

# Mathematik III für ETiT, WI(ET), SpoInf

Steffen Roch

WS 2022/23

# Das folgende Inhaltsverzeichnis umfasst Mathematik I bis III

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen: Zahlen und Mengen</b>	<b>1</b>
1.1	Die natürlichen Zahlen . . . . .	1
1.2	Die reellen Zahlen . . . . .	3
1.3	Die komplexen Zahlen . . . . .	8
1.4	Mengen und Mengenoperationen . . . . .	13
1.5	Abbildungen . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Folgen und Reihen reeller Zahlen</b>	<b>19</b>
2.1	Folgen und Grenzwerte . . . . .	19
2.2	Konvergenzkriterien und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ . . . . .	23
2.3	Reihen . . . . .	26
2.4	Absolut konvergente Reihen . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Reelle Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>32</b>
3.1	Stetige Funktionen . . . . .	32
3.2	Einige spezielle Funktionen . . . . .	35
3.2.1	Polynome . . . . .	35
3.2.2	Wurzelfunktionen . . . . .	37
3.2.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	38
3.2.4	Exponentialfunktion . . . . .	42
3.3	Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>47</b>
4.1	Definition der Ableitung . . . . .	47
4.2	Differentiationsregeln . . . . .	49
4.3	Ableitungen spezieller Funktionen . . . . .	51
4.3.1	Polynome und rationale Funktionen . . . . .	51
4.3.2	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen . . . . .	52
4.3.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	53
4.4	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen . . . . .	55
4.4.1	Lokale Extrema . . . . .	55
4.4.2	Der Mittelwertsatz . . . . .	56
4.4.3	Konvexität und höhere Ableitungen . . . . .	57
4.4.4	Der Satz von Taylor . . . . .	59
4.5	Anwendungen auf die Untersuchung von Funktionsgraphen . . . . .	62
4.6	Anwendung auf die Bestimmung von Grenzwerten . . . . .	64

<b>5</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>65</b>
5.1	Der Begriff des Riemann-Integrals . . . . .	65
5.2	Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen . . . . .	69
5.3	Eigenschaften des Riemannintegrals . . . . .	71
5.4	Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung . . . . .	73
5.5	Einige Integrationstechniken . . . . .	76
5.6	Stammfunktionen rationaler Funktionen . . . . .	82
5.7	Flächeninhalte . . . . .	85
5.8	Uneigentliche Integrale . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Der Vektorraum <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>92</b>
6.1	Vektoren und Geraden im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	92
6.2	Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	98
6.3	Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Lineare Räume</b>	<b>105</b>
7.1	Definition und Beispiele . . . . .	105
7.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension . . . . .	107
<b>8</b>	<b>Lineare Abbildungen und Matrizen</b>	<b>110</b>
8.1	Lineare Abbildungen . . . . .	110
8.2	Matrizen . . . . .	113
8.3	Der Rang einer Matrix . . . . .	117
<b>9</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>119</b>
9.1	Lösbarkeit und Lösungsstruktur . . . . .	119
9.2	Der Gaußsche Algorithmus . . . . .	123
<b>10</b>	<b>Determinanten</b>	<b>129</b>
10.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	129
10.2	Determinanten und invertierbare Matrizen . . . . .	134
<b>11</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>138</b>
11.1	Definitionen und einfache Eigenschaften . . . . .	138
11.2	Koordinatentransformationen . . . . .	142
11.3	Diagonalähnliche Matrizen . . . . .	144
11.4	Orthonormalbasen . . . . .	145
11.5	Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen . . . . .	148
11.6	Quadratische Gleichungen und Hauptachsentransformation . . . . .	152
<b>12</b>	<b>Folgen und Reihen von Funktionen</b>	<b>159</b>
12.1	Punktweise Konvergenz . . . . .	159
12.2	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	160
12.3	Potenzreihen . . . . .	165

12.4	Fourierreihen	173
<b>13</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>181</b>
13.1	Mengen im $\mathbb{R}^n$	181
13.2	Grenzwerte und Stetigkeit	182
13.3	Partielle Ableitungen	185
13.4	Differenzierbarkeit	188
13.5	Richtungsableitungen	193
13.6	Mittelwertsatz und Satz von Taylor	194
13.7	Lokale Extrema	197
13.8	Parameterabhängige Integrale	199
13.9	Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen	202
13.10	Extrema unter Nebenbedingungen	205
<b>14</b>	<b>Wegintegrale</b>	<b>210</b>
14.1	Wege im $\mathbb{R}^n$	210
14.2	Wegintegrale	214
<b>15</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>222</b>
15.1	Das Riemann-Integral über Intervallen im $\mathbb{R}^n$	222
15.2	Integration über messbaren Mengen	227
15.3	Integration über Normalbereiche	232
15.4	Die Substitutionsregel	235
<b>16</b>	<b>Oberflächenintegrale</b>	<b>244</b>
16.1	Flächen, Tangenten und Normalen	244
16.2	Flächenintegrale	248
<b>17</b>	<b>Integralsätze</b>	<b>253</b>
17.1	Die Divergenz eines Vektorfeldes	253
17.2	Der Gaußsche Integralsatz im Raum	255
17.3	Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene	259
17.4	Der Stokessche Integralsatz	262
17.5	Einige weitere Differential- und Integralformeln	268
17.5.1	Der Nabla-Operator	268
17.5.2	Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren	269
17.5.3	Produktregeln	269
17.5.4	Die Greenschen Formeln	269
<b>18</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>271</b>
18.1	Grundbegriffe und Beispiele	271
18.2	Elementare Lösungsmethoden	276
18.2.1	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen	276
18.2.2	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	277

18.2.3	Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen . . . . .	280
18.2.4	Bernoullische Differentialgleichungen . . . . .	281
18.2.5	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	282
18.2.6	Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ . . . . .	284
18.2.7	Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$ . . . . .	285
18.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	287
18.4	Potenzreihenansätze . . . . .	292
<b>19</b>	<b>Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>298</b>
19.1	Allgemeine lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	298
19.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	306
19.3	Systeme linearer Differentialgleichungen . . . . .	311
19.4	Die Laplace-Transformation . . . . .	317
<b>20</b>	<b>Rand- und Eigenwertaufgaben</b>	<b>325</b>
20.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	325
20.2	Sturmsche RWP und Greensche Funktion . . . . .	327
20.3	Die Wellengleichung . . . . .	331
20.4	Die Wärmeleitgleichung . . . . .	334
<b>21</b>	<b>Komplexe Differentiation</b>	<b>337</b>
21.1	Die komplexe Zahlenebene . . . . .	337
21.2	Komplexe Funktionen . . . . .	340
21.3	Differentiation im Komplexen . . . . .	344
21.4	Konforme Abbildungen . . . . .	347
<b>22</b>	<b>Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel</b>	<b>353</b>
22.1	Komplexe Wegintegrale . . . . .	353
22.2	Der Cauchysche Integralsatz . . . . .	356
22.3	Die Cauchysche Integralformel . . . . .	359
22.4	Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen . . . . .	360
22.5	Eigenschaften holomorpher Funktionen . . . . .	364
<b>23</b>	<b>Laurentreihen und Residuen</b>	<b>369</b>
23.1	Laurentreihen . . . . .	369
23.2	Isolierte Singularitäten . . . . .	372
23.3	Residuen . . . . .	374
23.4	Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung . . . . .	377
23.4.1	Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . . . . .	378
23.4.2	Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x)f(x)dx$ . . . . .	379
23.4.3	Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ . . . . .	380

## 16 Oberflächenintegrale

Nachdem wir im vergangenen Abschnitt gesehen haben, wie man das Volumen eines dreidimensionalen Körpers (z.B. das Volumen einer Kugel) mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen kann, wenden wir uns nun den Flächeninhalten gekrümmter Flächen zu (wie z.B. der Oberfläche einer Kugel), für die wir einen geeigneten Integralbegriff entwickeln.

### 16.1 Flächen, Tangenten und Normalen

Wir haben früher Kurven als Bilder von Intervallen bzgl. stetiger Abbildungen beschrieben. Ganz analog definieren wir nun Flächenstücke als Bilder ebener Bereiche bzgl. geeigneter Abbildungen.

**Definition 16.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  eine beschränkte offene Menge, und ihre Abschließung  $\overline{D}$  sei Jordan-messbar. Weiter sei  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\text{rang } F'(x_1, x_2) = 2 \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in D. \quad (16.1)$$

Dann heißt das Bild von  $\overline{D}$  unter  $F$ , d.h. die Menge

$$\mathcal{F} := \{F(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \overline{D}\} \quad (16.2)$$

ein Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  und die Abbildung  $F : \overline{D} \rightarrow \mathcal{F}$  heißt eine Parameterdarstellung des Flächenstücks  $\mathcal{F}$  oder kurz eine Fläche.

Genau wie bei Wegen und Kurven unterscheiden wir wieder sorgfältig zwischen der Abbildung  $F$  und ihrem Bild  $\mathcal{F}$ . Offenbar kann es für ein- und dasselbe Flächenstück  $\mathcal{F}$  verschiedene Parametrisierungen geben.

**Wichtige Vereinbarung.** Wir haben früher die Differenzierbarkeit einer Abbildung  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^3$  nur für offene Mengen  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  erklärt. Die stetige Differenzierbarkeit von  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  haben wir wie folgt zu verstehen: Die Funktion  $F$  läßt sich zu einer stetig differenzierbaren Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf eine offene Menge  $G \supset \overline{D}$  fortsetzen. Diese Menge  $G$  ist für die Definition des Flächenstücks offenbar unerheblich. Wir möchten jedoch auch in den Randpunkten von  $D$  die partiellen Ableitungen  $F_{x_1}$  und  $F_{x_2}$  bilden können und verlangen daher, dass sich  $F$  auf eine offene Umgebung  $G$  von  $\overline{D}$  stetig differenzierbar fortsetzen läßt. ■

Die Rangbedingung (16.1) wird nur für Punkte aus  $D$  gefordert; auf dem Rand  $\partial D = \overline{D} \setminus D$  muss sie nicht erfüllt sein. Mit

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), F_3(x_1, x_2))^T$$

lautet die Rangbedingung (16.1)

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 2 \quad (16.3)$$

in allen Punkten von  $D$ .

**Beispiel 1** Sei  $D = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ . Dann ist  $\bar{D}$  das Rechteck  $[0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ . Sei weiter  $r > 0$  und

$$F(u, v) := (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)^T$$

für  $(u, v) \in \bar{D}$ . Dann ist  $F$  stetig differenzierbar auf  $\bar{D}$  (und sogar auf ganz  $\mathbb{R}^2$ ), und die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ 0 & r \cos v \end{pmatrix}$$

hat für alle  $(u, v) \in D$  den Rang 2. Das zugehörige Flächenstück  $\mathcal{F}$  ist die Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius  $r$ . ■

**Beispiel 2** Sei  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und

$$F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) := (u, v, f(u, v))^T.$$

Dann ist auch  $F$  stetig differenzierbar auf  $\bar{D}$ , und die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

von  $F$  hat offenbar den Rang 2. Das durch  $F$  definierte Flächenstück ist gerade der Graph von  $f$ . Mit  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$  und  $f(u, v) = uv$  erhält man beispielsweise eine Sattelfläche (hyperbolisches Paraboloid). ■

**Beispiel 3** Seien  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  und  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  linear unabhängige Vektoren und sei  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ . Auf  $\bar{D} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  hat die Funktion  $F(u, v) = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{x}_0$  die Funktionalmatrix

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

die wegen der linearen Unabhängigkeit von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  den Rang 2 hat. Das zugehörige Flächenstück ist ein Teil der durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten und durch  $\vec{x}_0$  verlaufenden Ebene. ■

Sei  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Parametrisierung eines Flächenstücks  $\mathcal{F}$ . Ist durch  $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \rightarrow \bar{D}$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $\bar{D}$  gegeben, so ist

$$Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad Y(t) = F(X(t))$$

ein stetig differenzierbarer Weg, der komplett in  $\mathcal{F}$  verläuft. Für  $t_0 \in [a, b]$  wird die Richtung der Tangente an den Weg  $Y$  im Punkt  $Y(t_0) = F(X(t_0))$  beschrieben durch den Vektor

$$\dot{Y}(t_0) = F_u(X(t_0))\dot{X}_1(t_0) + F_v(X(t_0))\dot{X}_2(t_0) \quad (16.4)$$

(Kettenregel!) mit

$$F_u(X(t_0)) = \frac{\partial F}{\partial u}(X(t_0)) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial u}(X(t_0)), \frac{\partial F_2}{\partial u}(X(t_0)), \frac{\partial F_3}{\partial u}(X(t_0)) \right)^T$$

und

$$F_v(X(t_0)) = \frac{\partial F}{\partial v}(X(t_0)) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial v}(X(t_0)), \frac{\partial F_2}{\partial v}(X(t_0)), \frac{\partial F_3}{\partial v}(X(t_0)) \right)^T.$$

Die Rangbedingung (16.1) besagt gerade, dass die beiden Vektoren  $F_u(X(t_0))$  und  $F_v(X(t_0))$  für alle Punkte  $X(t_0) \in D$  linear unabhängig sind. Wir schreiben  $X(t_0) = (u_0, v_0)$ . Betrachten wir alle Wege  $X$  durch den Punkt  $(u_0, v_0)$ , so können in (16.4) die Ableitungen  $\dot{X}_1$  und  $\dot{X}_2$  beliebige Werte annehmen. Die beiden Vektoren  $F_u(u_0, v_0)$  und  $F_v(u_0, v_0)$  spannen also die komplette *Tangentialebene an die Fläche  $F$  im Punkt  $F(u_0, v_0)$*  auf. Eine Beschreibung der Tangentialebene in Parameterform lautet

$$\{F(u_0, v_0) + \lambda F_u(u_0, v_0) + \mu F_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (16.5)$$

Den *Normalenvektor an die Fläche  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  im Punkt  $F(u, v)$*  mit  $(u, v) \in D$  erklären wir durch das Vektorprodukt

$$N(u, v) := \frac{F_u(u, v) \times F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|}. \quad (16.6)$$

(Man beachte, dass  $F_u(u, v) \times F_v(u, v) \neq 0$  ist, da beide Vektoren linear unabhängig sind.) Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts wissen wir, dass der Vektor  $N(u, v)$  senkrecht auf  $F_u(u, v)$  und  $F_v(u, v)$  (und damit auf der gesamten Tangentialebene (16.5)) steht. Außerdem hat er die Länge 1, so dass man auch vom *Normaleneinheitsvektor* spricht.

Es stellt sich die Frage, inwieweit die eingeführten Begriffe (Tangential- und Normalenvektoren) von der Parametrisierung  $F$  oder nur vom Flächenstück  $\mathcal{F}$  abhängen. Dazu zunächst eine Definition.

**Definition 16.2** a) Seien  $D, E$  offen in  $\mathbb{R}^2$ . Eine bijektive Abbildung  $\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{E}$  heißt Diffeomorphismus, wenn  $\varphi$  und die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  stetig differenzierbar sind.

b) Zwei Parameterdarstellungen  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $G : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus  $\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{E}$  gibt mit  $F = G \circ \varphi$  und  $\det \varphi' > 0$  auf  $\overline{D}$ .

Sind  $F$  und  $G$  äquivalent, so sagt man auch, dass sie durch eine Parametertransformation  $\varphi$  auseinander hervorgehen.

Bei äquivalenten Parametertransformationen bleiben die wesentlichen Flächengrößen und Flächeneigenschaften (wie die Tangentialebenen und Normalenvektoren) unverändert.

**Beispiel 4** Seien  $D$  und  $F$  wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Dann ist

$$\begin{aligned} F_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0)^T, \\ F_v(u, v) &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)^T, \\ F_u(u, v) \times F_v(u, v) &= (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v)^T, \\ \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| &= r^2 \cos v \end{aligned}$$

und damit

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)^T$$

für alle Punkte  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ . ■

**Beispiel 5** Sind  $D, f$  und  $F$  wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$\begin{aligned} F_u &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)^T, & F_v &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)^T, \\ F_u \times F_v &= \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)^T, & \|F_u \times F_v\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)^T. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 6** Sei  $D = E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ . Die Parametrisierungen

$$F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (u, v, uv)^T$$

und

$$G : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G(u, v) = (u, -v, -uv)^T$$

liefern das gleiche Flächenstück. Wir bestimmen die Normalenvektoren im Punkt  $F(0, 0) = G(0, 0) = (0, 0, 0)^T$ . Zunächst ist

$$F_u(u, v) = (1, 0, v)^T, \quad F_v(u, v) = (0, 1, u)^T,$$

also

$$F_u(u, v) \times F_v(u, v) = (-v, -u, 1)^T \text{ und } F_u(0, 0) \times F_v(0, 0) = (0, 0, 1)^T,$$

und andererseits ist

$$G_u(u, v) = (1, 0, -v)^T, \quad G_v(u, v) = (0, -1, -u)^T$$

und damit

$$G_u(u, v) \times G_v(u, v) = (-v, u, -1)^T \text{ und } G_u(0, 0) \times G_v(0, 0) = (0, 0, -1)^T.$$

Bei Verwendung von  $F$  erhalten wir also  $(0, 0, 1)^T$  als Normaleneinheitsvektor im Punkt  $(0, 0, 0)^T$  an die Sattelfläche, und bei Verwendung von  $G$  den Vektor  $(0, 0, -1)^T$ . Man beachte, dass zwar  $F$  und  $G$  durch den Diffeomorphismus

$$\varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{E}, \quad (u, v)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u, -v)^T$$

auseinander hervorgehen, dass aber

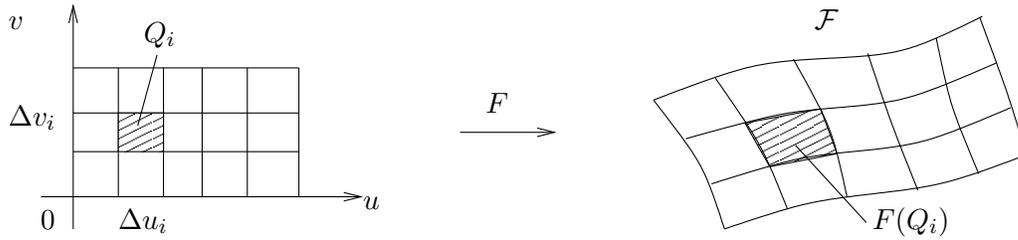
$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

ist. Also sind  $F$  und  $G$  nicht zueinander äquivalent. ■

Anschaulich ist klar, dass jedes Flächenstück in jedem Punkt genau einen Tangentialraum, aber zwei Normaleneinheitsvektoren (nach „oben“ und nach „unten“) besitzt. Ist  $F = G \circ \varphi$  mit einem Diffeomorphismus  $\varphi$ , so liefern  $F$  und  $G$  den gleichen Normalenvektor, wenn  $\det \varphi' > 0$ , und sie liefern entgegengesetzte Normalenvektoren, wenn  $\det \varphi' < 0$ . In letzterem Fall sagt man auch, dass die *Orientierung* von  $F$  gewechselt wird.

## 16.2 Flächenintegrale

Wir wollen nun Flächenintegrale bestimmen. Als Motivation gehen wir ähnlich vor wie bei der „Herleitung“ der Substitutionsregel in Abschnitt 15.4. Sei  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung eines Flächenstückes  $\mathcal{F}$ , wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass  $\overline{D}$  ein achsenparalleles Rechteck in der  $uv$ -Ebene ist. Das Rechteck  $\overline{D}$  sei in Teilrechtecke  $Q_1, \dots, Q_m$  zerlegt. Ihre Bilder  $F(Q_1), \dots, F(Q_m)$  nennen wir *Maschen*. Aus diesen Maschen setzt sich das Flächenstück  $\mathcal{F}$  zusammen.



Ist die Rechteckzerlegung von  $\overline{D}$  fein genug, so haben die Maschen nahezu die Gestalt eines Parallelogramms. Ist  $Q_i$  ein Teilrechteck in  $\overline{D}$  mit den Seitenlängen  $\Delta u_i$  und  $\Delta v_i$  und ist  $(u_i, v_i)$  der linke untere Eckpunkt von  $Q_i$ , so ist die Masche  $F(Q_i)$  ungefähr gleich dem Parallelogramm, das von den Vektoren

$$F(u_i + \Delta u_i, v_i) - F(u_i, v_i) \quad \text{und} \quad F(u_i, v_i + \Delta v_i) - F(u_i, v_i)$$

aufgespannt wird. Diese Vektoren sind nach Definition der partiellen Ableitungen ungefähr gleich

$$F_u(u_i, v_i)\Delta u_i \quad \text{und} \quad F_v(u_i, v_i)\Delta v_i.$$

Diese beiden Vektoren spannen ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt gleich der Länge des Vektorprodukts dieser Vektoren ist, also gleich der Länge von

$$\Delta\sigma_i := (F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)) \Delta u_i \Delta v_i.$$

Man kann daher  $\|\Delta\sigma_i\|$  als ungefähren Flächeninhalt der Masche  $F(Q_i)$  ansehen und

$$\sum_{i=1}^m \|\Delta\sigma_i\| = \sum_{i=1}^m \|F_u(u_i, v_i) \times F_v(u_i, v_i)\| \Delta u_i \Delta v_i \quad (16.7)$$

als Näherung für den Flächeninhalt des Flächenstückes  $\mathcal{F}$ . Ist  $D$  kein Rechteck, so schöpfen wir  $\overline{D}$  von innen durch rechteckzerlegte Bereiche aus. Lassen wir auf der rechten Seite von (16.7) die Zerlegung immer feiner werden, d.h. lassen wir  $\max_i\{\Delta u_i, \Delta v_i\}$  gegen 0 streben, so gelangen wir zum Integral

$$\iint_{\overline{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v).$$

Um sicherzustellen, dass dies tatsächlich dem Flächeninhalt von  $\mathcal{F}$  entspricht, müssen wir noch (ähnlich wie bei Kurven) garantieren, dass nicht Teile des Flächenstückes mehrfach durchlaufen werden.

**Definition 16.3** Die Parameterdarstellung  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  und das durch sie definierte Flächenstück heißen doppelpunktfrei, wenn  $F$  auf  $D$  eineindeutig ist.

**Definition 16.4** Ist  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine doppelpunktfreie Parameterdarstellung eines Flächenstückes  $\mathcal{F}$ , so ist der Flächeninhalt von  $\mathcal{F}$  die Zahl

$$I(\mathcal{F}) = \iint_{\bar{D}} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v) \quad (16.8)$$

Das Integral in (16.8) schreibt man auch als  $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$ , wobei  $d\sigma$  symbolisch für

$$\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v)$$

steht und *Flächenelement* heißt. Definition 16.4 wird wie folgt verallgemeinert:

**Definition 16.5** Durch  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein Flächenstück  $\mathcal{F}$  gegeben, und  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig auf  $\mathcal{F}$ . Dann heißt das Integral

$$\iint_{\bar{D}} H(F(u, v)) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v) = \int_{\mathcal{F}} H d\sigma \quad (16.9)$$

das Flächenintegral von  $H$  über  $\mathcal{F}$  (manchmal auch Flächenintegral erster Art).

Als Motivation kann man sich ein elektrostatisch geladenes Flächenstück  $\mathcal{F}$  vorstellen, wobei die Ladungsdichte  $H$  in jedem Punkt von  $\mathcal{F}$  bekannt und die Gesamtladung gesucht ist.

Man kann (und muss) sich überlegen, dass die Integrale in (16.8) und (16.9) bei Parametertransformation und Orientierungswechsel invariant bleiben. Im Falle der Doppelpunktfreiheit ist die Schreibweise rechts in (16.9) völlig eindeutig, da je zwei zugehörige Parameterdarstellungen entweder äquivalent oder entgegengesetzt orientiert sind.

**Beispiel 7** Seien  $D$  und  $F$  wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche). Mit Beispiel 4 erhalten wir

$$I(\mathcal{F}) = \iint_{\bar{D}} r^2 \cos v d(u, v) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v dv du = 4\pi r^2$$

als Flächeninhalt der Kugeloberfläche. ■

**Beispiel 8** Sind  $D$ ,  $f$  und  $F$  wie in Beispiel 2 (Funktionsgraphen), so ist

$$I(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} d\sigma = \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} d(u, v)$$

der Flächeninhalt des Funktionsgraphen. Vergleichen Sie dieses Resultat mit Formel (14.2) für die Kurvenlänge des Graphen einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

**Definition 16.6** Durch  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein Flächenstück  $\mathcal{F}$  gegeben, und  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein stetiges Vektorfeld auf  $\mathcal{F}$ . Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} := \iint_{\bar{D}} H(F(u, v)) \cdot (F_u(u, v) \times F_v(u, v)) d(u, v) \quad (16.10)$$

das Flächenintegral (zweiter Art) von  $H$  über  $\mathcal{F}$ .

Schreiben wir

$$\begin{aligned} F_u(u, v) \times F_v(u, v) &= \frac{F_u(u, v) \times F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|} \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| \\ &= N(u, v) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\|, \end{aligned}$$

so geht das Integral auf der rechten Seite von (16.10) über in

$$\iint_{\bar{D}} H(F(u, v)) \cdot N(u, v) \|F_u(u, v) \times F_v(u, v)\| d(u, v), \quad (16.11)$$

so dass man das Integral  $\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma}$  zweiter Art auch als das Integral  $\int_{\mathcal{F}} H \cdot N d\sigma$  erster Art auffassen kann. Flächenintegrale zweiter Art sind ebenfalls invariant bezüglich äquivalenter Parametertransformationen. Bei einem Orientierungswechsel ändern sie jedoch ihr Vorzeichen, da die Normalenvektoren ihre Richtung ändern.

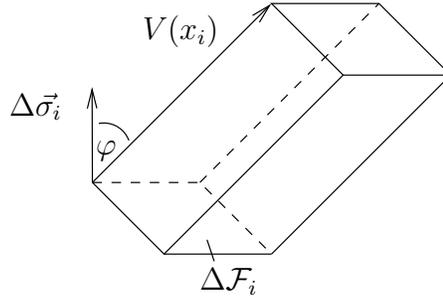
Zur *Motivation* der Flächenintegrale zweiter Art stellen wir uns ein stationäres (zeitunabhängiges) Geschwindigkeitsfeld  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  einer strömenden Flüssigkeit vor und fragen nach der Flüssigkeitsmenge, die ein gegebenes Flächenstück  $\mathcal{F}$  pro Zeiteinheit durchfließt. Sinnvollerweise soll  $\mathcal{F}$  orientiert sein, d.h. wir können uns etwa vorstellen, dass  $\mathcal{F}$  eine ‘‘Unterseite’’ und eine ‘‘Oberseite’’ hat und dass die Normalenvektoren in Richtung der Oberseite zeigen.

Wie bei der Motivation zum Flächeninhalt denken wir uns  $\mathcal{F}$  in Maschen unterteilt, die näherungsweise Parallelogrammform haben. Es sei  $\Delta\vec{\sigma}_i$  der *Flächenvektor* eines solchen Parallelogramms  $\Delta\mathcal{F}_i$ , d.h.  $\Delta\vec{\sigma}_i$  steht senkrecht auf  $\Delta\mathcal{F}_i$  und zeigt in Normalenrichtung, und  $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$  ist gleich dem Flächeninhalt von  $\Delta\mathcal{F}_i$ .

Dann ist  $|V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i|$  (mit einem  $x_i \in \Delta\mathcal{F}_i$ ) das Flüssigkeitsvolumen, das näherungsweise pro Zeiteinheit durch  $\Delta\mathcal{F}_i$  fließt. Pro Zeiteinheit schiebt sich nämlich ein Parallellfläch mit dem Grundflächeninhalt  $\|\Delta\vec{\sigma}_i\|$  und der Höhe  $\|V(x_i)\| \cos \varphi$  (vgl. die folgende Skizze), d.h. mit dem Volumen

$$\|V(x_i)\| \|\Delta\vec{\sigma}_i\| \cos \varphi = V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

durch  $\Delta\mathcal{F}_i$ . (In erster Näherung nehmen wir  $V$  als konstant auf  $\Delta\mathcal{F}_i$  an.)



Fließt die Flüssigkeit aus der Seite von  $\Delta\mathcal{F}_i$  heraus, in die der Flächenvektor  $\Delta\vec{\sigma}_i$  zeigt, so ist  $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i \geq 0$  und andernfalls  $\leq 0$ . Das Vorzeichen von  $V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$  gibt also an, in welche Richtung  $\Delta\mathcal{F}_i$  durchflossen wird. Die Summation der Durchflüsse über alle Maschen

$$\sum_i V(x_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}_i$$

und der Übergang zu beliebig kleinen Maschenweiten führen zum Flächenintegral 2. Art

$$U = \int_{\mathcal{F}} V(x) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Die Größe  $|U|$  gibt also das Gesamtvolumen an, das pro Zeiteinheit das Flächenstück  $\mathcal{F}$  durchströmt, wobei die Anteile beider Strömungsrichtungen durch  $\mathcal{F}$  gegeneinander aufgerechnet sind. Das Vorzeichen von  $U$  gibt an, an welcher Seite des Flächenstücks mehr herausfließt: Ist  $U > 0$ , so strömt mehr Flüssigkeit in Richtung der Normalenvektoren von  $\mathcal{F}$ , ist  $U < 0$ , so in entgegengesetzter Richtung. Man nennt  $U$  auch den *Fluss* von  $V$  durch  $\mathcal{F}$ . ■

**Beispiel 9** Seien  $D$  und  $F$  wieder wie in Beispiel 1 (Kugeloberfläche), und sei  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die identische Abbildung, d.h.  $H(x, y, z) = (x, y, z)$ . Dann ist nach Beispiel 4

$$N(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)^T,$$

und mit

$$H(F(u, v)) = F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v)^T = r N(u, v)$$

erhalten wir mit (16.11) für das Flächenintegral 2. Art

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} H \cdot N d\sigma = \int_{\mathcal{F}} r d\sigma = r \int_{\mathcal{F}} d\sigma.$$

Das Flächenintegral  $\int_{\mathcal{F}} d\sigma$  ist gleich dem Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Wir haben es in Beispiel 7 berechnet und erhalten damit

$$\int_{\mathcal{F}} H \cdot d\vec{\sigma} = 4\pi r^3. \quad \blacksquare$$

## 17 Integralsätze

Ziel dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = f(x)|_a^b$$

und der Formel der partiellen Integration

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = - \int_a^b u(x)v'(x) dx + u(x)v(x)|_a^b$$

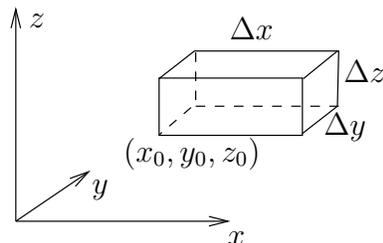
auf mehrdimensionale Integrale. Es stellt sich die Frage, durch welche Differentialoperatoren die Ableitungen  $f'$ ,  $u'$ ,  $v'$  und wodurch die Randterme  $f|_a^b$  und  $uv|_a^b$  zu ersetzen sind. Die gewonnenen Integralsätze finden zahlreiche Anwendungen in den Natur- und Technikwissenschaften.

### 17.1 Die Divergenz eines Vektorfeldes

Unser erstes Ziel ist der *Gaußsche Integralsatz* im  $\mathbb{R}^3$ . Seine anschauliche Bedeutung ist völlig einleuchtend:

*Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in diesem Gebiet hervorbringen.*

Wie kann man die Flüssigkeitsmenge, die eine Quelle im Punkt  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  hervorbringt, mathematisch beschreiben? Wir betrachten eine stationäre (zeitunabhängige) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit (d.h. mit konstanter Dichte), die im Punkt  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  die Geschwindigkeit  $V(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$  hat. Im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  heften wir einen kleinen achsenparallelen Quader  $Q$  mit den Seitenlängen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  an.



Dann ist das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit in Richtung der positiven  $x$ -Achse durch die linke bzw. rechte Seitenwand des Quaders fließt, näherungsweise gleich

$$V_1(x_0, y_0, z_0)\Delta y\Delta z \quad \text{bzw.} \quad V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\Delta y\Delta z.$$

Das Volumen, das pro Zeiteinheit aus dem Quader  $Q$  in der positiven  $x$ -Richtung austritt, ist also etwa gleich

$$\begin{aligned} & (V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{V_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - V_1(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \\ &\approx \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Wir stellen in ähnlicher Weise die Massenbilanz für den Fluß in positiver  $y$ - und  $z$ -Richtung auf und erhalten als Endresultat, dass das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit aus  $Q$  austritt, ungefähr gleich

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (17.1)$$

ist. Wir treffen folgende allgemeine Definition.

**Definition 17.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt die durch

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad x \in D$$

(mit  $F = (F_1, \dots, F_n)$ ) definierte Funktion  $\operatorname{div} F : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Divergenz von  $F$ .

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also eine *skalarwertige* Funktion. Wir können (17.1) somit schreiben als

$$(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividieren wir diesen Wert durch das Volumen  $\Delta x \Delta y \Delta z$  von  $Q$  und ziehen wir  $Q$  auf den Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  zusammen, so können wir  $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0)$  als *Quelldichte* der Strömung im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  interpretieren. Ist  $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) > 0$ , so ist  $(x_0, y_0, z_0)$  eine *Quelle* im eigentlichen Sinn (ihr entströmt Flüssigkeit). Im Fall  $(\operatorname{div} V)(x_0, y_0, z_0) < 0$  heißt  $(x_0, y_0, z_0)$  auch eine *Senke* (da in diesem Punkt Flüssigkeit verschwindet).

**Einige Rechenregeln für die Divergenz** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und seien  $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(F + G) &= \operatorname{div} F + \operatorname{div} G, \\ \operatorname{div}(\lambda F) &= \lambda \operatorname{div} F \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{div}(\varphi F) &= \varphi \operatorname{div} F + \operatorname{grad} \varphi \cdot F. \end{aligned}$$

## 17.2 Der Gaußsche Integralsatz im Raum

Wir können nun die anschauliche Aussage des Gaußschen Integralsatzes in Formeln fassen. Es sei  $G$  ein geeigneter räumlicher Bereich und  $\partial G$  sein Rand (seine Oberfläche). Die genauen Voraussetzungen geben wir später an. In jedem Randpunkt haben wir zwei Normaleneinheitsvektoren: einen, der in den Körper hineinzeigt (die sogenannte *innere Normale*) und einen, der von  $G$  weg zeigt (die *äußere Normale*). Es sei  $N : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$  das Vektorfeld der *äußeren* Normaleneinheitsvektoren. Weiter sei  $V$  das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Nach Abschnitt 16.2 (Interpretation des Flächenintegrals 2. Art) ist der Durchfluß durch  $\partial G$  in Richtung der äußeren Normalen (also das, was aus  $G$  herausfließt), gleich

$$\iint_{\partial G} V \cdot N \, d\sigma. \quad (17.2)$$

Die durch Quellen und Senken in  $G$  hervorgebrachte Flüssigkeitsmenge erhalten wir dagegen durch Aufintegrieren der Quellendichte über  $G$ :

$$\iiint_G (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \quad (17.3)$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz sind die Integrale (17.2) und (17.3) gleich. Nun zur exakten Formulierung.

**Definition 17.2** a) Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  heißt  $C^1$ -Normalbereich bzgl. der  $x_1x_2$ -Ebene, wenn es eine kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  und stetig differenzierbare Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$  so gibt, dass

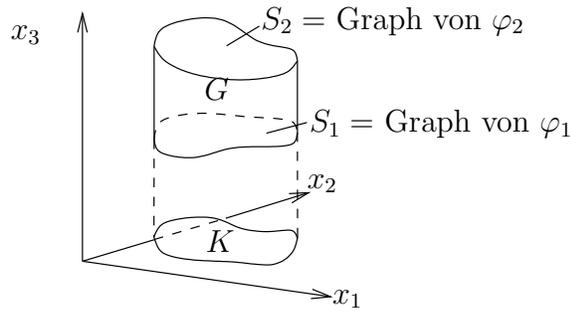
$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in K, \varphi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1, x_2) \right\}$$

gilt und dass der Rand  $\partial K$  durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg darstellbar ist. Analog erklärt man  $C^1$ -Normalbereiche bezüglich der  $x_2x_3$ - und  $x_1x_3$ -Ebene.

b) Die Menge  $G$  heißt ein  $C^1$ -Normalbereich, wenn sie ein  $C^1$ -Normalbereich bezüglich der  $x_1x_2$ -, der  $x_2x_3$ - und der  $x_1x_3$ -Ebene ist.

