq \emptyset$. A_i hat also mit jeder Umgebung von x einen nichtleeren Durchschnitt. Dann ist aber $x \in \bar{A}_i = A_i$ und, da i beliebig war, $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, also $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. ∎

Für die Charakterisierung der Kompaktheit durch Netze benötigen wir den Begriff eines Teilnetzes.

Definition 4.12 *Ein Netz $(y_s)_{s\in S}$ heißt* Teilnetz *eines Netzes $(x_t)_{t\in T}$, wenn es eine Abbildung $\alpha : S \to T$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

(TN1) $y_s = x_{\alpha(s)}$ *für alle $s \in S$,*

(TN2) *für jedes $t_0 \in T$ gibt es ein $s_0 \in S$ so, dass für alle $s \geq s_0$ gilt $\alpha(s) \geq t_0$.*

Bedingung (TN1) fordert, dass alle y_s in geeigneter Weise unter den x_t vorkommen, und (TN2) kann man interpretieren als „$s \to \infty \Rightarrow \alpha(S) \to \infty$“.

Der entscheidende Punkt ist, dass die Indexmenge S des Teilnetzes nur durch die Existenz von α mit T verknüpft ist. Insbesondere ist S nicht notwendig eine Teilmenge von T sondern kann deutlich „größer“ als T sein. So ist für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich jede Teilfolge (im üblichen Sinn) auch ein Teilnetz. Es gibt aber Teilnetze von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die keine Folgen sind. Man betrachte etwa $S := [1, \infty)$ mit der Ordnung $\leq$. Dann ist $(y_s)_{s\in S}$ mit $y_s := x_{\lfloor s \rfloor}$ ein Teilnetz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\alpha(s) = \lfloor s \rfloor$ (= der ganze Anteil von s).

Definition 4.13 *Ein Punkt $x \in X$ heißt* Häufungspunkt *eines Netzes $(x_t)_{t\in T}$ in X, wenn es für jede offene Umgebung U von x und für jedes $t_0 \in T$ ein $t \in T$ gibt mit $t \geq t_0$ und $x_t \in U$.*

Lemma 4.14 *Sei $(x_t)_{t\in T}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) x ist ein Häufungspunkt von $(x_t)_{t\in T}$.

(b) Für jedes $t_0 \in T$ ist $x \in \operatorname{clos}\{x_t : t \geq t_0\}$.

(c) Es gibt ein Teilnetz von $(x_t)_{t\in T}$, das gegen x konvergiert.

Beweis. Es ist $x \in \operatorname{clos}\{x_t : t \geq t_0\}$ genau dann, wenn jede offene Umgebung U von x einen nichtleeren Durchschnitt mit $\{x_t : t \geq t_0\}$ hat. Hieraus folgt sofort die Äquivalenz von (a) und (b). Ebenso folgt unmittelbar aus den Definitionen eines konvergenten Netzes bzw. eines Häufungspunktes die Implikation $(c) \Rightarrow (a)$.

Wir zeigen noch $(a) \Rightarrow (c)$. Sei x ein Häufungspunkt des Netzes $(x_t)_{t \in T}$. Wir schreiben S für die Menge aller Paare (U, t), wobei U eine offene Umgebung von x ist und t ein Element aus T mit $x_t \in U$. Die Menge S ist bzgl. der Relation

$$(U', t') \geq (U, t) \quad \Leftrightarrow \quad U' \subseteq U, t' \geq t$$

gerichtet. (HA. Beachten Sie: die Induktivität folgt aus der Tatsache, dass x ein Häufungspunkt des Netzes ist.) Wir definieren ein Netz $(y_{(U,t)})_{(U,t) \in S}$ durch $y_{(U,t)} := x_t$. Dieses Netz ist ein Teilnetz von $(x_t)_{t \in T}$ bzgl. der Abbildung $\alpha : (U, t) \mapsto t$, und dieses Netz konvergiert gegen x. Ist nämlich U_0 eine offene Umgebung von x, so gibt es wegen der Definition eines Häufungspunktes wenigstens ein $t_0 \in T$ mit $x_{t_0} \in U_0$. Es ist also $(U_0, t_0) \in S$, und für alle $(U, t) \in S$ mit $(U, t) \geq (U_0, t_0)$ gilt

$$y_{(U,t)} = x_t \in U \subseteq U_0.$$

Also konvergiert $(y_{(U,t)})_{(U,t) \in S}$ gegen x. ■

Satz 4.15 *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz besitzt.*

Beweis. Sei zunächst X kompakt und $(x_t)_{t \in T}$ ein Netz in X. Für jedes $t \in T$ sei

$$A_t := \operatorname{clos}\{x_{t'} : t' \geq t\}.$$

Die Mengen A_t sind per Definition abgeschlossen, und kein endlicher Durchschnitt solcher Mengen ist leer. Nach Satz 4.11 (b) ist dann $A := \bigcap_{t \in T} A_t$ nicht leer, und nach Lemma 4.14 ist jeder Punkt $x \in A$ Grenzwert eines Teilnetzes von $(x_t)_{t \in T}$. Insbesondere besitzt dieses Netz also konvergente Teilnetze.

Sei umgekehrt X ein topologischer Raum, in dem jedes Netz ein konvergentes Teilnetz besitzt. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass kein Durchschnitt endlich vieler Mengen aus dieser Familie leer ist. Sei T die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $(A_i)_{i \in I}$.

Die Ordnung $A \geq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ macht T zu einer gerichteten Menge. Da die Mengen in T nicht leer sind, können wir für jedes $A \in T$ ein Element $x_A \in A$ wählen (Auswahlaxiom!). Dann ist $(x_A)_{A \in T}$ ein Netz, und nach Voraussetzung gibt es ein Teilnetz von $(x_A)_{A \in T}$, das gegen ein $x \in X$ konvergiert. Für jedes $i \in I$ ist dann

$$x \in \operatorname{clos}\{x_B : B \in T,\ B \subseteq A_i\} \subseteq \operatorname{clos} A_i = A_i.$$

Es ist also $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, und nach Satz 4.11 $(b) \Rightarrow (a)$ ist X kompakt. ■

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Resultate dieser Vorlesung.

Satz 4.16 (Tychonov 1930) *Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und $X := \prod_{i\in I} X_i$ ihr Produkt, versehen mit der Produkttopologie. Dann ist X genau dann kompakt, wenn jeder Faktor X_i kompakt ist.*

Beweis. Wir beginnen mit der einfachen Richtung. Sei X kompakt. Da jede Projektion $p_i : X \to X_i$ stetig ist, ist nach Lemma 4.4 auch $X_i = p_i(X)$ kompakt.

Seien umgekehrt alle X_i kompakt. Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter in X. Für jedes $i \in I$ ist dann $p_i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter in X_i (Lemma 3.20), folglich konvergent. Aus der Menge aller Grenzwerte von $p_i(\mathcal{F})$ wählen wir ein Element $x_i \in X_i$ (Auswahlaxiom!). Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ gegen $x := (x_i)_{i\in I} \in X$ konvergiert.

Sei U eine offene Umgebung von x. Dann gibt es eine endliche Teilmenge F von I und offene Umgebungen U_i von x_i in X_i mit

$$\prod_{i\in F} U_i \times \prod_{i\in F^c} X_i \subseteq U$$

(vgl. Anmerkung nach Definition 2.12). Sei $i \in F$. Da $p_i(\mathcal{F})$ gegen x_i konvergiert, ist $\mathcal{U}(x_i) \subseteq p_i(\mathcal{F})$. Die Mengen $p_i(B)$ mit $B \in \mathcal{F}$ bilden aber eine Filterbasis von $p_i(\mathcal{F})$ (vgl. Bemerkung vor Lemma 3.13). Folglich gibt es Mengen $A_i \in \mathcal{F}$ mit $p_i(A_i) \subseteq U_i$. Für den Durchschnitt $\bigcap_{i\in F} A_i =: A \in \mathcal{F}$ gilt dann $p_i(A) \subseteq U_i$ für jedes $i \in F$. Also ist $A \subseteq U$. Wegen (F4) ist dann $U \in \mathcal{F}$ für jede offene Umgebung U von x. Dann ist aber $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$. Da $\mathcal{F}$ ein beliebiger Ultrafilter ist, ist X nach Satz 4.11 $(c) \Rightarrow (a)$ kompakt. ∎

Im Beweis haben wir das Auswahlaxiom zweimal benutzt: beim Beweis der Existenz von Ultrafiltern und bei der Auswahl der x_i. Während - wie schon bemerkt - das Ultrafilterlemma schwächer als das Auswahlaxiom ist, sind das Auswahlaxiom und der Satz von Tychonov zueinander äquivalent.

Der Satz von Tychonov wird oft in Kombination mit folgendem Resultat benutzt, dessen Beweis HA ist.

Lemma 4.17 *Das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ einer Familie nichtleerer topologischer Räume, versehen mit der Produkttopologie, ist genau dann Hausdorffsch, wenn jeder Faktor X_i Hausdorffsch ist.*

4.3 Kompakte metrische Räume

Wir sehen uns verschiedene Charakterisierungen kompakter *metrischer* Räume an und führen dazu einige neue Begriffe ein. Beachten Sie, dass die hier eingeführten Netze nichts mit denen aus Definition 3.3 zu tun haben.

