

Mathematik I und II für ET

Steffen Roch

WS 2021/22 und SS 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen: Zahlen und Mengen	1
1.1	Die natürlichen Zahlen	1
1.2	Die reellen Zahlen	3
1.3	Die komplexen Zahlen	8
1.4	Mengen und Mengenoperationen	13
1.5	Abbildungen	15
2	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	19
2.1	Vektoren und Geraden im \mathbb{R}^2	19
2.2	Vektoren, Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3	25
2.3	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	30
3	Lineare Räume	32
3.1	Definition und Beispiele	32
3.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	34
4	Lineare Abbildungen und Matrizen	37
4.1	Lineare Abbildungen	37
4.2	Matrizen	40
4.3	Der Rang einer Matrix	44
5	Lineare Gleichungssysteme	46
5.1	Lösbarkeit und Lösungsstruktur	46
5.2	Der Gaußsche Algorithmus	50
6	Folgen und Reihen reeller Zahlen	56
6.1	Folgen und Grenzwerte	56
6.2	Konvergenzkriterien und Vollständigkeit von \mathbb{R}	60
6.3	Reihen	63
6.4	Absolut konvergente Reihen	65

7	Reelle Funktionen und Stetigkeit	69
7.1	Stetige Funktionen	69
7.2	Einige spezielle Funktionen	72
7.2.1	Polynome	72
7.2.2	Wurzelfunktionen	74
7.2.3	Trigonometrische Funktionen	75
7.2.4	Exponentialfunktion	79
7.3	Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen	81
8	Differentialrechnung	84
8.1	Definition der Ableitung	84
8.2	Differentiationsregeln	86
8.3	Ableitungen spezieller Funktionen	88
8.3.1	Polynome und rationale Funktionen	88
8.3.2	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen	89
8.3.3	Trigonometrische Funktionen	90
8.4	Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	92
8.4.1	Lokale Extrema	92
8.4.2	Der Mittelwertsatz	93
8.4.3	Konvexität und höhere Ableitungen	94
8.4.4	Der Satz von Taylor	96
8.5	Anwendungen auf die Untersuchung von Funktionsgraphen	99
8.6	Anwendung auf die Bestimmung von Grenzwerten	101
9	Integralrechnung	102
9.1	Der Begriff des Riemann-Integrals	102
9.2	Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen	106
9.3	Eigenschaften des Riemannintegrals	108
9.4	Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung	110
9.5	Einige Integrationstechniken	113
9.6	Stammfunktionen rationaler Funktionen	119
9.7	Flächeninhalte	122
9.8	Uneigentliche Integrale	124
10	Determinanten	129
10.1	Definition und Eigenschaften	129
10.2	Determinanten und invertierbare Matrizen	134
11	Eigenwerte und Eigenvektoren	138
11.1	Definitionen und einfache Eigenschaften	138
11.2	Koordinatentransformationen	142
11.3	Diagonalähnliche Matrizen	144
11.4	Orthonormalbasen	145

11.5	Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen	148
11.6	Quadratische Gleichungen und Hauptachsentransformation	152
12	Folgen und Reihen von Funktionen	159
12.1	Punktweise Konvergenz	159
12.2	Gleichmäßige Konvergenz	160
12.3	Potenzreihen	165
12.4	Fourierreihen	173
13	Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	181
13.1	Mengen im \mathbb{R}^n	181
13.2	Grenzwerte und Stetigkeit	182
13.3	Partielle Ableitungen	185
13.4	Differenzierbarkeit	188
13.5	Richtungsableitungen	193
13.6	Mittelwertsatz und Satz von Taylor	194
13.7	Lokale Extrema	197
13.8	Parameterabhängige Integrale	199
13.9	Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen	202
13.10	Extrema unter Nebenbedingungen	205
14	Wegintegrale	210
14.1	Wege im \mathbb{R}^n	210
14.2	Wegintegrale	214
15	Integration im \mathbb{R}^n	222
15.1	Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n	222
15.2	Integration über messbaren Mengen	227
15.3	Integration über Normalbereiche	232
15.4	Die Substitutionsregel	235

1 Grundlagen: Zahlen und Mengen

1.1 Die natürlichen Zahlen

Am Beginn aller Mathematik steht das Zählen:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Für die *Menge der natürlichen Zahlen* vereinbaren wir die Bezeichnung

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Unter einer *Menge* verstehen wir allgemein eine Zusammenfassung einzelner Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge. Ist a ein Element der Menge A , so schreiben wir $a \in A$. Ist jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B , so heißt A *Teilmenge* von B (in Zeichen: $A \subseteq B$). Zwei Mengen A und B heißen *gleich* (in Zeichen: $A = B$), wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Schließlich heißt eine Menge, die keine Elemente enthält, die *leere Menge*. Wir bezeichnen sie mit \emptyset .