(Es sei noch einmal an unsere Vereinbarung erinnert: Eine Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer kompakten Menge  $K$  heißt stetig differenzierbar, wenn sie zu einer stetig differenzierbaren Funktion auf einer offenen Menge  $G \supseteq K$  fortgesetzt werden kann.)

**Anmerkung** Einen  $C^1$ -Normalbereich bzgl. der  $x_1x_2$ -Ebene kann man sich so vorstellen:



Der obere Deckel  $S_2 = \varphi_2(K)$  ist ein Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$  mit der Parameterdarstellung

$$F_2 : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)).$$

Der durch  $F_2$  bestimmte Normaleneinheitsvektor (vgl. Beispiel 5 aus 16.1)

$$N_2(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left( -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, 1 \right)$$

ist der *äußere* Normaleneinheitsvektor für  $G$  (da die  $z$ -Komponente  $> 0$  ist). Der untere Deckel  $S_1$  wird beschrieben durch

$$F_1 : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)),$$

und der zugehörigen Normaleneinheitsvektor ist

$$N_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} \left( -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}, 1 \right).$$

Dieser zeigt ebenfalls in Richtung der positiven  $z$ -Achse (also in  $G$  hinein), so dass der *äußere* Normalenvektor an  $G$  auf  $S_1$  gleich  $-N_1(u, v)$  ist. ■

**Satz 17.3 (Gaußscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$ )** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Normalbereich und  $H : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter bezeichne  $N : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$  das *äußere* Normaleneinheitsfeld von  $G$ . Dann ist

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx = \iint_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \quad (17.4)$$

**Beweis** Es genügt, die Aussage zu beweisen, wenn  $H$  die Gestalt  $H = (0, 0, H_3)^T$  hat (man kann ja  $H$  als Summe dreier derartiger Ausdrücke schreiben, und die

Integrale in (17.4) sind linear in  $H$ ). Nach Satz 15.15 erhalten wir wegen  $\operatorname{div} H = \frac{\partial H_3}{\partial x_3}$

$$\begin{aligned} \iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx &= \iint_K \left( \int_{\varphi_1(x_1, x_2)}^{\varphi_2(x_1, x_2)} \frac{\partial H_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) d(x_1, x_2) \\ &= \iint_K \left( H_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)) - H_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)) \right) d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Auf dem oberen Deckel  $S_2 = \varphi_2(K)$  ist

$$H \cdot N = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1}} H_3$$

und damit

$$\begin{aligned} &\iint_K H_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)) d(x_1, x_2) \\ &= \iint_K (H \cdot N) \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right)^2 + 1} d(x_1, x_2) \\ &= \iint_{S_2} H \cdot N d\sigma. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass

$$- \iint_K H_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)) d(x_1, x_2) = \iint_{S_1} H \cdot N d\sigma.$$

Auf dem noch fehlenden Randstück  $\partial G \setminus (S_1 \cup S_2)$  von  $G$ , also auf

$$S_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \partial K, \varphi_1(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_2(x_1, x_2)\},$$

existiert der äußere Normalenvektor  $N$  ebenfalls (bis auf endlich viele Geradenstücke  $\{y\} \times [\varphi_1(y), \varphi_2(y)]$  mit  $y \in \partial K$ , in denen die Parametrisierung von  $\partial K$  nicht differenzierbar ist), und die Komponente von  $N$  in  $x_3$ -Richtung ist 0. Daher ist  $H \cdot N = 0$  auf  $S_3$ . Zusammengefasst erhalten wir

$$\iiint_G (\operatorname{div} H)(x) dx = \sum_{j=1}^3 \iint_{S_j} H \cdot N d\sigma = \iint_{\partial G} H \cdot N d\sigma. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 1** Wir kommen noch einmal zurück auf Beispiel 9 aus 16.2. Dort waren  $D$  und  $F$  wie in Beispiel 1 aus 16.1 (Kugeloberfläche) und  $H(x, y, z) = (x, y, z)$ , und wir haben erhalten, dass

$$\int_{\partial G} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial G} H \cdot N \, d\sigma = 4\pi r^3.$$

Andererseits ist  $\operatorname{div} H = 3$ , so dass mit dem Volumen  $V$  der Kugel  $G$  gilt

$$\int_G (\operatorname{div} H)(x) \, dx = 3 \int_G dx = 3V.$$

Der Gaußsche Satz liefert nach Gleichsetzen

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad \blacksquare$$

**Folgerung 17.4 (Partielle Integration in  $\mathbb{R}^3$ )** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Normalbereich und  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei  $N = (N_1, N_2, N_3) : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  das äußere Einheitsnormalenfeld an  $G$ . Dann gilt für  $i = 1, 2, 3$

$$\iiint_G f \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx = - \iiint_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g \, dx + \iint_{\partial G} fg N_i \, d\sigma. \quad (17.5)$$

**Beweis** Sei z.B.  $i = 1$ . Für die stetig differenzierbare Funktion

$$F : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x) = (f(x)g(x), 0, 0) \quad (17.6)$$

ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} g + f \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

und  $F \cdot N = fg N_1$ . Die Behauptung folgt also sofort, wenn man die Funktion (17.6) in den Gaußschen Integralsatz (17.4) einsetzt.  $\blacksquare$

**Anmerkung 1** Wir haben in Satz 17.3 und Folgerung 17.4 statt  $\int_G$  und  $\int_{\partial G}$  die Schreibweisen  $\iiint_G$  und  $\iint_{\partial G}$  benutzt, um deutlich zu machen, dass (dreidimensionale) Volumenintegrale und (zweidimensionale) Oberflächenintegrale auftreten.

**Anmerkung 2** Sind  $F_1, \dots, F_n$  Flächenstücke, die sich nicht überlappen, so definiert man das Flächenintegral über  $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$  durch

$$\int_F = \int_{F_1} + \dots + \int_{F_n}.$$

Dies haben wir im Beweis des Gaußschen Satzes benutzt ( $\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ ).

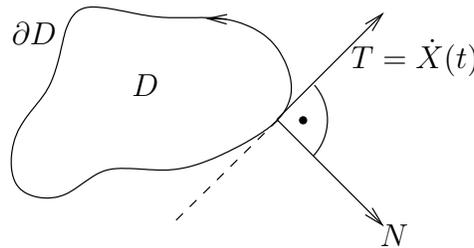
**Anmerkung 3** Satz 17.3 und Folgerung 17.4 gelten auch noch unter schwächeren Voraussetzungen. Z.B. genügt es, dass sich  $G$  als endliche Vereinigung sich nicht überlappender  $C^1$ -Normalbereiche schreiben läßt. Man beachte auch, dass der Normalenvektor nicht in jedem Randpunkt definiert ist (z.B. nicht entlang der Kanten eines Quaders).

### 17.3 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene

Der Gaußsche Integralsatz und seine Folgerung gelten (bei geeigneter Definition des Flächenintegrals) in jeder Raumdimension  $n$ . Den Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$  kann man durch geeignete Reduzierung um eine Koordinate wie folgt aus dem Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  gewinnen.

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich bezüglich der  $x_1$ - und der  $x_2$ -Achse (vgl. Abschnitt 15.3). In diesem Fall nennen wir  $D$  einfach einen *Normalbereich*. Der Rand  $\partial D$  sei eine geschlossene Kurve, die durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert wird. Durchläuft  $t$  das Intervall  $[a, b]$  von  $a$  nach  $b$ , so wandert  $X(t)$  entlang  $\partial D$  in einer bestimmten Richtung, und wir wollen annehmen, dass dabei  $D$  stets links des Weges liegt. Man sagt auch, dass  $D$  vom Weg  $X$  *positiv umlaufen* wird oder dass der Rand  $\partial D$  *positiv orientiert* ist (anschaulich: im Gegenuhrzeigersinn).

Der Tangentialvektor an  $\partial D$  im Punkt  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$  ist  $T := (\dot{X}_1(t), \dot{X}_2(t))$ , und  $N := (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t))$  ist ein auf  $T$  senkrecht stehender Vektor, der nach außen zeigt.



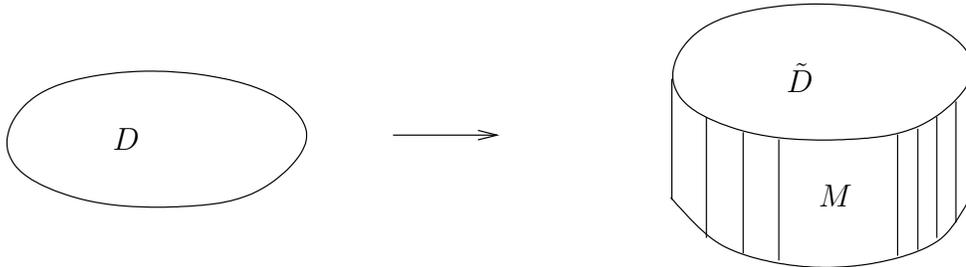
Man beachte, dass diese Vektoren nur in Punkten definiert sind, in denen  $X$  stetig differenzierbar ist. Auf  $D$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$V = (V_1, V_2)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

gegeben. Wir bilden aus  $D$  den räumlichen Bereich

$$\tilde{D} := D \times [0, 1] = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, x_3 \in [0, 1]\},$$

d.h.  $\tilde{D}$  ist eine Scheibe (= ein Zylinder) der Dicke 1, bei dem Boden und Deckel die Form von  $D$  haben. Offenbar ist  $\tilde{D}$  ein Normalbereich im  $\mathbb{R}^3$ .



Außerdem setzen wir  $V$  auf  $\tilde{D}$  fort und erweitern es um eine Komponente:

$$\tilde{V} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{V}(x_1, x_2, x_3) := (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2), 0)^T.$$

Der Gaußsche Integralsatz (17.4), angewandt auf  $\tilde{D}$  und  $\tilde{V}$ , liefert

$$\iint_{\partial\tilde{D}} \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \quad (17.7)$$

Beim Flächenintegral auf der linken Seite heben sich die Anteile des Bodens und des Deckels weg, da die zugehörigen Normalenvektoren entgegengesetzt sind, sonst jedoch alles gleich ist (insbesondere ist  $\tilde{V}(x_1, x_2, 0) = \tilde{V}(x_1, x_2, 1)$ ). Es verbleibt also nur das Integral über die Mantelfläche  $M = \partial D \times [0, 1]$ . Aus (17.7) folgt somit

$$\iint_M \tilde{V} \cdot N \, d\sigma = \iiint_{\tilde{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, dx. \quad (17.8)$$

Die Mantelfläche hat eine Parameterdarstellung

$$F(t, z) = (X_1(t), X_2(t), z)^T \quad \text{mit } (t, z) \in [a, b] \times [0, 1],$$

woraus man den äußeren (aber noch nicht normierten!) Normalenvektor im Punkt  $F(t, z)$

$$n(F(t, z)) = (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t), 0)^T$$

erhält. Mit (16.11) erhalten wir für die linke Seite von (17.8)

$$\begin{aligned}
\iint_M \tilde{V} \cdot N \, d\sigma &= \iint_M \tilde{V} \cdot n \frac{1}{\|n\|} \, d\sigma \\
&\stackrel{(16.11)}{=} \iint_{[a,b] \times [0,1]} \tilde{V}(F(t,z)) \cdot n(F(t,z)) \, d(t,z) \\
&= \int_0^1 \int_a^b V(X(t)) \cdot (\dot{X}_2(t), -\dot{X}_1(t)) \, dt \, dz \\
&= \int_a^b \left( V_1(X(t)) \dot{X}_2(t) - V_2(X(t)) \dot{X}_1(t) \right) \, dt,
\end{aligned}$$

während auf der rechten Seite von (17.8)

$$\operatorname{div} \tilde{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \operatorname{div} V$$

ist. Daher ist

$$\iint_{\bar{D}} \operatorname{div} \tilde{V} \, d(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 \iint_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2) \, dx_3 = \iint_D \operatorname{div} V \, d(x_1, x_2).$$

Zusammengefaßt erhalten wir

**Satz 17.5 (Gaußscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ )** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich (bzgl. der  $x_1$ - und der  $x_2$ -Achse), dessen Rand  $\partial D$  durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert wird, der  $D$  positiv umläuft. Weiter sei  $V = (V_1, V_2)^T : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_a^b \left( V_1(X(t)) \dot{X}_2(t) - V_2(X(t)) \dot{X}_1(t) \right) \, dt = \iint_D (\operatorname{div} V)(x) \, dx. \quad (17.9)$$

Man beachte, dass auf der linken Seite von (17.9) ein Wegintegral entlang des Weges  $X$  steht. Nehmen wir die Umbenennung

$$W_1 := V_2, \quad W_2 := -V_1, \quad W := (W_1, W_2)^T$$

vor, so geht nach Multiplikation mit  $-1$  die linke Seite von (17.9) über in

$$\int_a^b \left( W_1(X(t)) \dot{X}_1(t) + W_2(X(t)) \dot{X}_2(t) \right) \, dt,$$

d.h. in das Wegintegral  $\int_{\partial D} W \cdot dX$  über den durch  $X$  parametrisierten Rand von  $D$ , und auf der rechten Seite von (17.9) ist  $-\operatorname{div} V = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2}$  zu ersetzen durch  $\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$ . Man schreibt oft

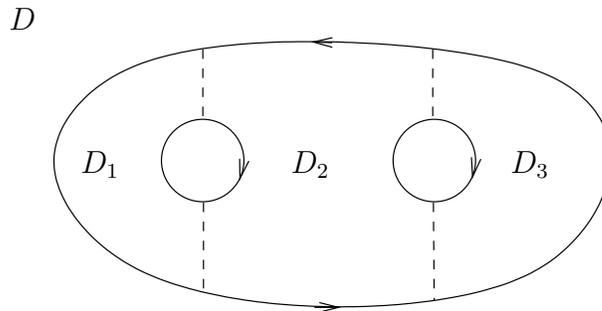
$$\operatorname{rot} W := \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \quad (17.10)$$

und nennt  $\operatorname{rot} W$  die (skalarwertige) *Rotation* des Vektorfeldes  $W$ . Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die folgende Version des Gaußschen Satzes im  $\mathbb{R}^2$ .

**Satz 17.6 (Greenscher Integralsatz)** *Seien  $D$  und  $X$  wie in Satz 17.5, und  $W = (W_1, W_2)^T : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial D} W \cdot dX = \int_D \left( \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_D (\operatorname{rot} W)(x) dx.$$

Die Sätze 17.5 und 17.6 gelten auch unter allgemeineren Bedingungen an die Menge  $D$ . Z.B. darf  $D$  die Abschließung eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebietes sein, dessen Rand sich durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg parametrisieren läßt. Es genügt sogar, dass  $D$  sich in endlich viele derartige Mengen zerlegen läßt.



Man beachte die Orientierung des (aus mehreren Stücken bestehenden) Randes.

#### 17.4 Der Stokessche Integralsatz

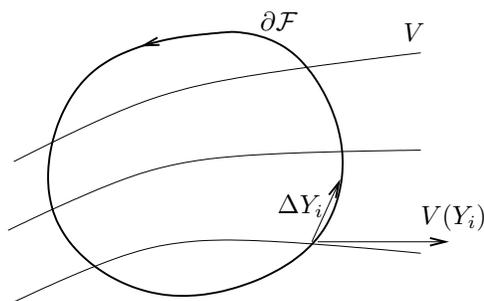
Wir beginnen mit einer kurzen Motivation. Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit deuten. In  $M$  sei ein Flächenstück  $\mathcal{F}$  gegeben, dessen Rand durch einen stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Weg  $Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisiert wird. Unter der *Zirkulation von  $V$  entlang  $\partial \mathcal{F}$*  versteht man das Kurvenintegral

$$\int_{\partial \mathcal{F}} V \cdot dY = \int_a^b \sum_{i=1}^3 V_i(Y(t)) \dot{Y}_i(t) dt. \quad (17.11)$$

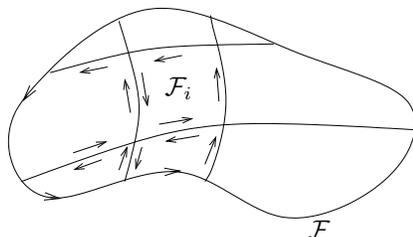
Denkt man sich dieses Integral durch Riemann-Summen

$$\sum_j V(Y_j) \cdot \Delta Y_j$$

approximiert, so entspricht jeder Summand  $V(Y_j) \cdot \Delta Y_j$  einer Geschwindigkeitskomponenten in der Durchlaufrichtung der Kurve. Die Summation dieser Komponenten ist ein Maß dafür, wie stark die Kurve  $\partial\mathcal{F}$  umströmt wird, d.h. wie stark die Flüssigkeit längs der Kurve zirkuliert.



Wir zerlegen das Flächenstück  $\mathcal{F}$  in endlich viele kleine Maschen  $\mathcal{F}_i$ .



Bei entsprechender Orientierung der Ränder der  $\mathcal{F}_i$  erhalten wir für die Zirkulation

$$\int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dY = \sum_i \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY = \sum_i \frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY I(\mathcal{F}_i), \quad (17.12)$$

wobei  $I(\mathcal{F}_i)$  für den Flächeninhalt von  $\mathcal{F}_i$  steht. Nun verfeinern wir die Maschen. Man kann zeigen (vgl. Burg/Haf/Wille IV, S. 156-158): Wenn man eine Masche  $\mathcal{F}_i$  auf einen Punkt  $x_i \in \mathcal{F}$  zusammenzieht, dann strebt der Quotient

$$\frac{1}{I(\mathcal{F}_i)} \int_{\partial\mathcal{F}_i} V \cdot dY \quad (17.13)$$

gegen einen festen Wert, nämlich gegen  $(\text{rot } V)(x_i) \cdot N(x_i)$ . Dieser Ausdruck heißt auch die *Wirbelstärke* von  $V$  in  $x_i$ . Hierbei ist  $N(x_i)$  die gemeinsame Flächennormale der zu  $x_i$  zusammengezogenen Maschen, und  $\text{rot } V$  ist wie folgt erklärt.

**Definition 17.7** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  offen und  $F = (F_1, F_2, F_3)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt das durch

$$(\operatorname{rot} F)(x) = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right)^T$$

definierte Vektorfeld  $\operatorname{rot} F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Rotation von  $F$ .

Man beachte, dass man für ein Vektorfeld der Gestalt

$$F(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2), 0)$$

als Rotation gerade das Vektorfeld  $(0, 0, \operatorname{rot}(F_1, F_2))$  mit der in (17.10) eingeführten Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes erhält. Sind  $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbare Vektorfelder, so gelten offenbar die Regeln

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F + G) &= \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G \\ \operatorname{rot}(\lambda F) &= \lambda \operatorname{rot} F \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für kleine  $\Delta \mathcal{F}_i$  können wir also (17.13) näherungsweise durch

$$(\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i)$$

ersetzen, und aus (17.12) wird

$$\int_{\partial \mathcal{F}} V \cdot dY \approx \sum_i (\operatorname{rot} V)(x_i) \cdot N(x_i) I(\mathcal{F}_i). \quad (17.14)$$

Die rechte Seite ist eine Riemannsumme für das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot N \, d\sigma.$$

Der folgende Satz von Stokes sagt, dass unter geeigneten Voraussetzungen an  $\mathcal{F}$  die Zirkulation  $\int_{\partial \mathcal{F}} V \cdot dY$  tatsächlich gleich diesem Flächenintegral über die Wirbelstärken ist.

**Satz 17.8 (Stokes'scher Integralsatz)** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich, dessen Rand  $\partial D$  durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $X = (X_1, X_2)^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert wird, der  $D$  einmal positiv umläuft. Weiter sei  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, die ein Flächenstück  $\mathcal{F} = F(D)$  parametrisiert. Der Weg  $Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $Y(t) = F(X(t))$  definiert eine orientierte Kurve in  $\mathcal{F}$ , die wir den Rand  $\partial \mathcal{F}$  von  $\mathcal{F}$  nennen. Schließlich sei  $N : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  das durch  $F$  wie in (16.6) festgelegte Normalenfeld. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dY. \quad (17.15)$$

**Beweis** Es genügt, ein Vektorfeld  $H$  vom Typ  $(P, 0, 0)^T$  zu betrachten. Der Beweis für  $H = (0, Q, 0)^T$  und  $H = (0, 0, R)^T$  verläuft analog. Zuerst schreiben wir das Kurvenintegral  $\int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY$  über der Kurve  $\partial\mathcal{F}$  in ein Kurvenintegral über  $\partial D$  um:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{F}} (P, 0, 0)^T \cdot dY &= \int_a^b P(Y(t)) \dot{Y}_1(t) dt \\ &= \int_a^b P(F(X(t))) (F_1 \circ X)'(t) dt \\ &= \int_a^b P(F(X(t))) \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X(t)) \dot{X}_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X(t)) \dot{X}_2(t) \right) dt \\ &= \int_{\partial D} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \cdot dX, \end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile die Kettenregel benutzt haben. Nach Satz 17.6 (Greenscher Integralsatz) ist dieses Integral gleich

$$\int_D \operatorname{rot} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) (x) dx. \quad (17.16)$$

Wir berechnen die skalare (zweidimensionale) Rotation nach (17.10)

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) \\ &= \frac{\partial(P \circ F)}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial(P \circ F)}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + (P \circ F) \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_1} \right), \end{aligned}$$

wobei wir die Produktregel benutzt haben. Der letzte Summand ist nach dem Satz von Schwarz (Satz 13.11) gleich 0. Mit der Kettenregel erhalten wir für die ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \\ &\quad - \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_3} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Sei  $n = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} = \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \times \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right)$ , d.h.  $N = n/\|n\|$  ist der Normaleneinheitsvektor zu  $\mathcal{F}$  (vgl. (16.6)). Nach Definition des Vektorprodukts ist

$$n_2 = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad n_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

und damit zusammengefasst

$$\operatorname{rot} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial P}{\partial x_3} n_2 - \frac{\partial P}{\partial x_2} n_3. \quad (17.17)$$

Wegen  $\operatorname{rot} H = \operatorname{rot} (P, 0, 0)^T = \left( 0, \frac{\partial P}{\partial x_3}, -\frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^T$  können wir (17.17) schreiben als

$$\operatorname{rot} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = ((\operatorname{rot} H) \circ F) \cdot n.$$

Wir setzen dies in (17.16) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} H \cdot dY &= \int_D \operatorname{rot} \left( (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, (P \circ F) \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx \\ &= \int_D ((\operatorname{rot} H) \circ F) \cdot n \, dx \\ &= \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma \end{aligned}$$

nach der Definition 16.6 des Flächenintegrals. ■

**Beispiel 2** Sei  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]\}$ ,  $r > 0$  und

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v).$$

Das Flächenstück  $F(D)$  ist die obere Halbkugelfläche um den Ursprung mit dem Radius  $r$ . Ein Vektorfeld  $H$  sei durch

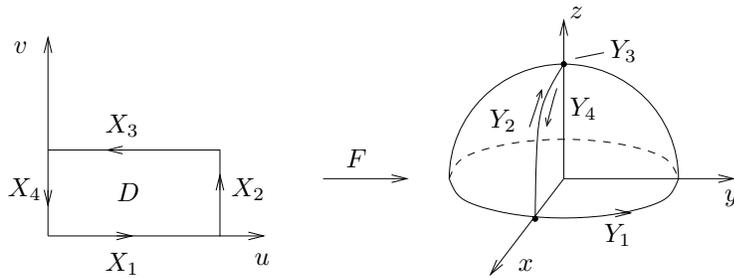
$$H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad H(x, y, z) = (-y, x, 1)$$

gegeben. Der Rand  $\partial D$  des Rechtecks  $D$  läßt sich durch 4 Wege beschreiben:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (t, 0) & \text{mit } t &\in [0, 2\pi], \\ X_2(t) &= (2\pi, t) & \text{mit } t &\in [0, \pi/2], \\ X_3(t) &= (-t, \pi/2) & \text{mit } t &\in [-2\pi, 0], \\ X_4(t) &= (0, -t) & \text{mit } t &\in [-\pi/2, 0]. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Parameterdarstellungen  $Y_k(t) = F(X_k(t))$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , für die Kurve  $\partial F(D)$  sind

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= (r \cos t, r \sin t, 0) & \text{mit } t &\in [0, 2\pi], \\ Y_2(t) &= (r \cos t, 0, r \sin t) & \text{mit } t &\in [0, \pi/2], \\ Y_3(t) &= (0, 0, r) & \text{mit } t &\in [-2\pi, 0], \\ Y_4(t) &= (r \cos t, 0, -r \sin t) & \text{mit } t &\in [-\pi/2, 0]. \end{aligned}$$



(Man beachte, dass  $F(\partial D)$  *nicht* mit der Kreislinie in der  $xy$ -Ebene zusammenfällt!) Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial F(D)} H \cdot dY &= \int_0^{2\pi} H(Y_1(t)) \cdot \dot{Y}_1(t) dt + \int_0^{\pi/2} H(Y_2(t)) \cdot \dot{Y}_2(t) dt \\ &\quad + \int_{-2\pi}^0 H(Y_3(t)) \cdot \dot{Y}_3(t) dt + \int_{-\pi/2}^0 H(Y_4(t)) \cdot \dot{Y}_4(t) dt. \end{aligned}$$

Wir berechnen das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(Y_1(t)) \cdot \dot{Y}_1(t) dt &= \int_0^{2\pi} (-r \sin t, r \cos t, 1) \cdot (-r \sin t, r \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t) dt = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Das dritte Integral ist wegen  $\dot{Y}_3 = 0$  gleich 0, und das zweite und vierte Integral heben sich gegenseitig auf (dies ist auch sofort klar, wenn man sich die Wege  $Y_2, Y_3$  und  $Y_4$  ansieht). Also ist

$$\int_{\partial F(D)} H \cdot dY = 2\pi r^2.$$

Nach dem Satz von Stokes ist dann auch  $\iint_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = 2\pi r^2$ , was wir zur Übung nachrechnen. Zunächst ist  $\operatorname{rot} H = (0, 0, 2)$  und

$$N = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad \text{sowie} \quad \|F_u \times F_v\| = r^2 \cos v$$

nach Beispiel 4 aus Abschnitt 16.1. Damit wird

$$\begin{aligned} \iint_{F(D)} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma &= \iint_D (\operatorname{rot} H)(F(u, v)) \cdot N(u, v) \|F_u \times F_v\| \, d(u, v) \\ &= \iint_D 2 \sin v r^2 \cos v \, d(u, v) \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(2v) \, dv \, du = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

■

Auch der Satz von Stokes läßt sich unter schwächeren Voraussetzungen zeigen (vgl. Burg/Haf/Wille IV, S. 161). Wir vermerken noch eine interessante Konsequenz des Stokes'schen Satzes.

**Folgerung 17.9** Sei  $B$  ein stückweise glatt berandeter Bereich im  $\mathbb{R}^3$  und  $H : B \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar. Dann ist

$$\iint_{\partial B} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = 0.$$

Kurz gesagt: Der Wirbelfluß durch eine geschlossene Fläche ist Null.

Zum Beweis schneidet man einfach aus  $\partial B$  ein kleines geeignetes Flächenstück  $\mathcal{F}$  heraus. Auf der verbleibenden Fläche ist nach Stokes

$$\iint_{\partial B \setminus \mathcal{F}} \operatorname{rot} H \cdot N \, d\sigma = \int_{\partial \mathcal{F}} H \cdot dX.$$

Zieht man  $\mathcal{F}$  auf einen Punkt zusammen, so geht das Integral auf der rechten Seite gegen Null, da die Weglänge von  $\partial \mathcal{F}$  gegen Null strebt. ■

## 17.5 Einige weitere Differential- und Integralformeln

### 17.5.1 Der Nabla-Operator

Der *symbolische* Vektor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  heißt *Nabla-Operator*. Formal rechnet man mit ihm wie mit einem Vektor aus  $\mathbb{R}^3$ . In diesem Sinne ist also für stetig differenzierbare Vektorfelder  $V$  und Skalarfelder  $\varphi$

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \operatorname{grad} \varphi \\ \nabla \cdot F &= \operatorname{div} F \\ \nabla \times F &= \operatorname{rot} F. \end{aligned}$$

Ist das Skalarfeld  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar, so erhält man

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot \operatorname{grad} \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}.$$

Der Operator

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt *Laplace-Operator*.

### 17.5.2 Mehrfache Anwendungen der Differentialoperatoren

Das Vektorfeld  $F$  und das Skalarfeld  $\varphi$  seien zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \quad (17.18)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (17.19)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi. \quad (17.20)$$

Man rechnet dies mit dem Satz von Schwarz leicht nach. Die ersten beiden Formeln besagen: *Wirbelfelder sind divergenzfrei* und *Gradientenfelder sind wirbelfrei*.

### 17.5.3 Produktregeln

Die Vektorfelder  $F, G$  und die Skalarfelder  $\varphi, \psi$  seien stetig differenzierbar. Dann gelten z.B. die folgenden Produktregeln, die man leicht nachrechnet:

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad (17.21)$$

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (17.22)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi F) = \varphi \operatorname{rot} F + \operatorname{grad} \varphi \times F, \quad (17.23)$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G. \quad (17.24)$$

Weitere Beziehungen finden Sie in der Literatur.

### 17.5.4 Die Greenschen Formeln

Es sei  $G$  wie im Gaußschen Integralsatz im Raum (Satz 17.3), und  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  seien so oft stetig differenzierbar, wie es die folgenden Formeln verlangen. Aus Formel (17.22) (mit  $F = \operatorname{grad} g$ ) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g,$$

wobei wir noch (17.20) benutzt haben. Integration über  $G$  und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf der linken Seite liefern

$$\iint_{\partial G} f \operatorname{grad} g \cdot N \, d\sigma = \iiint_G (f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) \, dx$$

mit dem äußeren Normalenvektor  $N$  an  $\partial G$ . Erinnern wir uns noch an die Richtungsableitung

$$\frac{\partial g}{\partial N} = \operatorname{grad} g \cdot N$$

(vgl. Definition 13.17 in Abschnitt 13.5), so gelangen wir zur *ersten Greenschen Integralformel*

$$\iint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial N} d\sigma = \iiint_G (f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dx. \quad (17.25)$$

Vertauscht man hierin  $f$  mit  $g$  und subtrahiert die erhaltene Formel von (17.25), so erhält man die *zweite Greensche Integralformel*

$$\iint_{\partial G} \left( f \frac{\partial g}{\partial N} - g \frac{\partial f}{\partial N} \right) d\sigma = \iiint_G (f \Delta g - g \Delta f) dx. \quad (17.26)$$

Im Spezialfall  $g = -1$  erhalten wir hieraus

$$\iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial N} d\sigma = \iiint_G \Delta f dx. \quad (17.27)$$

Man kann Raumintegrale über Laplacesche Differentialausdrücke  $\Delta f$  also in Flächenintegrale umschreiben. Die Greenschen Formeln sind außerordentlich wichtig beim Studium von partiellen Differentialgleichungen.

## 18 Differentialgleichungen

Mit den Differentialgleichungen haben die Mathematiker ein Werkzeug geschaffen, mit dem die zeitliche Entwicklung zahlreicher System in Natur, Technik und Gesellschaft beschrieben werden kann. Ein zeitabhängiges System, das durch  $N$  reelle Parameter charakterisiert wird, wird zum Zeitpunkt  $t$  durch einen Vektor  $y(t) \in \mathbb{R}^N$  modelliert. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird dann durch den Weg  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  beschrieben. Es ist in der Regel schwierig, diese Wege explizit anzugeben. Die Modellierung des Systems liefert aber oft eine Gleichung der Gestalt

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

oder allgemeiner

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

Dies sind *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, und ihre Lösungen sind Funktionen. Das Wort „gewöhnlich“ bedeutet, dass die gesuchten Funktionen nur von *einer* Veränderlichen (etwa der Zeit  $t$ ) abhängen. Gleichungen, deren Lösungen Funktionen *mehrerer* Veränderlicher sind und die partielle Ableitungen dieser Funktion enthalten, heißen *partielle Differentialgleichungen*. Beispiele dafür sind die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

und die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2}$$

im Raum. Die gesuchte Funktion  $y$  hängt hier von der Zeit  $t$  und den räumlichen Variablen  $x_1, x_2, x_3$  ab. In diesem und den nächsten Kapiteln befassen wir uns ausschließlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen.

### 18.1 Grundbegriffe und Beispiele

Wir sehen uns zunächst einige Beispiele an und legen anschließend den allgemeinen Rahmen fest, in dem wir gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten wollen.

**Beispiel 1: Exponentielles Wachstum** Eine Bakterienpopulation befinde sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit  $t$  die Größe  $y(t)$ . Nach Ablauf der Zeit  $\Delta t$  hat sie sich um  $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$  vermehrt. Eine vernünftige Annahme ist, dass  $\Delta y$  für kleine Zeitspannen proportional zum Ausgangszustand  $y(t)$  und zur Zeitspanne  $\Delta t$  ist:

$$\Delta y = ay(t)\Delta t \quad \text{mit } a > 0.$$

Nehmen wir an, dass  $y$  differenzierbar von  $t$  abhängt, so liefert der Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  in der Differenzengleichung  $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ay(t)$  die Differentialgleichung  $y'(t) = ay(t)$ . Diese Gleichung beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur. Die positiven Lösungen dieser Gleichung kann man wie folgt finden (einen systematischen Zugang zur Lösung derartiger Gleichungen verschaffen wir uns später). Wir schreiben  $\frac{y'(t)}{y(t)} = a$  als

$$\frac{y'}{y} = a \quad \text{bzw.} \quad (\ln y)' = a \quad \text{bzw.} \quad z' = a$$

mit  $z(t) = \ln y(t)$ . Die Lösungen der Gleichung  $z' = a$  können wir sofort angeben:

$$z(t) = at + b \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt

$$y(t) = e^{z(t)} = e^{at+b} = Ce^{at}$$

mit einer Konstanten  $C = e^b > 0$ . Wir finden also eine ganze Schar von Funktionen, die die Gleichung  $y' = ay$  lösen. Kennt man  $y_0 = y(t_0)$  zu einem Zeitpunkt  $t_0$ , so kann man aus  $y_0 = Ce^{at_0}$  die Konstante  $C = e^{-at_0}y_0$  bestimmen und erhält die Lösung

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Die Kenntnis eines *Anfangswertes*  $y_0 = y(t_0)$  macht also aus der unendlichen Lösungsschar eine eindeutig bestimmte Lösung. ■

**Beispiel 2: Logistisches Wachstum** Das exponentielle Wachstumsmodell ist nur begrenzt realistisch. Wird eine Population sehr groß, so treten oft wachstumshemmende Faktoren auf wie endliche Ressourcen. Kann etwa die Population eine Maximalgröße  $K$  nicht überschreiten, so ist es nahe liegend anzunehmen, dass die Zuwachsrates  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  proportional zur Größe  $y(t)$  und auch zum „verbleibenden Spielraum“  $K - y(t)$  ist. Das führt auf die Differentialgleichung

$$y'(t) = by(t)(K - y(t)) = ay(t) - by(t)^2$$

mit  $a = bK$ . Die Gleichung  $y' = ay - by^2$  beschreibt das *logistische Wachstum*. Es handelt sich um eine spezielle *Bernoullische Differentialgleichung*, die wir später ausführlicher betrachten. Im Fall  $0 < y < K$  können wir uns ihre Lösung wie folgt verschaffen. Wir betrachten die Funktion  $z := \frac{K-y}{y} = \frac{K}{y} - 1$ . Für diese ist  $z' = -\frac{Ky'}{y^2}$ . Es ist daher  $y$  genau dann eine Lösung von  $y' = by(K - y)$ , wenn

$$z' = -\frac{K}{y^2}y' = -\frac{K}{y^2}by(K - y) = -bK\frac{K - y}{y} = -bKz = -az.$$

Die Funktion  $z$  genügt also der Differentialgleichung für exponentielles Wachstum. Mit  $z_0 = z(0)$  erhalten wir wie in Beispiel 1 die eindeutige Lösung

$$z(t) = z_0 e^{-bKt},$$

und ist  $y_0 = y(0) \neq 0$ , so ist  $z_0 = \frac{K}{y_0} - 1$ , und wir erhalten mit  $y = \frac{K}{z+1}$

$$y(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-bKt}}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3: Bewegung im Schwerfeld der Erde** Ein Körper der Masse  $m$  befinde sich im Schwerfeld der Erde (Masse  $M$ ). Sein Abstand zum Erdmittelpunkt sei gleich  $s$ . Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt für die Anziehungskraft zwischen diesen Massen

$$K = \gamma \frac{Mm}{s^2} \quad (\gamma\text{-Gravitationskonstante}).$$

Nun beobachten wir eine Bewegung dieses Massepunktes. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei sein Abstand vom Erdmittelpunkt gleich  $s_0$ , und der Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v_0$ . Für  $v_0 > 0$  bewegt er sich weg vom Erdmittelpunkt, und für  $v_0 < 0$  auf den Erdmittelpunkt zu. Nach  $t$  Zeiteinheiten habe er den Abstand  $s(t)$  vom Erdmittelpunkt. Aus dem Newtonschen Kraftgesetz folgt die Differentialgleichung

$$m\ddot{s}(t) = -\gamma \frac{Mm}{s(t)^2}.$$

Wir lösen diese Gleichung später. Dabei werden wir feststellen, dass diese Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt, dass es aber nur eine Lösung gibt, die die *Anfangsbedingungen*

$$s(0) = s_0, \quad \dot{s}(0) = v_0$$

erfüllt. ■

**Definition 18.1** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (18.1)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Eine auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definierte Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine Lösung von (18.1), wenn sie auf  $I$   $n$  mal differenzierbar ist und wenn für alle  $x \in I$  gilt

$$(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in G$$

und

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Man betrachtet auch so genannte *implizite* Differentialgleichungen der Gestalt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Diese sind im Allgemeinen wesentlich schwieriger zu behandeln als die *expliziten* Differentialgleichungen (18.1), die nach der höchsten vorkommenden Ableitung

aufgelöst ist. Wir werden uns ausschließlich mit expliziten Differentialgleichungen befassen.