Definition 4.18 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $S \neq \emptyset$ von X und jedes $r > 0$ sei*

$$B_r(S) := \bigcup_{s\in S} B_r(s) = \{x \in X : \text{ es gibt ein } s \in S \text{ mit } d(x, s) < r\}.$$

*Die Teilmenge S heißt ein ε-*Netz *für X, wenn $B_\varepsilon(S) = X$ ist, und X heißt* totalbeschränkt (*im Neeb-Skript: precompact*), *wenn X für* jedes $\varepsilon > 0$ *ein* endliches *ε-Netz besitzt.*

Lemma 4.19 *Für jeden metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*a*) *Jede Folge in X besitzt eine Teilfolge, die Cauchyfolge ist.*

(*b*) *X ist totalbeschränkt.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, für das kein endliches ε-Netz für X existiert. Wir konstruieren eine Folge (x_n) wie folgt: $x_1 \in X$ wählen wir beliebig. Da $X \neq B_\varepsilon(\{x_1\})$, gibt es ein $x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(\{x_1\})$. Da $X \neq B_\varepsilon(\{x_1, x_2\})$, gibt es ein $x_3 \in X \setminus B_\varepsilon(\{x_1, x_2\})$. Wir fahren so fort und finden für jedes $n \geq 1$ ein x_{n+1} mit

$$x_{n+1} \in X \setminus B_\varepsilon(\{x_1, \ldots, x_n\}).$$

Für $n \neq m$ ist dann $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, d. h. keine Teilfolge von (x_n) kann eine Cauchyfolge sein.

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wegen der Totalbeschränktheit finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $E_n \subseteq X$ mit $X = B_{2^{-n}}(E_n)$. Wir konstruieren sukzessive eine Folge von Punkten $y_k \in E_k$ so, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_1 &:= \{m \in \mathbb{N} \ : x_m \in B_{2^{-1}}(y_1)\} \text{ unendlich ist,} \\ \mathbb{N}_2 &:= \{m \in \mathbb{N}_1 : x_m \in B_{2^{-2}}(y_2)\} \text{ unendlich ist,} \end{aligned}$$

usw. Für jedes k ist also $\mathbb{N}_{k+1} := \{m \in \mathbb{N}_k : x_m \in B_{2^{-k-1}}(y_{k+1})\}$ unendlich. Nun wählen wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass $n_{k+1} > n_k$ und $n_{k+1} \in \mathbb{N}_{k+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann wird mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(x_{n_k}, y_k) + d(y_k, x_{n_{k+1}}) < 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{1-k}$$

und folglich

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+m}}) \leq 2^{1-k} + 2^{-k} + 2^{-k-1} + \ldots < 2^{2-k}$$

für alle $m \geq 1$. Es ist also $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. ■

Satz 4.20 *Für jeden metrischen Raum sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*a*) *X ist kompakt.*

(*b*) *X ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.*

(*c*) *X ist vollständig und totalbeschränkt.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Wir gehen indirekt vor. Angenommen, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in X ohne konvergente Teilfolge. Der Wertebereich S dieser Folge ist dann unendlich und besitzt keinen Häufungspunkt. Für jedes $x \in X$ findet man dann ein

$r = r(x) > 0$ so, dass die Kugel $B_r(x)$ außer eventuell x selbst keinen weiteren Punkt aus S enthält. Die Familie $\{B_r(x)\}_{x\in X}$ bildet eine offene Überdeckung von X. Da jede Menge in dieser Familie höchstens einen Punkt aus S enthält, S aber unendlich ist, lässt sich aus dieser Familie keine endliche Überdeckung von X auswählen, im Widerspruch zur Kompaktheit.

$(b) \Rightarrow (c)$: Die Totalbeschränktheit folgt aus Lemma 4.19. Die Eigenschaft (b) impliziert außerdem, dass jede Cauchyfolge in X eine konvergente Teilfolge besitzt. Jede Cauchyfolge mit einer konvergenten Teilfolge ist aber konvergent, wie wir aus der Analysis wissen.

$(c) \Rightarrow (a)$: Wir gehen wieder indirekt vor. Angenommen, $(U_i)_{i\in I}$ ist eine offene Überdeckung von X, aus der sich keine endliche Teilüberdeckung auswählen lässt. Da X totalbeschränkt ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Teilmenge E_n von X mit $X = B_{2^{-n}}(E_n)$.

Da sich aus $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Überdeckung auswählen lässt, gibt es ein $x_1 \in E_1$ so, dass $B_{2^{-1}}(x_1)$ nicht durch endlich viele der U_i überdeckt wird. (Ließe sich jede der endlich vielen Kugeln $B_{2^{-1}}(x)$, $x \in E_1$, durch endlich viele der U_i überdecken, dann auch X.) Weiter: da

$$B_{2^{-1}}(x_1) = B_{2^{-1}}(x_1) \cap X = B_{2^{-1}}(x_1) \cap \Big(\bigcup_{x\in E_2} B_{2^{-2}}(x)\Big) = \bigcup_{x\in E_2} \big(B_{2^{-1}}(x_1) \cap B_{2^{-2}}(x)\big)$$

eine endliche Vereinigung ist, gibt es ein $x_2 \in E_2$ so, dass $B_{2^{-1}}(x_1) \cap B_{2^{-2}}(x_2)$ nicht durch endlich viele der U_i überdeckt wird. Wir fahren so fort und finden für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E_n$ mit der Eigenschaft, dass $\bigcap_{j=1}^n B_{2^{-j}}(x_j)$ nicht durch endlich viele der U_i überdeckt wird.

Wir zeigen, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Da die Mengen $\bigcap_{j=1}^n B_{2^{-j}}(x_j)$ nicht leer sind, gibt es für jedes n ein $y_n \in B_{2^{-n}}(x_n) \cap B_{2^{-n-1}}(x_{n+1})$. Mit der Dreiecksungleichung folgt nun

$$d(x_n, x_{n+1}) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, x_{n+1}) < 2^{-n} + 2^{-n-1} \le 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1}$$

und weiter für $k \ge 0$

$$d(x_n, x_{n+k}) \le 2^{-n+1}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\Big) \le 2^{-n+2}.$$

Es ist also (x_n) eine Cauchyfolge, folglich konvergent. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, gibt es ein $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, liegt mit x auch eine ganze Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon > 0$ in U_{i_0}. Für $2^{-n+3} < \varepsilon$ ist aber

$$d(x_n, x) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_{n+k}) \le 2^{-n+2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und $2^{-n} + \frac{\varepsilon}{2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Es ist daher $B_{2^{-n}}(x_n) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_{i_0}$. Im Widerspruch zu unserer Konstruktion wird also

$$B_{2^{-1}}(x_1) \cap \dots \cap B_{2^{-n}}(x_n) \subseteq B_{2^{-n}}(x_n)$$

doch durch endlich viele der U_i überdeckt, nämlich durch die einzige Menge U_{i_0}. ■

Folgerung 4.21 *Die folgenden Aussagen für eine Teilmenge X eines vollständigen metrischen Raumes Y sind äquivalent:*

(a) X ist relativ kompakt.

(b) X ist totalbeschränkt.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei (x_n) eine Folge in X. Da $\overline{X}$ kompakt ist, hat diese Folge eine Teilfolge (x_{n_k}), die in $\overline{X}$ konvergiert (Satz 4.20). Diese Teilfolge ist eine Cauchyfolge in X. Nach Lemma 4.19 ist X totalbeschränkt.

$(b) \Rightarrow (a)$: Wir zeigen, dass $\overline{X}$ folgenkompakt ist. Nach Satz 4.20 ist dann $\overline{X}$ kompakt und X relativ kompakt. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{X}$. Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in X$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Da X totalbeschränkt ist, hat die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge (y_{n_k}), die Cauchyfolge ist (Lemma 4.19). Diese konvergiert im vollständigen Raum Y gegen ein $y \in Y$. Nun ist aber $y \in \overline{X}$, und aus $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < n_k^{-1}$ folgt, dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Damit ist eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden. ■

4.4 Lokalkompakte Räume

Definition 4.22 *Ein topologischer Raum heißt* lokalkompakt*, wenn jede Umgebung jedes Punktes $x \in X$ eine kompakte Umgebung von x enthält (d.h. wenn jeder Punkt von X eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt).*

Beispielsweise sind die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lokalkompakter Räume.

Lemma 4.23 *Ist X ein Hausdorffraum und besitzt $x \in X$ eine kompakte Umgebung, dann enthält jede Umgebung U von x eine kompakte Umgebung von x.*

Wenn also *jeder* Punkt eines Hausdorffraumes X eine kompakte Umgebung besitzt, so ist X lokalkompakt.

Beweis. Sei K eine kompakte Umgebung von x. Es ist sicher ausreichend zu zeigen, dass $U \cap K$ eine kompakte Umgebung von x enthält. Wir können daher o.E.d.A. bereits X als kompakt voraussetzen. Indem wir gegebenenfalls die Umgebung U durch ihr Inneres ersetzen, können wir auch o.E.d.A. annehmen, dass U offen und folglich das Komplement U^c abgeschlossen und damit kompakt ist (Lemma 4.3(b)).