Die Beispiele 1-3 ordnen sich in diesen Rahmen wie folgt ein. Für das exponentielle Wachstum ist

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = ay,$$

und für das logistische Wachstum

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = by(K - y).$$

In Beispiel 3 könnte man

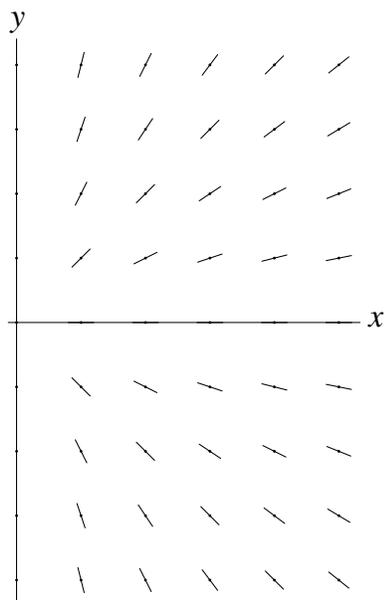
$$G = [0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(t, s, \dot{s}) = -\gamma \frac{M}{s^2}$$

wählen. ■

Über die Lösungsschar einer Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  erster Ordnung kann man sich einen ungefähren geometrischen Überblick verschaffen, indem man das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung zeichnet. Jedem Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  wird ja durch die Differentialgleichung eine Steigung  $f(x_0, y_0)$  zugeordnet. Diese beschreibt die Steigung der Tangente an jede Lösungskurve durch  $(x_0, y_0)$ . Zeichnet man in genügend viele Punkte von  $G$  kleine Striche (Linienelemente) mit den jeweiligen Steigungen, so erhält man das Richtungsfeld und damit ein ungefähres Bild vom Verlauf der Lösungskurven. Für

$$G = (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{y}{x}$$

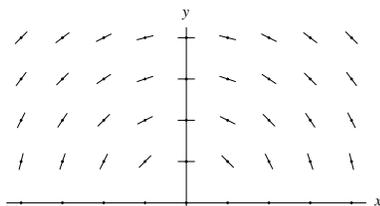
erhält man beispielsweise das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = \frac{y}{x}$ :



Das Bild legt nahe, dass Geraden durch den Nullpunkt, also Funktionen der Gestalt  $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y(x) = ax$  mit  $a \in \mathbb{R}$ , die Differentialgleichung lösen. Tatsächlich ist

$$y'(x) = a = \frac{y(x)}{x} = f(x, y(x)) \quad \text{für alle } x > 0.$$

Für  $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  und  $f(x, y) = -\frac{x}{y}$  erhält man die Differentialgleichung  $y' = -\frac{x}{y}$  mit dem Richtungsfeld



Tatsächlich sind Lösungen von  $y' = -\frac{x}{y}$  durch die „Halbkreisurven“

$$y : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{mit } c > 0$$

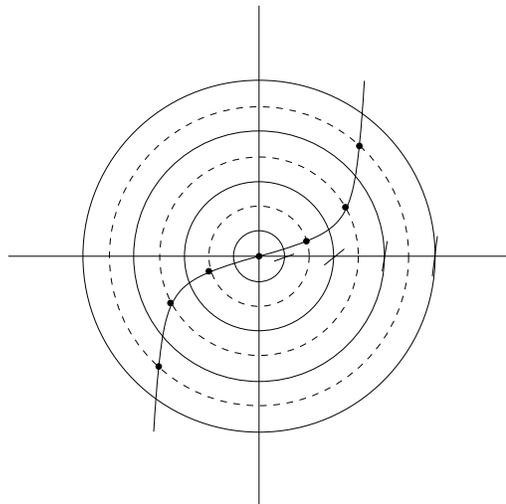
gegeben:

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)} = f(x, y(x)). \quad \blacksquare$$

Hilfreich bei der näherungsweisen Konstruktion von Lösungen sind auch die *Isoklinen* der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ . Das sind die Höhenlinien der Funktion  $f$ , d.h. die durch die Gleichungen

$$f(x, y) = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

gegebenen Kurven in  $\mathbb{R}^2$ . Für  $y' = f(x, y) = x^2 + y^2$  erhält man beispielsweise konzentrische Kreise um den Nullpunkt als Isoklinen.



Zeichnet man eine genügend große Anzahl von Isoklinen und skizziert zwischen diesen noch die Mittellinien, so kann man die Lösungskurven der Differentialgleichung angenähert durch Polygonzüge mit Ecken auf den Mittellinien darstellen.

## 18.2 Elementare Lösungsmethoden

Wir betrachten nun einige spezielle Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungen auf elementarem Weg bestimmt werden können.

### 18.2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann heißt

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad (x, y) \in G := I \times J \quad (18.2)$$

eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

**Satz 18.2** Sei  $(x_0, y_0) \in I \times J$  und  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in J$ . Wir definieren Funktionen  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt \quad \text{und} \quad H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt.$$

Weiter sei  $I' \subseteq I$  ein Intervall mit  $x_0 \in I'$  und  $F(I') \subseteq H(J)$ . Dann existiert genau eine Lösung  $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung (18.2) mit  $y(x_0) = y_0$ . Diese Lösung erfüllt die Gleichung

$$H(y(x)) = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'. \quad (18.3)$$

Formal kann man wie folgt vorgehen: Man schreibt (18.2) als  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , trennt die Veränderlichen:  $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$  und integriert

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Sind  $H(y)$  und  $F(x)$  Stammfunktionen von  $\frac{1}{g(y)}$  und  $f(x)$ , so erhalten wir die Lösung von (18.2) in impliziter Form  $H(y) = F(x) + c$ . Diese Gleichung (bzw. die Gleichung (18.3)) versucht man noch nach  $y$  umzustellen, um die Lösung in expliziter Form zu erhalten. Satz 18.2 gibt diesem formalen Vorgehen einen präzisen Sinn.

**Beispiel 4** Für die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{auf} \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ist  $f(x) \equiv 1$  und  $g(y) = 1 + y^2$ , und wir erhalten mit Satz 18.2 für die Anfangsdaten  $y(x_0) = y_0$  die Funktionen

$$F(x) = \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \quad \text{und} \quad H(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{1+t^2} = \arctan y - \arctan y_0.$$

Aus

$$H(y(x)) = \arctan y(x) - \arctan y_0 \stackrel{!}{=} x - x_0 = F(x)$$

folgt mit  $c := \arctan y_0$  die Lösung

$$y(x) = \tan(x - x_0 + c).$$

Man sieht, dass sich die Lösung  $y$  mit dem Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  nicht über das offene Intervall  $(-\frac{\pi}{2} + x_0 - c, \frac{\pi}{2} + x_0 - c)$  hinaus fortsetzen läßt (obwohl  $f$  und  $g$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert waren). ■

**Beispiel 5** Wir suchen eine Lösung  $y$  der Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = c. \tag{18.4}$$

Für  $c = 0$  ist die konstante Funktion  $y(x) = 0$  für  $x \in \mathbb{R}$  eine Lösung. Sei  $c > 0$ . Dann ist  $J = (0, \infty)$  ein geeignetes Intervall mit  $g(y) = y^2 \neq 0$  für alle  $y \in J$ . Wir benutzen also Satz 18.2 mit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y^2$$

und erhalten

$$F(x) = \int_0^x dt = x \quad \text{sowie} \quad H(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_c^y = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}.$$

Aus

$$H(y(x)) = \frac{1}{c} - \frac{1}{y(x)} \stackrel{!}{=} x = F(x)$$

folgt durch Umstellen

$$y(x) = \frac{c}{1 - cx}.$$

Das ist eine Lösung von (18.4) auf  $(-\infty, \frac{1}{c})$  im Fall  $c > 0$ . Analog ergibt sich für  $c < 0$  die Lösung  $y(x) = \frac{c}{1 - cx}$  auf  $(\frac{1}{c}, \infty)$ . ■

### 18.2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{18.5}$$

eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Das Wort *linear* lässt sich so verstehen: Erklärt man einen Operator  $A$  auf dem linearen Raum der differenzierbaren Funktionen auf  $I$  durch  $Ay := y' - ay$ , so kann man (18.5) schreiben als  $Ay = b$ , und der Operator  $A$  ist *linear*, d.h. für differenzierbare Funktionen  $y_1$  und  $y_2$  und reelle Zahlen  $c_1, c_2$  gilt

$$\begin{aligned} A(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)' - a(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1' - ay_1) + c_2(y_2' - ay_2) = c_1Ay_1 + c_2Ay_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (18.5) heißt *homogen*, wenn  $b$  die Nullfunktion ist, und sonst *inhomogen*. Wir beschäftigen uns zuerst mit der homogenen Gleichung

$$y' = a(x)y. \quad (18.6)$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

**Satz 18.3** Seien  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$ , und sei  $a$  stetig auf  $I$ . Dann gibt es genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung (18.6) mit  $y(x_0) = c$ , und zwar

$$y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right). \quad (18.7)$$

Dass (18.7) eine Lösung ist, sieht man sofort durch Einsetzen:

$$y'(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \cdot a(x) = a(x)y(x).$$

Wir lernen später einen Satz kennen, der uns die Eindeutigkeit garantiert.

**Beispiel 6** Die Lösungen  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung  $y' = 2kxy$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und der Anfangsbedingung  $y(x_0) = c$  haben die Gestalt

$$y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x 2kt dt\right) = ce^{k(x^2 - x_0^2)}. \quad \blacksquare$$

Eine Möglichkeit zur Lösung der inhomogenen Gleichung (18.5) bietet die Methode der *Variation der Konstanten*. Wir wissen, dass die Lösung der zur Gleichung  $y' = ay + b$  gehörenden homogenen Gleichung  $y' = ay$  gegeben ist durch

$$y(x) = ce^{P(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Wir suchen eine Lösung  $y$  der inhomogenen Gleichung  $y' = ay + b$  in der Form

$$y(x) = c(x) e^{P(x)}, \quad (18.8)$$

d.h. wir haben die Konstante  $c$  zu einer Funktion  $x \mapsto c(x)$  gemacht (wir haben die Konstante variiert). Geht man mit dem Ansatz (18.8) in die inhomogene Gleichung, so erhält man eine Gleichung für  $c'(x)$ , aus der man  $c(x)$  durch Integration bestimmen kann.

**Satz 18.4** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem  $x_0 \in I$  und  $c \in \mathbb{R}$  genau eine Lösung  $y$  der Gleichung  $y' = a(x)y + b(x)$  mit  $y(x_0) = c$ , nämlich

$$y(x) = e^{P(x)} \left( c + \int_{x_0}^x b(t)e^{-P(t)} dt \right) \quad \text{mit } P(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt. \quad (18.9)$$

**Beispiel 7** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3 \quad \text{auf } G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Es ist also  $a(x) = 2x$  und  $b(x) = x^3$ . Die homogene Gleichung  $y' = 2xy$  hat die Lösungen

$$y(x) = c \exp \left( \int_0^x 2t dt \right) = c e^{x^2} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Nach Satz 18.4 ist die Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung  $y(0) = c$  gleich

$$y(x) = e^{x^2} \left( c + \int_0^x t^3 e^{-t^2} dt \right).$$

Das vorkommende Integral berechnet man mit der Substitution  $s = t^2$  und mit anschließender partieller Integration. Die Lösung der Ausgangsgleichung ist dann

$$y(x) = c e^{x^2} + \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1).$$

Wir sehen uns noch den Rechnungsablauf an, wenn man in  $y(x) = c e^{x^2}$  die Konstante  $c$  variiert (und nicht auf die Lösungsdarstellung (18.9) zurückgreift). Wir setzen  $y(x) = c(x)e^{x^2}$  in die Ausgangsgleichung ein:

$$y'(x) = c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2} \stackrel{!}{=} 2x c(x)e^{x^2} + x^3 = 2xy + x^3.$$

Hieraus folgt

$$c'(x) = x^3 e^{-x^2}$$

(man beachte, dass die Funktion  $c$  selbst nicht mehr explizit auftritt), und die Integration von  $c'(x)$  führt genau auf das oben bestimmte Integral. ■

Wir schreiben die Lösung (18.9) in der Form

$$y(x) = c e^{P(x)} + e^{P(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{-P(t)} dt. \quad (18.10)$$

Der erste Summand  $y_h(x) := c e^{P(x)}$  beschreibt die *allgemeine Lösung der homogenen Gleichung*  $y' = ay$ , während der zweite Summand in (18.10)  $y_0(x) := e^{P(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{-P(t)} dt$  eine *spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung*  $y' = ay + b$  ist (die man für  $c = 0$  aus (18.10) erhält). Die *allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung* ist also gleich  $y(x) = y_0(x) + y_h(x)$ .

**Satz 18.5** Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $y' = ay + b$  hat die Form

$$y'(x) = y_0(x) + y_h(x),$$

wobei  $y_0$  eine (beliebige) spezielle Lösung der Gleichung  $y' = ay + b$  und  $y_h$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $y' = ay$  ist.

Vergleichen Sie dieses Resultat mit Ihnen bekannten Aussagen über die Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme! Satz 18.5 gilt analog für alle linearen Differentialgleichungen.

### 18.2.3 Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{auf} \quad G := \{(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : \frac{y}{x} \in I\} \quad (18.11)$$

eine *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*. Wir führen eine neue Funktion  $z(x) := \frac{y(x)}{x}$  ein. Dann ist  $y(x) = xz(x)$  und  $y'(x) = xz'(x) + z(x)$ , und wir erhalten aus (18.11)  $xz'(x) + z(x) = f(z)$  bzw.

$$xz' = f(z) - z. \quad (18.12)$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Falls  $f(z) \neq z$  für alle  $z$  aus einem geeigneten Intervall ist, kann man (18.12) wie in Abschnitt 18.2.1 lösen. Aus der Lösung  $z$  von (18.12) erhält man schließlich die Lösung  $y(x) = xz(x)$  von (18.11).

**Beispiel 8** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \text{auf} \quad G := (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Durch die Substitution  $z = y/x$  geht sie über in die Gleichung

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)$$

mit getrennten Veränderlichen. Hier ist  $f(z) - z = 1 + z^2 \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ . Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung  $z(x_0) = z_0 = y_0/x_0$  ist nach (18.3) gegeben durch

$$\arctan z - \arctan z_0 = \int_{z_0}^z \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{!}{=} \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

d.h. es ist

$$z(x) = \tan\left(c + \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad c := \arctan z_0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wird also gelöst durch

$$y(x) = x \tan \left( c + \ln \left( \frac{x}{x_0} \right) \right).$$

Variablensubstitutionen wie  $z = y/x$  lassen sich oft bei der Lösung von Differentialgleichungen einsetzen.

### 18.2.4 Bernoullische Differentialgleichungen

Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \quad \text{auf } I \times (0, \infty) \quad (18.13)$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  eine *Bernoullische Differentialgleichung*. Die Fälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$  schließen wir aus, da dann (18.13) eine lineare Differentialgleichung wäre, die wir bereits gelöst haben. Die Substitution  $z(x) := y(x)^{1-\alpha}$  überführt (18.13) in eine lineare Differentialgleichung. Aus  $z = y^{1-\alpha}$  und  $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$  folgt nämlich

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} z' = az^{\frac{1}{1-\alpha}} + bz^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = ay + by^\alpha$$

bzw.

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x).$$

Diese Gleichung löst man wie in Abschnitt 18.2.2, und aus der Lösung  $z$  erhält man die Lösung  $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$  der Bernoulli-Gleichung (18.13).

**Beispiel 9** Für die Differentialgleichung  $y' = -\frac{1}{x}y + x^2y^2$  ist  $\alpha = 2$ ,  $a(x) = -\frac{1}{x}$  und  $b(x) = x^2$ . Die Substitution  $z = y^{-1}$  führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}z - x^2$$

mit der allgemeinen Lösung

$$z(x) = \frac{x}{2}(c - x^2), \quad c \in \mathbb{R},$$

nach Satz 18.4. Die Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \frac{2}{x(c - x^2)}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Auf eine Bernoulli-Gleichung kann z.B. die Lösung der *Riccati-Gleichung*

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$$

zurückgeführt werden, sofern man eine spezielle Lösung dieser Gleichung kennt (vgl. Arbeitsbuch II, Satz 2.4).

### 18.2.5 Exakte Differentialgleichungen

Ist die differenzierbare Funktion  $y$  implizit durch eine Gleichung  $u(x, y(x)) = c$  gegeben, so ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} u(x, y(x)) = u_x(x, y(x)) \cdot 1 + u_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0.$$

Die Funktion  $y$  erfüllt also die Differentialgleichung

$$u_x(x, y) + u_y(x, y)y' = 0.$$

**Definition 18.6** Sei  $R$  ein offenes und achsenparalleles Rechteck im  $\mathbb{R}^2$ . Eine Differentialgleichung der Form

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad (x, y) \in R, \quad (18.14)$$

mit stetig partiell differenzierbaren Funktionen  $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$  heißt exakt, wenn es eine partiell differenzierbare Funktion  $u : R \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$u_x(x, y) = f(x, y) \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = g(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in R.$$

Ist die Gleichung (18.14) exakt, so genügen ihre Lösungen  $y$  einer Gleichung  $u(x, y) = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , die man unter Umständen nach  $y$  umstellen kann. Zur Lösung von Gleichungen wie (18.14) benötigt man also ein möglichst einfaches Kriterium zur Überprüfung der Exaktheit und eine Methode zur Berechnung der Funktion  $u$ . Beides kennen wir aus Kapitel 14, denn die in Definition 18.6 formulierten Bedingungen bedeuten nichts anderes, als dass  $u$  ein Potential für das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))^T$  ist.

**Satz 18.7** Die Differentialgleichung (18.14) ist genau dann exakt auf  $R$ , wenn die Integrabilitätsbedingung

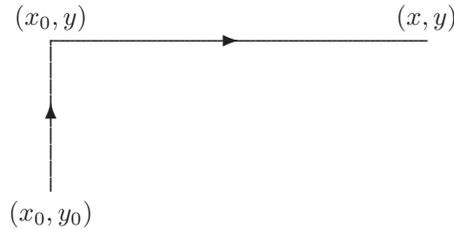
$$f_y(x, y) = g_x(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in R \quad (18.15)$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist die Lösung  $y$  von (18.14) mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  (wobei  $(x_0, y_0) \in R$ ) implizit durch die Gleichung  $u(x, y) = 0$  mit

$$u(x, y) := \int_{x_0}^x f(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y g(x_0, \eta) d\eta \quad (18.16)$$

gegeben. Die allgemeine Lösung von (18.14) wird durch die Gleichungen  $u(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , beschrieben.

In (18.16) haben wir über einen speziellen Weg von  $(x_0, y_0)$  nach  $(x, y)$  integriert:



Man kann  $u$  auch wie in Kapitel 14 bestimmen, indem man  $u_x = f$  nach  $x$  integriert und das Ergebnis nach  $y$  ableitet und gleich  $g$  setzt. Die Gleichung (18.14) wird oft auch in der symmetrischen Form

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$$

geschrieben.

**Beispiel 10** Die Differentialgleichung

$$x + y^2 + (2xy - 1)y' = 0$$

ist von der Form (18.14) mit  $f(x, y) = x + y^2$  und  $g(x, y) = 2xy - 1$ . Wegen

$$f_y(x, y) = 2y \quad \text{und} \quad g_x(x, y) = 2y$$

ist diese Gleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  exakt. Zur Berechnung von  $u$  verwenden wir Formel (18.16) mit  $x_0 = y_0 = 0$  und erhalten

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x (\xi + y^2) d\xi + \int_0^y (-1) d\eta \\ &= \frac{\xi^2}{2} + y^2 \xi \Big|_0^x - \eta \Big|_0^y = \frac{x^2}{2} + xy^2 - y. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösung  $y$  der Ausgangsgleichung in impliziter Form

$$\frac{x^2}{2} + xy^2 - y = c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Ist die Gleichung (18.14) nicht exakt, so gelingt es mitunter, durch Multiplikation der Gleichung mit einer geeigneten Funktion  $\mu : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine exakte Differentialgleichung zu gewinnen. Die zu befriedigende Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu f) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu g)$$

liefert eine partielle Differentialgleichung für  $\mu$ :

$$g\mu_x - f\mu_y = (f_y - g_x)\mu. \quad (18.17)$$

Wir benötigen jedoch nicht alle Lösungen dieser Gleichung, sondern nur eine einzige mit  $\mu(x, y) \neq 0$  auf  $R$ . Einen solchen *integrierenden Faktor*  $\mu$  zu finden ist oft nicht so schwierig wie die komplette Lösung von (18.17).

**Beispiel 11** Die Differentialgleichung in symmetrischer Form

$$xy^3 dx + (1 + 2x^2 y^2) dy = 0$$

ist wegen

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}(xy^3) = 3xy^2 \quad \text{und} \quad g_x(x, y) = \frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y^2) = 4xy^2$$

nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor  $\mu$ . Die partielle Differentialgleichung (18.17) lautet in diesem Fall

$$(1 + 2x^2 y^2)\mu_x - xy^3 \mu_y = -xy^2 \mu.$$

Wir versuchen, eine *nur von  $y$  abhängende* Funktion  $\mu$  zu finden, die diese Gleichung erfüllt. Wegen  $\mu_x = 0$  ist dann

$$-xy^3 \mu_y = -xy^2 \mu \quad \text{bzw.} \quad y\mu_y = \mu \quad \text{auf } (0, \infty).$$

Diese lineare Gleichung hat als eine Lösung die Funktion  $\mu(y) = y$ . Das ist der gesuchte integrierende Faktor. Die Differentialgleichung

$$xy^4 dx + (y + 2x^2 y^3) dy = 0$$

ist exakt und kann wie im Beispiel 10 gelöst werden. Ihre Lösungen sind in impliziter Form gegeben durch

$$(x^2 y^2 + 1)y^2 = c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

### 18.2.6 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

In der Physik tritt die Differentialgleichung  $y'' = f(y)$  auf als eindimensionale Bewegungsgleichung eines Punktes, der einer nur vom Ort abhängigen Kraft ausgesetzt ist (vgl. Beispiel 3). Wir schreiben daher  $(t, x)$  statt  $(x, y)$  und  $\dot{x}$  statt  $y'$  und betrachten für ein Intervall  $I$  und eine stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f(x) \quad \text{auf } \mathbb{R} \times I. \quad (18.18)$$

Wir definieren eine Funktion  $U : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$U(x) := - \int_a^x f(t) dt$$

mit einem beliebig gewählten  $a \in I$ . Die Funktion  $U$  hat die physikalische Bedeutung einer potentiellen Energie. Die Gleichung (18.18) geht dann über in

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x).$$

Die Gesamtenergie des Massepunktes zum Zeitpunkt  $t$  wird gegeben durch

$$E(t) := \frac{1}{2} \dot{x}(t)^2 + U(x(t)). \quad (18.19)$$

Für die Ableitung dieser Funktion ergibt sich

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t) \ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t)) \dot{x}(t) = \dot{x}(t) \left( \ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t)) \right) = 0.$$

Also ist  $E$  eine konstante Funktion (Energieerhaltungssatz), und wir können  $E$  als reelle Zahl betrachten. Wegen (18.19) genügt die Bewegung dann der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t)^2 = 2(E - U(x(t))).$$

Ist  $\dot{x}(t) \geq 0$ , so folgt hieraus

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))},$$

und für  $\dot{x}(t) \leq 0$  hat man

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2(E - U(x(t)))}.$$

Dies sind aber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. Nach diesen Überlegungen kann man Beispiel 3 versuchen zu lösen. Details finden Sie in Arbeitsbuch II, S. 34–35.

### 18.2.7 Die Differentialgleichung $y'' = f(y, y')$

In diesen Gleichungen tritt die unabhängige Veränderliche  $x$  nicht direkt auf. Hier kommt man unter Umständen zum Ziel, wenn man nicht  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  sondern  $x$  in Abhängigkeit von  $y$  sucht (Variablentausch). Die Umkehrfunktion existiert, wenn  $y$  stetig differenzierbar mit einer von Null verschiedenen Ableitung ist. Gilt in den Anfangsbedingungen  $y(x_0) = \alpha_0$  und  $y'(x_0) = \alpha_1$  etwa  $\alpha_1 \neq 0$ , so ist dies in einer Umgebung von  $x_0$  gewährleistet, und es ist dort (vgl. Satz 4.5)

$$x'(y) = \frac{dx(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy(x)}{dx}} = \frac{1}{y'(x(y))}.$$

Für die zweite Ableitung erhält man mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} x''(y) &= \frac{d}{dy} (x'(y)) = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{y'(x(y))} \right) = -\frac{1}{y'(x)^2} \frac{d}{dy} (y'(x(y))) \\ &= -\frac{1}{y'(x)^2} y''(x) \cdot \frac{1}{y'(x)} = -x'(y)^3 y''(x). \end{aligned}$$

Ist  $y$  also eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = f(y, y') \quad \text{mit} \quad y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1,$$

so ist die Umkehrfunktion  $x = x(y)$  eine Lösung von

$$x'' = -(x')^3 f\left(y, \frac{1}{x'}\right), \quad x(\alpha_0) = x_0, \quad x'(\alpha_0) = \frac{1}{\alpha_1}. \quad (18.20)$$

Wir sehen, dass die Funktion  $x = x(y)$  nicht direkt auftritt, sondern nur ihre Ableitungen  $x'$  und  $x''$ . Die Gleichung (18.20) ist also von der Gestalt

$$x'' = g(t, x'), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad (18.21)$$

wobei wir die unabhängige Variable mit  $t$  bezeichnet haben. Durch die Substitution  $x' = z$  geht (18.21) über in die Gleichung erster Ordnung

$$z' = g(t, z) \quad \text{mit} \quad z(t_0) = x_1,$$

die man versucht, mit den Methoden aus 18.2.1 – 18.2.5 zu lösen. Aus der Lösung erhält man die Lösung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t z(t) dt$$

von (18.21).

**Beispiel 12** Das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

geht durch Variablentausch in das transformierte Problem

$$x'' = -(x')^3 \left( -\frac{1}{(x')^2} \cdot \frac{1}{y} \right) = \frac{x'}{y}, \quad x(3) = 0, \quad x'(3) = 1$$

über.

Mit  $x' = z$  erhalten wir das Anfangswertproblem erster Ordnung

$$z' = \frac{z}{y} \quad \text{mit} \quad z(3) = 1$$

für  $z$ . Seine Lösung  $z(y) = y/3$  findet man z.B. durch Trennung der Veränderlichen. Wegen  $x(3) = 0$  ist

$$x(y) = 0 + \int_3^y \frac{t}{3} dt = \frac{y^2 - 9}{6}.$$

In einer Umgebung von 0 ist  $y$  positiv. Daher ist

$$y(x) = \sqrt{6x + 9}$$

die Lösung des Ausgangsproblems. Diese Funktion ist für  $x \geq -3/2$  definiert und streng monoton wachsend. ■

### 18.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

In diesem Abschnitt behandeln wir die Frage nach der Existenz und der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung des expliziten *Anfangswertproblems erster Ordnung*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0. \quad (18.22)$$

Für  $a, b > 0$  und  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  sei

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

das achsenparallele Rechteck mit dem Mittelpunkt  $(x_0, y_0)$  und den Seitenlängen  $2a$  und  $2b$ . Weiter sei  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir setzen

$$M := \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)| \quad \text{und} \quad \varepsilon := \begin{cases} \min\{a, \frac{b}{M}\}, & \text{falls } M > 0, \\ a & \text{falls } M = 0. \end{cases}$$

Das Maximum existiert, da die Funktion  $|f|$  auf der beschränkten und abgeschlossenen Menge  $R$  stetig ist.

**Satz 18.8 (Existenzsatz von Peano)** *Ist  $f$  stetig auf  $R$ , so besitzt das Anfangswertproblem (18.22) mindestens eine Lösung  $y$  auf dem Intervall  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ .*

Lösungen gibt es also bereits unter recht schwachen Voraussetzungen an  $f$ . Sie sind jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 13** Sei  $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$  für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dann sind  $y(x) \equiv 0$  und  $y(x) = x^3$  Lösungen der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ , die beide die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$  erfüllen. Darüber hinaus ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  auch  $y_c(x) := (x - c)^3$  eine Lösung von  $y' = f(x, y)$ , und man kann aus diesen Lösungen weitere Lösungen „zusammensetzen“. So sind für  $c < d$  auch die Funktionen

$$y_{c,d}(x) := \begin{cases} (x - c)^3 & \text{für } x \leq c \\ 0 & \text{für } c < x \leq d \\ (x - d)^3 & \text{für } d < x \end{cases}$$

Lösungen von  $y' = f(x, y)$ , und diese erfüllen für  $c \leq 0 \leq d$  ebenfalls die Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ . ■

Eine Bedingung an  $f$ , die die Eindeutigkeit der Lösung erzwingt, wird in der folgenden Definition beschrieben.

**Definition 18.9** Die Funktion  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf dem Rechteck  $R$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ , wenn es eine Konstante  $L$  gibt mit

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in R. \quad (18.23)$$

Diese Ungleichung heißt Lipschitzbedingung für  $f$  auf  $R$ , und  $L$  heißt eine Lipschitz-Konstante für  $f$  auf  $R$ .

Der folgende Satz erleichtert in vielen Fällen das Überprüfen der Lipschitzbedingung.

**Satz 18.10** Die Funktion  $f$  besitze auf  $R$  eine stetige partielle Ableitung nach  $y$ . Dann ist  $f$  auf  $R$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ , und eine Lipschitzkonstante ist durch

$$L := \max_{(x,y) \in R} |f_y(x, y)|$$

gegeben.

Dies ist eine einfache Konsequenz des Mittelwertsatzes, nach dem es ein  $\eta$  im Intervall  $(y_1, y_2)$  mit

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} = f_y(x, \eta)$$

gibt. Folglich ist

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |f_y(x, \eta)| |y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 14** Die Funktion  $f(x, y) = x^3 \sin y$  erfüllt auf jedem Rechteck  $R$  eine Lipschitzbedingung nach Satz 18.10. Auch die Funktion  $f(x, y) = |y|$  erfüllt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

auf ganz  $\mathbb{R}^2$  eine Lipschitzbedingung mit  $L = 1$ , obwohl sie für  $y = 0$  nicht partiell nach  $y$  differenzierbar ist. Dagegen ist die Funktion  $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$  aus Beispiel 13 auf keiner Umgebung von  $(0, 0)$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ , denn

$$y \mapsto \frac{|f(0, y) - f(0, 0)|}{|y - 0|} = 3 \left| \frac{y^{2/3}}{y} \right| = 3|y^{-1/3}|$$

ist auf jeder Umgebung von 0 unbeschränkt. ■

**Satz 18.11 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf)**

Seien  $a, b, x_0, y_0$  und  $R$  sowie  $f, M$  und  $\varepsilon$  wie oben. Die Funktion  $f$  sei auf  $G$  stetig und genüge auf  $G$  außerdem einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Dann gilt:

- a) auf  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  existiert eine Lösung der Anfangswertaufgabe (18.22), und diese ist eindeutig bestimmt.
- b) Diese Lösung kann iterativ mit dem folgenden Verfahren gewonnen werden: Man startet mit einer auf  $J := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  stetigen Funktion  $u_0$  mit

$$|u_0(x) - y_0| \leq b \quad \text{für alle } x \in J$$

(z.B. kann man die konstante Funktion  $u_0(x) = y_0$  wählen) und berechnet für  $n = 1, 2, \dots$  nacheinander die Funktionen

$$u_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt, \quad x \in J. \quad (18.24)$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge  $(u_n)$  gleichmäßig auf  $J$  gegen die Lösung  $y$  von (18.22).

- c) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\max_{t \in J} |u_n(t) - y(t)| \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} e^{\varepsilon L} \cdot \max_{t \in J} |u_0(t) - u_1(t)|. \quad (18.25)$$

Dieser Satz ist außerordentlich nützlich. Er liefert nicht nur ein einfaches Kriterium für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf einem (leicht berechenbaren) Intervall, sondern darüber hinaus eine effektive Methode der näherungsweise Berechnung der Lösung. Die Iterationsvorschrift (18.24) kann man sich so erklären. Ist  $y$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so erhält man durch Integration

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

und wegen

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = y(t) \Big|_{x_0}^x = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

die Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (18.26)$$

Jede Lösung von (18.22) löst also auch die Integralgleichung (18.26). Ist umgekehrt  $y$  eine stetige Lösung von (18.26), so ist  $y$  automatisch differenzierbar (warum?). Man kann (18.26) also differenzieren und stellt fest, dass  $y$  auch das Anfangswertproblem (18.22) löst. In diesem Sinn sind (18.22) und (18.26) zueinander äquivalent. Der Vorteil der Beschreibung (18.26) liegt im folgenden. Man

fasst die rechte Seite von (18.26) als eine Vorschrift (einen Operator)  $A$  auf, der der Funktion  $y$  die Funktion  $Ay$  mit

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

zuordnet. Gleichung (18.26) kann damit geschrieben werden als  $Ay = y$ , d.h. man sucht eine Funktion, die durch  $A$  auf sich selbst abgebildet wird oder die ein *Fixpunkt* von  $A$  ist. Es gibt eine Reihe von Sätzen, die Aussagen über die Existenz von Fixpunkten machen. Einer dieser Sätze, der *Banachsche Fixpunktsatz*, liefert bei Anwendung auf (18.26) genau den Satz 18.11.

**Beispiel 15** Wir betrachten die Differentialgleichung  $y' = 2xy$  mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ . Auf  $R = [-1, 1] \times [0, 2]$  ist die Funktion  $f(x, y) := 2xy$  stetig, es ist

$$M = \max_{(x,y) \in R} |2xy| = 2 \max_{x \in [-1,1]} |x| \max_{y \in [0,2]} |y| = 4,$$

und die Funktion  $f$  erfüllt auf  $R$  eine Lipschitz-Bedingung bzgl.  $y$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2xy_1 - 2xy_2| \leq 2|x| |y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|$$

mit der Lipschitzkonstanten  $L = 2$ . Wir erhalten

$$\varepsilon = \min\left\{1, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}.$$

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert, dass das betrachtete Anfangswertproblem auf  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Wir benutzen die *Picard-Iteration* aus Satz 18.11(b), um diese Lösung näherungsweise zu berechnen. Als Startfunktion wählen wir die konstante Funktion  $y_0(x) = y_0 = 1$ . Dann berechnen wir  $y_1$  aus  $y_1 = Ay_0$ , d.h. aus

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2t \cdot 1 dt = 1 + x^2.$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x 2t y_1(t) dt = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2) dt = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4, \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x 2t y_2(t) dt = 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4) dt \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 \end{aligned}$$

und allgemein

$$y_n(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots + \frac{1}{n!}x^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^{2k}.$$

Diese Funktionen konvergieren auf  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  gleichmäßig gegen die Lösung  $y$  des Anfangswertproblems, und mit Satz (18.10)(c) können wir abschätzen, wie nahe  $y_n$  bei der wahren Lösung liegt. Dazu berechnen wir

$$\max_{x \in [-1/4, 1/4]} |y_0(x) - y_1(x)| = \max_{x \in [-1/4, 1/4]} |x^2| = 1/16$$

und erhalten aus (18.25)

$$\max_{x \in [-1/4, 1/4]} |y_n(x) - y(x)| \leq \frac{(\frac{1}{4} \cdot 2)^n}{n!} e^{\frac{1}{4} \cdot 2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{e}}{2^{n+4} n!} \leq \frac{1}{2^{n+3} n!}.$$

Für  $n = 3$  ist also bereits

$$\max_{x \in [-1/4, 1/4]} |y_3(x) - y(x)| \leq \frac{1}{2^6 \cdot 3!} = \frac{1}{384} \approx 0.0027,$$

d.h. der Graph von  $y$  liegt in einem Schlauch der Breite 0.0027 um den Graphen von  $y_3$ . Man sieht insbesondere, dass die Folge  $(y_n)$  sehr schnell gegen  $y$  konvergiert.

In diesem konkreten Fall kann man die Lösung  $y$  leicht aus den Näherungsfunktionen bestimmen:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^2)^k = e^{x^2},$$

und man rechnet leicht nach, dass diese Funktion für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist. ■

**Beispiel 16** Analog erhält man für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

mit der Startfunktion  $y_0(x) = 0$  die Näherungslösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x (t^2 + 0^2) dt = \frac{1}{3} x^3, \\ y_2(x) &= \int_0^x (t^2 + y_1(t)^2) dt = \int_0^x (t^2 + \frac{t^6}{9}) dt = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7, \\ y_3(x) &= \int_0^x (t^2 + y_2(t)^2) dt = \int_0^x (t^2 + (\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{63} t^7)^2) dt \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7 + \frac{2}{2079} x^{11} + \frac{1}{59535} x^{15}. \end{aligned}$$

■

## 18.4 Potenzreihenansätze

Mit den Potenzreihenansätzen lernen wir eine weitere Methode kennen, mit der sich Anfangswertprobleme wie

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (18.27)$$

lösen lassen, sofern sich die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  in eine konvergente Potenzreihe bzgl.  $x$  und  $y$  entwickeln läßt. In diesem Fall läßt sich auch die Lösung  $y$  von (18.27) in einer Umgebung von  $x_0$  in eine konvergente Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

entwickeln, deren Koeffizienten sukzessive aus der Anfangsbedingung und der Differentialgleichung bestimmt werden können. Berechnet man die Koeffizienten  $a_n$  nur bis zu einer Stelle  $N$ , so erhält man eine Näherungslösung

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$$

von (18.27). Genaue Voraussetzungen und Resultate lassen sich am bequemsten im Komplexen angeben. Sei  $D \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Die Funktion  $f$  heißt *holomorph*, wenn die komplexen Ableitungen  $f_z$  und  $f_w$  auf  $D$  existieren und stetig sind. Dann läßt sich  $f$  auf jeder Menge

$$Z := \left\{ (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z - z_0| \leq a, |w - w_0| \leq b \right\}, \quad (18.28)$$

die komplett in  $D$  liegt, in eine Potenzreihe

$$f(z, w) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (z - z_0)^i (w - w_0)^j$$

entwickeln.

**Satz 18.12 (Existenz und Eindeutigkeitsatz im Komplexen)** *Die Funktion  $f$  sei auf einer offenen und wegzusammenhängenden Menge  $D \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , die die Menge (18.28) enthält, holomorph, und es sei  $|f(z, w)| \leq M$  für  $(z, w) \in Z$ . Dann existiert auf der Kreisscheibe  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$  mit  $\varepsilon = \min\{a, b/M\}$  eine holomorphe Lösung  $w$  des Anfangsproblems*

$$w' = f(z, w) \quad \text{mit} \quad w(z_0) = w_0. \quad (18.29)$$

*Sind  $w_1$  und  $w_2$  Lösungen von (18.29) in einer offenen wegzusammenhängenden Umgebung  $G$  von  $z_0$ , so ist  $w_1 = w_2$  auf  $G$ .*

Wir illustrieren die Anwendung dieses Satzes an einigen Beispielen.

**Beispiel 17** Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad (18.30)$$

ist  $f(z, w) = z^2 + w^2$ , und diese Funktion ist holomorph auf ganz  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ . Wegen  $x_0 = 0$  finden wir eine Lösung des Anfangswertproblems (18.30) in Form einer Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $a_n$ . Wegen  $y(0) = 0$  muss  $a_0 = 0$  sein. Die übrigen Koeffizienten bestimmen wir durch Einsetzen des Ansatzes in die Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (k+1)a_{k+1} x^k + \dots \\ &= x^2 + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots)^2 \\ &= a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (1 + 2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + \dots + \left( \sum_{r=0}^k a_r a_{k-r} \right) x^k + \dots \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich

bei $x^0$ :	$a_1 = a_0^2 = 0,$	also $a_1 = 0$
bei $x^1$ :	$2a_2 = 2a_0 a_1 = 0,$	also $a_2 = 0$
bei $x^2$ :	$3a_3 = 1 + 2a_0 a_2 + a_1^2 = 1,$	also $a_3 = 1/3$
bei $x^3$ :	$4a_4 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2 = 0,$	also $a_4 = 0$
bei $x^4$ :	$5a_5 = 2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 = 0,$	also $a_5 = 0$
bei $x^5$ :	$6a_6 = 2a_0 a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 = 0,$	also $a_6 = 0$
bei $x^6$ :	$7a_7 = 2a_0 a_6 + 2a_1 a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2 = \frac{1}{9},$	also $a_7 = 1/63.$

Der Anfang der gesuchten Potenzreihe ist somit

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \dots$$

(vgl. auch Beispiel 16). ■

**Beispiel 18** Für das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + y^2, \quad y(2) = 0$$

führt der Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \dots$$

auf

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2(x-2) + 3a_3(x-2)^2 + \dots &= 1 + \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-2)^n \right)^2 \\ &= (1 + a_0^2) + 2a_0a_1(x-2) + (2a_0a_2 + a_1^2)(x-2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Wegen  $y(2) = 0$  ist  $a_0 = 0$ , und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} \text{bei } x^0: \quad a_1 &= 1 + a_0^2 = 1, & \text{also } a_1 &= 1 \\ \text{bei } x^1: \quad 2a_2 &= 2a_0a_1 = 0, & \text{also } a_2 &= 0 \\ \text{bei } x^2: \quad 3a_3 &= 2a_0a_2 + a_1^2 = 1, & \text{also } a_3 &= 1/3 \\ \text{bei } x^3: \quad 4a_4 &= 2a_0a_3 + 2a_1a_2 = 0, & \text{also } a_4 &= 0 \\ \text{bei } x^4: \quad 5a_5 &= 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = \frac{2}{3}, & \text{also } a_5 &= 2/15, \end{aligned}$$

und wir erhalten den Anfang der gesuchten Potenzreihe

$$y(x) = (x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{2}{15}(x-2)^5 + \dots$$

Diese stimmt mit dem Anfang der Potenzreihenentwicklung für die Funktion  $y(x) = \tan(x-2)$  überein. Nachrechnen zeigt, dass diese Funktion tatsächlich die Lösung des Ausgangsproblems ist. ■

Potenzreihenansätze lassen sich auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung verwenden. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \text{auf } I = (-r, r) \quad (18.31)$$

und nehmen an, dass sich  $p, q$  und  $f$  auf  $(-r, r)$  durch konvergente Potenzreihen darstellen lassen:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \quad (18.32)$$

Wir suchen die Lösung  $y$  von (18.31) in Form der Potenzreihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Um die  $a_n$  zu bestimmen, setzen wir diese Potenzreihen formal in (18.31) ein und erhalten wegen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n, \end{aligned}$$

das

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \right) \\ & + \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \end{aligned}$$

Mit dem Cauchy-Produkt folgt weiter

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} \right) x^n \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \end{aligned}$$

woraus wir schließlich durch Koeffizientenvergleich für jedes  $n \in \mathbb{N}$  erhalten

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} = f_n.$$

Dies ist eine Rekursionsformel zur Bestimmung der  $a_n$ . Wir wählen  $a_0$  und  $a_1$  beliebig oder bestimmen sie aus den Anfangsbedingungen, falls solche gegeben sind. Dann berechnen wir  $a_2, a_3, a_4, \dots$  nacheinander aus

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( f_n - \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right). \quad (18.33)$$

Der folgende Satz sagt, dass dieses Vorgehen tatsächlich die Lösung von (18.31) in Form einer auf  $(-r, r)$  konvergenten Potenzreihe liefert.

**Satz 18.13** *Auf  $(-r, r)$  sei die Differentialgleichung (18.31) gegeben und die Funktionen  $p, q, f$  seien auf  $(-r, r)$  in die Potenzreihen (18.32) entwickelbar. Sind dann  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$  gegeben und bestimmen wir  $a_n$  für  $n \geq 2$  mittels (18.33), so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  auf  $(-r, r)$  gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung (18.31), die den Anfangsbedingungen  $y(0) = a_0$  und  $y'(0) = a_1$  genügt.*

Sind  $p, q, f$  Polynome, so kann  $r$  beliebig groß gewählt werden, d.h. die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergiert auf ganz  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 19** Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  heißt

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

die *Hermite'sche Differentialgleichung*. Die Rekursionsvorschrift liefert in diesem Fall

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(0 - (-2)na_n - \lambda a_n) = a_n \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} \quad (18.34)$$

für alle  $n \geq 0$ . Für  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$  erhalten wir die Lösung

$$y_1^{(\lambda)}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 \dots,$$

und für  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$  finden wir

$$y_2^{(\lambda)}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \dots$$

Man kann zeigen, dass sich jede Lösung der Hermite-Gleichung als Linearkombination dieser beiden Funktionen schreiben läßt. Ist speziell  $\lambda = 2n$ , so folgt aus der Rekursionsformel (18.34)  $a_{n+2} = 0$ . Ist  $n$  gerade, so ist daher  $y_1^{(2n)}$  ein Polynom, und ist  $n$  ungerade, so ist  $y_2^{(2n)}$  ein Polynom. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(x) &= 1, \\ y_2^{(2)}(x) &= x, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2, \\ y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3, \\ y_1^{(8)}(x) &= 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass der Koeffizient vor der höchsten Potenz  $x^n$  gleich  $2^n$  wird, so erhält man die *Hermite-Polynome*. Diese kann man als

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

schreiben. ■

**Beispiel 20** Schließlich betrachten wir noch das Anfangswertproblem

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (18.35)$$

Die Differentialgleichung ist eine spezielle *Besselsche Differentialgleichung*. Der Faktor  $x$  vor  $y''$  sorgt dafür, dass man Satz 18.13 nicht unmittelbar auf (18.35) anwenden kann. Auch sonst ist Vorsicht geboten. Setzt man  $x_0 = 0$  in die Differentialgleichung ein, erhält man  $y'(0) = 0$ , d.h. die zweite Anfangsbedingung. Man kann also die Anfangsbedingungen an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht willkürlich vorgeben.

Wir gehen wieder vom Potenzreihenansatz  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  aus. Die Anfangsbedingungen führen zu  $a_0 = 1$  und  $a_1 = 0$ . Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$x(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0$$

bzw.

$$0 = a_1 + (a_0 + 4a_2)x + (a_1 + 9a_3)x^2 + \dots + (a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1})x^k + \dots$$

Also ist

$$a_{k+1} = -\frac{a_{k-1}}{(k+1)^2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots,$$

und mit vollständiger Induktion erhält man

$$a_{2m+1} = 0 \quad \text{und} \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet damit

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}.$$

Diese Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ . ■

## 19 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir beschäftigen uns nun mit Anfangswertproblemen für *lineare* Differentialgleichungen, über die man sehr viel mehr aussagen kann als im allgemeinen Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

### 19.1 Allgemeine lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung haben wir bereits in Abschnitt 18.2.2 kennen gelernt. Analog dazu treffen wir die folgende Definition.

**Definition 19.1** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein (endliches oder unendliches) Intervall,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sowie  $b$  seien gegebene stetige reellwertige Funktionen auf  $I$ . Dann heißt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (19.1)$$

eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung auf  $I$ . Die Funktionen  $a_i$  heißen die Koeffizienten der Differentialgleichung und  $b$  die rechte Seite oder die Störfunktion. Ist  $b$  nicht die Nullfunktion, so heißt (19.1) eine inhomogene Differentialgleichung, und

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (19.2)$$

heißt die zugehörige homogene Gleichung.

Das Wort „linear“ kann man wie folgt verstehen: Erklärt man einen Operator  $A$  auf dem linearen Raum aller  $n$  mal differenzierbaren Funktionen auf  $I$  durch

$$(Ay)(x) := y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x),$$

so kann man (19.1) schreiben als  $Ay = b$ , und der Operator  $A$  ist linear.

**Definition 19.2** Unter Anfangsbedingungen für (19.1) versteht man die Vorgabe der Werte

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \quad (19.3)$$

an einer Stelle  $x_0 \in I$ .

**Satz 19.3** Das Anfangswertproblem (19.1) mit (19.3) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung  $y$  auf ganz  $I$ .

Während Picard-Lindelöf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nur auf einem (möglicherweise sehr kleinen) Intervall um  $x_0$  herum garantiert, hat man also für *lineare* Anfangswertprobleme (=AWP) die eindeutige Lösbarkeit auf ganz  $I$ .

Wir sehen uns nun an, wie die Lösungen linearer Differentialgleichungen aufgebaut sind und beginnen mit homogenen Gleichungen.

**Satz 19.4 (Überlagerungsprinzip)** Die Lösungen der homogenen Gleichung (19.2) bilden einen linearen Raum, d. h. sind  $y_1, \dots, y_k$  Lösungen von (19.2) und  $c_1, \dots, c_k$  reelle Zahlen, so ist auch

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

eine Lösung von (19.2).

Dies sieht man am einfachsten, wenn man die Schreibweise  $Ay = 0$  für (19.2) benutzt. Aus  $Ay_1 = Ay_2 = \dots = Ay_k = 0$  und der Linearität von  $A$  folgt sofort

$$A(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k) = c_1 A y_1 + c_2 A y_2 + \dots + c_k A y_k = 0.$$

Die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung  $Ay = 0$  bildet also einen linearen Raum. Wie groß ist dessen Dimension?

**Satz 19.5** Der lineare Raum der Lösungen der homogenen Gleichung (19.2)  $n$ -ter Ordnung hat die Dimension  $n$ . Es gibt also  $n$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  von (19.2), so dass sich jede Lösung  $y$  von (19.2) als Linearkombination

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  schreiben läßt.

Zur Erinnerung:

**Definition 19.6** Ein System von Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt linear unabhängig, wenn aus

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

folgt, dass  $c_1 = \dots = c_n = 0$ . Anderenfalls heißen die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  linear abhängig.

Ein linear unabhängiges System  $y_1, \dots, y_n$  von Lösungen der homogenen Gleichung (19.2)  $n$ -ter Ordnung heißt auch ein *Fundamentalsystem* oder eine *Integralbasis* der Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (19.2) anzugeben heißt also, ein Fundamentalsystem (oder eine Basis des Lösungsraumes) anzugeben. Im Fall  $n = 1$  ist das einfach (vgl. Satz 18.3). Für  $n \geq 2$  hat man dagegen keinen einfachen Algorithmus mehr, der ein Lösungsfundamentalsystem liefern könnte. Das folgende Verfahren der Ordnungsreduktion nach d'Alambert ist anwendbar, wenn eine nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung bekannt ist (die man beispielsweise durch Erraten oder durch einen speziellen Ansatz gefunden hat). Wir sehen uns dieses Verfahren für Gleichungen zweiter Ordnung an.

Sei etwa  $y_1$  eine bekannte Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad \text{auf } I \quad (19.4)$$

mit  $y_1(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Wir suchen eine weitere Lösung  $y_2$  von (19.4) in der Form  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  mit einer zu bestimmenden Funktion  $u$ . Dann ist

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \quad \text{sowie} \quad y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'',$$

und eingesetzt in (19.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + au'y_1 + au'y_1' + buy_1 \\ &= (y_1'' + ay_1' + by_1)u + (2y_1' + ay_1)u' + y_1u'' \\ &= y_1u'' + (2y_1' + ay_1)u'. \end{aligned}$$

Wir sehen: Ist  $y_1(x) \neq 0$  auf  $I$ , so löst  $y_2 = uy_1$  genau dann die Gleichung (19.4) auf  $I$ , wenn  $u$  die Gleichung

$$u'' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a\right)u' = 0 \quad \text{auf } I \quad (19.5)$$

löst. Nach Substitution  $u' = v$  geht (19.5) über in die Gleichung

$$v' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a\right)v = 0 \quad \text{auf } I$$

erster Ordnung, die wir in Abschnitt 18.2.2 gelöst haben. Aus  $v$  erhalten wir  $u$  und hieraus  $y_2$ .

**Beispiel 1** Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \quad \text{auf } I = (0, \infty).$$

Durch Erraten finden wir die Lösung  $y_1(x) = x$ , und für diese ist  $y_1(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Wir machen daher den Ansatz  $y_2(x) = xu(x)$  und erhalten aus (19.5)

$$u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right)u' = 0.$$

Sei  $u' = v$ . Die Gleichung

$$v' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right)v = v' + \frac{3}{2x}v = 0$$

hat nach Satz 18.3 die allgemeine Lösung

$$v(x) = c \exp\left(\int_1^x \left(-\frac{3}{2t}\right) dt\right) = c \exp\left(-\frac{3}{2} \ln x\right) = cx^{-3/2}.$$

Für  $c = -\frac{1}{2}$  ist  $u(x) = x^{-1/2}$  eine Stammfunktion von  $v$ , und daher ist  $y_2(x) = xu(x) = \sqrt{x}$  eine weitere Lösung der Ausgangsgleichung. ■

Der folgende Satz sagt, dass dieses Verfahren tatsächlich funktioniert, d.h. dass man aus einer bekannten Lösung  $y_1$  eine weitere, dazu *linear unabhängige* Lösung  $y_2$  gewinnt.

**Satz 19.7 (Ordnungsreduktion)** *Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Weiter sei  $y_1$  eine Lösung von (19.4) auf  $I$  mit  $y_1(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ . Ist  $u$  eine Lösung von (19.5), so ist auch  $y_2(x) := u(x)y_1(x)$  eine Lösung von (19.4). Die Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  sind linear unabhängig, wenn die Funktion  $u$  nicht konstant ist.*

Mit diesem Satz ist klar, dass die Lösungen  $y_1(x) = x$  und  $y_2(x) = \sqrt{x}$  tatsächlich ein Lösungsfundamentalsystem für die Gleichung aus Beispiel 1 bilden, d.h. man kann jede Lösung dieser Gleichung schreiben als

$$y(x) = c_1x + c_2\sqrt{x} \quad \text{mit } x > 0.$$

Ein bequemes Hilfsmittel, die lineare Unabhängigkeit von Funktionen zu prüfen, ist die Wronski-Determinante.

**Definition 19.8** *Die Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien  $n - 1$  mal differenzierbar auf  $I$ . Dann heißt*

$$W(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

die Wronski-Matrix des Funktionensystems  $y_1, \dots, y_n$  und  $(\det W)(x)$  seine Wronski-Determinante.

**Satz 19.9** *Sind die Funktionen  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  linear abhängig und  $n - 1$  mal differenzierbar, so ist  $(\det W)(x) = 0$  für alle  $x \in I$ .*

Dies ist leicht zusehen, da dann eine Spalte der Wronski-Matrix linear abhängig von den übrigen Spalten wird.

**Beispiel 2** Für die Funktionen  $y_1(x) = x$  und  $y_2(x) = \sqrt{x}$  auf  $I = (0, \infty)$  ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\det W)(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0.$$

Also sind  $y_1$  und  $y_2$  tatsächlich linear unabhängige Lösungen der Gleichung aus Beispiel 1.

**Beispiel 3** Seien  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = x^2 - 2$  und  $y_3(x) = 2x^2 + 3x - 4$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 - 2 & 2x^2 + 3x - 4 \\ 1 & 2x & 4x + 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\det W)(x) = 0$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall liefert uns Satz 19.9 *keine* Information. Aus

$$y_3(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x)$$

folgt aber sofort die lineare Abhängigkeit der Funktionen  $y_1, y_2$  und  $y_3$ . ■

Eine wesentlich präzisere Aussage als in Satz 19.9 erhält man unter der Voraussetzung, dass  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen einer linearen Differentialgleichung (und nicht irgendeine Funktionen) sind.

**Satz 19.10** *Seien  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (19.2). Dann ist entweder*

- a)  $(\det W)(x) = 0$  für alle  $x \in I$  oder
- b)  $(\det W)(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ ,

*und die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  bilden genau dann ein Lösungsfundamentalsystem, wenn Fall (b) vorliegt.*

Ist unter den Voraussetzungen von Satz 19.10 also  $(\det W)(x) \neq 0$  für *ein*  $x \in I$ , so ist  $(\det W)(x) \neq 0$  für *alle*  $x \in I$ , und die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  sind linear unabhängig. Ist dagegen  $(\det W)(x) = 0$  für *ein*  $x \in I$ , so ist  $(\det W)(x) = 0$  für *alle*  $x \in I$ , und die Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  sind linear abhängig.

Wir gehen nun zu inhomogenen Gleichungen über. Ihre Lösungsstruktur kann ähnlich wie in Satz 18.5 (für  $n = 1$ ) beschrieben werden.

**Satz 19.11** *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (19.1) hat die Gestalt*

$$y(x) = y_h(x) + y^*(x),$$

*wobei  $y^*$  eine spezielle Lösung von (19.1) und  $y_h$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (19.2) ist.*

Einen systematischen Weg zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (19.1) bietet die Methode der Variation der Konstanten. Dazu sei

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (19.2). Wir suchen eine spezielle Lösung von (19.1) in der Form

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen  $c_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Es ist

$$\begin{aligned} y' &= c_1' y_1 + c_1 y_1' + \dots + c_n' y_n + c_n y_n' \\ &= (c_1 y_1' + \dots + c_n y_n') + (c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n). \end{aligned}$$

Um die Rechnung übersichtlich zu halten, versuchen wir, die  $c_j$  so zu wählen, dass

$$c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$$

(später sehen wir, dass dies möglich ist). Dann bleibt also

$$y' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n',$$

und wir finden weiter

$$y'' = (c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'') + (c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n').$$

Wir fordern wieder

$$c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0.$$

Wir fahren so fort und erhalten

$$y^{(k)} = c_1 y_1^{(k)} + \dots + c_n y_n^{(k)} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

unter den Bedingungen

$$c_1 y_1^{(k)} + \dots + c_n y_n^{(k)} = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n-2.$$

Schließlich erhalten wir für die  $n$ -te Ableitung

$$y^{(n)} = (c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)}) + (c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}).$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die inhomogene Gleichung (19.1) ein und finden

$$\begin{aligned} b &= y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y \\ &= (c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)}) + (c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}) \\ &\quad + a_{n-1} (c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}) \\ &\quad + \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &\quad + a_1 (c_1 y_1' + \dots + c_n y_n') \\ &\quad + a_0 (c_1 y_1 + \dots + c_n y_n), \end{aligned}$$

also

$$c'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} = b,$$

da ja jede Funktion  $y_j$  die homogene Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

löst. Damit haben wir das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Ableitungen  $c'_j$  gewonnen:

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n &= 0 \\ c'_1 y'_1 + \dots + c'_n y'_n &= 0 \\ &\vdots \\ c'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n y_n^{(n-1)} &= b \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \quad (19.6)$$

Dieses System ist eindeutig lösbar, da seine Systemmatrix die Wronski-Matrix der Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  ist. Diese hat nach Satz 19.10 eine Determinante ungleich 0 und ist daher invertierbar. Aus (19.6) lassen sich die Ableitungen  $c'_1, \dots, c'_n$  eindeutig ermitteln. Durch Integration bekommen wir Stammfunktionen  $c_1, \dots, c_n$ , und man überzeugt sich leicht davon, dass

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

tatsächlich eine Lösung von (19.1) ist.

**Beispiel 4** Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = x \quad \text{auf } I = (0, \infty). \quad (19.7)$$

Aus Beispiel 1 und 2 wissen wir, dass  $y_1(x) = x$  und  $y_2(x) = \sqrt{x}$  ein Lösungsfundamentalsystem für die homogene Gleichung bilden. Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählen wir den Ansatz

$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

und bestimmen  $c'_1, c'_2$  aus

$$\begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & -\sqrt{x} \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -x \\ x\sqrt{x} \end{pmatrix},$$

also

$$c'_1(x) = 2x \quad \text{und} \quad c'_2(x) = -2x^{3/2}.$$

Stammfunktionen sind

$$c_1(x) = x^2 \quad \text{und} \quad c_2(x) = -\frac{4}{5}x^{5/2}$$

(da wir nur eine spezielle Lösung suchen, können wir die Integrationskonstanten z.B. gleich 0 wählen). Also ist

$$y^*(x) = x^2 \cdot x - \frac{4}{5}x^{5/2} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{5}x^3$$

eine spezielle Lösung von (19.7), und die allgemeine Lösung von (19.7) ist

$$y(x) = c_1x + c_2\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 5** Das Anfangswertproblem

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (19.8)$$

hat nach Satz 19.3 auf dem Intervall  $(-\pi/2, \pi/2)$  eine eindeutige Lösung. Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung  $y'' + y = 0$  wird gebildet von den Funktionen  $y_1(x) = \cos x$  und  $y_2(x) = \sin x$ . Die Lösungen  $c'_1, c'_2$  des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

sind  $c'_1(x) = -\tan x$  und  $c'_2(x) = 1$ . Integration liefert

$$c_1(x) = \ln(\cos x) \quad \text{und} \quad c_2(x) = x,$$

d.h. die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \sin x$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Diese Konstanten bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen und erhalten  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 1$ , so dass

$$y(x) = \sin x + \ln(\cos x) \cdot \cos x + x \sin x$$

die Lösung des AWP (19.8) ist. ■

## 19.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \quad (19.9)$$

mit konstanten Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{R}$ . Die rechte Seite  $b$  ist weiterhin eine stetige Funktion auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . In dieser speziellen Situation gibt es eine systematische Methode zur Bestimmung eines Lösungsfundamentalsystems der zugehörigen homogenen Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0, \quad (19.10)$$

und auch das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung ist oft einfacher zu gestalten als über eine Variation der Konstanten.

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems von (19.10) wählen wir den Ansatz  $y(x) = e^{\lambda x}$  mit einem zu bestimmenden (reellen oder komplexen) Parameter  $\lambda$ . Setzt man diese Funktion und ihre Ableitungen  $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$  in (19.10) ein, so erhält man

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

bzw. wegen  $e^{\lambda x} \neq 0$

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (19.11)$$

Dieses Polynom  $P$  heißt das *charakteristische Polynom* der homogenen Gleichung (19.10). Offenbar ist  $y(x) = e^{\lambda x}$  genau dann eine Lösung von (19.10), wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Sind alle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $P$  reell und einfach, dann erhält man auf diese Weise  $n$  Lösungen

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x},$$

die linear unabhängig sind und daher ein Lösungsfundamentalsystem für (19.10) bilden. Ist  $\lambda = \alpha + \beta i$  eine komplexe Nullstelle mit  $\beta > 0$ , so ist auch die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  eine Nullstelle von  $P$ , und man erhält die beiden Lösungen

$$y_+(x) = e^{(\alpha + \beta i)x} \quad \text{und} \quad y_-(x) = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Da die Lösungsmenge von (19.10) ein linearer Raum ist, sind mit  $y_+$  und  $y_-$  auch

$$\operatorname{Re} y_+ = \frac{y_+ + y_-}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} y_+ = \frac{y_+ - y_-}{2i}$$

Lösungen von (19.10). Aus dem Paar  $(\lambda, \bar{\lambda})$  konjugiert komplexer Nullstellen von  $P$  gewinnen wir also zwei reellwertige Lösungen

$$y_1(x) = \operatorname{Re} (e^{(\alpha + \beta i)x}) = \operatorname{Re} (e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

und

$$y_2(x) = \operatorname{Im} (e^{(\alpha+\beta i)x}) = \operatorname{Im} (e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Ist  $\lambda$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$ , so entsprechen dieser Nullstelle  $k$  linear unabhängige Lösungen von (19.10), die man wie folgt gewinnt:

**Satz 19.12** a) *Ist  $\lambda$  eine  $k$ -fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P$  von (19.10), so hat (19.10) die  $k$  linear unabhängigen Lösungen*

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}. \quad (19.12)$$

b) *Ist  $\lambda = \alpha + \beta i$  mit  $\beta > 0$  eine  $k$ -fache komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P$  von (19.10), so besitzt (19.10) die  $2k$  linear unabhängigen Lösungen*

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2(x) = x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, y_k(x) = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

und (19.13)

$$y_{k+1}(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_{k+2}(x) = x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, y_{2k}(x) = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

c) *Aus den (entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach gezählten) Nullstellen von  $P$  erhält man mit (a) und (b) genau  $n$  Funktionen, die zusammen ein Lösungsfundamentalsystem für (19.10) bilden.*

**Beispiel 6** Die Differentialgleichung  $y'''' + 2y''' - 2y' - y = 0$  hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1$  mit den Nullstellen  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ . Also bilden die Funktionen

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = x e^{-x} \text{ und } y_4(x) = x^2 e^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + c_4 x^2 e^{-x}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 7** Das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$  der Differentialgleichung  $y'''' = y$  hat die Nullstellen  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = i$  und  $\lambda_4 = -i$ . Hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}, y_3(x) = \cos x, y_4(x) = \sin x. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 8** Das charakteristische Polynom der *Schwingungsgleichung*

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{mit } \omega > 0$$

lautet  $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$  und hat die Nullstellen  $\lambda_1 = i\omega$  und  $\lambda_2 = -i\omega$ . Also bilden die Funktionen  $y_1(x) = \cos(\omega x)$  und  $y_2(x) = \sin(\omega x)$  ein Fundamentalsystem aus

reellwertigen Funktionen (reine Schwingung). Wir betrachten nun allgemeiner die Differentialgleichung

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{mit } \mu \geq 0 \text{ und } \omega_0 > 0$$

der *gedämpften Schwingung*. Diese Gleichung modelliert z.B. eine Masse, die an einer Feder schwingt, wobei  $\mu$  der Reibungskoeffizient und  $\omega_0^2$  die Federkonstante ist. Wie wir bereits gesehen haben, hat diese Gleichung für  $\mu = 0$  das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = \cos(\omega_0 x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin(\omega_0 x).$$

Die Zahl  $\omega_0$  ist also die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Von nun an sei  $\mu > 0$ . Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$  sind

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

wobei  $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$  im Fall  $\mu^2 < \omega_0^2$  für  $i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$  steht. Wir unterscheiden drei Fälle.

**Fall 1:**  $0 < \mu < \omega_0$  (*gedämpfte Schwingung*)

Wir setzen  $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$  und erhalten das Paar konjugiert komplexer Nullstellen  $\lambda_1 = -\mu + i\omega$  und  $\lambda_2 = -\mu - i\omega$ . Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir

$$y_1(x) = e^{-\mu x} \cos(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-\mu x} \sin(\omega x).$$

Durch die Dämpfung wird also die Frequenz kleiner, und die Lösungen klingen exponentiell ab.

**Fall 2:**  $\mu = \omega_0$  (*aperiodischer Grenzfall*)

In diesem Fall ist  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$  eine doppelte Nullstelle und demzufolge

$$y_1(x) = e^{-\mu x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x e^{-\mu x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem. Wir beobachten kein Schwingungsverhalten mehr.

**Fall 3:**  $\mu > \omega_0$  (*aperiodischer Fall*)

Nun haben wir zwei einfache reelle Nullstellen  $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ , die wegen  $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < \mu$  beide negativ sind. Ein Fundamentalsystem ist

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

und alle Lösungen klingen exponentiell ab. ■

Wir kommen nun zu inhomogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Eine spezielle Lösung kann natürlich wieder mittels Variation der Konstanten

gefunden werden. Bei speziellen rechten Seiten  $b$  ist es einfacher, einen *Ansatz vom Typ der Störfunktion* zu wählen. Das funktioniert z.B. für

$$b(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)(a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0)$$

und

$$b(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)(a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0), \tag{19.14}$$

insbesondere also für Polynome, Exponentialfunktionen und die Sinus- und Kosinusfunktion. In diesen Fällen gibt es eine spezielle Lösung  $y^*$  der inhomogenen Gleichung, die vom gleichen Typ wie  $b$  ist. Dabei hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

**Fall 1** Ist  $\alpha + i\beta$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so gibt es eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt

$$y^*(x) = e^{\alpha x} (\cos(\beta x)(A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0) + \sin(\beta x)(B_m x^m + \dots + B_1 x + B_0))$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $A_i$  und  $B_j$ .

**Fall 2** Ist  $\alpha + i\beta$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$  des charakteristischen Polynoms, so gibt es eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung der Gestalt

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} (\cos(\beta x)(A_m x^m + \dots + A_1 x + A_0) + \sin(\beta x)(B_m x^m + \dots + B_1 x + B_0))$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $A_i$  und  $B_j$ .

Ist die rechte Seite eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt (19.14), so wählt man eine Linearkombination der Ansätze aus Fall 1 und 2 als Ansatz.

**Beispiel 9** Die Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + y' = x + 2e^{-x} \tag{19.15}$$

hat das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$  mit der einfachen Nullstelle  $\lambda_1 = 0$  und der doppelten Nullstelle  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ . Folglich bilden die Funktionen

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad y_3(x) = x e^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der zu (19.15) gehörenden homogenen Gleichung. Um die inhomogene Gleichung (19.15) zu lösen, suchen wir spezielle Lösungen der Gleichungen

$$y''' + 2y'' + y' = x = x e^{0 \cdot x} \cos(0 \cdot x), \tag{19.16}$$

$$y''' + 2y'' + y' = 2e^{-x} = 2e^{-x} \cos(0 \cdot x). \tag{19.17}$$

Nach Fall 2 hat (19.16) eine spezielle Lösung der Gestalt  $y_{i,1}(x) = c_1 x + c_2 x^2$ . Wegen

$$y_{i,1}''' + 2y_{i,1}'' + y_{i,1}' = 0 + 2 \cdot 2c_2 + (c_1 + 2c_2 x) = (c_1 + 4c_2) + 2c_2 x$$

löst  $y_{i,1}$  genau dann (19.16), wenn  $2c_2 = 1$  und  $c_1 + 4c_2 = 0$ , also wenn  $c_2 = 1/2$  und  $c_1 = -2$ . Ebenfalls nach Fall 2 hat (19.17) eine spezielle Lösung der Gestalt  $y_{i,2}(x) = dx^2e^{-x}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} y'_{i,2}(x) &= d(2x - x^2)e^{-x}, & y''_{i,2}(x) &= d(2 - 4x + x^2)e^{-x}, \\ y'''_{i,2}(x) &= d(-6 + 6x - x^2)e^{-x}, \end{aligned}$$

und Einsetzen in (19.17) ergibt

$$d((-6 + 6x - x^2) + 2(2 - 4x + x^2) + (2x - x^2))e^{-x} = 2e^{-x}$$

und  $d = -1$ . Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (19.15) ist also

$$y_i(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 - x^2e^{-x}.$$

■

**Beispiel 10** Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = a \cos(\omega x) \quad \text{mit } \omega_0, \omega > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R} \quad (19.18)$$

beschreibt die Bewegung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz  $\omega_0$  unter Wirkung einer periodischen äußeren Kraft  $a \cos \omega x$ . Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

**Fall A:**  $\omega \neq \omega_0$ . Dann ist  $i\omega$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$ . Nach Fall 1 gibt es also eine spezielle Lösung (19.18) der Form  $y_i(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ . Ableiten und Einsetzen in (19.18) ergibt

$$-c_1\omega^2 \cos(\omega x) - c_2\omega^2 \sin(\omega x) + \omega_0^2 c_1 \cos(\omega x) + \omega_0^2 c_2 \sin(\omega x) = a \cos(\omega x),$$

und nach Vergleich der Koeffizienten vor den Sinus- und Kosinustermen erhalten wir

$$c_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0, \quad c_1(\omega_0^2 - \omega^2) = a.$$

Wegen  $\omega_0 \neq \omega$  ist  $c_1 = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}$  und  $c_2 = 0$ , und

$$y_i(x) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega x)$$

ist eine Lösung von (19.18).