Sei also X kompakter Hausdorffraum und U eine offene Umgebung von $x \in X$. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass U keine kompakte Umgebung von x enthält. Wir betrachten die Familie $\mathcal{F}$ aller Durchschnitte $C \cap U^c$, wobei C die kompakten Umgebungen von x durchläuft. Diese Familie enthält nur nichtleere Mengen und ist stabil bzgl. endlicher Durchschnittsbildung. Es ist also $\mathcal{F}$ eine

Familie abgeschlossener Teilmengen des kompakten Raumes U^c mit der Eigenschaft, dass kein endlicher Durchschnitt von Mengen aus $\mathcal{F}$ leer ist. Nach Satz 4.11 enthält der Durchschnitt $\bigcap(C \cap U^c)$ aller Mengen dieser Familie einen Punkt y. Wegen $y \in U^c$ ist $y \neq x$. Wegen der Hausdorff-Eigenschaft von X gibt es also offene Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dann ist U_y^c eine kompakte Umgebung von x und folglich $y \in U_y^c \cap U^c$ (dies ist ja eine der Mengen, über die oben der Durchschnitt gebildet wurde), im Widerspruch zu $y \in U_y$. ■

Folgerung 4.24 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U$. Dann gibt es eine kompakte Menge $V \subseteq X$ mit*

$$K \subseteq \operatorname{int} V \subseteq V \subseteq U.$$

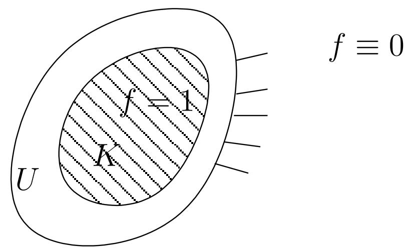
Beweis. U ist eine Umgebung jeden Punktes von K. Für jedes $x \in K$ wählen wir eine kompakte Umgebung V_x von x mit $V_x \subseteq U$ (Lemma 4.23). Die offenen Mengen $(\operatorname{int} V_x)_{x \in K}$ überdecken die kompakte Menge K. Es gibt daher endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ in K mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} V_{x_i}$. Wir setzen $V := \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ und haben wegen

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \operatorname{int} V_{x_i} \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i=1}^n V_{x_i}\Big) \subseteq V \subseteq U$$

das gesuchte V gefunden. ■

Das zentrale Resultat dieses Abschnittes ist das folgende *Lemma von Urysohn*, welches zeigt, dass es auf lokalkompakten Hausdorffräumen hinreichend viele stetige Funktionen gibt.

Satz 4.25 (Urysohn) *Sei X lokalkompakter Hausdorffraum, $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U$. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_K = 1$ und $f|_{X \setminus U} = 0$.*



Beweis. Sei $U(1) := U$. Mit Folgerung 4.24 finden wir eine offene und relativ kompakte Teilmenge $U(0) \subseteq X$ mit $K \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$. Mit der gleichen Begründung findet man eine offene und relativ kompakte Teilmenge $U(1/2)$ von X mit

$$\overline{U(0)} \subseteq U(1/2) \subseteq \overline{U(1/2)} \subseteq U(1).$$

Wir fahren so fort und finden für jede dyadische Zahl $\frac{k}{2^n} \in [0, 1]$ eine offene und relativ kompakte Teilmenge $U(\frac{k}{2^n})$ mit

$$\overline{U\left(\frac{k}{2^n}\right)} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1. \tag{4.1}$$

Sei $\mathbb{D} = \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, 2^n\}$ die Menge aller dyadischen Zahlen in $[0, 1]$. Für $r \in [0, 1]$ sei

$$U(r) := \bigcup_{\{s \in \mathbb{D}: s \le r\}} U(s).$$

(Für $r \in \mathbb{D}$ ist diese Definition konsistent mit der vorangegangenen, da die Mengen $U(s)$ mit wachsendem $s \in \mathbb{D}$ größer werden.) Für beliebige t, $t' \in [0, 1]$ mit $t < t'$ finden wir dyadische Zahlen $r = \frac{k}{2^n}$, $r' = \frac{k+1}{2^n}$ mit $t < r < r' < t'$. Für diese ist nach unserer Konstruktion

$$\overline{U(t)} \subseteq \overline{U(r)} \overset{(4.1)}{\subseteq} U(r') \subseteq U(t').$$

Wir setzen noch $U(t) := \emptyset$ für $t < 0$ und $U(t) := X$ für $t > 1$. Schließlich sei für $x \in X$

$$h(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in U(t)\}.$$

Offenbar ist $h|_K = 0$ und $h|_{X \setminus U} = 1$. Wir zeigen, dass h eine stetige Funktion auf X ist. Sei $x_0 \in X$, $h(x_0) =: t_0$ und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $V := U(t_0 + \varepsilon) \setminus \overline{U(t_0 - \varepsilon)}$. Diese Menge ist eine Umgebung von x_0. Aus $x \in V \subseteq U(t_0+\varepsilon)$ folgt $h(x) \le t_0+\varepsilon$. Wäre $h(x) < t_0 - \varepsilon$, so wäre $x \in U(t_0 - \varepsilon) \subseteq \overline{U(t_0 - \varepsilon)}$, was unmöglich ist. Also ist $|h(x) - t_0| = |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in V$ (beachte Monotonie von h). Somit ist h stetig in x_0 und (da $x_0 \in X$ beliebig war) auf ganz X. Man beachte noch, dass die konstruierte Funktion h nur Werte in [0, 1] annimmt. Die Funktion $f := 1 - h$ ist die Gesuchte. ■

Wir vermerken noch einige Eigenschaften kompakter Hausdorffräume, die leicht aus dem bisher Gesagten folgen.

Lemma 4.26 *Kompakte Hausdorffräume sind regulär (also T_3-Räume).*

Beweis. Sei X ein kompakter Hausdorffraum, $K \subseteq X$ abgeschlossen (also kompakt) und $x \in X \setminus K$. Mit Folgerung 4.24 erhalten wir die Existenz einer kompakten Menge $V \subseteq X$ mit $K \subseteq \operatorname{int} V \subseteq V \subseteq \{x\}^c$. Dann ist $\operatorname{int} V$ eine offene Umgebung von K, V^c eine offene Umgebung von x und $\operatorname{int} V \cap V^c = \emptyset$. ■

Mit einer Modifikation der Beweisidee von Folgerung 4.24 zeigt man sogar

Lemma 4.27 *Kompakte Hausdorffräume sind normal (also T_4-Räume).*

Abschließend vermerken wir noch, dass es für jeden lokalkompakten aber nicht kompakten Hausdorffraum eine natürliche Kompaktifizierung, die sogenannte „Einpunktkompaktifizierung“ gibt. Diese wird Gegenstand der Übung sein.

5 Anwendungen auf Funktionenräume

In diesem Abschnitt zeigen wir zwei wichtige Resultate über Räume stetiger Funktionen auf kompakten Mengen: eine abstrakte Version des Weierstraß'schen Approximationssatzes über dichte Teilmengen von $C(X,\mathbb{R})$ und den Satz von Arzela-Ascoli, der ein Kriterium für die relative Kompaktheit einer Teilmenge von $C(X,\mathbb{R})$ liefert.

5.1 Der Satz von Stone-Weierstraß

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 5.1 (*a*) *Sei M Menge und $\mathcal{A}$ eine Menge von Funktionen von M nach $\mathbb{K}$. Wir sagen, dass $\mathcal{A}$* die Punkte von M trennt, *wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ aus M eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $f(x) \neq f(y)$.*
(*b*) *Ein $\mathbb{K}$-linearer Raum $\mathcal{A}$ von Funktionen von M nach $\mathbb{K}$ heißt eine* Algebra, *wenn er abgeschlossen bzgl. punktweise definierter Multiplikation ist.*

Wir zeigen zunächst einige Aussagen, die wir für den Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß benötigen.

Satz 5.2 (Dini) *Sei X ein kompakter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Funktionen aus $C(X,\mathbb{R})$. Wenn (f_n) punktweise gegen ein $f \in C(X,\mathbb{R})$ konvergiert, dann sogar gleichmäßig.*

Beweis O.E.d.A. sei die Folge (f_n) monoton fallend (andernfalls ersetzen wir f_n durch $-f_n$) und $f \equiv 0$ (andernfalls ersetzen wir f_n durch $f_n - f$). Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ gibt es wegen $f_n(x) \to 0$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq f_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Da f_{n_x} stetig ist, gibt es eine Umgebung U_x von x mit

$$|f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Wegen $0 \leq f_{n_x}(y) \leq |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| + f_{n_x}(x)$ ist dann

$$0 \leq f_{n_x(y)} < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ wählen wir eine endliche Überdeckung $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$ und setzen $n_0 := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}$.

Sei nun $y \in X$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y \in U_{x_j}$, und wegen der Monotonie der Folge (f_n) ist

$$0 \leq f_{n_0}(y) \leq f_{n_{x_j}}(y) < \varepsilon.$$

Fazit: Für alle $y \in X$ und $n \geq n_0$ ist $0 \leq f_n(y) < \varepsilon$. Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion. ■

Lemma 5.3 *Es gibt eine Folge* (p_n) *reeller Polynome, die auf* $[0,\, 1]$ *gleichmäßig gegen die Funktion* $x \mapsto \sqrt{x}$ *konvergiert.*

Beweis Wir starten mit dem Polynom $p_1 \equiv 0$ und definieren p_{n+1} für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2). \tag{5.1}$$

Mit vollständiger Induktion zeigen wir zunächst, dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]: \quad 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1.$$

Das ist klar für $n = 1$. Sei die Aussage für ein $n \geq 1$ richtig. Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - p_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2) \\ &= (\sqrt{x} - p_n(x))\Big(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\Big). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Induktionsannahme $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ liefert für alle $x \in [0,\, 1]$

$$0 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)) \leq \sqrt{x} \leq 1,$$

woraus mit (5.2) folgt

$$0 \leq \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} - p_n(x).$$

Es ist also $p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ und $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ für $x \in [0,1]$. Die Folge (p_n) ist somit monoton wachsend und beschränkt, und sie konvergiert daher punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$. Vollziehen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in (5.1), folgt $f(x)^2 = x$ bzw. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$. Da diese Funktion stetig ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz von (p_n) gegen f aus Satz 5.2. ■

Satz 5.4 (Stone-Weierstraß) *Sei* X *ein kompakter Raum und* $\mathcal{A}$ *eine Unteralgebra von* $C(X,\mathbb{R})$*, die die Punkte von* X *trennt und die konstanten Funktionen enthält. Dann ist* $\mathcal{A}$ *dicht in* $C(X,\mathbb{R})$ *bzgl. der Supremumsnorm.*

Man beachte: Da es stetige Funktionen gibt, die die Punkte von X trennen, ist X ein Hausdorffraum.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ die Abschliessung von $\mathcal{A}$ in $C(X,\mathbb{R})$ bzgl. der Supremumsnorm. Dann ist $\mathcal{B}$ ebenfalls eine Unteralgebra von $C(X,\mathbb{R})$, die die Punkte von X trennt und die konstanten Funktionen enthält. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{B} = C(X,\mathbb{R})$.