**Fall B:**  $\omega = \omega_0$ . Nun ist  $i\omega$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Entsprechend Fall 2 gibt es also eine Lösung von (19.18) der Gestalt

$$y_i(x) = bx \cos(\omega x) + cx \sin(\omega x).$$

Mit dem Ansatz

$$y_i(x) = bx \cos(\omega x) + cx \sin(\omega x)$$

wird

$$\begin{aligned} y_i'(x) &= (cx\omega + b) \cos(\omega x) + (c - bx\omega) \sin(\omega x), \\ y_i''(x) &= (2c\omega - bx\omega^2) \cos(\omega x) - (2b\omega + cx\omega^2) \sin(\omega x), \end{aligned}$$

und nach Einsetzen und Koeffizientenvergleich folgt

$$2c\omega = a \quad \text{und} \quad -2b\omega = 0,$$

also  $c = \frac{a}{2\omega}$  und  $b = 0$ . Eine Lösung von (19.18) ist in diesem Fall also

$$y_i(x) = \frac{a}{2\omega} x \sin(\omega x).$$

Im Fall  $a \neq 0$  wächst die Amplitude dieser Funktion über alle Grenzen, und man spricht von einer *Resonanzkatastrophe*.

### 19.3 Systeme linearer Differentialgleichungen

In der Praxis treten oft Systeme von Differentialgleichungen auf, d.h. man sucht mehrere Funktionen, die durch mehrere Differentialgleichungen miteinander verknüpft sind. Oft ist es auch zweckmäßig, sich eine Differentialgleichung höherer Ordnung als ein System von Differentialgleichungen niedriger Ordnung vorzustellen. Gegeben sei eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (19.19)$$

Ist  $y$  eine Lösung dieser Differentialgleichung, so erfüllen die Funktionen

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := y'(x), \dots, \quad y_n(x) := y^{(n-1)}(x)$$

das folgende System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (19.20)$$

Hat man umgekehrt eine Lösung  $\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$  des Systems (19.20) gefunden, so ist die erste Komponente  $y_1$  von  $\vec{y}$  eine Lösung von (19.19). In diesem Sinn sind die Gleichung (19.19)  $n$ -ter Ordnung und das System (19.20) erster Ordnung zueinander äquivalent. Kommen zu (19.19) noch die Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

hinzu, so entsprechen diese der Anfangsbedingung

$$y_1(x_0) = \alpha_0, \quad y_2(x_0) = \alpha_1, \dots, \quad y_n(x_0) = \alpha_{n-1}$$

bzw.  $\vec{y}(x_0) = \vec{\alpha}$  mit  $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T$  für das System (19.20). Ein Vorteil von (19.20) gegenüber (19.19) ist, dass man den allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf leicht auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung verallgemeinern kann. Auch gibt es für Systeme erster Ordnung zahlreiche effektive numerische Lösungsverfahren.

Der linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

entspricht das System

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ \vdots & & \ddots \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & -a_0y_1 - a_1y_2 - a_2y_3 \dots - a_{n-1}y_n + b(x), \end{array}$$

welches wir mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \quad (19.21)$$

kurz als  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$  schreiben können. Allgemein versteht man unter einem *linearen System erster Ordnung* ein System der Gestalt  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$  mit einer  $n \times n$ -Matrix  $A$ , einer rechten Seite  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$  und einer gesuchten Lösung  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ . Die Gleichung  $\vec{y}' = A\vec{y}$  heißt das zu  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$  *gehörende homogene System*. Wie bei allen linearen Gleichungen setzt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$  zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung  $\vec{y}' = A\vec{y}$  und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Über die Lösungsstruktur der homogenen Systeme gibt folgender Satz Auskunft.

**Satz 19.13** a) *Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix. Die Menge der Lösungen des homogenen Systems  $\vec{y}' = A\vec{y}$  bildet einen linearen Raum der Dimension  $n$ . Eine Basis  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  dieses Raumes heißt ein Fundamentalsystem.*

b) Besitzt  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ , so sind die Funktionen

$$\vec{y}_1(x) := e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1, \dots, \quad \vec{y}_n(x) := e^{\lambda_n x} \vec{v}_n$$

Lösungen des Systems  $\vec{y}' = A\vec{y}$ . Diese Lösungen bilden ein Fundamentalsystem, wenn die  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  linear unabhängig sind.

Dieser Satz liefert nur dann explizit ein Fundamentalsystem, wenn die Matrix  $A$   $n$  linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, d.h. wenn  $A$  diagonalähnlich ist. Für die Matrix  $A$  in (19.21) ist dies z.B. genau dann der Fall, wenn ihre Eigenwerte paarweise verschieden sind. Ist  $A$  eine reelle Matrix und  $\lambda, \bar{\lambda}$  ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte von  $A$ , so erhält man aus der komplexen Lösung  $\vec{y} = e^{\lambda x} \vec{v}$  nach Satz 19.13 zwei reelle Lösungen durch Bildung von Real- und Imaginärteil von  $\vec{y}$ .

Ist  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  ein Fundamentalsystem für das homogene System  $\vec{y}' = A\vec{y}$ , so kann man jede Lösung dieses Systems schreiben als Linearkombination

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \vec{y}_1(x) + \dots + c_n \vec{y}_n(x). \quad (19.22)$$

Eine Lösung  $\vec{y}_i$  der inhomogenen Gleichung kann man bestimmen, indem man in (19.22) die Konstanten  $c_i$  variiert, d.h. durch den Ansatz

$$\vec{y}_i(x) = c_1(x) \vec{y}_1(x) + \dots + c_n(x) \vec{y}_n(x).$$

**Beispiel 11** Zur Differentialgleichung  $y'' - 3y' + 2y = 0$  ist das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (19.23)$$

äquivalent. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix sind  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 2$  mit den zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1 = (1, 1)^T$  und  $\vec{v}_2 = (1, 2)^T$ . Ein Fundamentalsystem für (19.23) wird also gebildet von den Funktionen

$$\vec{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Als allgemeine Lösung von (19.23) erhält man daher

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \vec{y}_1(x) + c_2 \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung ist die erste Komponente

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

von  $\vec{y}_h(x)$ . ■

**Beispiel 12** Die Koeffizientenmatrix des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (19.24)$$

hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 + 2i$  und  $\lambda_2 = 1 - 2i$ , und  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$ . Also ist

$$\vec{y}(x) = e^{(1+2i)x} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \left( \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

eine komplexe Lösung von (19.24), und ihr Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} \vec{y}_1(x) &= e^x \left( \cos(2x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right), \\ \vec{y}_2(x) &= e^x \left( \cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin(2x) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem von (19.24). ■

**Beispiel 13** Ganz ähnlich wie in Beispiel 12 gewinnt man für das System

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1$$

ein Lösungsfundamentalsystem

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung

$$\vec{y}_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}. \quad (19.25)$$

Um das inhomogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 + x \end{aligned} \quad (19.26)$$

zu lösen, wählen wir den Ansatz

$$\vec{y}(x) = c_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

d.h. wir variieren in (19.25) die Konstanten. Setzt man

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} c_1 \cos x - c_2 \sin x \\ c_1 \sin x + c_2 \cos x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} c_1' \cos x - c_1 \sin x - c_2' \sin x - c_2 \cos x \\ c_1' \sin x + c_1 \cos x + c_2' \cos x - c_2 \sin x \end{pmatrix}$$

in (19.26) ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für  $c_1'$  und  $c_2'$

$$\begin{aligned} c_1' \cos x - c_2' \sin x &= 0 \\ c_1' \sin x + c_2' \cos x &= x \end{aligned}$$

mit den Lösungen  $c_1' = x \sin x$  und  $c_2' = x \cos x$ . Stammfunktionen sind

$$c_1(x) = -x \cos x + \sin x \quad \text{und} \quad c_2(x) = x \sin x + \cos x.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (19.26) ist daher

$$\vec{y}_i(x) = (-x \cos x + \sin x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + (x \sin x + \cos x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 14** Einfacher als die Anwendung von Satz 19.13 und auch hilfreich in Fällen, in denen Satz 19.13 kein Fundamentalsystem liefert (da  $A$  nicht diagonalähnlich ist) ist oft das *Eliminationsverfahren*, welches wir uns am Beispiel des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned} \tag{19.27}$$

ansehen. Die Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  als doppelten Eigenwert; der zugehörige Eigenunterraum hat aber die Dimension 1 und wird z.B. durch  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannt. Satz 19.13 liefert also keine Fundamentalsystem. Stattdessen versuchen wir,  $y_2$  aus dem System zu eliminieren. Aus der ersten Gleichung folgt durch Umstellen und Ableiten

$$y_2 = \frac{1}{2}y_1' - \frac{1}{2}y_1 \quad \text{und} \quad y_2' = \frac{1}{2}y_1'' - \frac{1}{2}y_1',$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\frac{1}{2}y_1'' - \frac{1}{2}y_1' = \frac{1}{2}y_1' - \frac{1}{2}y_1 \quad \text{bzw.} \quad y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0.$$

Ein Fundamentalsystem dieser Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist nach Satz 19.12

$$y_{11}(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_{12}(x) = xe^x,$$

und mit  $y_2 = \frac{1}{2}y_1' - \frac{1}{2}y_1$  erhält man hieraus

$$y_{21} = 0 \quad \text{und} \quad y_{22}(x) = e^x/2.$$

Somit ist

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x/2 \end{pmatrix} \quad (19.28)$$

ein Fundamentalsystem für (19.27). ■

Eine Begründung, dass die Funktionen  $\vec{y}_1, \vec{y}_2$  in (19.28) tatsächlich ein Fundamentalsystem bilden (also linear unabhängig sind), kann man mit der folgenden Variante des *Satzes von Wronski* geben.

**Satz 19.14** *Sei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix, und  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  seien Lösungen des homogenen Systems  $\vec{y}' = A\vec{y}$ . Weiter sei  $\Phi(x)$  die  $n \times n$ -Matrix, deren Spalten die Vektoren  $\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)$  sind. Ist  $(\det \Phi)(x) \neq 0$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ , so sind die Lösungen  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  linear unabhängig. Ist  $(\det \Phi)(x) = 0$  für ein  $x \in \mathbb{R}$ , so ist  $(\det \Phi)(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$  sind linear abhängig.*

Offenbar ist tatsächlich in Beispiel 14

$$\det \Phi = \det \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{2x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Matrix  $\Phi$  läßt sich auch die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $\vec{y}' = A\vec{y}$  bequem schreiben als

$$\vec{y}(x) = \Phi(x)c \quad \text{mit} \quad c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R},$$

und die Bestimmung von  $c(x)$  aus dem Ansatz  $\vec{y}(x) = \Phi(x)c(x)$  zur Lösung der inhomogenen Gleichung  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$  kann durch

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} \vec{b}(t) dt$$

erfolgen. Lösen Sie das System aus Beispiel 13 erneut, indem Sie diese Formel mit  $x_0 = 0$  und  $c(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  verwenden.

## 19.4 Die Laplace-Transformation

Wir lernen nun eine weitere Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen kennen, die insbesondere bei linearen Differentialgleichungen und Systemen mit konstanten Koeffizienten einsetzbar ist. So wie man durch Logarithmieren das Multiplizieren und Potenzieren positiver reeller Zahlen auf die Addition und Multiplikation ihrer Logarithmen zurückführen kann, so führt die Laplace-Transformation die Differentiation einer reellen Funktion auf eine einfache algebraische Operation zurück.

**Definition 19.15** Eine Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Laplace-transformierbar, wenn es eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  gibt, für die das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-ts} |f(t)| dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-ts} |f(t)| dt \quad (19.29)$$

konvergiert.

Ist  $f$  Laplace-transformierbar und konvergiert das Integral (19.29) für ein  $s \in \mathbb{R}$ , so konvergiert es auch für alle  $s' > s$ . Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Zahl  $a = a(f)$  so, dass (19.29) für jedes  $s > a$  konvergiert und für jedes  $s < a$  divergiert (für  $s = a$  kann man im Allgemeinen keine Aussage treffen). Diese Zahl  $a$  heißt die *Konvergenzabszisse* von  $f$ , und  $(a, \infty)$  das *Konvergenzintervall*.

**Definition 19.16** Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei Laplace-transformierbar, und  $a$  sei ihre Konvergenzabszisse. Dann heißt die durch

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt$$

definierte Funktion  $F : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Laplace-Transformierte von  $f$ .

Wir schreiben dann  $F = \mathcal{L}f$  und nennen die Abbildung  $\mathcal{L}$  die *Laplace-Transformation*. Ist  $f$  Laplace-transformierbar und unterscheidet sich  $g$  von  $f$  nur in endlich vielen Punkten, so ist auch  $g$  Laplace-transformierbar und  $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ . Die Laplace-Transformation  $\mathcal{L}$  ist also nicht ohne weiteres umkehrbar. Wenden wir aber  $\mathcal{L}$  nur auf Funktionen  $f$  an, die stetig oder wenigstens stückweise stetig und von rechts stetig sind, so ist auf dieser Menge die Laplace-Transformation  $\mathcal{L}$  umkehrbar, und wir schreiben  $f = \mathcal{L}^{-1}F$  falls  $F = \mathcal{L}f$ . Im weiteren betrachten wir daher ausschließlich stückweise stetige und von rechts stetige Laplace-transformierbare Funktionen  $f$ .

**Beispiel 15** Für die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto 1$  und  $s \neq 0$ , ist

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^r = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{für } s > 0, \\ \infty & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

Also ist  $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s}$ , und die Konvergenzabszisse von  $f$  ist gleich 0. Für die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto e^{at}$  erhält man analog für  $s > a$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

mit der Konvergenzabszisse  $a$ . Dagegen ist die Funktion  $f(t) = e^{t^2}$  *nicht* Laplace-transformierbar, da das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^\infty e^{(t-s)t} dt$$

für kein  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert. ■

Wir lernen nun eine Reihe von Rechenregeln kennen, die es erlauben, Laplace-Transformierte zu berechnen, ohne das uneigentliche Integral (19.29) auswerten zu müssen.

**Satz 19.17 (Linearität und Streckung)** *Die Funktionen  $f, g$  seien Laplace-transformierbar. Dann gilt für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $c > 0$*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(af + bg) &= a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g, \\ \mathcal{L}(f(ct))(s) &= \frac{1}{c}(\mathcal{L}f)\left(\frac{s}{c}\right). \end{aligned}$$

**Beispiel 16** Die Laplacetransformierten von

$$f(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

sind

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^t)(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s}{s^2-1}$$

und  $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s^2-1}$ . Die Laplacetransformierte von  $f(t) = \cosh(ct)$  mit  $c > 0$  ist

$$(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}(\cosh t)\left(\frac{s}{c}\right) = \frac{1}{c} \frac{(s/c)}{(s/c)^2 - 1} = \frac{s}{s^2 - c^2},$$

und die Laplace-Transformierte von  $g(t) = \sinh(ct)$  ist  $(\mathcal{L}g)(s) = \frac{c}{s^2 - c^2}$ . ■

Wir sagen,  $f$  wächst nicht schneller als eine Exponentialfunktion, wenn es Konstanten  $C$  und  $\alpha$  so gibt, dass

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \quad \text{für alle hinreichend großen } t.$$

**Satz 19.18 (Differentiation und Integration)** Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten  $F$ . Dann gilt:

- a) Sei  $f$  auf  $(0, \infty)$  differenzierbar und von rechts stetig in 0 und  $f$  wachse nicht schneller als eine Exponentialfunktion. Dann ist

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0).$$

- b) Ist  $f$  auf  $(0, \infty)$   $n$  mal differenzierbar mit im Nullpunkt von rechts stetigen Ableitungen  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  und wachsen diese nicht schneller als eine Exponentialfunktion, so ist

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

- c) Die Stammfunktion  $g(t) = \int_0^t f(x) dx$  hat die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}g)(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

**Beispiel 17** Die Funktion  $f(t) = t^n$  hat die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(t) = n!$ . Nach Beispiel 15 ist

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = \frac{n!}{s}.$$

Mit Satz 19.18 (b) folgt hieraus für  $F(s) = (\mathcal{L}f)(s)$

$$\frac{n!}{s} = s^n F(s), \quad \text{also} \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Für ein Polynom

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

hat man daher die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}p)(s) = \frac{a_n n!}{s^{n+1}} + \frac{a_{n-1} (n-1)!}{s^n} + \dots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 18** Aus  $(\sin t)'' = -\sin t$  folgt mit Satz 19.18 (b)

$$s^2 \mathcal{L}(\sin t)(s) - 1 = -\mathcal{L}(\sin t)(s)$$

und nach Umstellen nach  $\mathcal{L}(\sin t)(s)$

$$\mathcal{L}(\sin t)(s) = \frac{1}{1 + s^2}.$$

Ganz ähnlich erhält man  $\mathcal{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{1 + s^2}$ . \blacksquare

**Beispiel 19** Die Potenzfunktion  $f(t) = t^\alpha$  mit  $\alpha \geq 0$  hat die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt = \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du.$$

Dieses Integral ist verwandt mit der *Eulerschen Gammafunktion*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du, \quad x > 0,$$

einer der wichtigsten Funktionen der Analysis. Mit dieser Funktion erhält man

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}. \quad (19.30)$$

Ein Vergleich mit Beispiel 17 ergibt (mit  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ )

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Gammafunktion interpoliert also die Fakultätsfunktion, die nur für ganzzahlige Argumente  $n \geq 0$  erklärt ist. Aus  $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$  folgt mit Satz 19.18 (a) und (19.30)

$$\mathcal{L}(\alpha t^{\alpha-1})(s) = \mathcal{L}((t^\alpha)')(s) = s\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^\alpha},$$

während andererseits

$$\mathcal{L}(\alpha t^{\alpha-1})(s) = \alpha \mathcal{L}(t^{\alpha-1})(s) = \alpha \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}$$

ebenfalls wegen (19.30). Wir erhalten die *Funktionalgleichung der  $\Gamma$ -Funktion*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \text{für } \alpha \geq 1.$$

Diese Gleichung erlaubt die Berechnung von  $\Gamma(\alpha + k)$  für ganzzahliges  $k > 0$ , falls  $\Gamma(\alpha)$  bekannt ist. Beispielsweise ist

$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\Gamma(1/2)}{2s^{3/2}},$$

und die Berechnung von  $\Gamma(1/2)$  führt mit einer Variablensubstitution auf

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{1}{x} 2x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Die nicht ganz einfache Berechnung von  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  kann mit einem Trick geschehen. Sei  $\mathcal{J}_b := \int_0^b e^{-x^2} dx$ . Dann ist

$$\mathcal{J}_b^2 = \int_0^b e^{-x^2} dx \int_0^b e^{-y^2} dy = \iint_G e^{-x^2-y^2} d(x, y)$$

mit  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq b\}$ . Seien

$$G_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

und

$$G_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2b^2\}.$$

Dann sind  $G_1, G_2$  Viertel von Kreisscheiben mit  $G_1 \subseteq G \subseteq G_2$ , und folglich ist

$$\iint_{G_1} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \leq \mathcal{J}_b^2 \leq \iint_{G_2} e^{-x^2-y^2} d(x, y). \quad (19.31)$$

Diese Integrale können bequem mit Polarkoordinaten berechnet werden. Z.B. ist

$$\begin{aligned} \iint_{G_1} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_0^b \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^b e^{-r^2} (2r) dr \\ &= \frac{\pi}{4} (e^{-r^2}) \Big|_0^b = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-b^2}), \end{aligned}$$

so dass aus (19.31)

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-b^2}) \leq \mathcal{J}_b^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2b^2})$$

wird. Grenzübergang  $b \rightarrow \infty$  liefert

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{J}_b = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Damit ist  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  und

$$\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s^3}}. \quad \blacksquare$$

### Satz 19.19 (Dämpfung und Verschiebung)

a) Ist  $f$  Laplace-transformierbar,  $a \in \mathbb{R}$  und  $F = \mathcal{L}f$ , so ist

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t))(s) = F(s + a).$$

b) Die Laplace-Transformierte der um  $a > 0$  verschobenen Funktion

$$f_a(t) := \begin{cases} f(t - a) & \text{falls } t \geq a \\ 0 & \text{falls } t < a \end{cases}$$

ist  $(\mathcal{L}f_a)(s) = e^{-as} F(s)$ .

**Beispiel 20** Die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

heißt *Heaviside-Funktion*. Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = h(t) - h(t - a)$$

mit  $a > 0$  (Rechteckimpuls) hat die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(h)(s) - \mathcal{L}(h_a)(s) = \frac{1}{s} - e^{-as} \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-as}}{s}.$$

Der um  $2ka$  verschobene Rechteckimpuls

$$f_{2ka}(t) = h(t - 2ka) - h(t - a - 2ka)$$

hat dann die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f_{2ka})(s) = e^{-2kas} \frac{1 - e^{-as}}{s}.$$

Hieraus folgt für die Laplace-Transformierte der *Rechteckschwingung*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (h(t - 2ka) - h(t - (2k + 1)a))$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kas} \frac{1 - e^{-as}}{s} = \frac{1 - e^{-as}}{s(1 - e^{-2as})} = \frac{1}{s(1 + e^{-as})}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 21** Wegen  $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  ist nach dem Dämpfungssatz

$$\mathcal{L}(e^{-at} \cos(\omega t))(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad \blacksquare$$

Für zwei stückweise stetige Funktionen  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die durch

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - x)g(x) dx$$

definierte Funktion  $f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die *Faltung* von  $f$  und  $g$ .

**Satz 19.20 (Faltung)** Sind  $f, g$  Laplace-transformierbar mit  $\mathcal{L}f = F$  und  $\mathcal{L}g = G$ , so ist

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s) \cdot G(s).$$

**Beispiel 22** Aus  $\mathcal{L}(\sqrt{t})(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$  folgt mit dem Faltungssatz

$$\mathcal{L}(\sqrt{t} * \sqrt{t})(s) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{s^3}.$$

Andererseits ist nach Beispiel 17  $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4} \frac{\pi}{s^3}\right)(t) = \frac{\pi}{4} \frac{t^2}{2}$ . Also ist

$$\int_0^t \sqrt{(t-x)x} dx = \frac{\pi}{8} t^2. \quad \blacksquare$$

Wir sehen uns nun an einigen Beispielen an, wie sich die Laplace-Transformation zur Lösung linearer Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten einsetzen läßt.

**Beispiel 23** Seien  $p, y_0 \in \mathbb{R}$ . Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das AWP

$$y' + py = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0$$

liefert die Gleichung

$$s(\mathcal{L}y)(s) - y_0 + p(\mathcal{L}y)(s) = (\mathcal{L}f)(s)$$

mit der Lösung

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{(\mathcal{L}f)(s) + y_0}{s + p}.$$

Rücktransformation ergibt formal

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{(\mathcal{L}f)(s) + y_0}{s + p} \right) (t).$$

Beispielsweise findet man für das AWP

$$y' + 3y = \cos(5t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{\frac{s}{s^2+25} + 1}{s + 3} = \frac{s^2 + s + 25}{(s + 3)(s^2 + 25)}.$$

Da nicht unmittelbar ersichtlich ist, wie die Rücktransformation dieser rationalen Funktion aussieht, zerlegen wir sie in einfachere Summanden, deren Rücktransformation wir kennen. Dazu führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + s + 25}{(s + 3)(s^2 + 25)} &= \frac{1}{34} \left( \frac{31}{s + 3} + \frac{3s + 25}{s^2 + 25} \right) \\ &= \frac{1}{34} \left( 31 \frac{1}{s + 3} + 3 \frac{s}{s^2 + 25} + 5 \frac{5}{s^2 + 25} \right). \end{aligned}$$

Also ist nach Beispiel 15 und 18 und dem Streckungssatz

$$y(t) = \frac{1}{34}(31e^{-3t} + 3\cos(5t) + 5\sin(5t)). \quad \blacksquare$$

**Beispiel 24** Das AWP 2. Ordnung

$$y'' + py' + qy = f(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \quad \text{und} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

führt nach Laplace-Transformation und mit  $Y := \mathcal{L}y$  auf

$$s^2 Y(s) - sy_0 - y_1 + p(sY(s) - y_0) + qY(s) = (\mathcal{L}f)(s)$$

mit der Lösung

$$(\mathcal{L}y)(s) = Y(s) = \frac{(\mathcal{L}f)(s) + sy_0 + y_1 + py_0}{s^2 + ps + q}.$$

Die Lösung  $y$  des AWP erhält man durch Laplace-Rücktransformation. ■

**Beispiel 25** Das lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 + 1 \\ y_2' &= -2y_1 - y_2 - e^{-t} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

geht nach Laplace-Transformation und mit den Abkürzungen  $Y_1 = \mathcal{L}y_1$  und  $Y_2 = \mathcal{L}y_2$  über in das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sY_1(s) &= 3Y_1(s) + 2Y_2(s) + \frac{1}{s}, \\ sY_2(s) &= -2Y_1(s) - Y_2(s) - \frac{1}{s+1}, \end{aligned}$$

dessen Lösungen die Funktionen

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{s^2 + 1}{s(s+1)(s-1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}, \\ Y_2(s) &= \frac{-s^2 + s - 2}{s(s+1)(s-1)^2} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

sind. Die zugehörigen Originalfunktionen sind

$$y_1(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + te^t, \quad y_2(t) = -2 + e^{-t} + e^t - te^t. \quad \blacksquare$$

Die Schwierigkeit bei der Anwendung der Laplacetransformation liegt oft in der Durchführung der Rücktransformation  $\mathcal{L}^{-1}$ .

## 20 Rand- und Eigenwertaufgaben

Man spricht von einem Randwertproblem (RWP) für die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

wenn die  $n$  zusätzlichen Bedingungen, die die Lösung eindeutig charakterisieren sollen, nicht wie bei einem AWP an einer einzigen Stelle, sondern an zwei Stellen  $a < b$  gestellt werden, wobei die Lösung dann im Intervall  $[a, b]$  gesucht wird. Wegen ihrer Bedeutung in den Anwendungen beschränken wir uns auf RWP für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

### 20.1 Definitionen und Beispiele

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(Ay)(x) := y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad \text{auf } [a, b] \quad (20.1)$$

mit stetigen Funktionen  $a_0, a_1$  und  $f$  und linearen *Randbedingungen* (RB)

$$\begin{aligned} R_1 y &:= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \rho_1, \\ R_2 y &:= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \rho_2 \end{aligned} \quad (20.2)$$

mit vorgegebenen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho_1$  und  $\rho_2$ . Im Falle  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  und  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  spricht man von *Dirichlet-RB* oder *RB erster Art* und im Fall  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  und  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  von *Neumann-RB* oder *RB zweiter Art*. Falls  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , so heißen die RB *homogen*.

**Beispiel 1** Die Gleichung  $y'' + y = 0$  hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Zwei RB ergeben ein System von zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $c_1$  und  $c_2$ , das keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Beispielsweise existiert zu den RB

$$y(0) = 0, y(1) = 1 \quad \text{genau eine Lösung: } c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{\sin 1},$$

$$y(0) = 0, y(\pi) = 0 \quad \text{unendlich viele Lösungen: } c_1 = 0, c_2 \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 1, y(\pi) = 0 \quad \text{keine Lösung.} \quad \blacksquare$$

RWP sind also nicht stets lösbar, und wenn sie lösbar sind, muss die Lösung nicht eindeutig bestimmt sein.

**Satz 20.1** Seien  $A$  und  $f$  wie in (20.1) und  $R_1$  und  $R_2$  wie in (20.2). Weiter sei  $y_1, y_2$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung  $Ay = 0$ . Dann ist das inhomogene RWP

$$Ay = f, \quad R_1y = \rho_1, \quad R_2y = \rho_2 \quad (20.3)$$

genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det \begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Beweis** Ist  $y_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung  $Au = f$ , so läßt sich die allgemeine Lösung dieser Gleichung schreiben als

$$y = y_s + c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das RWP (20.3) ist daher genau dann eindeutig lösbar, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} R_1y &= R_1y_s + c_1R_1y_1 + c_2R_1y_2 = \rho_1 \\ R_2y &= R_2y_s + c_1R_2y_1 + c_2R_2y_2 = \rho_2 \end{aligned}$$

bzw. das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1R_1y_1 + c_2R_1y_2 &= \rho_1 - R_1y_s \\ c_1R_2y_1 + c_2R_2y_2 &= \rho_2 - R_2y_s \end{aligned}$$

eindeutig lösbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Determinante der Systemmatrix ungleich Null ist. ■

Wir wollen uns noch überlegen, dass man das RWP (20.3) stets auf ein RWP mit homogenen Randbedingungen zurückführen kann. Dazu wählen wir irgendeine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $y^*$  auf  $[a, b]$ , die die RB erfüllt, d.h. es sei  $R_1y^* = \rho_1$  und  $R_2y^* = \rho_2$ . Wir suchen nun die Lösung  $y$  von (20.3) in der Form  $y = y^* + u$  mit einer unbekanntem Funktion  $u$ . Aus

$$Ay = A(y^* + u) = Ay^* + Au = f$$

und

$$R_1y = R_1y^* + R_1u = \rho_1, \quad R_2y = R_2y^* + R_2u = \rho_2$$

folgt, dass  $u$  das RWP

$$Au = f - Ay^*, \quad R_1u = 0, \quad R_2u = 0$$

mit homogenen Randbedingungen lösen muss.

Beispielsweise erfüllt für das RWP

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

die Funktion  $y^*(x) = 2x$  die Randbedingung. Aus dem Ansatz  $y(x) = u(x) + 2x$  ergibt sich für  $u$  das RWP

$$u'' + u = 1 - 2x, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

## 20.2 Sturmische RWP und Greensche Funktion

Eine Differentialgleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (20.4)$$

mit stetigem  $a_1$  lässt sich stets in die Form

$$(p(x)y')' + q(x)y = g(x) \quad (20.5)$$

(oder kurz  $(py')' + qy = g$ ) bringen. Dazu multipliziert man (20.4) mit  $p(x) := \exp\left(\int_a^x a_1(t)dt\right)$  und erhält

$$p(x)y'' + a_1(x) \exp\left(\int_a^x a_1(t)dt\right)y' + a_0(x)p(x)y = p(x)f(x).$$

Wir setzen  $q(x) := a_0(x)p(x)$  und  $g(x) := f(x)p(x)$  und erhalten wegen

$$p(x)y'' + a_1(x) \exp\left(\int_a^x a_1(t)dt\right)y' = p(x)y'' + p'(x)y' = (p(x)y')'$$

die Form (20.5). Die Schreibweise (20.5) ist für viele Fragen vorteilhafter als (20.4).

**Definition 20.2** *Unter einem Sturmischen Randwertproblem versteht man die Aufgabe, eine Funktion  $y$  auf  $[a, b]$  zu bestimmen mit*

$$Ly := (p(x)y')' + q(x)y = g(x), \quad (20.6)$$

die den homogenen Randbedingungen

$$R_1y := \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = 0 \quad \text{und} \quad R_2y := \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = 0 \quad (20.7)$$

genügt. Dabei seien  $p$  stetig differenzierbar und positiv auf  $[a, b]$ ,  $q$  und  $g$  stetig auf  $[a, b]$  und  $(\alpha_1, \alpha_2)$  sowie  $(\beta_1, \beta_2)$  sind nicht die Nullvektoren.

Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, bedeutet die Annahme homogener RB keine wesentliche Einschränkung.

Wenn das Sturmische Randwertproblem (20.6), (20.7) eine eindeutig bestimmte Lösung  $y$  besitzt, so kann man diese, ausgehend von einem Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  der homogenen Gleichung  $Ly = 0$ , mittels Variation der Konstanten bestimmen. Man gelangt nach einigen Rechnungen zu einer Integraldarstellung der Lösung in der Form

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)g(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

mit einer gewissen stetigen Funktion  $G$  auf  $[a, b] \times [a, b]$ . Wir wollen diese Rechnung nicht durchführen, sondern nur das fertige Ergebnis angeben. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Wir nehmen im weiteren an, dass das homogene Sturmsche RWP

$$Ly = 0, \quad R_1y = 0, \quad R_2y = 0 \quad (20.8)$$

nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$  besitzt. Ist  $y_1, y_2$  irgendein Fundamentalsystem von  $Ly = 0$ , so ist nach Satz 20.1

$$\det \begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir definieren neue Funktionen  $v_1, v_2$  durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1y_2 & -R_1y_1 \\ R_2y_2 & -R_2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (20.9)$$

Da  $v_1, v_2$  Linearkombinationen von  $y$  und  $y_2$  sind, lösen sie ebenfalls die homogene Gleichung  $Ly = 0$ . Sie bilden sogar wieder ein Fundamentalsystem für diese Gleichung, da die Matrix in (20.9) nach Voraussetzung invertierbar ist:

$$\det \begin{pmatrix} R_1y_2 & -R_1y_1 \\ R_2y_2 & -R_2y_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Darüber hinaus erfüllen  $v_1$  und  $v_2$  zusätzlich die Randbedingungen

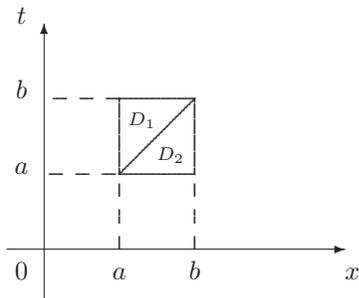
$$R_1v_1 = 0 \quad \text{und} \quad R_2v_2 = 0.$$

Weiter bezeichnen wir mit

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

die zu  $v_1$  und  $v_2$  gehörende Wronskideterminante. Schließlich zerlegen wir das Quadrat  $Q := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x, t \leq b\}$  in die beiden abgeschlossenen Dreiecke

$$D_1 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq t \leq b\}, \quad D_2 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq x \leq b\}.$$



Auf  $Q$  definieren wir eine Funktion  $G$  durch

$$G(x, t) := \begin{cases} \frac{v_1(x)v_2(t)}{p(a)W(a)} & \text{für } (x, t) \in D_1, \\ \frac{v_1(t)v_2(x)}{p(a)W(a)} & \text{für } (x, t) \in D_2. \end{cases} \quad (20.10)$$

Auf der Diagonalen  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x = t \leq b\}$  stimmen beide Definitionen offenbar überein. Die Division in (20.10) ist erlaubt, da  $p(a) > 0$  nach Voraussetzung und  $W(a) \neq 0$  (Wronskideterminante). Die durch (20.10) definierte Funktion heißt die *Greensche Funktion des RWP* (20.6), (20.7).

Hier sind einige Eigenschaften Greenscher Funktionen.

- (E1) Die Greensche Funktion  $G$  ist auf  $Q$  stetig.
- (E2) Die partiellen Ableitungen  $G_x$  und  $G_{xx}$  existieren auf jedem der Dreiecke  $D_1$  und  $D_2$  und sind dort stetig.
- (E3) Es gilt die *Sprungrelation*

$$G_x(x+0, x) - G_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)} \quad \text{für } x \in (a, b).$$

**Satz 20.3** *Wir betrachten das Sturmsche RWP aus Definition 20.2 unter der Voraussetzung, dass das zugehörige homogene Problem (20.8) nur die triviale Lösung  $y \equiv 0$  besitzt. Weiter sei  $v_1, v_2$  ein Fundamentalsystem von  $Lu = 0$  mit  $R_1v_1 = 0$  und  $R_2v_2 = 0$ , und  $G$  sei die mit  $v_1$  und  $v_2$  wie in (20.10) gebildete Greensche Funktion. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung  $y$  des Sturmschen RWP (20.6), (20.7) gegeben durch*

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)g(t) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (20.11)$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen unter Benutzung von (E1) - (E3), dass (20.11) tatsächlich eine Lösung ist.