Schritt 1: Mit jeder Funktion $f \in \mathcal{B}$ *liegt auch* $|f|$ *in* $\mathcal{B}$.

Das ist klar, falls $f \equiv 0$. Sei also f nicht die Nullfunktion, und sei (p_n) eine Folge von Polynomen wie in Lemma 5.3. Da $\mathcal{B}$ die Funktion f und die Einsfunktion enthält und da $\mathcal{B}$ eine Algebra ist, liegt auch jede Funktion $p_n(f^2/\|f\|_\infty^2)$ in $\mathcal{B}$.

Nach Lemma 5.3 konvergieren diese Funktionen gleichmäßig gegen $\sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2} = |f|/\|f\|_\infty$. Da $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist, liegt $|f|/\|f\|_\infty$ und folglich $|f|$ in $\mathcal{B}$.

Schritt 2: Mit $f,\ g \in \mathcal{B}$ liegen auch $\min(f,g)$ und $\max(f,g)$ in $\mathcal{B}$.

Dies folgt sofort aus Schritt 1 und aus

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \quad \text{und} \quad \max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|).$$

Schritt 3: Für $x \neq y$ in X und $r,s \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{B}$ mit $h(x) = r$, $h(y) = s$.

Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{B}$ mit $g(x) \neq g(y)$. Die Funktion

$$h := r + (s-r)\frac{g - g(x)}{g(y) - g(x)}$$

leistet das Gewünschte.

Schritt 4: Für jedes $f \in C(X,\mathbb{R})$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g_x \in \mathcal{B}$ mit

$$f(x) = g_x(x) \quad \textit{und} \quad g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \textit{für alle } y \in X.$$

Mit Schritt 3 finden wir für jedes $z \in X$ eine Funktion $h_z \in \mathcal{B}$ mit $h_z(x) = f(x)$ und $h_z(z) = f(z)$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von h_z und f eine offene Umgebung U_z von z mit $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in U_z$. Aus der Überdeckung $\bigcup_{z\in X} U_z$ von X wählen wir eine endliche Überdeckung $U_{z_1} \cup \cdots \cup U_{z_k}$ von X. Dann ist

$$g_x := \min\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_k}\} \in \mathcal{B}$$

die gesuchte Funktion.

Schritt 5: Nun können wir den Beweis von $\mathcal{B} = C(X,\mathbb{R})$ abschließen. Sei $f \in C(X,\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ sei g_x eine Funktion in $\mathcal{B}$ mit

$$f(x) = g_x(x) \quad \text{und} \quad g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X$$

(vgl. Schritt 4). Da f und g_x stetig sind, gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung W_x von x mit $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$ für alle $y \in W_x$. Aus der Überdeckung $\bigcup_{x\in X} W_x$ von X wählen wir eine endliche Überdeckung $W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_k}$ aus und setzen $\varphi_\varepsilon := \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_k}\} \in \mathcal{B}$. Für alle $y \in X$ ist dann

$$f(y) - \varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(y) \leq f(y) + \varepsilon,$$

also $\|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war und $\mathcal{B}$ abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{B}$.
■

Mit einer kleinen Zutat gilt dieser Satz auch für komplexwertige Funktionen.

Folgerung 5.5 *Sei X ein kompakter Raum und $\mathcal{A}$ eine komplexe Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$, welche die konstanten Funktionen enthält, die Punkte von X trennt und invariant bzgl. komplexer Konjugation ist (ist $f \in \mathcal{A}$, so ist auch $\bar{f} \in \mathcal{A}$). Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X, \mathbb{C})$ bzgl. der Supremumsnorm.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ die Menge der reellwertigen Funktionen aus $\mathcal{A}$. Wegen $f = \mathrm{Re} f + i\,\mathrm{Im} f = (f + \bar{f})/2 + i \cdot (f - \bar{f})/2i$ ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$. Nun ist $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ eine *reelle* Algebra, die ebenfalls die Punkte von X trennt und die reellen konstanten Funktionen enthält. Nach Satz 5.4 ist daher $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$. Folglich ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$ dicht in $C(X, \mathbb{C}) = C(X, \mathbb{R}) + i\, C(X, \mathbb{R})$. ■

Aus Satz 5.4 folgt leicht der klassische Weierstraßsche Approximationssatz, wonach die Polynome auf auf einem Intervall $[a, b]$ dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$ liegen. Hier ist eine weitere Anwendung, der *Ausdehnungssatz von Tietze.*

Satz 5.6 *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und Y eine abgeschlossene Teilmenge von X. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine stetige Funktion $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}|_Y = f$.*

Beweisidee. Wir betrachten die Abbildung $R : C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R})$, $f \mapsto f|_Y$ der Einschränkung. Ihr Bild $\mathcal{A}$ ist eine Unteralgebra von $C(Y, \mathbb{R})$, und wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A} = C(Y, \mathbb{R})$. Offenbar enthält $\mathcal{A}$ die Konstanten, und $\mathcal{A}$ trennt auch die Punkte von Y (Urysohnsches Lemma). Nach Stone-Weierstraß ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(Y, \mathbb{R})$.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ abgeschlossen in $C(Y, \mathbb{R})$ ist. Dies kann man wohl am einfachsten erreichen, wenn man etwas über Quotienten von Banachräumen weiß (vgl. etwa Reed/Simon Bd. 1).

Wir betrachten die Abbildung $R : C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R})$ der Einschränkung genauer. Es ist $I := \ker R$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $C(X, \mathbb{R})$. Folglich ist der Quotient $C(X, \mathbb{R})/I$ wieder ein Banachraum. Wir definieren

$$\tilde{R} : C(X, \mathbb{R})/I \to \mathrm{im}\, R, \quad f + I \mapsto Rf = f|_Y.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, und sie ist bijektiv. Wir zeigen, dass

$$\|\tilde{R}(f + I)\| = \|f + I\| \quad \text{für alle } f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Offenbar ist $\|Rf\|_{C(Y,\mathbb{R})} \leq \|f\|_{C(X,\mathbb{R})}$ und folglich $\|\tilde{R}(f + I)\| \leq \|f + I\|$. Es ist daher ausreichend zu zeigen, dass es für jedes $g \in \mathrm{im}\, R$ ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ gibt mit $Rf = g$ und $\|g\|_{C(Y,\mathbb{R})} = \|f\|_{C(X,\mathbb{R})}$.

Wegen $g \in \mathrm{im}\, R$ gibt es ein $h_1 \in C(X, \mathbb{R})$ mit $Rh_1 = g$. Wir wählen $h_2 := \min\{\|g\|_{C(Y,\mathbb{R})}, h_1)$. Dann ist $Rh_2 = g$ und $h_2(x) \leq \|g\|_{C(Y,\mathbb{R})}$. Sei schließlich $h_3 := \max\{-\|g\|_{C(Y)}, h_2\}$. Dann ist $Rh_3 = g$ und

$$\|h_3\|_{C(X,\mathbb{R})} = \|g\|_{C(Y,\mathbb{R})},$$

und der Satz ist bewiesen. ■

5.2 Der Satz von Arzela-Ascoli

Sei X ein kompakter Raum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir betrachten den Banachraum $C(X, \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, versehen mit der Supremumnorm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Unser Ziel ist ein Kriterium für die relative Kompaktheit einer Teilmenge M von $C(X, \mathbb{K})$. Dazu führen wir folgende Begriffe ein.

Definition 5.7 *Eine Menge $F \subseteq C(X, \mathbb{K})$ heißt*

- gleichmäßig beschränkt*, wenn es ein $L > 0$ gibt mit $\|f\|_\infty \leq L$ für alle $f \in F$,*
- punktweise beschränkt*, wenn es für jedes $x \in X$ ein $L(x) > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq L(x)$ für alle $f \in F$, und*
- gleichgradig stetig*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $f \in F$ und alle $y \in U_x$.*

Satz 5.8 (Arzela-Ascoli) *Sei X kompakt. Eine Teilmenge $F \subseteq C(X, \mathbb{K})$ ist genau dann relativ kompakt (d. h. ihre Abschließung ist kompakt), wenn F punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Da $C(X, \mathbb{K})$ ein vollständiger metrischer Raum ist, ist F genau dann relativ kompakt, wenn F totalbeschränkt ist (Folgerung 4.21). Ist eine der Bedingungen des Satzes erfüllt, so ist F natürlich auch gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Sei zunächst F relativ kompakt. Für jedes $x \in X$ betrachten wir die Abbildung

$$\delta_x : C(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(x).$$

Diese ist stetig und bildet nach Lemma 4.10 die relativ kompakte Teilmenge F von $C(X, \mathbb{K})$ in die relativ kompakte Teilmenge $\{f(x) : f \in F\}$ von $\mathbb{K}$ ab. Da relativ kompakte Teilmengen von $\mathbb{K}$ beschränkt sind, folgt die punktweise Beschränktheit von F.

Wir zeigen die gleichgradige Stetigkeit von F. Da F totalbeschränkt ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $\{f_1, \ldots, f_n\}$ in F, d. h.

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon/3}(f_i).$$

Weiter finden wir für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x mit

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } y \in U_x \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\}$$

(man findet zunächst für jedes i eine solche Umgebung und nimmt dann U_x als deren Durchschnitt). Sei nun $f \in F$. Wir wählen f_i mit $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3$ und erhalten für alle $y \in U_x$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_i\|_\infty + |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Menge F ist also gleichgradig stetig.

Sei nun umgekehrt F eine punktweise beschränkte und gleichgradig stetige Teilmenge von $C(X, \mathbb{K})$. Wir zeigen, dass F relativ kompakt ist. Sei (f_n) eine Folge in F. Wir haben zu zeigen, dass es eine Teilfolge von (f_n) gibt, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in C(X, \mathbb{K})$ konvergiert.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung V_x^k von x mit

$$|f(x) - f(y)| < 1/k \quad \text{für alle } f \in F \text{ und } y \in V_x^k.$$

Da X kompakt ist, lässt sich aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} V_x^k$ eine endliche Überdeckung auswählen. Es gibt also Punkte $x_1^k, \ldots, x_{m_k}^k$ in X und Umgebungen $V_i^k := V_{x_i^k}^k$ dieser Punkte so, dass $X = \bigcup_{i=1}^{m_k} V_i^k$ und

$$|f(x) - f(x_i^k)| < 1/k \quad \text{für alle } f \in F,\ x \in V_i^k, \text{ und } i = 1, \ldots, m_k.$$

Wir ordnen die abzählbare Menge $\{x_i^k : k \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, m_k\}$ wie folgt in eine Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$:

$$x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{m_2}^2, \ldots.$$

Für jedes y_m ist die Menge $\{f_n(y_m) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Es gibt daher eine Teilfolge (f_n^1) von (f_n), die in y_1 konvergiert. Aus gleichem Grund gibt es eine Teilfolge (f_n^2) von (f_n^1), die in y_2 konvergiert. Wir fahren so fort und erhalten für jedes $k > 1$ eine Teilfolge (f_n^k) von (f_n^{k-1}), die in y_k (und damit auf $\{y_1, \ldots, y_k\}$) konvergiert. Dann ist $(f_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (f_n), die in jedem Punkt von

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_j^k : k \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, m_k\} \tag{5.3}$$

konvergiert. Um die Bezeichnungen nicht unnötig zu verkomplizieren, nehmen wir an, dass bereits die Folge (f_n) auf der Menge (5.3) punktweise konvergiert.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Folge (f_n) punktweise auf X konvergiert. Sei $x \in X$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ genügt es zu zeigen, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3}{k} < \varepsilon$ und ein x_j^k mit $x \in V_j^k$, und es ist

$$|f_n(x) - f_n(x_j^k)| < 1/k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge $(f_n(x_j^k))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x_j^k) - f_{n'}(x_j^k)| < 1/k \quad \text{für alle } n, n' \geq n_0.$$

Für $n, n' \geq n_0$ ist dann

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{n'}(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_j^k)| + |f_n(x_j^k) - f_{n'}(x_j^k)| + |f_{n'}(x_j^k) - f_{n'}(x)| \\ &\leq 3 \cdot \frac{1}{k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es ist also $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, folglich konvergent. Wir setzen $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und zeigen noch, dass die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass $3/k < \varepsilon$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_n(x_i^k) - f(x_i^k)| \leq 1/k \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und } i = 1, \ldots, m_k.$$

Da jedes x in einer der Mengen V_i^k mit $i = 1, \ldots, m_k$ enthalten ist, ist für $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i^k)| + |f_n(x_i^k) - f(x_i^k)| + |f(x_i^k) - f(x)|. \tag{5.4}$$

Die ersten beiden Summanden sind nicht größer als $1/k$. Für den dritten gilt ebenfalls

$$|f(x_i^k) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x_i^k) - f_n(x)| \leq 1/k.$$

Also ist für $n \geq n_0$ und jedes $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3/k < \varepsilon,$$

d.h. die f_n konvergieren tatsächlich gleichmäßig gegen f. ∎

6 Fundamentalgruppen und Überlagerungen

In diesem abschließenden Kapitel geben wir die Definition einer Fundamentalgruppe und eines einfach zusammenhängenden Raumes und stellen die Grundaussagen der Überlagerungstheorie topologischer Räume zusammen, die zur Berechnung der Fundamentalgruppe erforderlich sind.

6.1 Die Fundamentalgruppe

Die Elemente der Fundamentalgruppe sind die Homotopieklassen von Schleifen. Wir definieren zunächst diese Begriffe und sehen uns ihre Eigenschaften an. Seien X ein topologischer Raum, $I := [0,1]$ und $x_0, x_1 \in X$. Wir schreiben

$$P(X, x_0) := \{\gamma \in C(I, X) : \gamma(0) = x_0\}$$

bzw.

$$P(X, x_0, x_1) := \{\gamma \in P(X, x_0) : \gamma(1) = x_1\}$$

für die Mengen der Wege in X mit Anfangspunkt x_0 bzw. mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1.

Definition 6.1 *Zwei Wege $\alpha_0, \alpha_1 \in P(X, x_0, x_1)$ heißen* homotop *(in Zeichen $\alpha_0 \sim \alpha_1$), wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ gibt mit*

$$H(0, s) = \alpha_0(s) \text{ und } H(1, s) = \alpha_1(s) \text{ für alle } s \in I$$

sowie

$$H(t, 0) = x_0 \text{ und } H(t, 1) = x_1 \text{ für alle } t \in I.$$

Für jedes $t \in I$ ist also $\alpha_t : s \mapsto H(t, s)$ ein Weg in $P(X, x_0, x_1)$. Man überprüft leicht, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $P(X, x_0, x_1)$ ist. Die Homotopieklasse eines Weges $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$ bezeichnen wir mit $[\alpha]$.

Für zwei Wege $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$ und $\beta \in P(X, x_1, x_2)$ definieren wir ihr *Produkt* $\alpha * \beta \in P(X, x_0, x_2)$ durch

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(2t-1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das folgende einfache Lemma benutzen wir im Beweis von Lemma 6.3, welches die wesentlichen Eigenschaften des Produkts von Wegen beschreibt.

Lemma 6.2 *Sei $\varphi : I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann ist $\alpha \sim \alpha \circ \varphi$ für jeden Weg $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$.*

Die behauptete Homotopie wird geliefert durch $H(t, s) := \alpha(ts + (1-t)\varphi(s))$ für $s, t \in I$. ■

Lemma 6.3 (*a*) *Aus $\alpha_1 \sim \alpha_2$ und $\beta_1 \sim \beta_2$ folgt $\alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 * \beta_2$. Das Produkt $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ von Homotopieklassen ist daher wohldefiniert.*

(*b*) *Wir bezeichnen die konstante Abbildung $I \to \{x\} \subseteq X$ einfach mit x. Dann gilt $[x_0] * [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] * [x_1]$ für alle $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$.*

(*c*) *(Assoziativität) Für $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$, $\beta \in P(X, x_1, x_2)$, $\gamma \in P(X, x_2, x_3)$ gilt $[\alpha * \beta] * [\gamma] = [\alpha] * [\beta * \gamma]$.*

(*d*) *(Inverses Element) Für $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$ erklären wir $\bar{\alpha} \in P(X, x_1, x_0)$ durch $\bar{\alpha}(t) := \alpha(1-t)$. Dann ist $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [x_0]$ und $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [x_1]$.*

(*e*) *(Funktionalität) Für jede stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ und alle Wege $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$, $\beta \in P(X, x_1, x_2)$ ist*

$$(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta) = \varphi \circ (\alpha * \beta),$$

und aus $\alpha \sim \beta$ folgt $\varphi \circ \alpha \sim \varphi \circ \beta$.

Beweis. (*a*) Sei H^α eine Homotopie von α_1 nach α_2 und H^β eine Homotopie von β_1 nach β_2. Man rechnet leicht nach ($\nearrow$ Übung), dass dann

$$H(t,s) := \begin{cases} H^\alpha(t, 2s) & \text{für } t \in [0,1], s \in [0,1/2], \\ H^\beta(t, 2s-1) & \text{für } t \in [0,1], s \in [1/2,1] \end{cases}$$

eine Homotopie von $\alpha_1 * \alpha_2$ nach $\beta_1 * \beta_2$ ist.

(*b*) Für die erste Behauptung schreiben wir $x_0 * \alpha$ als $\alpha \circ \varphi$ mit

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0,1/2], \\ 2t-1 & \text{für } t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Die Behauptung folgt dann aus Lemma 6.2. Für die zweite Behauptung schreiben wir analog $\alpha * x_1$ als $\alpha \circ \varphi$ mit

$$\varphi(t) := \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0,1/2], \\ 1 & \text{für } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

und benutzen wieder Lemma 6.2.

(*c*) Wir haben $(\alpha * \beta) * \gamma = \big(\alpha * (\beta * \gamma)\big) \circ \varphi$ mit

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0,1/4], \\ 1/4 + t & \text{für } t \in [1/4,1/2], \\ (t+1)/2 & \text{für } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

und benutzen wieder Lemma 6.2.