**Beispiel 2** Wir bestimmen die Greensche Funktion zum RWP

$$Ly := y'' + y = f(x) \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(\pi) = 0.$$

Hier ist  $p = q = 1$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung  $Ly = 0$  ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Die Funktionen  $y_1(x) = \cos x$  und  $y_2(x) = \sin x$  bilden also ein Fundamentalsystem, und dieses erfüllt bereits

$$R_1y_1 = y_1'(0) = 0 \quad \text{und} \quad R_2y_2 = y_2(\pi) = 0.$$

Wir können also  $v_1 = y_1$ ,  $v_2 = y_2$  wählen und erhalten wegen

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

die Greensche Funktion

$$G(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t & \text{für } 0 \leq x \leq t \leq \pi, \\ \cos t \sin x & \text{für } 0 \leq t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

■

**Beispiel 3** Wir wollen das RWP

$$y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (20.12)$$

mittels Greenscher Funktion lösen. Zunächst überführen wir (20.12) in ein RWP mit homogenen RB. Die Funktion  $y^*(x) = x$  erfüllt die RB. Mit dem Ansatz  $y(x) = u(x) + y^*(x) = u(x) + x$  gelangen wir zum RWP

$$u'' - u = 3x, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (20.13)$$

für  $u$ . Dieses hat bereits die Form eines Sturmischen RWP mit  $p = 1$ . Die homogene Gleichung  $u'' - u = 0$  hat  $u_1(x) = e^x$ ,  $u_2(x) = e^{-x}$  als Fundamentalsystem. Wir benötigen aber ein Fundamentalsystem  $v_1, v_2$  mit  $v_1(0) = 0$  und  $v_2(1) = 0$ . Dieses können wir erraten oder wie in (20.9) errechnen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_1 u_2 & -R_1 u_1 \\ R_2 u_2 & -R_2 u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{-1} & -e^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x - e^{-x} \\ e^{x-1} - e^{1-x} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sinh x \\ \sinh(x-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir rechnen weiter mit

$$v_1(x) = \sinh x \quad \text{und} \quad v_2(x) = \sinh(x-1).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} \sinh x & \sinh(x-1) \\ \cosh x & \cosh(x-1) \end{pmatrix} \\ &= \sinh x \cosh(x-1) - \sinh(x-1) \cosh x = \sinh 1 \end{aligned}$$

und daher

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{\sinh x \sinh(t-1)}{\sinh 1} & \text{für } 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ \frac{\sinh t \sinh(x-1)}{\sinh 1} & \text{für } 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Für die Lösung  $u$  des RWP erhalten wir

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^1 G(x,t)g(t) dt = 3 \int_0^1 G(x,t) \cdot t dt \\
 &= 3 \int_0^x \frac{\sinh t}{\sinh 1} \sinh(x-1)t dt + 3 \int_x^1 \frac{\sinh x}{\sinh 1} \sinh(t-1)t dt \\
 &= 3 \frac{\sinh(x-1)}{\sinh 1} \int_0^x t \sinh t dt + 3 \frac{\sinh x}{\sinh 1} \int_x^1 t \sinh(t-1) dt \\
 &= 3 \left( \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x \right)
 \end{aligned}$$

(die Ausführung der partiellen Integration ist Hausaufgabe). Schließlich ist

$$y(x) = u(x) + y^*(x) = 3 \frac{\sinh x}{\sinh 1} - 2x$$

die Lösung des Ausgangs-RWP. ■

### 20.3 Die Wellengleichung

Eine Quelle für RWP und für Eigenwertaufgaben sind Separationsansätze für partielle Differentialgleichungen, von denen wir uns exemplarisch zwei ansehen. Weitere Beispiele (Eulersche Knicklast, Poisson-Gleichung) finden Sie im Arbeitsbuch Teil 2.

Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit einer Konstanten } a > 0 \quad (20.14)$$

für eine Funktion  $u$ , die von der „Zeit“  $t$  und dem „Ort“  $x$  abhängt, heißt *eindimensionale Wellengleichung*. Zusammen mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle } t \quad (20.15)$$

beschreibt sie z.B. eine schwingende Saite, die an den Punkten 0 und  $\pi$  fest eingespannt ist. Wir suchen Lösungen von (20.14), (20.15) in der Form

$$u(x,t) = v(x)w(t) \quad (20.16)$$

mit zu bestimmenden Funktionen  $v$  und  $w$ , die jeweils nur von einer der Veränderlichen abhängen. Ein solcher Ansatz heißt *Separationsansatz*. Wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)w(t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v(x)\ddot{w}(t)$$

erhalten wir aus (20.14)  $v(x)\ddot{w}(t) = a^2v''(x)w(t)$  und somit

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = a^2 \frac{v''(x)}{v(x)}. \quad (20.17)$$

Links steht eine Funktion von  $t$ , und rechts eine von  $x$ . Die Gleichheit (20.17) kann daher nur bestehen, wenn beide Seiten konstant sind, d.h. wenn es eine *Separationskonstante*  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = -a^2\lambda \quad \text{und} \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

bzw. mit

$$\ddot{w}(t) + a^2\lambda w(t) = 0 \quad \text{und} \quad v''(x) + \lambda v(x) = 0$$

gibt. Nun kommen noch die RB ins Spiel. Sie lauten  $v(0)w(t) = v(\pi)w(t) = 0$  für alle  $t$ . Schließen wir den physikalisch uninteressanten Fall der ruhenden Saite (mit  $w(t) = 0$  für alle  $t$ ) aus, so erhalten wir  $v(0) = v(\pi) = 0$ . Die Funktion  $v$  muss also das RWP

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0 \quad (20.18)$$

lösen. Natürlich ist  $v \equiv 0$  eine Lösung; wir benötigen aber nichttriviale Lösungen von (20.18), um hieraus nichttriviale Lösungen der Wellengleichung zu gewinnen. Nichttriviale Lösungen gibt es nicht für alle Werte des Parameters  $\lambda$ . Gibt es für ein  $\lambda$  eine nichttriviale Lösung von (20.18), so heißt  $\lambda$  ein *Eigenwert* und die Lösung eine zugehörige *Eigenfunktion* von (20.18).

Wir suchen also nichttriviale Lösungen von (20.18). Das charakteristische Polynom  $x^2 + \lambda = 0$  hat die Nullstellen  $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

*Fall 1:*  $\lambda < 0$ . Dann haben wir zwei einfache reelle Nullstellen  $x_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|}$  des charakteristischen Polynoms, und die Funktionen

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|x}} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|x}}$$

bilden die allgemeine Lösung von  $v'' + \lambda v = 0$ . Um die RB zu erfüllen, muss

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ v(\pi) &= c_1 e^{\sqrt{|\lambda|\pi}} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} = 0 \end{aligned}$$

sein. Dieses Gleichungssystem hat wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|\pi}} & e^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} - e^{\sqrt{|\lambda|\pi}} \neq 0$$

nur die triviale Lösung  $c_1 = c_2 = 0$ . Also ist  $v(x) = 0$  für alle  $x$ .

*Fall 2:*  $\lambda = 0$ . Dann ist 0 eine doppelte Nullstelle und

$$v(x) = c_1 + c_2x$$

die allgemeine Lösung von  $v'' + \lambda v = 0$ . Wie in Fall 1 erhält man, dass nur die Funktion  $v \equiv 0$  (mit  $c_1 = c_2 = 0$ ) die RB erfüllt.

*Fall 3:*  $\lambda > 0$ . Dann sind  $\pm i\sqrt{\lambda}$  die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und die allgemeine Lösung  $v$  von  $v'' + \lambda v = 0$  ist

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Die RB lauten nun

$$\begin{aligned} v(0) &= c_1 = 0, \\ v(\pi) &= c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{aligned}$$

Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss  $\sqrt{\lambda}\pi$  eine Nullstelle des Sinus sein. Also ist  $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bzw.  $\lambda = n^2$ . Die Quadratzahlen sind also die Eigenwerte von (20.18), und die Funktionen

$$v_n(x) = c \sin(nx)$$

sind die zugehörigen Eigenfunktionen.

Nun müssen wir noch die Differentialgleichung  $\ddot{w}(t) + a^2n^2w(t) = 0$  lösen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$w_n(t) = c_1 \cos(ant) + c_2 \sin(ant),$$

so dass schließlich jede der Funktionen

$$u_n(x, t) = \sin(nx)(A_n \cos(ant) + B_n \sin(ant)), \quad n \in \mathbb{N} \quad (20.19)$$

eine Lösung der Wellengleichung ist.

Insbesondere sehen wir, dass die Lösung der Wellengleichung (20.14) durch die Randbedingung (20.15) noch nicht eindeutig festgelegt ist. Vielmehr haben wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Lösung  $u_n$  gefunden, und auch alle Linearkombinationen der Funktionen (20.19) lösen (20.14) mit (20.15). Die Eindeutigkeit der Lösung kann man erzwingen, wenn man zusätzlich zu den RB (20.15) noch *Anfangsbedingungen*

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) \quad (20.20)$$

auf  $[0, \pi]$  mit geeigneten Funktionen  $g$  und  $h$  vorgibt.

Man sucht dann eine Lösung  $u$  der Wellengleichung (20.14) mit den RB (20.15) in der Form einer unendlichen Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) (A_n \cos(ant) + B_n \sin(ant))$$

und versucht, die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingungen (20.20) erfüllt sind. In unserem Fall führt das auf

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) = g(x)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} anB_n \sin(nx) = h(x).$$

Wir stoßen also auf das Problem, willkürliche Funktionen  $g$  und  $h$  nach den Eigenfunktionen eines RWP zu entwickeln. Im vorliegenden Fall sind diese Eigenfunktionen Sinusfunktionen. Zuständig hierfür ist die Theorie der Fourierreihen, die wir in Abschnitt 12.4 kennen gelernt haben.

## 20.4 Die Wärmeleitgleichung

Die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{mit } a > 0 \quad (20.21)$$

heißt *eindimensionale Wärmeleitgleichung*. Sie beschreibt z.B. die Temperaturverteilung in einem Stab (vgl. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 221-222). Wir betrachten sie zusammen mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) + \delta u(\ell, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0 \quad (20.22)$$

mit einem Materialparameter  $\delta > 0$  und mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{für } x \in [0, \ell]. \quad (20.23)$$

Zunächst betrachten wir das RWP (20.21) mit (20.22). Ein Separationsansatz  $u(x, t) = v(x)w(t)$  führt wie in Abschnitt 20.3 auf das RWP

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(\ell) + \delta v(\ell) = 0 \quad (20.24)$$

für  $v$  und die Differentialgleichung  $\dot{w} + a^2 \lambda w = 0$  für  $w$ . Man kann sich wieder davon überzeugen, dass das RWP (20.24) nur für  $\lambda > 0$  nichttriviale Lösungen besitzen kann. In diesem Fall ist wieder

$$v(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  die allgemeine Lösung von  $v'' + \lambda v = 0$ . Um die RB zu befriedigen, muss

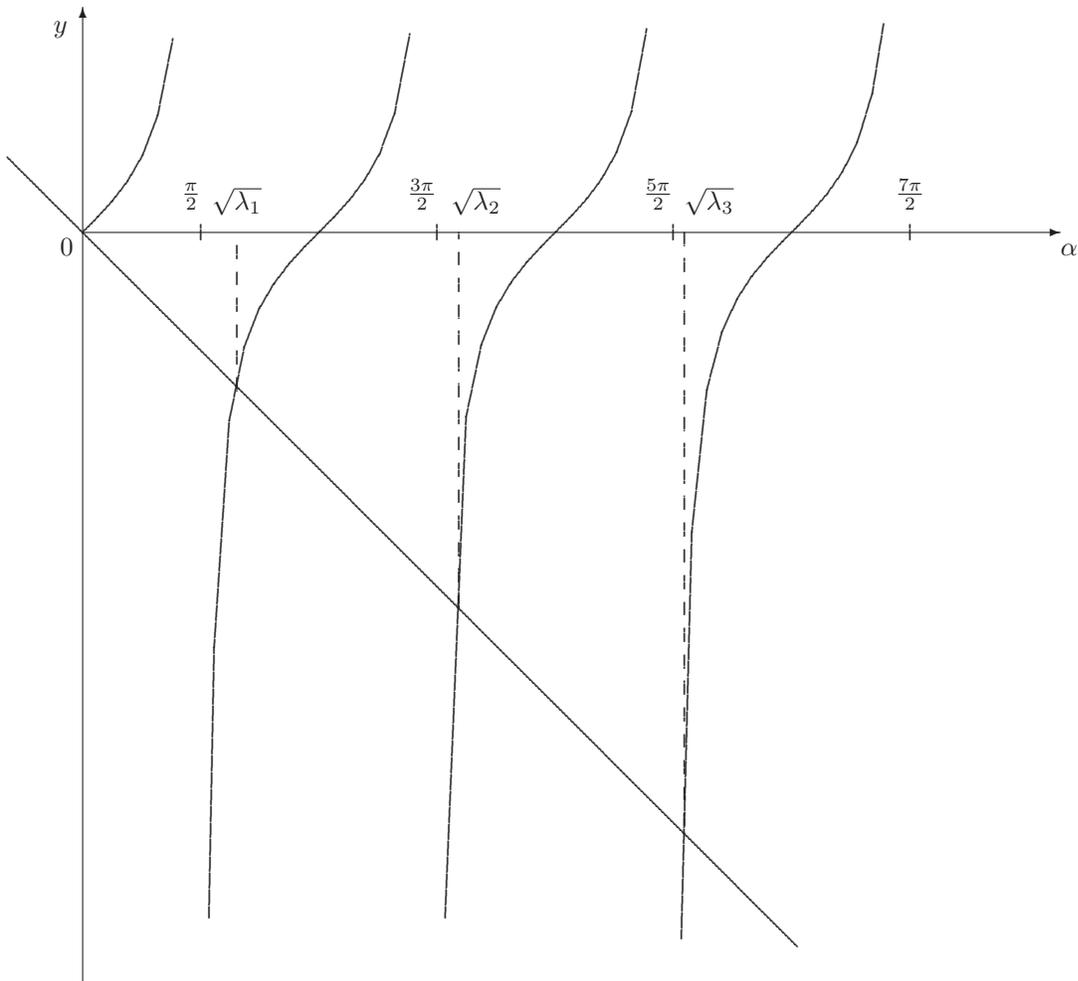
$$v(0) = c_1 = 0$$

$$\text{und } v'(\ell) + \delta v(\ell) = c_2(\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\ell) + \delta \sin(\sqrt{\lambda}\ell)) = 0$$

sein. Damit wir  $c_2 \neq 0$  wählen können, muss also

$$\tan(\sqrt{\lambda}\ell) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\delta} \quad (20.25)$$

sein. Die direkte Lösung dieser Gleichung scheitert. Man kann sich aber überlegen, dass sie unendlich viele positive Lösungen  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  mit  $\lambda_n \rightarrow \infty$  besitzt. Wählen wir z.B.  $\ell = \delta = 1$  und setzen  $\sqrt{\lambda} = \alpha$ , so haben wir statt (20.25) die Gleichung  $\tan \alpha = -\alpha$ , deren Lösungen sich graphisch veranschaulichen lassen:



Näherungsweise gilt  $\lambda_1 = 4, 11587$ ,  $\lambda_2 = 24, 13934$ ,  $\lambda_3 = 63, 65917$ . Wir erhalten also wieder eine unendliche Folge von Eigenwerten  $\lambda_n$  mit zugehörigen Eigenfunktionen  $v_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$ . Die Bestimmung des zweiten Faktors  $w$  aus der Differentialgleichung  $\dot{w} + a^2\lambda_n w = 0$  ist nun einfach und liefert

$$w_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

so dass schließlich jede der Funktionen

$$u_n(x, t) = c_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) e^{-a^2\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

das RWP (20.21), (20.22) löst.

Nun versuchen wir, auch die Anfangsbedingung (20.23) zu erfüllen. Dazu wählen wir als Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) e^{-a^2\lambda_n t}$$

und versuchen, die Koeffizienten  $c_n$  so zu bestimmen, dass

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = f(x).$$

Wieder stehen wir vor dem Problem, eine Funktion  $f$  nach den Eigenfunktionen eines RWP zu entwickeln. Diesmal hilft uns aber der Hinweis auf die klassischen Fourierreihen nicht weiter. Man kann aber zeigen, dass sich die Funktionen

$$e_n(x) := \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \quad n \in \mathbb{N},$$

in vielerlei Hinsicht ähnlich verhalten wie die für die Fourierreihen wichtigen Funktionen  $\sin(nx)$ . Z.B. gilt wieder eine Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\ell e_m(x) e_n(x) dx = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Dies führt uns bereits in die allgemeine Theorie der orthogonalen oder Fourierreihen. Wer sich hiermit weiter beschäftigen möchte, dem werden die Vorlesungen „Elementare partielle Differentialgleichungen“ und „Funktionalanalysis und Integralgleichungen“ empfohlen.

## 21 Komplexe Differentiation

Wir wenden uns nun der (komplexen) Funktionentheorie zu und beschäftigen uns mit komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Solche Funktionen lassen sich ebenfalls differenzieren und integrieren. Man gewinnt dabei überraschende Einsichten auch in die Eigenschaften reeller Funktionen. Die moderne Funktionentheorie besticht sowohl durch ihre innere Schönheit und Eleganz als auch durch ihre vielfältigen Anwendungen, die von der Berechnung von Tragflügelströmungen bis zum Beweis des Primzahlsatzes reichen.

### 21.1 Die komplexe Zahlenebene

Im Abschnitt 1.3 haben wir komplexe Zahlen eingeführt als Paare  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  reeller Zahlen, die man addieren

$$(s, t) + (x, y) = (s + x, t + y)$$

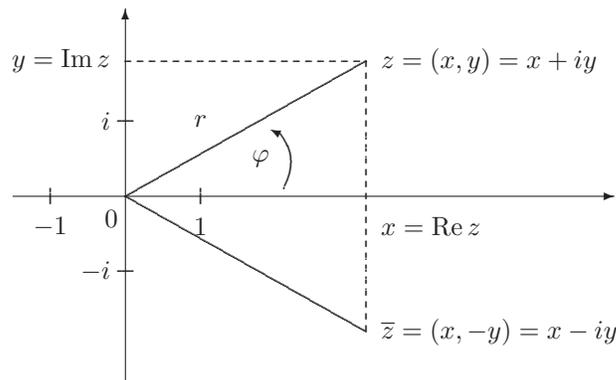
und multiplizieren

$$(s, t) \cdot (x, y) = (sx - ty, tx + sy)$$

kann. versehen mit diesen Operationen wird die Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ein Körper. Übliche Schreibweisen der komplexen Zahl  $z = (x, y)$  sind  $z = x + iy$  mit  $i = (0, 1)$  (imaginäre Einheit) sowie

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

wobei  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  für den Betrag und  $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$  für das Argument der Zahl  $z$  stehen.



Da man  $\mathbb{C}$  mit der Ebene  $\mathbb{R}^2$  identifizieren kann und der Betrag  $|z|$  der komplexen Zahl  $z = (x, y)$  nichts anderes als die Euklidische Norm  $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist, kann man die im zweiten Semester eingeführten Begriffe für Punktmenge, Abbildungen usw. im  $\mathbb{R}^n$  problemlos auf  $\mathbb{C}$  übertragen. Wir erinnern an einige dieser Begriffe.

Für  $r > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  heißt

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die  $r$ -Umgebung von  $z_0$ . Diese stellt eine Kreisscheibe vom Radius  $r$  und mit Mittelpunkt  $z_0$  ohne ihren Rand dar. Die Begriffe innerer Punkt, Häufungspunkt, Randpunkt sowie offene Menge, abgeschlossene Menge, kompakte Menge, Rand und auch Inneres und Abschließung einer Menge definieren wir wie in Abschnitt 13.1.

Eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein *Weg*, und

$$\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$$

heißt die zugehörige *Kurve*. Einen Weg in  $\mathbb{C}$  kann man darstellen als  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  mit reellwertigen Funktionen  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Der Weg  $\gamma$  heißt *stetig differenzierbar*, wenn  $x, y$  stetig differenzierbare Funktionen sind. Wir wollen  $\gamma$  *glatt* nennen, wenn zusätzlich noch  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \neq 0$  (oder  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0$ ) für alle  $t \in [a, b]$  ist. Weitere Begriffe wie Anfangs- und Endpunkt, geschlossene Wege, doppeltpunktfreie Wege, Parametrisierungen u.s.w. finden Sie in Abschnitt 14.1.

Eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{C}$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten  $m_1, m_2 \in M$  ein Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  existiert, der  $z_1$  mit  $z_2$  verbindet und der ganz in  $M$  verläuft. Eine offene wegzusammenhängende Menge in  $\mathbb{C}$  heißt ein *Gebiet*.

Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen heißt *konvergent*, wenn es ein  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_n| \rightarrow 0$  gibt. Wir schreiben dann

$$\lim z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Es gelten das Cauchy Kriterium und die Rechenregeln wie im Reellen.

Sei  $(z_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen. Dann heißt die Folge  $(s_n)_{n \geq 0}$  der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n$$

eine unendliche *Reihe*, die wir mit  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  bezeichnen. Konvergiert die Folge der Partialsummen gegen  $s \in \mathbb{C}$ , so schreiben wir  $s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , und wir nennen die Reihe *konvergent* und  $s$  die *Summe* der Reihe. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$  konvergiert. Absolut konvergente Reihen sind konvergent. Zum Nachweis der absoluten Konvergenz stehen die aus Abschnitt 2.4 bekannten Kriterien (Majorantenkriterium, Wurzelkriterium und Quotientenkriterium) zur Verfügung.

Das *Cauchyprodukt* der Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut, wenn die Ausgangsreihen absolut konvergieren.

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine Folge komplexer Zahlen, und seien  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann heißt die komplexe Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt  $z_0$ , und die Zahlen  $a_n$  heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe. Für jede Potenzreihe gibt es ein  $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ , den *Konvergenzradius* der Reihe, so dass die Reihe für  $|z - z_0| < R$  absolut konvergiert und für  $|z - z_0| > R$  divergiert. Für Punkte  $z$  mit  $|z - z_0| = R$  läßt sich ohne weiteres keine Aussage treffen. Zu komplexen Potenzreihen gehört also eine offene Kreisscheibe, auf der sie konvergieren. Der Konvergenzradius berechnet sich aus

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{oder} \quad R = \left( \lim \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

falls diese Grenzwerte existieren. Im allgemeinen Fall ist

$$R = \left( \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

**Beispiel** Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2-i}{5} \right)^n (z+i-1)^n \tag{21.1}$$

mit dem Entwicklungspunkt  $z_0 = 1 - i$  ist  $a_n = \left( \frac{2-i}{5} \right)^n$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2-i}{5} \right|^n} = \left| \frac{2-i}{5} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Also ist die Reihe (21.1) für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z+i-1| < \sqrt{5}$  absolut konvergent und für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z+i-1| > \sqrt{5}$  divergent. Für die Punkte  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z+i-1| = \sqrt{5}$  können wir ohne weitere Untersuchung keine Aussage treffen. ■

## 21.2 Komplexe Funktionen

Eine komplexe Funktion  $f$  ist auf einer nichtleeren Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{C}$  definiert und ordnet jedem Punkt  $z \in D$  eine komplexe Zahl  $f(z)$  zu. Stellen wir  $z$  und  $f(z)$  durch Real- und Imaginärteil in der Form

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv$$

dar, so können wir  $u$  und  $v$  als reellwertige Funktionen der zwei reellen Veränderlichen  $x, y$  auffassen:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Die Funktion  $u$  und  $v$  heißen der *Real-* und der *Imaginärteil* von  $f$ .

**Beispiele** Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$  bildet  $z = x + iy$  auf

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

ab. Also ist

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  bildet  $z = x + iy$  auf

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

ab. Also ist

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

■

Die graphische Veranschaulichung komplexer Funktionen ist schwieriger als die reeller Funktionen, da der Graph eine Teilmenge von  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$  ist. Oft begnügt man sich damit, eine Ebene für den Definitionsbereich und eine für den Wertebereich zu zeichnen und durch geeignete Markierungen zu verdeutlichen, welche Punkte der einen Ebene durch die Funktion den Punkten der anderen Ebene zugeordnet werden.

Grenzwerte und Stetigkeit komplexer Funktionen erklären wir wie früher.

**Definition 21.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , und  $z_0$  sei ein Häufungspunkt von  $D$ . Wenn für jede Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  von Punkten in  $D \setminus \{z_0\}$  mit  $\lim z_n = z_0$  die Folge  $(f(z_n))_{n \geq 1}$  der Funktionswerte gegen ein- und dieselbe komplexe Zahl  $g$  konvergiert, so heißt  $g$  der Grenzwert von  $f$  für  $z \rightarrow z_0$ . Man schreibt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g \quad \text{oder} \quad f(z) \rightarrow g \quad \text{für} \quad z \rightarrow z_0.$$

Ist  $z_0 \in D$  und gilt  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , so heißt  $f$  stetig an der Stelle  $z_0$ .

Für den Umgang mit Grenzwerten komplexer Funktionen gelten die gleichen Regeln wie im Reellen (Abschnitt 3.1). Auch sind Summe, Produkt und Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig. Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist in allen Punkten stetig, wo er definiert ist, d.h. wo die Nennerfunktion ungleich 0 ist.

Eine wichtige Klasse stetiger Funktionen wird durch Potenzreihen beschrieben.

**Satz 21.2** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist die durch  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  definierte Funktion stetig auf der offenen Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}.$$

Wir sehen uns einige weitere Beispiele komplexer Funktionen an.

Die Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z + c$  mit  $c \in \mathbb{C}$  heißen *Translationen*, da sie eine Verschiebung (Translation) der komplexen Ebene um  $c$  bewirken. Translationen sind stetig und bijektiv.

Die Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto az$  mit  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  heißen *Drehstreckungen*. Ist nämlich  $a = re^{i\varphi}$ , so hat der Bildpunkt von  $z$  den Betrag  $r|z|$  (Streckung um den Faktor  $r > 0$ ) und das Argument  $\varphi + \arg z$  (Drehung um den Winkel  $\varphi$ ). Auch Drehstreckungen sind stetig und bijektiv.

Eine Funktion der Gestalt  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  heißt *Polynom*. Polynome sind stetig auf  $\mathbb{C}$ . Quotienten zweier Polynome  $f, g$  mit  $g \neq 0$  heißen *rationale Funktionen*. Diese sind überall dort definiert und stetig, wo das Nennerpolynom  $g$  keine Nullstelle hat.

Ausführlicher sehen wir uns die Exponentialfunktion an. Wir definieren sie im Komplexen durch

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (21.2)$$

Die absolute Konvergenz dieser Reihe auf ganz  $\mathbb{C}$  haben wir bereits in Abschnitt 2.4 festgestellt. Nach Satz 21.2 ist die Exponentialfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig. Für  $z = x \in \mathbb{R}$  ist  $e^z = e^x$ , d.h. wir erhalten die in 3.2 eingeführte reelle Exponentialfunktion. Für  $z = iy$  mit  $y \in \mathbb{R}$  wird wegen

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, 4, 8, 12, 16, \dots \\ i & \text{für } n = 1, 5, 9, 13, 17, \dots \\ -1 & \text{für } n = 2, 6, 10, 14, 18, \dots \\ -i & \text{für } n = 3, 7, 11, 15, 19, \dots \end{cases}$$

und

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right),$$

also

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \quad (21.3)$$

In Abschnitt 1.3 haben wir diese Schreibweise rein formal eingeführt. Wie im Reellen kann man nachrechnen, dass

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (21.4)$$

Damit ergibt sich für  $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion sind also gegeben durch

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Damit ist auch eine weitere Eigenschaft der komplexen Exponentialfunktion klar: Sie ist  $2\pi i$ -periodisch, d.h.

$$e^z = e^{z+2\pi i} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Exponentialfunktion im Komplexen ist also *nicht* injektiv. Sie wird injektiv, wenn wir sie (z.B.) nur auf dem *Streifen*

$$S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

betrachten. Die Bildmenge der komplexen Exponentialfunktion ist  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (der Punkt 0 wird wegen  $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$  nicht angenommen). Jeder Funktionswert wird dabei wegen der Periodizität unendlich oft angenommen. Die Einschränkung

$$\exp : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

der Exponentialfunktion ist eine Bijektion. Ihre Umkehrabbildung

$$\operatorname{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S$$

heißt *komplexe Logarithmusfunktion* (genauer: der Hauptwert des komplexen Logarithmus). Ihre Funktionswerte kann man einfach über die Polarkoordinatendarstellung berechnen: Ist  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $r > 0$  und  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , so ist

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(r e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$$

mit der reellen Logarithmusfunktion  $\ln$ . Die komplexe Logarithmusfunktion ist unstetig in allen Punkten der negativen Halbachse. Es gilt nämlich für jedes  $r > 0$  und für  $n \rightarrow \infty$

$$r e^{i(-\pi + \frac{1}{n})} \rightarrow -r \quad \text{und} \quad r e^{i(\pi - \frac{1}{n})} \rightarrow -r,$$

aber

$$\operatorname{Ln}(re^{i(-\pi+\frac{1}{n})}) \rightarrow \ln r - \pi i \quad \text{und} \quad \operatorname{Ln}(re^{i(\pi-\frac{1}{n})}) \rightarrow \ln r + \pi i.$$

Nur der zweite Grenzwert ist der Funktionswert an der Stelle  $-r$ . In allen übrigen Punkten der Definitionsmenge, also in der entlang der negativen Achse *geschlitzten* komplexen Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , ist die komplexe Logarithmusfunktion stetig.

Die *komplexen trigonometrischen Funktionen* werden durch die auf ganz  $\mathbb{C}$  konvergenten Potenzreihen

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

definiert. Man rechnet leicht nach, dass

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{21.5}$$

und

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{sowie} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt. Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen sind also eng miteinander verwandt. Aus (21.4) und (21.5) folgen auch leicht die üblichen Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion. Schließlich ist für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

(Nachrechnen!), so dass der Real- und der Imaginärteil der komplexen Sinusfunktion gleich

$$u(x, y) = \sin x \cosh y, \quad v(x, y) = \cos x \sinh y$$

sind.

Analog ist

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Sinus- und Kosinusfunktion sind auf ganz  $\mathbb{C}$  stetig. Schließlich erklären wir die *komplexen Hyperbelfunktionen* durch

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Beide Funktionen sind auf  $\mathbb{C}$  stetig.

### 21.3 Differentiation im Komplexen

Die folgende Definition ist der Definition der Differenzierbarkeit im Reellen nachgebildet. Wie wir aber bald sehen werden, ist die komplexe Differenzierbarkeit eine wesentlich stärkere Eigenschaft als die reelle Differenzierbarkeit mit z.T. verblüffenden Konsequenzen.

**Definition 21.3** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $z_0$  ein innerer Punkt von  $D$ . Wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (21.6)$$

existiert, so heißt  $f$  an der Stelle  $z_0$  komplex differenzierbar, und der Grenzwert (21.6) heißt die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z_0$  und wird mit  $f'(z_0)$  bezeichnet. Ist  $D$  offen und  $f$  in jedem Punkt von  $D$  differenzierbar, so heißt  $f$  holomorph auf  $D$ .

Statt holomorph sind auch die Bezeichnungen *regulär* und *analytisch* gebräuchlich. Für holomorphe Funktionen gelten die aus dem Reellen bekannten Regeln über die Differenzierbarkeit von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten (vgl. Abschnitt 4.2) ebenso unverändert weiter wie die Kettenregel.

**Beispiele** Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ . Die lineare Funktion  $f(z) = az + b$  ist auf  $\mathbb{C}$  holomorph, und es ist für  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(az + b) - (az_0 + b)}{z - z_0} = a.$$

Ebenso leicht sieht man, dass alle Polynome  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph sind und dass wie gewohnt gilt

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

Dagegen ist die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  in *keinem* Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar. Es ist nämlich sowohl  $z_0 + \frac{1}{n} \rightarrow z_0$  als auch  $z_0 + \frac{i}{n} \rightarrow z_0$  für  $n \rightarrow \infty$ , jedoch

$$\frac{\overline{z_0 + \frac{1}{n} - z_0}}{z_0 + \frac{1}{n} - z_0} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{z_0 + \frac{i}{n} - z_0}}{z_0 + \frac{i}{n} - z_0} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1.$$

■

Der folgende Satz garantiert die komplexe Differenzierbarkeit vieler wichtiger Funktionen.

**Satz 21.4** Die komplexe Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  habe den Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist die durch  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  definierte Funktion auf der offenen Kreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  holomorph, und ihre Ableitung ist gleich

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Diese „abgeleitete“ Potenzreihe hat wieder den Konvergenzradius  $R$ .

Man darf Potenzreihen also gliedweise komplex differenzieren. Satz 21.4 liefert die Holomorphie der komplexen Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion auf ganz  $\mathbb{C}$ . Dabei ist

$$\begin{aligned}(\exp z)' &= (1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots)' = 1 + 2\frac{z}{2!} + 3\frac{z^2}{3!} + \dots = \exp z, \\(\sin z)' &= (\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots)' = 1 - 3\frac{z^2}{3!} + 5\frac{z^4}{5!} - \dots = \cos z\end{aligned}$$

und analog  $(\cos z)' = -\sin z$ . Auch die Hyperbelfunktionen sind auf  $\mathbb{C}$  holomorph, und es ist

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad \text{sowie} \quad (\cosh z)' = \sinh z.$$

Sei wieder  $z = x + iy$  und  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Wir stellen nun einen Zusammenhang her zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0$  und der (reellen) Differenzierbarkeit von  $u$  und  $v$  in  $(x_0, y_0)$ .

**Satz 21.5** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (a) Ist  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$  komplex differenzierbar, so sind  $u$  und  $v$  in  $(x_0, y_0)$  partiell differenzierbar, und es ist

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (21.7)$$

- (b) Sind  $u$  und  $v$  auf  $D$  stetig partiell differenzierbar und gelten dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (21.8)$$

so ist  $f$  auf  $D$  holomorph, und in jedem Punkt  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$  gilt

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = -i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)). \quad (21.9)$$

**Beweis von Aussage (a)** Sei  $f$  in  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

soll existieren. Lassen wir  $h$  entlang der reellen Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir  $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so folgt

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\&= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)\end{aligned}$$

(man beachte, dass eine Folge in  $\mathbb{C}$  genau dann konvergiert, wenn die Folgen ihrer Real- und Imaginärteile in  $\mathbb{R}$  konvergieren). Lassen wir dagegen  $h$  entlang der imaginären Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir  $h = it$  mit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so folgt analog

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{it} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\ &= \frac{1}{i} (u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil in den beiden erhaltenen Ausdrücken für  $f'(z_0)$  liefert (21.7). ■

**Beispiel 1** Die Funktion  $f(z) = |z|^2$  hat den Realteil  $u(x, y) = x^2 + y^2$  und den Imaginärteil  $v(x, y) = 0$ . Beide Funktionen sind auf  $\mathbb{R}^2$  stetig partiell differenzierbar mit den Ableitungen

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = 2y, \quad v_x(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = 0.$$

Komplexe Differenzierbarkeit von  $f$  kann daher höchstens im Punkt  $z_0 = 0$  vorliegen, da nur dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Wegen

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \bar{z} \rightarrow 0$$

ist in diesem Punkt  $f$  tatsächlich komplex differenzierbar, und  $f'(0) = 0$ . Ebenso einfach zeigt man, dass die Funktionen  $z \mapsto \operatorname{Re} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{Im} z$  und  $z \mapsto \bar{z}$  nirgendwo komplex differenzierbar sind.

**Beispiel 2** Wir betrachten die komplexe Logarithmusfunktion  $\operatorname{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ , die den Punkt  $z = r e^{i\varphi}$  mit  $r > 0$  und  $-\pi < \varphi \leq \pi$  in  $\ln r + i\varphi$  überführt. Real- und Imaginärteil dieser Funktion sind für  $x > 0$

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Diese Funktionen haben für  $x > 0$  die partiellen Ableitungen

$$u_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

sowie

$$v_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Nach Satz 21.5 (b) ist die komplexe Logarithmusfunktion holomorph in der rechten Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x > 0\}$ , und ihre Ableitung ist dort

$$\operatorname{Ln}'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Mit mehr Aufwand kann man zeigen, dass die Funktion  $\operatorname{Ln}$  sogar in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  holomorph ist und dass ihre Ableitung gleich  $\operatorname{Ln}'(z) = \frac{1}{z}$  ist. ■

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern eine sehr einschränkende Bedingung dafür, wann eine (reell) differenzierbare Funktion  $u$  der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

**Satz 21.6** Sei  $D$  offen und  $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$  in  $D$  holomorph. Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  zweimal stetig partiell differenzierbar auf  $D$ , so gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (21.10)$$

**Beweis** Aus der Holomorphie von  $f$  folgt  $u_x = v_y$  und  $u_y = -v_x$ . Erneutes Ableiten ergibt  $u_{xx} = v_{yx}$ ,  $u_{xy} = v_{yy}$ ,  $u_{yx} = -v_{xx}$  und  $u_{yy} = -v_{xy}$ . Daher ist  $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$  sowie  $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy}$ . Nach dem Satz von Schwarz (Satz 13.11) ist aber  $v_{xy} = v_{yx}$  und  $u_{xy} = u_{yx}$ , so dass (21.10) unmittelbar folgt. ■

Wir werden später sehen, dass die geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften von  $u$  und  $v$  überflüssig sind, da sie bereits aus der Holomorphie von  $f$  folgen. Mit Hilfe des Laplaceoperators  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  können wir (21.10) auch schreiben als

$$\Delta u = 0 \quad \text{und} \quad \Delta v = 0.$$

Die Gleichung  $\Delta u = 0$  heißt *Laplacesche Differentialgleichung* oder *Potentialgleichung*, und ihre Lösungen heißen *harmonische Funktionen*.

**Folgerung 21.7** Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind harmonische Funktionen.

## 21.4 Konforme Abbildungen

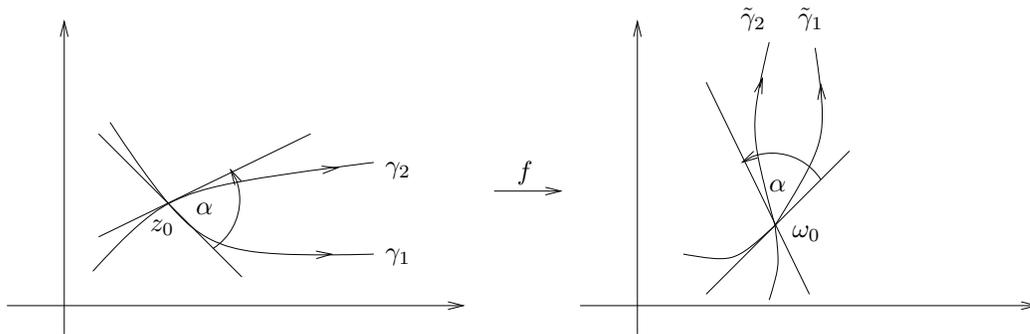
Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in D$  sei ein Punkt mit  $f'(z_0) \neq 0$ . Wir betrachten einen glatten Weg  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ , der durch  $z_0$  verläuft. Sei etwa  $z_0 = \gamma(t_0)$  mit einem  $t_0 \in (a, b)$ . Dann schließt die Tangente an  $\gamma$  im Punkt  $z_0$  mit der positiven reellen Achse den Winkel  $\varphi = \arg \dot{\gamma}(t_0)$  ein (für  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  ist  $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$  der Tangentialvektor). Durch  $f$  wird der Weg  $\gamma$  in den Weg

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(\gamma(t))$$

überführt. Er führt durch den Punkt  $w_0 = f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = \tilde{\gamma}(t_0)$ . Der Weg  $\tilde{\gamma}$  ist ebenfalls glatt. Die Tangente an  $\tilde{\gamma}$  im Punkt  $w_0$  schließt mit der positiven reellen Achse den Winkel

$$\begin{aligned} \arg \dot{\tilde{\gamma}}(t_0) &= \arg \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \arg (f'(\gamma(t_0)) \cdot \dot{\gamma}(t_0)) \\ &= \arg f'(z_0) + \varphi \end{aligned}$$

ein (bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$ ). Durch die Abbildung  $f$  wird also der Weg  $\gamma$  lokal (nahe bei  $z_0$ ) um den Winkel  $\arg f'(z_0)$  gedreht. Dies gilt für alle glatten Wege durch  $z_0$ . All diese Wege werden lokal um den gleichen Winkel  $\arg f'(z_0)$  gedreht. Schneiden sich also zwei glatte Wege  $\gamma_1, \gamma_2$  in  $z_0$ , so bleibt ihr Schnittwinkel nach Überführung in die Wege  $\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$  und  $\tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$  erhalten. Diese Eigenschaft heißt *Winkeltreue* der Abbildung  $f$  im Punkt  $z_0$ .



Wir betrachten nun eine Folge  $(z_n)_{n \geq 1}$  mit  $z_n \rightarrow z_0$ , die in  $D$  liegt. Dann konvergiert die Folge der Bildpunkte  $w_n := f(z_n)$  gegen  $w_0 := f(z_0)$ . Die Abstände  $|z_n - z_0|$  und  $|w_n - w_0|$  konvergieren also gegen 0, und die Quotienten  $|w_n - w_0|/|z_n - z_0|$  kann man als Verzerrungsfaktoren für die Abbildung  $f$  in der Nähe von  $z_0$  betrachten. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n - w_0|}{|z_n - z_0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

sind diese Verzerrungsfaktoren für große  $n$  (d.h. wenn  $z_n$  nahe bei  $z_0$  liegt) näherungsweise gleich  $|f'(z_0)|$  und damit unabhängig von der speziell gewählten Folge  $(z_n)$ . Die Verzerrung durch die Abbildung  $f$  ist also unabhängig von der Richtung. Man sagt daher, dass  $f$  lokal (nahe bei  $z_0$ ) *maßstabstreu* ist. Eine in  $z_0$  lokal maßstabstreu und winkeltreue Abbildung heißt *konform* in  $z_0$ .

**Satz 21.8** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann vermittelt  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in D$  mit  $f'(z_0) \neq 0$  eine konforme Abbildung.

Wie die komplexe Exponentialfunktion zeigt, kann man durch konforme Abbildungen z.B. Rechtecke auf Kreissegmente oder Streifen auf die geschlitzte komplexe Ebene abbilden. Es ist erstaunlich, dass es mit geeigneten konformen Abbildungen gelingt, sehr unregelmäßige Gebiete auf einfache Gebiete (wie eine offene Kreisscheibe) abzubilden.

**Definition 21.9** Ein Gebiet  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt einfach zusammenhängend, wenn mit jeder ganz in  $D$  verlaufenden geschlossenen doppelpunktfreien Kurve auch deren Innengebiet zu  $D$  gehört.

Beispielsweise ist ein offener Kreisring zwar wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Anschaulich bedeutet der einfache Zusammenhang eines Gebietes, dass dieses keine Löcher hat. Die in der Definition 21.9 benutzte Tatsache, dass jede geschlossene und doppelpunktfreie Kurve die Ebene in zwei Teile (das Äußere und das Innere der Kurve) zerlegt, scheint auch anschaulich klar zu sein. Der Beweis dieser Tatsache ist aber ziemlich schwierig (Jordan-scher Kurvensatz). Auch der Beweis des folgenden bemerkenswerten Satzes ist zu schwierig, um ihn hier andeuten zu können.

**Satz 21.10 (Riemannscher Abbildungssatz)** Seien  $M$  und  $M'$  einfach zusammenhängende Gebiete, die beide echte Teilmengen von  $\mathbb{C}$  sind. Dann gibt es eine bijektive konforme Abbildung von  $M$  auf  $M'$ .

Wir vermerken in diesem Zusammenhang lediglich eine weitere Eigenschaft holomorpher Funktionen, ihre lokale Umkehrbarkeit.

**Satz 21.11** Sei  $D$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in D$  und  $f'(z_0) \neq 0$ . Dann ist  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  injektiv.

Zur Illustration des Riemannschen Abbildungssatzes betrachten wir eine Familie besonders einfacher holomorpher Funktionen.

**Definition 21.12** Seien  $a, b, c, d$  komplexe Zahlen mit  $ad - bc \neq 0$ . Dann heißt die für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $cz + d \neq 0$  durch

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (21.11)$$

definierte Funktion gebrochen linear (oder eine Möbiustransformation).

Gilt  $cz + d = 0$ , so ist  $f(z)$  in (21.11) nicht definiert. In diesem Fall legen wir fest, dass  $f(z) = \infty$ . Andererseits definieren wir  $f(\infty) = a/c$  falls  $c \neq 0$  und  $f(\infty) = \infty$  falls  $c = 0$ . Durch diese Ergänzungen des Definitions- und Wertebereichs von  $f$  wird die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  um einen Punkt  $\infty$  erweitert, den wir den *unendlich fernen Punkt* nennen. Wir verwenden für die erweiterte komplexe Ebene  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  das Symbol  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Eine gebrochen lineare Funktion vermittelt eine bijektive Abbildung von  $\overline{\mathbb{C}}$  auf  $\overline{\mathbb{C}}$ . Zu gegebenem  $w$  hat nämlich die Gleichung

$$\frac{az + b}{cz + d} = w$$

die eindeutige Lösung

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

mit  $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ . Man rechnet auch leicht nach (HA), dass die Hintereinanderausführung zweier gebrochen linearer Abbildungen wieder eine gebrochen lineare Abbildung ergibt.

Die einfachsten gebrochen linearen Abbildungen sind

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + c && \text{mit } c \in \mathbb{C} && \text{(Translation),} \\ z &\mapsto az && \text{mit } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} && \text{(Drehstreckung) und} \\ z &\mapsto z^{-1} && && \text{(Inversion).} \end{aligned}$$

Wie die Identitäten

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{cases} -\frac{ad-bc}{c}(cz + d)^{-1} + \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

zeigen, kann man jede gebrochen lineare Abbildung als Hintereinanderausführung der drei genannten einfachsten gebrochen linearen Abbildungen realisieren.

Formal wird eine gebrochen lineare Abbildung durch vier Parameter  $(a, b, c, d)$  beschrieben. Da man im Bruch  $\frac{az+b}{cz+d}$  aber beliebig kürzen oder erweitern kann ohne etwas an der Funktion  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  zu ändern, kann man z.B. zusätzlich fordern, dass  $ad - bc = 1$ . Deshalb ist die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte zur Festlegung einer gebrochen linearen Funktion ausreichend.

**Satz 21.13** Seien  $z_1, z_2, z_3$  drei paarweise verschiedene Punkte aus  $\overline{\mathbb{C}}$  und  $w_1, w_2, w_3$  drei weitere paarweise verschiedene Punkte aus  $\overline{\mathbb{C}}$ . Dann gibt es genau eine gebrochen lineare Funktion  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $f(z_k) = w_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Man erhält sie durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{f(z) - w_1}{f(z) - w_2} \Big/ \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \Big/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (21.12)$$

nach  $f(z)$ .

Den Quotienten auf der rechten Seite von (21.12) nennt man das *Doppelverhältnis* von  $z, z_1, z_2, z_3$ . Ist etwa  $w_k = \infty$ , so sind in (21.12) der Zähler und der Nenner, in denen  $w_k$  vorkommt, durch 1 zu ersetzen. Entsprechend ist zu verfahren, wenn eines der  $z_k$  gleich  $\infty$  ist.

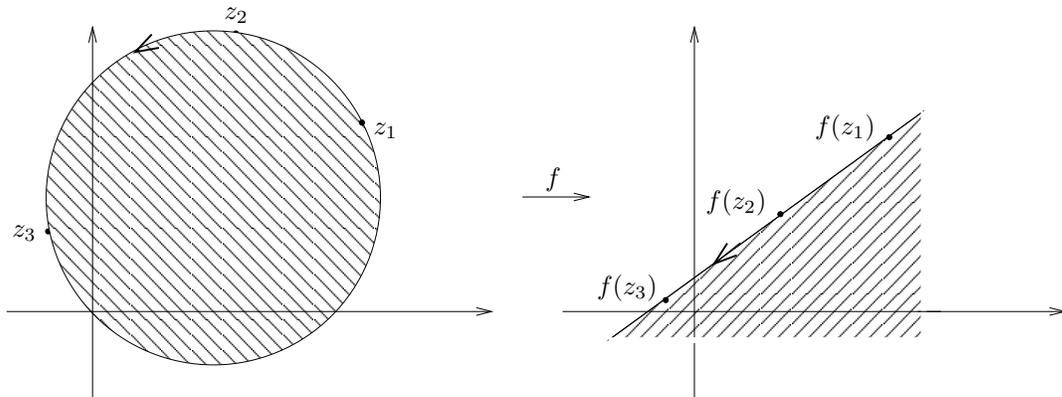
Durch drei verschiedene Punkte der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen, geht genau ein Kreis (der Umkreis des entsprechenden Dreiecks). Liegen die drei Punkte dagegen auf einer Geraden, so verläuft genau eine Gerade durch diese Punkte. Wir interpretieren nun Geraden als *Kreise durch den unendliche fernen Punkt*. Dann ist durch drei verschiedene Punkte der erweiterten Zahlenebene immer genau ein Kreis bestimmt.

**Satz 21.14** Seien  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  jeweils drei paarweise verschiedene Punkte aus  $\overline{\mathbb{C}}$  und  $f$  sei eine gebrochen lineare Abbildung mit  $f(z_k) = w_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Dann bildet  $f$  den Kreis durch  $z_1, z_2, z_3$  auf den Kreis durch  $w_1, w_2, w_3$  ab. Durchläuft man den ersten Kreis von  $z_1$  über  $z_2$  nach  $z_3$  und bezeichnet man mit  $D_1$  das Teilgebiet von  $\mathbb{C}$ , das dabei zur Linken liegt, so wird  $D_1$  durch  $f$  auf das Teilgebiet von  $\mathbb{C}$  abgebildet, das beim Durchlaufen des Bildkreises von  $w_1$  über  $w_2$  nach  $w_3$  zur Linken liegt. Entsprechendes gilt für die zur Rechten liegenden Teilgebiete.

Eine Abbildung, die Kreise in Kreise überführt, heißt auch *kreistreu*. Neben den gebrochen linearen Abbildungen haben nur noch die Abbildungen

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

diese Eigenschaft (Satz von Caratheodory).



**Beispiel 3** Wir suchen die gebrochen lineare Funktion, die die Punkte  $z_1 = i, z_2 = 1$  und  $z_3 = -2$  auf  $w_1 = 0, w_2 = 3$  und  $w_3 = i$  abbildet. Nach Satz 21.13 ist

$$\frac{f(z) - 0}{f(z) - 3} \Big/ \frac{i - 0}{i - 3} = \frac{z - i}{z - 1} \Big/ \frac{-2 - i}{-2 - 1}.$$

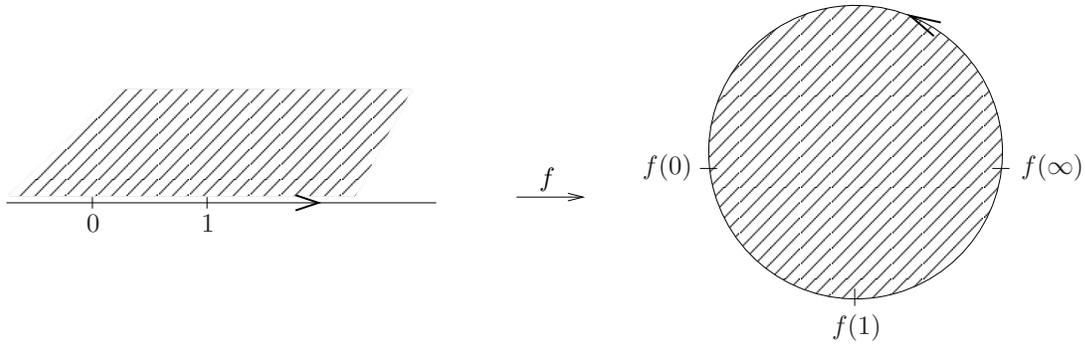
Umstellen nach  $f(z)$  ergibt

$$f(z) = \frac{9z - 9i}{(4 - 7i)z - 1 + 4i}.$$

Dabei wird das Äußere des Kreises durch  $z_1, z_2, z_3$  auf das Innere des Kreises durch  $w_1, w_2, w_3$  abgebildet.

**Beispiel 4** Wir suchen eine gebrochen lineare Abbildung, die die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abbildet und dabei die obere Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  auf das Innere des Einheitskreises  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  abbildet. Dazu wählen wir z.B.

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(\infty) = 1. \quad (21.13)$$



Wir bestimmen  $f$  wieder mit Satz 21.13 oder aus dem Ansatz  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Einsetzen der Bedingungen (21.13) liefert

$$\frac{b}{d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = -i, \quad \frac{a}{c} = 1.$$

Also ist  $b = -d$  und  $a = c$ . Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man  $\frac{a-d}{a+d} = -i$ , woraus  $d = ia$  folgt. Also ist

$$f(z) = \frac{az - ia}{az + ia} = \frac{z - i}{z + i}.$$

Man kann zeigen, dass jede gebrochen lineare Abbildung, die die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abbildet und die obere Halbebene in das Innere des Einheitskreises überführt, von folgender Gestalt ist:

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - p}{z - \bar{p}} \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R} \text{ und } \operatorname{Im} p > 0.$$

## 22 Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel

### 22.1 Komplexe Wegintegrale

Wir sehen uns nun die Integration im Komplexen an. Komplexe Wegintegrale definieren wir ähnlich wie Wegintegrale im  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 22.1** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine stetige Funktion, und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  sei ein stetig differenzierbarer Weg, der ganz in  $D$  verläuft. Dann heißt das Integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \quad (22.1)$$

das Wegintegral von  $f$  längs des Weges  $\gamma$ . Wir bezeichnen dieses Integral mit  $\int_{\gamma} f(z) dz$ .

In (22.1) hat man über eine komplexwertige Funktion  $g(t) := f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$  auf einem Intervall  $[a, b]$  zu integrieren. Diese Integration erklären wir wie folgt:

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} g)(t) dt.$$

Setzt sich ein Weg  $\gamma$  aus stetig differenzierbaren Wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  zusammen und ist  $f$  stetig, so definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

### Einige Eigenschaften komplexer Wegintegrale

- a)  $\int_{\gamma} f(z) dz$  hängt nur von der Kurve  $\Gamma := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$  und deren Orientierung ab, nicht von der Parametrisierung. Genauer: Sind  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  zwei stetig differenzierbare und doppelungsfreie Wege, die die gleiche orientierte Kurve  $\Gamma$  erzeugen, so ist

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Diesen gemeinsamen Wert nennt man *Kurvenintegral* von  $f$  über  $\Gamma$ , und wir schreiben für ihn  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ .

b) 
$$\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$$

c) 
$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (\text{Summe von Wegen}).$$

d)  $\int_{\gamma^-} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$  (entgegengesetzter Weg).

e)  $|\int_{\gamma} f(z)dz| \leq L(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ .

f) Seien  $\hat{D}$ ,  $D$  offen,  $g : \hat{D} \rightarrow D$  holomorphe Funktion,  $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \hat{D}$  stetig differenzierbarer Weg,  $\gamma := g \circ \hat{\gamma}$  und  $f$  stetig auf  $D$ . Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\hat{\gamma}} f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta.$$

g) Sei  $\gamma$  ein stückweise differenzierbarer Weg mit zugehöriger Kurve  $\Gamma$ , und  $f_n$  seien stetige Funktionen auf  $\Gamma$ , die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  auf  $\Gamma$  konvergieren. Dann ist  $f$  stetig und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Es folgen noch zwei weitere Berechnungsmöglichkeiten für komplexe Wegintegrale.

h) Seien  $f = u + iv : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\gamma = x + iy : [a, b] \rightarrow D$  ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b \left( u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t) \right) dt \\ &\quad + i \int_a^b \left( v(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u(x(t), y(t))\dot{y}(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Schreibt man nämlich die beiden Integrale auf der rechten Seite unter ein Integralzeichen, so erhält man den Integranden

$$f(\gamma(t))\dot{x}(t) + if(\gamma(t))\dot{y}(t) = f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t).$$

i) Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine holomorphe Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Stammfunktion* von  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn  $F'(z) = f(z)$  für alle  $z \in D$ . Besitzt  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $D$  eine Stammfunktion  $F$  und ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, der ganz in  $D$  verläuft, so ist

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

### Beweis

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left( F(\gamma(t)) \right) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \end{aligned}$$

wobei wir die Kettenregel und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt haben. ■

Wir berechnen nun einige der für die Funktionentheorie wichtigsten Integrale.

**Beispiel 1** Sei  $B$  die Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $c \in \mathbb{C}$  und Radius  $r > 0$ . Der Rand  $\partial B$  von  $B$  ist die geschlossene Kurve  $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}$ . Wir vereinbaren, geschlossene Kurven immer im Gegenuhrzeigersinn zu orientieren, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mit dieser Vereinbarung ist

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1. \end{cases}$$

Der Fall  $n \neq -1$  ist einfach, da die Funktion  $F(z) = \frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}$  eine Stammfunktion für  $f(z) = (z - c)^n$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{c\}$  ist und da die Kurve  $\partial B$  in diesem Gebiet liegt. Die Kreislinie  $\partial B$  wird beispielsweise parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \mapsto c + re^{it}.$$

Also ist für  $n \neq -1$  nach Eigenschaft (i)

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = F(c + r) - F(c + r) = 0.$$

Für  $n = -1$  rechnen wir mit der Definition (22.1)

$$\int_{\partial B} \frac{1}{z - c} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t) - c} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 2** Sei wieder  $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$ . Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{wenn } |z - c| < r \\ 0 & \text{wenn } |z - c| > r. \end{cases}$$

Ein Vorgehen wie in Beispiel 1 ist wenig aussichtsreich. Durch einen Trick reduzieren wir das Problem auf den Fall  $z = c$ , den wir in Beispiel 1 betrachtet haben. Sei zunächst  $|z - c| < r$ . Wir setzen  $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$  mit  $\zeta \in \partial B$  und erhalten wegen  $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

(geometrische Reihe). Wegen  $|w| < 1$  ist  $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^n$  eine absolut konvergente Majorante für

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n.$$

Diese Reihe konvergiert daher gleichmäßig auf  $\partial B$  (Satz 12.5). Nach Eigenschaft (g) (die natürlich entsprechend auch für Reihen = Folgen von Partialsummen gilt) ist für alle  $z$  mit  $|z - c| < r$

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c} \left( \frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - c)^n \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}},$$

und dies ist gleich  $2\pi i$  nach Beispiel 1. Für  $z$  mit  $|z - c| > r$  schreiben wir  $\frac{1}{\zeta - z}$  als  $\frac{-1}{z - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - c}{z - c} \right)^n$  und erhalten analog

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - c)^{n+1}} \int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = 0. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3** Die Funktion  $\text{Ln}$  ist auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  eine Stammfunktion für  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Also gilt für jeden Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  mit Anfangspunkt  $z_0$  und Endpunkt  $z_1$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_0.$$

Insbesondere ist für  $\gamma : [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$  mit  $r, \varepsilon > 0$ , d.h. für einen Kreis um 0 mit Radius  $r$ , der eine Lücke in der Nähe der negativen reellen Achse aufweist,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \ln r + i(\pi - \varepsilon) - (\ln r + i(-\pi + \varepsilon)) = i(2\pi - 2\varepsilon).$$

Für  $\varepsilon \searrow 0$  erhält man das Integral über dem Vollkreis

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \lim_{\varepsilon \searrow 0} i(2\pi - 2\varepsilon) = 2\pi i$$

in Übereinstimmung mit Beispiel 1. ■

## 22.2 Der Cauchysche Integralsatz

Wir lernen nun eines der zentralen Resultate der Funktionentheorie kennen.

**Satz 22.2 (Cauchyscher Integralsatz)** *Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $\gamma$  ein in  $G$  verlaufender stückweise stetig differenzierbarer und geschlossener Weg, und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann ist*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Wegen der Bedeutung dieses Satzes wollen wir uns seinen Beweis in einer einfachen Situation ansehen. Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis ist

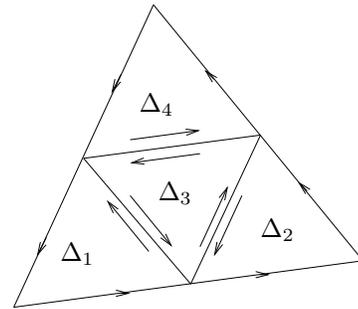
**Lemma 22.3 (Integrallemma von Goursat)** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f$  holomorph auf  $D$ . Dann gilt für den Rand jeder Dreiecksfläche  $\Delta \subset D$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Mit anderen Worten: der Cauchysche Integralsatz gilt für Dreiecksränder.

**Beweis** Für jedes Dreieck  $\Delta$  bezeichnen wir mit  $L(\partial\Delta)$  seinen Umfang, und wir setzen  $a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)dz$ .

Durch Seitenhalbierung teilen wir das Ausgangsdreieck  $\Delta$  in vier kongruente Teildreiecke  $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ . Wegen Eigenschaften (c) und (d) ist dann



$$a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 a(\Delta_j).$$

Unter den vier Integralen  $a(\Delta_j)$  wählen wir ein betragsgrößtes aus. Das zugehörige Dreieck bezeichnen wir mit  $\Delta^1$ . Dann gilt

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta).$$

Dieses Vorgehen wiederholen wir für  $\Delta^1$  und erhalten ein Dreieck  $\Delta^2$ . So fortfahrend entsteht eine Folge  $\Delta \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$  abgeschlossener Dreiecke mit

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta). \quad (22.2)$$

Der Durchschnitt  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$  besteht aus genau einem Punkt  $c$ . Da  $c \in D$  und  $f$  auf  $D$  holomorph ist, gibt es eine auf  $D$  stetige Funktion  $g$  mit  $g(c) = 0$  so, dass

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + (z - c)g(z) \quad \text{für alle } z \in D \quad (22.3)$$

(vgl. Beweis von Satz 4.2). Die lineare Funktion  $z \mapsto f(c) + f'(c)(z - c)$  besitzt offenbar eine Stammfunktion. Daher ist

$$\int_{\partial\Delta^n} (f(c) + f'(c)(z - c)) dz = 0 \quad \text{für } n \geq 1,$$

und aus (22.3) folgt durch Integrieren über  $\partial\Delta^n$

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z - c)g(z) dz \quad \text{für } n \geq 1.$$

Mit Eigenschaft (e) und (22.2) folgt

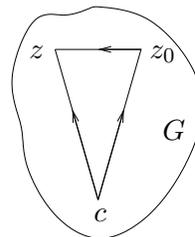
$$|a(\Delta^n)| \leq L(\partial\Delta^n) \max_{z \in \partial\Delta^n} |(z-c)g(z)| \leq L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)|$$

und weiter

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)| = L(\partial\Delta)^2 \max_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)|.$$

Wegen  $g(c) = 0$  und der Stetigkeit von  $g$  findet man für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n$  mit  $\max_{z \in \partial\Delta^n} |g(z)| < \varepsilon$ . Also ist  $|a(\Delta)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2$  für jedes  $\varepsilon > 0$  und folglich ist  $|a(\Delta)| = 0$ . ■

**Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete** Wir zeigen nun die folgende Aussage: Ist  $G$  ein Sterngebiet mit Zentrum  $c$  und  $f$  holomorph auf  $G$ , so ist  $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta) d\zeta$  eine Stammfunktion von  $f$ . Wenn das gezeigt ist, ist klar, dass für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma$  in  $G$  das Integral  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  ist.



Wir müssen zeigen, dass  $F$  in jedem Punkt  $z_0 \in G$  komplex differenzierbar ist und dass  $F'(z_0) = f(z_0)$ . Sei  $z$  so nahe an  $z_0$ , dass auch die Strecke  $[z_0, z]$  noch ganz in  $G$  liegt. Nach dem Lemma von Goursat ist

$$\int_{[c,z_0] + [z_0,z] + [z,c]} f(\zeta) d\zeta = 0$$

und demzufolge

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta. \quad (22.4)$$

Wir definieren

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

und zeigen, dass  $F_1$  an der Stelle  $z_0$  stetig ist. Wegen (22.4) und  $\int_{[z_0,z]} d\zeta = z - z_0$  ist

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta,$$

woraus mit Abschätzung (e) folgt

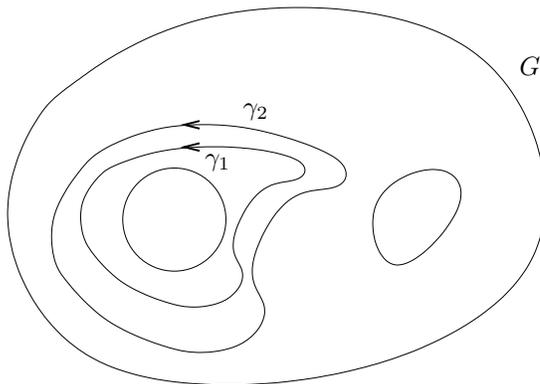
$$\begin{aligned} |F_1(z) - F_1(z_0)| &\leq \frac{1}{|z - z_0|} L([z_0, z]) \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \\ &= \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow z_0 \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von  $f$ . Also ist  $F_1$  stetig in  $z_0$ . ■

Hier ist noch eine Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes auf nicht einfach zusammenhängende Gebiete.

**Satz 22.4** *Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f$  holomorph auf  $G$ . Weiter seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei geschlossene doppelpunktfreie stückweise stetig differenzierbare Wege, die ganz in  $G$  verlaufen. Dabei soll  $\gamma_1$  ganz im Innengebiet von  $\gamma_2$  verlaufen, und das Ringgebiet zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  liege ganz in  $G$ . Haben außerdem  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die gleiche Orientierung, so ist*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$



### 22.3 Die Cauchysche Integralformel

Eine überraschende Konsequenz des Cauchyschen Integralsatzes ist die folgende Cauchysche Integralformel.

**Satz 22.5** *Sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $\gamma$  ein doppelpunktfreier geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Weg, der positiv (d.h. im Gegenuhrzeigersinn) orientiert ist. Ist  $f$  auf  $G$  holomorph und liegt  $z_0 \in G$  im Innengebiet von  $\gamma$ , so ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0). \quad (22.5)$$

Zur Berechnung des Integrals auf der linken Seite von (22.5) benötigt man lediglich die Funktionswerte von  $f$  auf der Kurve  $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$ . Die Cauchysche Integralformel (22.5) zeigt daher, dass die Funktionswerte von  $f$  im Inneren der Kurve  $\Gamma$  durch die Funktionswerte auf  $\Gamma$  bereits vollständig und eindeutig bestimmt sind. Es ist also nicht möglich,  $f$  im Inneren von  $\Gamma$  abzuändern, ohne die Holomorphie zu zerstören.

Liegt  $z_0$  im Außengebiet von  $\Gamma$ , so ist natürlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz.

Die Cauchysche Integralformel liefert auch einen bequemen Weg zur Berechnung gewisser komplexer Wegintegrale über geschlossenen Kurven.

**Beispiel 4** Sei  $G$  die Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  und  $\Gamma$  der Kreis um  $2i$  mit dem Radius 1. Um  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2+4} dz$  zu bestimmen, schreiben wir

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{\Gamma} \frac{1}{(z-2i)(z+2i)} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-2i} dz$$

mit der auf  $G$  holomorphen Funktion  $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ . Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2+4} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = \frac{2\pi i}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Für  $f(z) = 1$  und  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  erhalten wir aus (22.5) natürlich das bereits bekannte Ergebnis

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i. \quad \blacksquare$$

## 22.4 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

In Satz 21.4 haben wir festgestellt, dass jede Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$  holomorph ist und dass die abgeleitete Potenzreihe  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$  ebenfalls den Konvergenzradius  $R$  hat. Hieraus folgt natürlich, dass holomorphe Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, unendlich oft komplex differenzierbar sind. Wir werden nun sehen, dass man *jede* holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln kann. Dies folgt leicht aus dem folgenden Lemma.

**Lemma 22.6** *Sei  $\gamma$  ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in  $\mathbb{C}$  mit zugehöriger Kurve  $\Gamma$ , und sei  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

*holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ , und für jedes  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$  konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

*auf jeder offenen Kreisscheibe um  $z_0$ , die  $\Gamma$  nicht trifft, gegen  $F(z)$ .*

Aus diesem so genannten *Entwicklungslemma* folgt natürlich, dass  $F$  auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  unendlich oft komplex differenzierbar ist. Da die Koeffizienten einer Potenzreihe  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  durch  $a_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(z_0)$  gegeben sind, folgt weiter

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (22.6)$$

Das Entwicklungslemma ordnet also jeder auf  $\Gamma$  stetigen Funktion  $f$  eine auf  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  holomorphe Funktion  $F$  zu. Der Zusammenhang zwischen  $f$  und  $F$  ist jedoch recht lose. So gilt i.a. NICHT, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = f(z_0)$  für  $z_0 \in \Gamma$ . Dies ändert sich auf Grund der Cauchyschen Integralformel, wenn wir von vornherein  $\Gamma$  als Kreislinie und  $f$  als holomorph annehmen.

**Satz 22.7 (Entwicklungssatz)** *Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in D$ , und  $B$  sei die größte offene Kreisscheibe um  $z_0$ , die komplett in  $D$  liegt. Dann ist jede auf  $D$  holomorphe Funktion  $f$  um  $z_0$  in eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  entwickelbar, die auf  $B$  gegen  $f$  konvergiert. Die Koeffizienten  $a_n$  ergeben sich aus*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (22.7)$$

wobei  $B'$  irgendeine Kreisscheibe um  $z_0$  ist, die kleiner als  $B$  ist (so dass ihr Rand  $\partial B'$  komplett in  $D$  liegt). Insbesondere ist  $f$  auf  $D$  beliebig oft komplex differenzierbar, und in jeder Kreisscheibe  $B' \subset B$  um  $z_0$  gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in B', n \geq 0. \quad (22.8)$$

**Beweis** Da  $f$  holomorph ist, gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B'.$$

Das Entwicklungslemma (angewandt auf  $\Gamma := \partial B'$  und  $F := f$  auf  $B'$ ) liefert die Behauptung. ■

Funktionen, die auf einer offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  *einmal* komplex differenzierbar sind, sind dort also *beliebig oft* komplex differenzierbar, und sie lassen sich auf *jeder* Kreisscheibe in  $D$  in eine gegen diese Funktion konvergierende Potenzreihe entwickeln. Vergleichen Sie dies mit der Situation im Reellen!

**Beispiel 5** Sei  $\Gamma$  eine stückweise glatte geschlossene und doppelpunktfreie Kurve, die den Nullpunkt umschließt. Mit den auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktionen  $f(z) = 1$  und  $g(z) = \sin z$  erhält man für  $n \geq 0$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

und

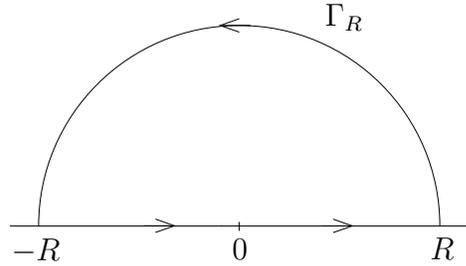
$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^{n+1}} dz = g^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{falls } n = 4k + 3 \end{cases}$$

mit  $k \geq 0$ . ■

**Beispiel 6** Die Cauchyschen Integralformeln können auch zur Berechnung reeller Integrale genutzt werden. Als Beispiel sehen wir uns das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

an. Für  $R > 1$  bestehe die Kurve  $\Gamma_R$  aus der Strecke  $[-R, R]$  und dem oberen Halbkreis um 0 von  $R$  bis  $-R$ . Für die auf  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$  holomorphe Funktion



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}/(z+i)}{z-i} =: \frac{g(z)}{z-i}$$

gilt nach der Cauchyschen Integralformel (22.5)

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i g(i) = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

(beachte, dass  $g$  in einer Umgebung der oberen Halbebene holomorph ist).

Dieses Ergebnis ist unabhängig von  $R$ . Das Teilintegral über die Strecke  $[-R, R]$  ist

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx,$$

da  $x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$  eine ungerade Funktion ist. Das zweite Teilintegral über dem Halbkreis  $H_R := \{Re^{it} : t \in [0, \pi]\}$  lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left| \int_{H_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{1+(Re^{it})^2} Ric^{it} dt \right| \\ &\leq R\pi \max_{t \in [0, \pi]} \left| \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2 e^{2it}} \right| \\ &\leq \frac{R\pi}{R^2-1} \max_{t \in [0, \pi]} e^{-R \sin t} = \frac{R\pi}{R^2-1} \quad \text{für } R > 1. \end{aligned}$$

Dieses Teilintegral konvergiert also für  $R \rightarrow \infty$  gegen 0. In

$$\frac{\pi}{e} = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx + \int_{H_R} f(z) dz$$

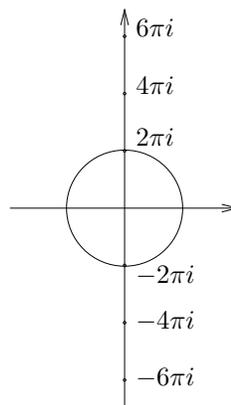
konvergieren somit das linke Integral gegen  $\frac{\pi}{e}$  und das rechte gegen 0. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 7** Der Entwicklungssatz gestattet häufig die unmittelbare Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Als Beispiel betrachten wir die Funktion  $f(z) = z/(e^z - 1)$ . Diese ist zunächst für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z \neq 1$ , d.h. für alle  $z \neq 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , definiert. Wegen

$$e^z - 1 = z \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)$$

können wir aber  $f(0) = 1$  festlegen und erhalten eine Funktion, die auch in einer Umgebung der 0 holomorph ist. Wir können  $f$  also in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln, und diese konvergiert auf der größten offenen Kreisscheibe um 0, die im Holomorphiegebiet liegt. Ihr Konvergenzradius ist also  $2\pi$ .