(*d*) Es ist (Nachrechnen!)

$$H(t,s) := \begin{cases} \alpha(2s) & \text{für } 0 \le s \le \frac{1-t}{2}, \\ \alpha(1-t) & \text{für } \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2}, \\ \bar{\alpha}(2s-1) & \text{für } \frac{1+t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von $\alpha * \bar{\alpha}$ nach x_0.

(*e*) Diese Aussage ist offensichtlich. ∎

Wir schreiben $\Omega(X, x_0)$ für $P(X, x_0, x_0)$ und nennen die Elemente von $\Omega(X, x_0)$ *Schleifen* mit Basispunkt x_0 (loops based at x_0). Aus Lemma 6.3 schließen wir, dass die Menge $\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$ der Homotopieklassen von Schleifen in x_0 mit der Operation $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ zu einer Gruppe wird.

Definition 6.4 *(a)* $\pi_1(X, x_0)$ *heißt die* Fundamentalgruppe *von* X *bzgl.* x_0.
(b) Ein wegzusammenhängender Raum X *heißt* einfach zusammenhängend*, wenn* $\pi_1(X, x_0)$ *für ein* $x_0 \in X$ *trivial ist (also nur aus dem Einselement besteht).*

Man kann zeigen (↗ Übung): Ist X topologischer Raum und ist $\alpha \in P(X, x_0, x_1)$ für zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$, so ist die Abbildung

$$\pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\gamma] \mapsto [\alpha * \gamma * \bar{\alpha}]$$

ein Gruppenisomorphismus. Falls X wegzusammenhängend ist, ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ also vom Basispunkt x_0 unabhängig.

Aus Lemma 6.3(e) folgt die *Funktionalität der Fundamentalgruppe.*

Lemma 6.5 *Sei* $f : X \to Y$ *eine stetige Abbildung mit* $f(x_0) = y_0$*. Dann ist*

$$\pi_1(f, x_0) : \quad \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dabei ist $\pi_1(id_X, x_0) = id_{\pi_1(X,x_0)}$ *und*

$$\pi_1(g \circ f, x_0) = \pi_1\big(g, f(x_0)\big) \circ \pi_1(f, x_0).$$

Etwas ausführlicher: Haben Abbildungen $f : X \to Y$ mit Basispunkt x_0 und $g : Y \to Z$ mit Basispunkt $f(x_0)$. Dann ist

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f,x_0)} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(g,f(x_0))} \pi_1(Z, g(f(x_0))).$$

Wir geben noch einige Ergebnisse an, die z. T. in der Übung besprochen werden sollen.

- Es ist $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

- Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar*, wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times X \to X$ und einen Punkt $x_0 \in X$ gibt mit $H(0, x) = x$ und $H(1, x) = x_0$ für alle $x \in X$. Ist X kontrahierbar, dann ist $\pi_1(X, x_0) = \{[x_0]\}$ die triviale Gruppe.

- Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. x_0, so liefert die Abbildung

$$H : I \times \Omega \to \Omega, \quad (t, x) \mapsto tx_0 + (1 - t)x$$

eine Kontraktion von Ω auf $\{x_0\}$. Es ist also $\pi_1(\Omega, x_0) = \{[x_0]\}$. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ die triviale Gruppe.

- Ist G eine topologische Gruppe mit Einselement, so ist $\pi_1(G, e)$ abelsch (Hilton's Lemma).

6.2 Beispiele

Wir zeigen, dass die *n-dimensionale Sphäre*

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\|_2 = 1\}$$

für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend ist. Dazu benötigen wir folgende Resultate.

Satz 6.6 *Sei X kompakter metrischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine positive Zahl λ (die sog.* Lebesguezahl *der Überdeckung) derart, dass jede Teilmenge S von X vom Durchmesser $\leq \lambda$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis. Angenommen, es gäbe keine solche Zahl. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $S_n \subseteq X$ vom Durchmesser $\leq 1/n$, die nicht in einer der Mengen U_i enthalten ist. Wir wählen aus jeder Menge S_n einen Punkt s_n. Wegen der Kompaktheit von X hat die Folge (s_n) eine Teilfolge, die gegen ein $s \in X$ konvergiert. Der Punkt s liegt in einer der Mengen der Überdeckung, etwa in U_i. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(s) \subseteq U_i$. Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1/n < \varepsilon/2$ und $d(s_n, s) < \varepsilon/2$. Für $x \in S_n$ ist dann $d(x, s_n) \leq 1/n < \varepsilon/2$, und folglich ist

$$S_n \subseteq B_{\varepsilon/2}(s_n) \subseteq B_\varepsilon(s) \subseteq U_i.$$

Dies ist ein Widerspruch. ∎

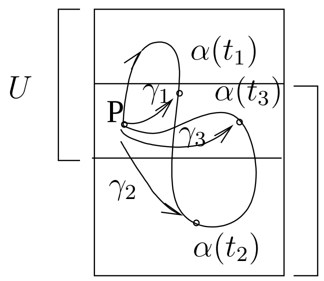
Satz 6.7 *Sei X ein wegzusammenhängender metrischer Raum, den man als Vereinigung zweier einfach zusammenhängender offener Teilmengen U, V schreiben kann, für die $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Dann ist X einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede Schleife in X homotop zu einem Produkt von Schleifen mit gleichem Basispunkt ist, die jeweils komplett in U oder V liegen. Da U und V einfach zusammenhängend sind, folgt die Behauptung.

Ist α eine Schleife, die komplett in U oder V liegt, ist die Behauptung klar. Sei also $\alpha : I \to X$ eine Schleife mit einem Basispunkt $p \in U \cap V$ (welcher Punkt als Basispunkt gewählt wird ist wegen des Wegzusammenhangs von X ohne Belang). Da die Abbildung $\alpha : I \to X$ gleichmäßig stetig und $\alpha(I)$ kompakt ist, finden wir mit Satz 6.6 Punkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ in I so, dass jede Kurve $\alpha([t_{k-1}, t_k])$ komplett in U oder V liegt. Wir parametrisieren jede dieser Kurven durch einen Weg

$$\alpha_k : I \to X, \quad s \mapsto \alpha\big((t_k - t_{k-1})s + t_{k-1}\big).$$

Weiter verbinden wir für $k = 1, \ldots, n-1$ den Basispunkt p mit $\alpha(t_k)$ durch einen Weg $y_k : I \to X$, der für $\alpha(t_k) \in U$ komplett in U liegt, für $\alpha(t_k) \in V$ komplett in V liegt und für $\alpha(t_k) \in U \cap V$ komplett in $U \cap V$ liegt. Das ist möglich, da U und V als einfach zusammenhängende Mengen wegzusammenhängend sind und da $U \cap V$ nach Voraussetzung wegzusammenhängend ist. Die Schleife α ist dann das Produkt der Schleifen



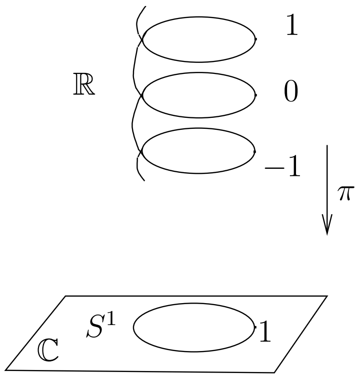
$$(\alpha_1 * \gamma_1^{-1}) * (\gamma_1 * \alpha_2 * \gamma_2^{-1}) * \cdots * (\gamma_{n-1} * \alpha_n)$$

mit gemeinsamen Basispunkt p, und jede dieser Schleifen verläuft komplett in U oder V. ■

Satz 6.8 *Für $n \geq 2$ ist die Sphäre S^n einfach zusammenhängend.*

Beweisidee. Wir wählen zwei verschiedene Punkte $x, y \in S^n$ (etwa den Nord- und Südpol) und setzen $U := S^n \setminus \{x\}$ sowie $V := S^n \setminus \{y\}$. Über die stereographische Projektion sind U bzw. V jeweils zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph, und da $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, folgt dies auch für U und V. Stellt man S^n in Polarkoordinaten dar, so ist $S^n \setminus \{x, y\}$ das Bild eines (halboffenen) Quaders unter einer stetigen Abbildung, also wegzusammenhängend. Satz 6.7 liefert dann die Behauptung. ■

Deutlich schwieriger ist die Berechnung der Fundamentalgruppe $\pi_1(S^1, 1)$, wobei wir uns S^1 als die komplexe Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ vorstellen wollen. Die grundlegende und ausbaufähige Idee besteht darin, sich S^1 als Bild von $\mathbb{R}$ unter der Exponentialabbildung



$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$$

vorzustellen. (Stellen wir uns $\mathbb{R}$ wie im Bild vor, so projiziert π gerade $\mathbb{R}$ in die komplexe Ebene.)
Für $n \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ den Weg $\gamma_n(s) = ns$, der 0 mit $n \in \mathbb{Z}$ verbindet. Durch π wird γ_n auf eine Schleife in S^1 mit Basis 1 projiziert. Diese Schleife windet sich n mal im Uhrzeigersinn falls $n < 0$ und n mal im Gegenuhrzeigersinn falls $n > 0$ um den Nullpunkt.

Satz 6.9 *Die Abbildung* $\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$, $n \mapsto [\pi \circ \gamma_n]$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Wir sehen uns nur die Beweisidee an. Die genaue Ausführung folgt in allgemeinerem Kontext im nächsten Abschnitt.