**Beispiel 8** Möchte man eine holomorphe Funktion  $f$  um einen Punkt  $z_0$  in eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  entwickeln, so kann man die Koeffizienten  $a_n$  nach

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

berechnen, wobei  $\overline{B}$  eine abgeschlossene Kreisscheibe um  $z_0$  ist, die komplett im Holomorphiebereich von  $f$  liegt. Häufig ist es jedoch einfacher, bereits bekannte Potenzreihenentwicklungen zu benutzen.

Als Beispiel betrachten wir die auf  $G = \mathbb{C} \setminus \{1, -2\}$  holomorphe Funktion  $f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)}$ . Nach dem Entwicklungssatz kann man diese Funktion in eine Potenzreihe um den Punkt  $z_0 = i$  entwickeln, und der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist  $\sqrt{2}$  (warum?). Aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1-z}$$

folgt, dass wir lediglich die Funktionen  $z \mapsto \frac{1}{2+z}$  und  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  in Potenzreihen um

$i$  entwickeln müssen. Daher benutzen wir die uns bekannte geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

die für  $|z| < 1$  konvergiert. Es ist

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2+i+z-i} = \frac{1}{2+i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}} = \frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2+i)^n}$$

sowie

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^n},$$

wobei die Reihen für  $|\frac{z-i}{2+i}| < 1$ , d.h. für  $|z-i| < \sqrt{5}$  und für  $|\frac{z-i}{1-i}| < 1$ , d.h. für  $|z-i| < \sqrt{2}$  konvergieren. Für  $|z-i| < \sqrt{2}$  konvergieren also beide Reihen, und wir erhalten  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$  mit

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}} + \frac{1}{(1-i)^{n+1}} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad \blacksquare$$

## 22.5 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Wir sehen uns in diesem Abschnitt weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen an. Aus der Cauchyschen Integralformel (22.5) folgt für jede Funktion  $f$ , die holomorph auf einer Umgebung der Abschließung der Kreisscheibe  $B := B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  ist, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Mit der Standardabschätzung (Eigenschaft (e) des Wegintegrals) folgt die *Mittelwertungleichung*

$$|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial B} |f(z)|.$$

Dies läßt sich wesentlich verallgemeinern.

**Satz 22.8 (Cauchysche Ungleichung)** *Sei  $f$  holomorph in einer Umgebung des abgeschlossenen Kreises  $\overline{B_r(z_0)}$ . Dann gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und jede positive Zahl  $d < r$*

$$|f^{(k)}(z)| \leq k! \frac{r^k}{d^{k+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in \overline{B_{r-d}(z_0)}.$$

Der folgende Identitätssatz zeigt einen überraschend engen Zusammenhang zwischen den Werten einer holomorphen Funktion auf.

**Satz 22.9 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)** Sei  $G$  ein Gebiet, und  $f$  und  $g$  seien auf  $G$  holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- a)  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in G$ .
- b)  $f(z_n) = g(z_n)$  für eine Folge  $(z_n)$  paarweise verschiedener Punkte  $z_n \in G$ , die sich in  $G$  häufen.
- c) Es gibt ein  $z_0 \in G$  mit  $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$  für alle  $n \geq 0$ .

Eine holomorphe Funktion ist also bereits durch die Funktionswerte an abzählbar unendlich vielen Stellen festgelegt, wenn sich diese Stellen im Holomorphiegebiet häufen.

**Folgerung 22.10** Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet, das ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  umfasst, und ist  $f$  eine komplexwertige Funktion auf  $I$ , so gibt es höchstens eine auf  $G$  definierte holomorphe Funktion  $F$ , die auf  $I$  mit  $f$  übereinstimmt.

Man kann also die reelle Sinusfunktion nur auf eine einzige Weise zu einer auf  $\mathbb{C}$  holomorphen Funktion fortsetzen. Mit dem Identitätssatz lassen sich auch „analytische Identitäten“ fortsetzen („Permanenzprinzip“). Stellen wir uns vor, wir hätten  $z \mapsto e^z$  als holomorphe Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, wüssten aber nur für alle reellen  $z$  und  $w$ , dass  $e^{z+w} = e^z e^w$ . Für ein fixiertes  $w \in \mathbb{R}$  betrachten wir die Funktionen  $f(z) := e^{w+z}$  und  $g(z) := e^w e^z$  auf  $\mathbb{C}$ . Diese sind holomorph auf  $\mathbb{C}$  und stimmen auf  $\mathbb{R}$  überein. Nach dem Identitätssatz stimmen sie auf  $\mathbb{C}$  überein, d.h. es ist

$$f(z) = g(z) \quad \text{bzw.} \quad e^{w+z} = e^w e^z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und } w \in \mathbb{R}.$$

Wir wiederholen diese Überlegung mit fixiertem  $z \in \mathbb{C}$  und erhalten die Gültigkeit von  $e^{w+z} = e^w e^z$  für alle  $w$  und  $z$  aus  $\mathbb{C}$ . ■

Mit dem Entwicklungssatz erhält man aus Satz 22.9 leicht den folgenden Identitätssatz.

**Satz 22.11 (Identitätssatz für Potenzreihen)**

Seien  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  und  $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  Potenzreihen mit Konvergenzradien  $R \geq r > 0$ . Stimmen  $f$  und  $g$  auf einer Umgebung  $U_\rho(z_0)$  mit  $r > \rho > 0$  (oder nur in unendlich vielen paarweise verschiedenen Punkten dieser Umgebung) überein, so ist  $a_n = b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und daher  $R = r$  und  $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in U_R(z_0)$ .

**Beispiel 9** Die durch  $f(z) = \frac{1}{\cos z}$  definierte Funktion ist auf  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}$  holomorph und kann nach dem Entwicklungssatz in eine Potenzreihe

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius  $\pi/2$  entwickelt werden. Es ist also

$$\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) (a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots) = 1.$$

Cauchyprodukt und Koeffizientenvergleich liefern bei

$$\begin{aligned} z^0 : & & a_0 & = & 1 \\ z^1 : & & a_1 & = & 0 \\ z^2 : & & a_2 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ z^3 : & & a_3 - \frac{a_1}{2} & = & 0 \\ z^4 : & & a_4 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_0}{24} & = & 0 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man nacheinander  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ . Also ist

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24}z^4 + \dots \quad \blacksquare$$

Eine Funktion, die auf der gesamten komplexen Ebene definiert und dort holomorph ist, heißt *ganz*. Ganze Funktionen sind z.B. die komplexe Exponentialfunktion und die komplexen Sinus- und Kosinusfunktionen.

**Satz 22.12 (Satz von Liouville)** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Eine bemerkenswerte Anwendung findet dieser Satz beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

**Satz 22.13 (Fundamentalsatz der Algebra)** *Jedes Polynom vom Grad  $n \geq 1$  besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Hieraus folgt leicht, dass jedes Polynom  $P$  vom Grad  $n \geq 1$  genau  $n$  komplexe Nullstellen besitzt (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten) und dass jedes solche Polynom eindeutig in Linearfaktoren zerlegt werden kann:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{r=1}^n (z - z_r) \quad (a_n \neq 0),$$

wobei  $z_1, \dots, z_n$  die Nullstellen von  $P$  sind.

Beim Beweis von Satz 22.13 nimmt man an, dass  $P(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $1/P(z)$  erklärt, und man zeigt, dass diese Funktion beschränkt ist. Nach Liouville ist dann  $1/P(z)$  konstant. Widerspruch.  $\blacksquare$

Unser letztes Ziel in diesem Abschnitt ist das Maximumprinzip. Wir beginnen mit einem eng verwandten Resultat.

**Satz 22.14 (Offenheitssatz)** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nirgends lokal konstant. Dann bildet  $f$  offene Mengen auf offene Mengen ab.

Nirgends lokal konstant bedeutet: auf keiner Umgebung eines Punktes aus  $D$  konstant. Dieser Satz schließt die Existenz holomorpher Funktionen mit gewissen Eigenschaften aus. Z.B. gibt es keine nichtkonstante holomorphe Funktion, deren Real- oder Imaginärteil oder deren Betrag konstant ist.

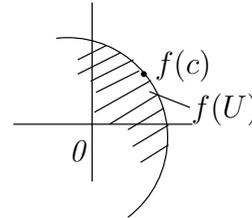
Da nirgends lokal konstante holomorphe Funktionen offene Mengen auf offene Mengen abbilden und da stetige Funktionen wegzusammenhängende Mengen in wegzusammenhängende Mengen überführen, kann man den Offenheitssatz auch so formulieren:

**Folgerung 22.15** Sei  $f$  holomorph und nicht konstant im Gebiet  $G$ . Dann ist  $f(G)$  wieder ein Gebiet.

Diese Eigenschaft holomorpher Funktionen heißt *Gebietstreue*.

**Satz 22.16 (Maximumprinzip)** Sei  $G$  ein Gebiet und  $f$  eine auf  $G$  holomorphe Funktion, die in  $G$  ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt. Dann ist  $f$  konstant auf  $G$ .

**Beweis** Sei  $c \in G$  und  $U \subseteq G$  eine offene Umgebung von  $c$  mit  $|f(z)| \leq |f(c)|$  für alle  $z \in U$ . Dann ist  $f(U) \subseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(c)|\}$ , d.h.  $f(U)$  ist keine offene Umgebung von  $f(c)$ . Nach dem Offenheitssatz ist  $f$  konstant. ■



**Folgerung 22.17 (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete)** Sei  $G$  ein beschränktes Gebiet und  $f$  eine auf  $\overline{G}$  stetige und in  $G$  holomorphe nichtkonstante Funktion. Dann nimmt  $f$  sein Maximum nur auf dem Rand von  $G$  an:

$$|f(z_0)| < \max_{z \in \partial G} |f(z)| \quad \text{für alle } z_0 \in G.$$

Der Beweis ist klar: Als stetige Funktion muss  $|f|$  auf  $\overline{G}$  das Maximum annehmen. Lokale Maxima in  $G$  gibt es jedoch nicht, da  $f$  nicht konstant ist. ■

**Beispiel 10** Wir suchen  $\max_{|z| \leq 1} |1 - z^2|$ . Da die Funktion  $f(z) = 1 - z^2$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph ist, muss das gesuchte Maximum auf dem Rand der Einheitskreisscheibe zu finden sein. Mit  $z = z(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , erhält man

$$|1 - z(t)^2|^2 = |1 - e^{i2t}|^2 = (1 - \cos(2t))^2 + (\sin(2t))^2 = 2(1 - \cos(2t)).$$

Dieser Ausdruck wird maximal für  $\cos(2t) = -1$ , also für  $t = \frac{\pi}{2}$  und  $t = \frac{3\pi}{2}$ . Also ist

$$\max_{|z| \leq 1} |1 - z^2| = \sqrt{2(1 - (-1))} = 2,$$

und das Maximum wird an den Stellen  $z_1 = e^{i\pi/2}$  und  $z_2 = e^{3i\pi/2}$  angenommen. ■

Anwendung des Maximumprinzips auf  $1/f$  liefert schließlich

**Satz 22.18 (Minimumprinzip)** *Sei  $f$  holomorph im Gebiet  $G$ , und  $|f|$  besitze in  $G$  ein lokales Minimum, d.h. es gebe ein  $c \in G$  und eine offene Umgebung  $U \subseteq G$  von  $c$  mit  $|f(c)| = \inf_{z \in U} |f(z)|$ . Dann ist  $f(c) = 0$ , oder  $f$  ist konstant in  $G$ .*

Deutet man die reelle Zahl  $|f(z)|$  als Höhe in Punkt  $z \in G$ , so erhält man über  $G \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  die Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die man gelegentlich die „analytische Landschaft“ von  $f$  nennt. Das Maximumprinzip läßt sich dann wie folgt aussprechen:

*In der analytischen Landschaft einer holomorphen Funktion gibt es keine echten Gipfel.*

## 23 Laurentreihen und Residuen

### 23.1 Laurentreihen

Ist eine Funktion  $f$  in einem Punkt  $z_0$  nicht holomorph (oder nicht einmal definiert), so läßt sich  $f$  nicht durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$  darstellen. Mitunter hat man als Ersatz aber eine Darstellung von  $f$  als Laurentreihe.

**Definition 23.1** *Eine unendliche Reihe der Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \quad (23.1)$$

heißt Laurentreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0$ , und die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

heißen der Nebenteil bzw. der Hauptteil der Laurentreihe. Man sagt, dass eine Laurentreihe im Punkt  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert, wenn sowohl ihr Haupt- und ihr Nebenteil in diesem Punkt konvergieren.

Wie sieht das typische Konvergenzgebiet einer Laurentreihe aus? Der Nebenteil ist eine gewöhnliche Potenzreihe. Für ihn gibt es also ein  $R \geq 0$  (den Konvergenzradius) so, dass er auf der offenen Kreisscheibe

$$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

konvergiert. Den Hauptteil schreiben wir als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \quad \text{mit} \quad w = \frac{1}{z - z_0}.$$

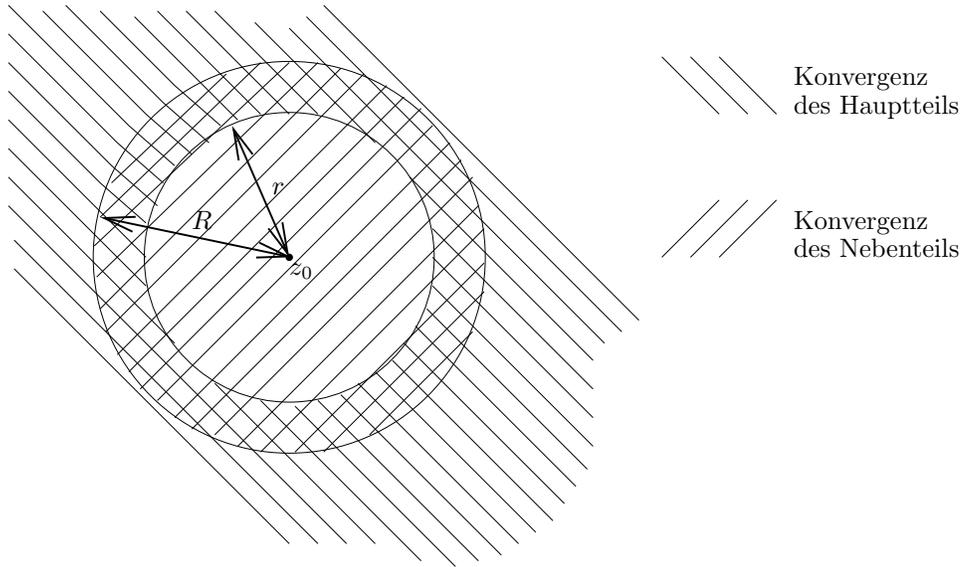
Der Konvergenzradius dieser Reihe sei  $\rho$ . Ist  $\rho > 0$ , so konvergiert der Hauptteil für

$$|w| < \rho \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{|z - z_0|} < \rho \quad \text{bzw.} \quad |z - z_0| > \frac{1}{\rho}.$$

Der Hauptteil konvergiert also auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$  mit  $r = \frac{1}{\rho}$ , d.h. auf dem Außengebiet einer Kreisscheibe. Damit ist klar, dass im Falle  $r < R$  die Laurentreihe (23.1) auf dem Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

konvergiert (in einigen Punkten des Randes dieses Kreisrings kann ebenfalls Konvergenz vorliegen).



Umgekehrt kann man tatsächlich jede auf einem Kreisring holomorphe Funktion in eine Laurentreihe entwickeln.

**Satz 23.2 (Entwicklungssatz von Laurent)** Die Funktion  $f$  sei auf dem Ringgebiet  $K_{r,R}(z_0)$  mit  $0 \leq r < R \leq \infty$  holomorph. Dann läßt sich  $f$  auf diesem Gebiet in eine (eindeutig bestimmte) Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \quad (23.2)$$

entwickeln. Diese konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge von  $K_{r,R}(z_0)$  gleichmäßig. Für die Koeffizienten gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (23.3)$$

wobei  $\rho \in (r, R)$  beliebig gewählt werden kann (man beachte unsere Vereinbarung, wonach die Kreislinie  $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = \rho\}$  im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist).

Der Beweis benutzt das Entwicklungslemma 22.6 und den Entwicklungssatz 22.7. Wir wollen uns lediglich die Formel (23.3) für die *Laurentkoeffizienten*  $a_n$  überlegen. Diese leiten wir aus der Reihenentwicklung (23.2) ab. Für  $\rho \in (r, R)$  konvergiert

$$(z - z_0)^{-n-1} f(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} a_{m+n+1}(z - z_0)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n+1}(z - z_0)^m$$

auf  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$  gleichmäßig. Gliedweises Integrieren dieser Reihe ist daher erlaubt, und wir erhalten

$$\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = a_n \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i a_n,$$

da die Integrale über alle übrigen Summanden verschwinden (vgl. Beispiel 1 aus Abschnitt 22.1). ■

Die Bestimmung einer Laurentreihe mit Formel (23.3) ist oft schwierig. Man versucht daher, Laurentreihen aus bekannten Reihen zu gewinnen.

**Beispiel 1** Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  ist auf  $\mathbb{C}$  mit Ausnahme der Punkte 1 und 2 holomorph. Sie läßt sich also auf  $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  in eine „gewöhnliche“ Potenzreihe (Taylorreihe) entwickeln und auf  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  sowie  $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$  in Laurentreihen.

Die Partialbruchzerlegung von  $f$  ist  $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$ , und für die Summanden  $\frac{1}{z-1}$  und  $\frac{1}{z-2}$  finden wir mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n && \text{für } |z| < 1, \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n && \text{für } |z| < 2, \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 1, \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(2/z)} &= \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 2. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n && \text{auf } D_1, \\ f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n && \text{auf } D_2, \\ f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n && \text{auf } D_3. \end{aligned}$$

## 23.2 Isolierte Singularitäten

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $U$  Umgebung von  $z_0$ , und  $f$  sei eine auf  $U \setminus \{z_0\}$  definierte und dort holomorphe Funktion. Dann heißt  $z_0$  eine *isolierte Singularität* von  $f$ . Die Funktion  $f$  kann in jedem Kreisring  $K_{0,R}(z_0)$ , der ganz in  $U$  liegt, in eine Laurentreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Man klassifiziert isolierte Singularitäten nach dem Verhalten des Hauptteiles dieser Laurentreihe.

**Definition 23.3** a)  $z_0$  heißt *hebbare Singularität*, wenn alle Laurentkoeffizienten im Hauptteil der Laurentreihe (d.h. alle  $a_n$  mit  $n \leq -1$ ) verschwinden.

b)  $z_0$  heißt *Pol*, wenn  $z_0$  keine hebbare Singularität ist, aber nur endlich viele Koeffizienten des Hauptteiles ungleich Null sind. Ist  $a_{-m} \neq 0$ , aber  $a_{-n} = 0$  für alle  $n > m$ , so heißt  $z_0$  Pol der Ordnung  $m$ .

c) Ist  $z_0$  weder hebbare Singularität noch Pol, so heißt  $z_0$  *wesentliche Singularität*. In diesem Fall sind also unendlich viele der Koeffizienten des Hauptteiles der Laurentreihe ungleich Null.

**Beispiel 2** Für jede der Funktionen  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ,  $g(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$ ,  $h(z) = e^{1/z}$  ist  $z_0 = 0$  eine isolierte Singularität. Im ersten Fall ist diese hebbar, da

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

die Laurententwicklung von  $f$  ist und der Hauptteil gleich 0 ist. Aus Beispiel 1 wissen wir weiter, dass

$$g(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n = \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+3}} \right) z^n$$

auf  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ . Also ist  $z_0 = 0$  ein Pol 2. Ordnung von  $g$ . Schließlich ist

$$h(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

die Laurententwicklung von  $h$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . In diesem Fall ist  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität. ■

Wir sehen uns kurz das Verhalten einer holomorphen Funktion  $f$  in der Nähe einer isolierten Singularität  $z_0$  an. Ist  $z_0$  eine *hebbare Singularität*, so kann  $f$  auf

einer punktierten Kreisscheibe  $B \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$  in eine Laurentreihe mit Hauptteil 0 entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite konvergiert auch für  $z = z_0$ , und zwar gegen  $a_0$ . Es liegt daher nahe, den Wert von  $f$  in  $z_0$  mit  $a_0$  festzusetzen. Die so abgeänderte Funktion ist dann auf ganz  $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  holomorph; die Singularität ist "behoben".

Ist  $z_0$  ein *Pol m. Ordnung* von  $f$ , so konvergiert die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

in einer punktierten Kreisscheibe  $B \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ . Die Funktion

$$g(z) := (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

kann dann durch Wahl von  $g(z_0) := a_{-m}$  zu einer auf ganz  $B$  holomorphen Funktion fortgesetzt werden. Es ist also

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \tag{23.4}$$

mit einer in einer Umgebung von  $z_0$  holomorphen Funktion  $g$  mit  $g(z_0) \neq 0$ . Ist umgekehrt  $g$  eine in einer Umgebung von  $z_0$  holomorphe Funktion mit  $g(z_0) \neq 0$ , so besitzt die durch (23.4) erklärte Funktion  $f$  in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m$ . Aus (23.4) folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

an allen Polstellen  $z_0$  von  $f$ . Über das Verhalten an wesentlichen Singularitäten gibt folgender Satz Auskunft.

**Satz 23.4 (Casorati/Weierstraß)** *Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann ist  $z_0$  genau dann eine wesentliche Singularität, wenn zu jedem  $\omega \in \mathbb{C}$  eine Folge  $(z_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \omega$  existiert.*

Mit anderen Worten: für jede punktierte Umgebung  $U \setminus \{z_0\}$  von  $z_0$  im Holomorphiebereich von  $f$  ist das Bild  $f(U \setminus \{z_0\})$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

### 23.3 Residuen

Der Begriff *Residuum* wird in mehreren Teilgebieten der Mathematik in unterschiedlicher Weise verwendet. In der Funktionentheorie sind Residuen Wegintegrale über Kreislinien.

**Definition 23.5** Die komplexe Funktion  $f$  sei in der punktierten Kreisscheibe  $K_{0,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$  holomorph, und sei  $0 < \rho < R$ . Dann heißt das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz =: \text{Res}(f, z_0)$$

das Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

Nach Satz 22.4 ist diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\rho \in (0, R)$ .

Die Orientierung der Kreislinie  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$  ist wieder im Gegenuhrzeigersinn gewählt. Stellen wir  $f$  auf  $K_{0,R}(z_0)$  durch die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dar und integrieren gliedweise über  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ , so folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = a_{-1}$$

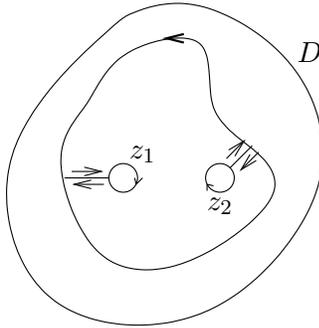
nach Beispiel 1 in Abschnitt 22.1. Das Residuum von  $f$  in  $z_0$  ist also das ‘‘Überbleibsel‘‘ bei Integration der Laurentreihe und stimmt mit dem Laurentkoeffizienten  $a_{-1}$  überein. Ist  $f$  auch in  $z_0$  holomorph oder ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ , so ist  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ . Klar ist auch, dass

$$\text{Res}(f + g, z_0) = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0).$$

Der folgende Satz ist ein wichtiges Werkzeug zur Integralberechnung.

**Satz 23.6 (Residuensatz)** Sei  $\Gamma$  eine geschlossene, stückweise glatte, doppel-punktfreie und im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve im Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes  $D$ . Weiter sei  $f$  auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler Punkte, von denen keiner auf  $\Gamma$  liegt, holomorph. Bezeichnen wir die im Inneren von  $\Gamma$  liegenden isolierten Singularitäten von  $f$  mit  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , so gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (23.5)$$



**Beweisidee** Für jeden der Punkte  $z_k$  schneiden wir das Gebiet  $D$  entlang einer in  $z_k$  beginnenden Strecke  $S_k$  bis zum Rand von  $D$  auf, wobei keine zwei der Strecken  $S_k$  einen nichtleeren Durchschnitt haben sollen. Weiter wählen wir zu jedem  $z_k$  eine Kreisscheibe  $B_k$  um  $z_k$  mit  $\overline{B_k} \cap \overline{B_l} = \emptyset$  für  $k \neq l$  und so, dass  $\overline{B_k}$  komplett im Inneren von  $\Gamma$  liegt. Wie in der Skizze bilden wir aus  $\Gamma$ , den Strecken  $S_k$  und den Kreisrändern  $\partial B_k$  eine geschlossene stückweise glatte Kurve  $\tilde{\Gamma}$ . Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 0.$$

Da sich die Integrale längs der Strecken  $S_k$  aufheben, folgt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\partial B_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

■

Damit Satz 23.6 wirklich effektiv zur Integralberechnung eingesetzt werden kann, benötigen wir einfache Möglichkeiten zur Berechnung von Residuen. Wir haben bereits bemerkt, dass  $\operatorname{Res}(f, z_0)$  der Laurentkoeffizient  $a_{-1}$  in der Laurentreihenentwicklung von  $f$  um  $z_0$  ist. Für  $f(z) = e^{1/z}$  ist daher beispielsweise

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von Residuen bieten die folgenden Lemmas.

**Lemma 23.7** *Ist  $z_0$  ein einfacher Pol von  $f$ , so ist*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (23.6)$$

Dies folgt sofort aus

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

bzw.

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

■

**Lemma 23.8** Sind  $g$  und  $h$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$  und ist  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$  und  $h'(z_0) \neq 0$ , so hat  $f := g/h$  einen Pol erster Ordnung in  $z_0$ , und es ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0). \quad (23.7)$$

Wegen (23.6) ist nämlich

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \cdot g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad \blacksquare$$

Für  $f(z) = \frac{z^2+4}{\sin z}$  ist beispielsweise

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \left. \frac{z^2 + 4}{\cos z} \right|_{z=0} = 4.$$

Für  $f(z) = \frac{z}{z^{n-1}}$  finden wir an den Stellen  $z_k := e^{2\pi ik/n}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \left. \frac{z}{nz^{n-1}} \right|_{z=z_k} = \frac{z_k}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{n} = \frac{1}{n} e^{4\pi ik/n}$$

(man berücksichtige, dass die  $z_k$  die einfachen Nullstellen des Nennerpolynoms und damit einfache Pole von  $f$  sind). ■

Etwas weniger handlich ist die Residuenbestimmung an Polen höherer Ordnung.

**Lemma 23.9** Ist  $z_0$  ein Pol  $k$ -ter Ordnung von  $f$ , so ist

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) \right). \quad (23.8)$$

Wie wir aus (23.4) wissen, gibt es eine in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  holomorphe Funktion  $g$  mit

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) \quad \text{für } z \in U.$$

Ist  $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  die Laurentreihenentwicklung von  $f$ , so ist  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n$  die Potenzreihenentwicklung von  $g$ . Der Koeffizient  $a_{-1}$  steht vor  $(z - z_0)^{k-1}$ , ist also gleich

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0).$$

Hieraus folgt (23.8). ■

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n},$$

die in  $\pm i$  jeweils einen Pol der Ordnung  $n$  besitzt. Um  $\text{Res}(f, i)$  zu bestimmen, bilden wir die in einer Umgebung von  $i$  holomorphe Funktion

$$g(z) = (z-i)^n f(z) = \frac{1}{(z+i)^n}.$$

Für diese ist

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(z) &= (-n)(-n-1)\dots(-n-n+2)(z+i)^{-n-n+1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

■

Für die Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3}$  erhält man ähnlich

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} e^{iz} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} i^2 e^{iz} = -\frac{1}{2}.$$

■

**Lemma 23.10** a) Seien  $g$  und  $h$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ , und sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n$  von  $g$  (d.h. es gibt eine in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  holomorphe Funktion  $\tilde{g}$  mit  $g(z) = (z-z_0)^n \tilde{g}(z)$  und  $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ ). Dann ist

$$\text{Res} \left( h \frac{g'}{g}, z_0 \right) = h(z_0) \cdot n. \quad (23.9)$$

b) Sei  $h$  holomorph in einer Umgebung von  $z_0$ , und  $g$  habe in  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $p$ . Dann ist

$$\text{Res} \left( h \frac{g'}{g}, z_0 \right) = -h(z_0) p. \quad (23.10)$$

## 23.4 Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung

Der Residuensatz ermöglicht die Berechnung einiger reeller Integrale, die mit Methoden der reellen Analysis nur schwer zugänglich sind. Wir sehen uns einige Beispiellklassen an.

### 23.4.1 Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

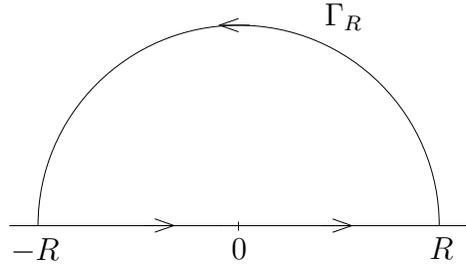
**Satz 23.11** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  eine offene Menge, die die obere Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$  umfasst. Die Funktion  $f$  sei auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler Punkte  $z_1, \dots, z_n$  mit  $\text{Im } z_k > 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) holomorph, und es gelte  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0$ . Dann existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx,$$

und es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (23.11)$$

**Beweis** Für  $R > 0$  sei  $\Gamma_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{Im } z \geq 0\}$ . Für hinreichend große  $R$  liegen alle Singularitäten  $z_k$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \text{Im } z > 0\}$ . Nach dem Residuensatz ist also



$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k). \quad (23.12)$$

Nun ist aber

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| \leq \pi R \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| = \pi \max_{z \in \Gamma_R} |zf(z)|$$

und  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in \Gamma_R} |zf(z)| = 0$  nach Voraussetzung. Der Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  in (23.12) liefert die Behauptung (23.11). ■

Die Bedingung  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0$  ist z.B. erfüllt, wenn  $f = p/q$  eine rationale Funktion ist, bei der der Grad von  $q$  um mindestens 2 größer ist als der von  $p$ .

**Beispiel 2** Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  hat genau vier einfache Pole  $z_k := e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , von denen  $z_0$  und  $z_1$  in der oberen Halbebene liegen. Die übrigen Voraussetzungen des Satzes sind ebenfalls erfüllt. Aus (23.11) folgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) = 2\pi i \left( \frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right).$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 3** Wir berechnen  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-x-5}{x^4+3x^2+2} dx$ . Die Nullstellen des Nennerpolynoms

$$q(z) = z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + 2)$$

sind  $z_{1/2} = \pm i$  und  $z_{3/4} = \pm i\sqrt{2}$ . Nach (23.11) ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - x - 5}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, i\sqrt{2})).$$

Mit Lemma 23.8 findet man

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{2i^2 - i - 5}{4i^3 + 6i} = \frac{-7 - i}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

und

$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i) = \frac{2 \cdot 2i^2 - \sqrt{2}i - 5}{4 \cdot 2\sqrt{2}i^3 + 6i\sqrt{2}} = \frac{-9 - \sqrt{2}i}{-2\sqrt{2}i} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}}i.$$

Also ist das gesuchte Integral gleich  $2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}}i\right) = \pi \left(\frac{9}{\sqrt{2}} - 7\right)$ . ■

### 23.4.2 Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) f(x) dx$

**Satz 23.12** Sei  $D$  wie in Satz 23.11. Die Funktion  $f$  sei auf  $D$  mit Ausnahme endlich vieler Punkte  $z_1, \dots, z_n$  mit  $\operatorname{Im} z_k > 0$  für  $k = 1, \dots, n$  holomorph, und es gelte  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Dann ist für alle  $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x) f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), z_k). \quad (23.13)$$

Die linke Seite schreibt man auch als  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$  und man nennt dies die *Fouriertransformation* von  $f$  an der Stelle  $\alpha$ . Man beachte, dass die Voraussetzungen in Satz 23.12 schwächer sind als in Satz 23.11. Die Bedingung  $\lim f(z) = 0$  ist für eine rationale Funktion  $f = p/q$  bereits dann erfüllt, wenn der Grad des Nennerpolynoms um mindestens 1 größer als der des Zählerpolynoms ist.

**Beispiel 4** Wir berechnen  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx$  für  $\alpha > 0$ . Die Funktion  $f(z) := (1+z^2)^{-2}$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes. Ihre einzige Singularität in der oberen Halbebene ist der Punkt  $z_1 = i$ , wo eine doppelte Polstelle vorliegt. Nach Satz 23.12 ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), i).$$

Da  $x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2}$  eine ungerade Funktion ist, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = 0.$$

Mit Lemma 23.9 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2}, i \right) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{d}{dz} \frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)^2} \right) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{i\alpha e^{i\alpha z} (z+i)^2 - e^{i\alpha z} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \\
 &= 2\pi i \frac{i\alpha e^{-\alpha} (2i)^2 - e^{-\alpha} \cdot 4i}{16} \\
 &= \frac{\alpha + 1}{2} \pi e^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

■

### 23.4.3 Trigonometrische Integrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

**Satz 23.13** Sei  $R = R(x, y)$  eine komplexe rationale Funktion, die auf der Einheitskreislinie endlich ist, und sei

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{zi} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right).$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(\tilde{R}, z_k), \quad (23.14)$$

wobei  $z_1, \dots, z_n$  die isolierten Singularitäten von  $\tilde{R}$  in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  sind.

Mit  $z = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist nämlich  $\cos t = \frac{z+z^{-1}}{2}$  und  $\sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i}$ . Also ist

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \int_{|z|=1} R \left( \frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right) \frac{1}{zi} dz \\
 &= \int_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz,
 \end{aligned}$$

woraus (23.14) mit dem Residuensatz folgt.

■

**Beispiel 5** Wir berechnen  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5/4 - \cos t} dt$ . Wegen  $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$  ist

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{zi} \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{\frac{5}{4} - \frac{z+z^{-1}}{2}} = -i \frac{2z^4 + 2}{-2z^4 + 5z^3 - 2z^2}.$$

Das Nennerpolynom hat eine doppelte Nullstelle  $z_1 = z_2 = 0$  und einfache Nullstellen  $z_3 = 1/2$  und  $z_4 = 2$ . Nach Lemma 23.8 ist

$$\operatorname{Res}(\tilde{R}, 1/2) = \frac{-2i\left(\frac{1}{16} + 1\right)}{-8 \cdot \frac{1}{8} + 15 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{17}{6}i,$$

und mit Lemma 23.9 finden wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\tilde{R}, 0) &= -i \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{d}{dz} \frac{2z^4 + 2}{-2z^2 + 5z - 2} \right) \\ &= -i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{8z^3(-2z^2 + 5z - 2) - (2z^4 + 2)(-4z + 5)}{(-2z^2 + 5z - 2)^2} = \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{\frac{5}{4} - \cos t} dt = 2\pi i \left( \frac{5}{2}i - \frac{17}{6}i \right) = \frac{2}{3}\pi.$$

■

**Beispiel 6** Als weitere Anwendung von Satz 23.13 berechnen wir  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p \cos t + p^2}$  mit  $p \in \mathbb{C}$ ,  $|p| \neq 1$ . Dann ist  $R(x, y) = \frac{1}{1-2px+p^2}$ , also

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{zi} \frac{1}{1-p(z+z^{-1})+p^2} = \frac{1}{i} \frac{1}{(z-p)(1-pz)}.$$

Die Funktion  $\tilde{R}$  hat genau einen Pol in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , nämlich  $p$  falls  $|p| < 1$  und  $1/p$  falls  $|p| > 1$ . In beiden Fällen ist der Pol einfach, und Lemma 23.7 ergibt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\tilde{R}, p) &= \frac{1}{i} \frac{1}{1-p^2} && \text{für } |p| < 1, \\ \operatorname{Res}(\tilde{R}, \frac{1}{p}) &= \frac{1}{i} \frac{1}{p^2-1} && \text{für } |p| > 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2p \cos t + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{für } |p| < 1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{für } |p| > 1. \end{cases}$$

■

Zahlreiche weitere Anwendungen des Residuensatzes zur Integralberechnung finden Sie in Lehrbüchern zur Funktionentheorie wie Remmert: Funktionentheorie I sowie in Burg/Haf/Wille IV.