Schritt 1 : φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $\sigma_{mn} : I \to \mathbb{R}$ der Weg $\sigma_{mn}(s) := \gamma_n(s) + m$, der m mit $m + n$ verbindet. Dann ist $\pi \circ \sigma_{mn} = \pi \circ \gamma_n$, und $\gamma_m * \sigma_{mn}$ verbindet 0 mit $m+n$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\varphi(m+n) &= [\pi \circ \gamma_{m+n}] \\
&= [\pi \circ (\gamma_m * \sigma_{mn})] \quad (\text{da } \mathbb{R} \text{ einfach zusammenhängend}) \\
&= [(\pi \circ \gamma_m) * (\pi \circ \sigma_{mn})] \quad (\text{Lemma 6.3(e)}) \\
&= [(\pi \circ \gamma_m) * (\pi \circ \gamma_n)] \quad (\text{da } \pi \circ \sigma_{mn} = \pi \circ \gamma_n) \\
&= [\pi \circ \gamma_m] * [\pi \circ \gamma_n] = \varphi(m) * \varphi(n).
\end{aligned}$$

Schritt 2: φ ist surjektiv.

Sei $[\alpha] \in \pi_1(S^1, 1)$ und α ein Repräsentant dieser Homotopieklasse. Wir möchten α zu einem Weg in $\mathbb{R}$ „liften“ oder „hochheben“, d. h. wir suchen einen Weg $\gamma : I \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\pi \circ \gamma = \alpha$.

Angenommen, wir hätten bereits einen solchen Weg γ. Da $\gamma(1)$ durch π auf $\alpha(1) = 1$ abgebildet wird, ist $\gamma(1) =: n$ eine ganze Zahl. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, ist $[\gamma] = [\gamma_n]$, woraus mit Lemma 6.3(e) folgt

$$\varphi(n) = [\pi \circ \gamma_n] = [\pi \circ \gamma] = [\alpha].$$

Es verbleibt somit zu zeigen, dass jeder Weg in S^1 geliftet werden kann. Sei $U := S^1 \setminus \{-1\}$. Diese Menge ist offen, und ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ bzgl. der Projektion

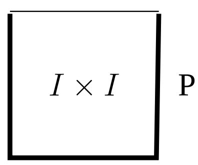
$\pi : \mathbb{R} \to S^1$ besteht genau aus den offenen Intervallen $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Diese sind paarweise disjunkt, und die Einschränkung von π auf jedes dieser Intervalle ist ein Homöomorphismus von $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$ auf U. Letztere Eigenschaft kann man nutzen, um Wege in U in jedes der Intervalle $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$ hochzuheben. Eine analoge Überlegung kann man für $V := S^1 \setminus \{1\}$ anstellen. Die einfache Idee ist nun, eine Schleife in S^1 in Teile zu zerlegen, die jeweils in U oder V liegen, und diese wie oben beschrieben zu liften.

Schritt 3: φ ist injektiv.

Hierfür benötigen wir, dass man nicht nur Wege, sondern auch Homotopien von S^1 nach $\mathbb{R}$ liften kann. Dies setzen wir an dieser Stelle voraus; die Details folgen im nächsten Abschnitt.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\varphi(n)$ das neutrale Element von $\pi_1(S^1, 1)$. Wenn wir also 0 mit n in $\mathbb{R}$ durch einen Weg γ verbinden, so ist $\pi \circ \gamma$ homotop zum konstanten Weg im Basispunkt 1. Sei F eine Homotopie vom konstanten Weg in Punkt 1 auf den Weg $\pi \circ \gamma$, d.h. es ist $F(0, s) = 1(s) = 1$ (Grundseite), $F(t, 0) = x_0 = 1$ und $F(t, 1) = x_1 = 1$ (da Schleifen), sowie $F(1, s) = (\pi \circ \gamma)(s)$ füe alle $s, t \in I$. Wir liften F zu einer Homotopie $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $\pi \circ \tilde{F} = F$ und $\tilde{F}(0, t) = 0$ für $t \in I$.

Sei P die Vereinigung aus rechter, linker und unterer Seite des Quadrats $I \times I$. Die Homotopie F bildet P auf den Punkt 1 ab. Da $\pi \circ \tilde{F} = F$ und P zusammenhängend ist, muss dann $\tilde{F}$ die Menge P auf eine gewisse ganze Zahl abbilden. Wegen $\tilde{F}(0, 0) = 0$ kann das nur die Zahl 0 sein. Es ist also $\tilde{F}(P) = \{0\}$.



Der Weg $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ ist eine Liftung von $\pi \circ \gamma$ mit Anfangspunkt 0. Wir werden später zeigen, dass die Liftung eines Weges durch Vorgabe des Anfangspunktes eindeutig bestimmt ist. Der Weg $s \mapsto \tilde{F}(1, s)$ stimmt daher mit γ überein. Wegen $\tilde{F}(1, 1) = 0$ erhalten wir $n = \gamma(1) = 0$. Der Kern der Abbildung φ besteht somit nur aus der Zahl 0. Folglich ist φ injektiv.

Aus den Schritten 1-3 folgt die Behauptung. ■

6.3 Überlagerungen

Wir beginen mit der Definition.

Definition 6.10 *Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $q : X \to Y$ heißt eine* Überlagerung, *wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $q^{-1}(U)$ die nichtleere Vereinigung einer Familie $(V_j)_{j \in J}$ paarweise disjunkter offener Mengen ist und die Einschränkung $q|_{V_j} : V_j \to U$ für jedes $j \in J$ ein Homöomorphismus ist. Jedes solche U heißt* elementare offene Teilmenge *von Y.*

Es ist klar, dass Überlagerungen surjektiv sind. Ein Beispiel für eine Überlagerung kennen wir aus Abschnitt 6.2, nämlich die Abbildung

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}.$$

Weitere Beispiele sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, &\quad z \mapsto e^z, \\ p_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, &\quad z \mapsto z^k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir gehen nun daran, das im vorigen Abschnitt aufgestellte Programm abzuarbeiten.

Satz 6.11 (Liften von Wegen) *Sei $q : X \to Y$ eine Überlagerung und $\gamma : I \to Y$ ein Weg. Sei $x_0 \in X$ so, dass $q(x_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es einen Weg $\tilde{\gamma} : I \to X$ mit $q \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ und $\tilde{\gamma}(0) = x_0$, und dieser Weg ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie elementarer offener Teilmengen von Y, die Y überdecken. Mit Satz 6.6 (Lebesgue-Zahl) finden wir ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $k = 0, \ldots, n-1$ die Kurve $\gamma\big([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\big)$ in einer Menge U_{j_k}, $j_k \in J$, enthalten ist. Wir konstruieren $\tilde{\gamma}$ per Induktion.

Sei $V_0 \subseteq q^{-1}(U_{j_0})$ eine offene Menge so, dass $q|_{V_0}$ ein Homöomorphismus von V_0 auf U_{j_0} ist, und V_0 sei so gewählt, dass $x_0 \in V_0$. Wir definieren $\tilde{\gamma}$ auf $[0, \frac{1}{n}]$ durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \big((q|_{V_0})^{-1} \circ \gamma\big)(t).$$

Angenommen, wir hätten bereits einen stetigen Lift $\tilde{\gamma}$ von γ auf dem Intervall $[0, \frac{k}{n}]$ definiert, wobei $k < n$. Dann wählen wir eine offene Teilmenge V_k von X, die $\tilde{\gamma}(\frac{k}{n})$ enthält und für die $q|_{V_k}$ ein Homöomorphismus von V_k auf U_{j_k} ist. Dann definieren wir $\tilde{\gamma}$ für $t \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ durch

$$\tilde{\gamma}(t) := \big((q|_{V_k})^{-1} \circ \gamma\big)(t)$$

und erhalten einen Lift $\tilde{\gamma}$ von γ auf $[0, \frac{k+1}{n}]$.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit. Sei $\hat{\gamma} : I \to X$ ein stetiger Lift von γ mit $\hat{\gamma}(0) = x_0$. Dann ist $\hat{\gamma}\big([0, \frac{1}{n}]\big)$ eine zusammenhängende Teilmenge von $q^{-1}(U_{j_0})$, die x_0 enthält. Folglich liegt diese Teilmenge in V_0. Dann muss aber wegen der Homöomorphie von $q|_{V_0} : V_0 \to U_{j_0}$ der Lift $\tilde{\gamma}$ mit $\hat{\gamma}$ auf $[0, \frac{1}{n}]$ übereinstimmen. Wir wiederholen dieses Argument für jeden Induktionsschritt und erhalten die Behauptung. ■

Wir zeigen als nächstes, dass man auch Homotopien liften kann. Für jede stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ setzen wir

$$H_0 : I \to X, \quad s \mapsto H(0,s) \quad \text{und} \quad H_1 : I \to X, \quad s \mapsto H(1,s).$$

Satz 6.12 *Seien $q : X \to Y$ eine Überlagerung und $H : I \times I \to Y$ eine Homotopie der Wege $\gamma := H_0$ und $\eta := H_1$. Dann gibt es für jeden Lift $\tilde{\gamma}$ von γ einen eindeutig bestimmten Lift $G : I \times I \to X$ von H mit $G_0 = \tilde{\gamma}$. Für diesen ist $\tilde{\eta} := G_1$ der eindeutig bestimmte Lift von η, der den gleichen Anfangspunkt wie $\tilde{\gamma}$ hat, und G ist eine Homotopie von $\tilde{\gamma}$ nach $\tilde{\eta}$.*

Kurz: Lifts von homotopen Schleifen in Y mit gleichem Anfangspunkt in X sind homotop in X.

Beweis. Wir benutzen Satz 6.11 über das Liften von Wegen und finden für jedes $t \in I$ einen eindeutigen stetigen Lift

$$I \to X, \quad s \mapsto G(s,t) \quad \text{mit Anfangspunkt } G(0,t) = \tilde{\gamma}(t),$$

so dass $q(G(s,t)) = H(s,t)$ für $s,t \in I$. Wir zeigen induktiv, dass die so definierte Abbildung G stetig ist.

Sei $s \in I$. Mit Satz 6.6 (Lebesgue-Zahl) finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass für jede zusammenhängende Umgebung W_s von s vom Durchmesser $\leq 1/n$ und für jedes $k = 0, \ldots, n-1$ die Menge $H\big(W_s \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\big)$ in einer gewissen elementaren offenen Teilmenge U_k von Y enthalten ist.

Die Abbildung $s \mapsto G(s,0)$ ist der eindeutig bestimmte Lift von $s \mapsto H(s,0)$, der in $\tilde{\gamma}(0)$ beginnt. Da $s \mapsto H(s,0)$ konstant ist, ist $G(s,0) = \tilde{\gamma}(0)$. Daher ist G stetig auf $W_s \times \{\frac{0}{n}\}$. Wir zeigen: Ist G stetig auf $W_s \times \{\frac{k}{n}\}$, dann sogar auf $W_s \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Hieraus folgt die Stetigkeit von G auf ganz $I \times I$.

Sei also G stetig auf $W_s \times \{\frac{k}{n}\}$. Dann bildet G diese zusammenhängende Menge ab in eine zusammenhängende Teilmenge von $q^{-1}(U_k)$. Diese liegt in einer gewissen offenen Teilmenge V_k von $q^{-1}(U_k)$, die durch q homöomorph auf U_k abgebildet wird. Dann muss aber der komplette Lift G von H auf $W_s \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ in V_k enthalten sein. Er ist also von der Form $(q|_{V_k})^{-1} \circ H$ und folglich stetig.

Da die Fasern von q diskret sind und der Weg $s \mapsto H(s,1)$ ebenso wie $s \mapsto H(s,0)$ konstant ist, ist auch $s \mapsto G(s,1)$ konstant. Folglich ist $\tilde{\eta}$ der eindeutig bestimmte Lift von η mit dem Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = G(0,0) = G(1,0)$, und G ist eine Homotopie von $\tilde{\gamma}$ auf $\tilde{\eta}$. ■

Damit ist auch der Beweis von Satz 6.9 komplett. Allgemeiner gilt

Folgerung 6.13 *Ist $q : X \to Y$ eine Überlagerung mit $q(x_0) = y_0$, so ist der entsprechende Gruppenhomomorphismus (vgl. Lemma 6.5)*

$$\pi_1(q, x_0) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [q \circ \gamma]$$

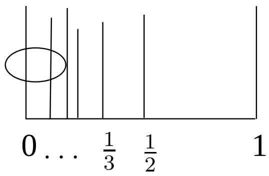
injektiv.

Beweis. Seien γ und η Schleifen in X mit Basispunkt x_0 und $[q \circ \gamma] = [q \circ \eta]$. Dann sind γ und η nach Satz 6.12 homotop, d. h. es ist $[\gamma] = [\eta]$. ■

Folgerung 6.14 *Ist Y einfach zusammenhängend und X wegzusammenhängend, so ist jede Überlagerung $q : X \to Y$ ein Homöomorphismus.*

Beweis. Da q eine offene stetige Abbildung ist, genügt es, die Injektivität von q zu zeigen. Seien $x_0, x \in X$ Punkte mit $q(x_0) = q(x) =: y_0$. Dann gibt es einen Weg $\alpha \in P(X, x_0, x)$ von x_0 nach x. Für diesen ist $q \circ \alpha$ eine Schleife mit Basis y_0 in Y. Da Y einfach zusammenhängend ist, kann diese Schleife auf einen Punkt kontrahiert werden. Nach Satz 6.12 ist dann auch der (eindeutig bestimmte) Lift α von $q \circ \alpha$ eine Schleife, die in x_0 beginnt und endet. Es ist also $x = x_0$, und q ist injektiv. ∎

Wir geben noch ohne Beweis ein Resultat über das Liften von Abbildungen an. Dafür nennen wir einen topologischen Raum *lokal wegzusammenhängend*, wenn jede Umgebung eines Punktes x eine wegzusammenhängende Umgebung von x enthält. Man beachte, dass wegzusammenhängende Räume nicht lokal wegzusammenhängend sein müssen. Ein Beispiel ist der „Kamm“.



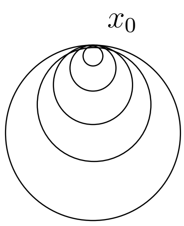
Satz 6.15 (Liften von Abbildungen) *Seien $q : X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 = q(x_0)$. Weiter sei W ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, und $f : W \to Y$ sei eine stetige Abbildung mit $f(w_0) = y_0$. Dann gibt es genau dann eine stetige Abbildung $\tilde{f} : W \to X$ mit $\tilde{f}(w_0) = x_0$ und $q \circ \tilde{f} = f$, wenn*

$$\pi_1(f, w_0)\big(\pi_1(W, w_0)\big) \subseteq \pi_1(q, x_0)\big(\pi_1(X, x_0)\big).$$

Eine wichtige Anwendung findet dieser Satz beim Beweis des folgenden Satzes über die Existenz einfach zusammenhängender Überlagerungsräume. Dazu vorab eine Definition.

Definition 6.16 *Ein topologischer Raum X heißt* semilokal einfach zusammenhängend, *wenn jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass jede Schleife $\alpha \in \Omega(U, x_0)$ homotop zu $[x_0]$ ist.*

Diese Bedingung ist z. B. verletzt, wenn X ein „Hawaiianischer Ohrring“ ist.



Satz 6.17 *Sei Y wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann besitzt Y genau dann einen einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum X, wenn Y semilokal einfach zusammenhängend ist.*

Nun können wir auch den in Abschnitt 6.2 beobachteten Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe $\pi_1(Y, y_0)$ und Eigenschaften der Überlagerung allgemein herstellen. Die Überlagerungen erweisen sich damit als nützliches Mittel zur Berechnung von Fundamentalgruppen. Umgekehrt (siehe z. B. Abschnitt 10 in Armstrong, Basic Topology, Springer) können Fundamentalgruppen zur Klassifikation von Überlagerungen genutzt werden. Dies findet Anwendungen etwa in der Knotentheorie.

Definition 6.18 *Sei $q : X \to Y$ eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus $\varphi : X \to X$ heißt* Deckbewegung *dieser Überlagerung, wenn $q \circ \varphi = q$. Die Deckbewegungen bilden eine Gruppe, die sogenannte* Deckgruppe $\mathrm{Deck}(X, q)$.

Beispielsweise sind die Deckbewegungen für die in Abschnitt 6.2 benutzte Überlagerung

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$$

gerade von der Gestalt $x \mapsto x + n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\mathrm{Deck}(\mathbb{R}, \pi) \cong \mathbb{Z}.$$

Satz 6.19 *Sei $q : \tilde{Y} \to Y$ eine Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes Y durch einen einfach zusammenhängenden Raum $\tilde{Y}$. Sei $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ und $y_0 := q(\tilde{y}_0)$. Für jede Homotopieklasse $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ schreiben wir $\varphi_{[\gamma]} \in$* $\mathrm{Deck}(\tilde{Y}, q)$ *für die eindeutig bestimmte Deckbewegung von $\tilde{Y}$, die den Punkt $\tilde{y}_0$ auf den Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ des eindeutig bestimmten Lifts $\tilde{\gamma}$ von γ, der in $\tilde{y}_0$ beginnt, abbildet. Die so definierte Abbildung*

$$\Phi : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Deck}(\tilde{Y}, q), \quad [\gamma] \mapsto \varphi_{[\gamma]}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Seien $\gamma, \eta \in \Omega(Y, y_0)$. Die Komposition $\varphi_{[\gamma]} \circ \varphi_{[\eta]}$ ist eine Deckbewegung, die $\tilde{y}_0$ auf den Endpunkt von $\varphi_{[\gamma]} \circ \tilde{\eta}$ abbildet. Dieser wiederum fällt zusammen mit dem Endpunkt des Lifts von η, der in $\tilde{\gamma}(1)$ startet, und ist daher zugleich der Endpunkt des Lifts der Schleife $\gamma * \eta$. Hieraus folgt $\varphi_{[\gamma]} \circ \varphi_{[\eta]} = \varphi_{[\gamma * \eta]}$, d. h. Φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Wie zeigen die Injektivität von Φ. Sei $\varphi_{[\gamma]} = \mathrm{id}_{\tilde{Y}}$. Dann ist $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{y}_0$, d. h. $\tilde{\gamma}$ ist eine Schleife. Da $\tilde{Y}$ einfach zusammenhängend ist, ist $[\tilde{\gamma}] = [\tilde{y}_0]$ und daher $[\gamma] = [y_0]$.

Schließlich zeigen wir noch die Surjektivität von Φ. Sei φ eine Deckbewegung von $\tilde{Y}$ und $y := \varphi(\tilde{y}_0)$. Ist α ein Weg von $\tilde{y}_0$ nach y (beachte: als einfach zusammenhängender Raum ist $\tilde{Y}$ per Definition wegzusammenhängend), so ist

$\gamma := q \circ \alpha$ eine Schleife mit Basispunkt y_0, und $\alpha = \tilde{\gamma}$. Es ist daher $\varphi_{[\gamma]}(\tilde{y}_0) = y$, und aus der Eindeutigkeit von Liftungen von Abbildungen nach Satz 6.15 folgt $\varphi = \varphi_{[\gamma]}$. ■