Beispielsweise ist also $5 \in \mathbb{N}$ und $7 \in \mathbb{N}$, aber $5/7 \notin \mathbb{N}$, und die Menge der natürlichen Zahlen größer als 10 ist eine Teilmenge von \mathbb{N} :

$$\{n \in \mathbb{N} : n > 10\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Natürliche Zahlen lassen sich addieren und multiplizieren, und das Ergebnis ist wieder eine natürliche Zahl. Man sagt auch: \mathbb{N} ist abgeschlossen bzgl. Addition und Multiplikation. Die dabei geltenden Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) sind uns bekannt. Wir kommen auf diese Gesetze in Abschnitt 1.2 zurück. Man beachte, dass Gleichungen wie

$$7 + x = 5, \quad 7 \cdot x = 5, \quad x^2 = 2, \quad x^2 + 1 = 0$$

keine Lösungen im Bereich der natürlichen Zahlen besitzen, was uns auf das Problem der Zahlbereichserweiterung führen wird.

Eine wichtige Eigenschaft der Menge der natürlichen Zahlen ist die folgende:

Jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} hat ein kleinstes Element.

Es gibt also z.B. eine kleinste Primzahl, und es gibt eine kleinste natürliche Zahl, deren Quadrat größer als 1000 ist. Diese Eigenschaft ist Grundlage für das Verfahren der vollständigen Induktion, mit dem sich Aussagen beweisen lassen, die von einer natürlichen Zahl n abhängen, wie z.B.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } 2^n > n.$$

Verfahren der vollständigen Induktion Für jedes natürliche $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ definiert. Man zeigt, dass

- $A(1)$ richtig ist (1. Schritt, Induktionsanfang) und dass
- aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist, die Gültigkeit von $A(n + 1)$ folgt (2. Schritt, Induktionsschritt).

Dann gilt $A(n)$ für jedes natürliche n .

Warum funktioniert dieses Verfahren? Um das zu verstehen, nehmen wir an, dass die Aussage $A(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (ein solches Vorgehen nennt man auch *indirekt*). Die Menge der natürlichen Zahlen n , für die $A(n)$ nicht gilt, ist also nicht leer, und sie hat daher ein kleinstes Element, das wir n_0 nennen. Die Zahl n_0 ist also die kleinste natürliche Zahl, für die $A(n)$ nicht gilt. Da wir aus dem Induktionsanfang wissen, dass $A(1)$ gilt, ist $n_0 > 1$. Dann ist $n_0 - 1$ eine natürliche Zahl, die kleiner ist als n_0 , d.h. die Aussage $A(n_0 - 1)$ ist wahr. Im zweiten Induktionsschritt haben wir aber gesehen, dass aus der Gültigkeit von $A(n_0 - 1)$ die von $A(n_0)$ folgt.

Wir haben damit einen Widerspruch erhalten: unsere Annahme war, dass $A(n_0)$ nicht gilt, aus den Induktionsschritten folgt aber, dass $A(n_0)$ gilt. Dieser Widerspruch läßt sich nur so auflösen, dass unsere Annahme falsch war. Wenn man die beiden Induktionsschritte nachweisen kann, gilt $A(n)$ also tatsächlich für jedes $n \in \mathbb{N}$. ■

Zeigt man den Induktionsanfang nicht für $n = 1$, sondern für eine natürliche Zahl $n = n_1$, so folgt aus dem Induktionsschritt die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq n_1$. Das Verfahren der vollständigen Induktion benutzt man oft auch für die etwas größere Menge

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

der um die Zahl 0 erweiterten natürlichen Zahlen. Gilt $A(0)$, so folgt aus dem Induktionsschritt die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 1: Summe der ersten n natürlichen Zahlen

Wir wollen uns die folgende Aussage klarmachen:

$$\text{Für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ ist } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (\hat{=} A(n)).$$

Dabei haben wir die Summenschreibweise

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

benutzt.

Induktionsanfang Die Aussage $A(1)$ lautet

$$\sum_{k=1}^1 k = \frac{1}{2}1(1+1) \quad \text{bzw.} \quad 1 = 1$$

und ist offensichtlich richtig.

Induktionsschritt Sei $A(n)$ wahr. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

d.h. es gilt auch $A(n+1)$. Damit ist die Gültigkeit von $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n gezeigt. ■

Beispiel 2: Summe der ersten $n+1$ Glieder einer geometrischen Reihe

Sei $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\hat{=} A(n)).$$

Induktionsanfang $A(0)$ ist die Aussage $1 = 1$ und offenbar wahr.

Induktionsschritt Ist $A(n)$ wahr, so ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}, \end{aligned}$$

d.h. $A(n+1)$ ist wahr. ■

Beispiel 3: Bernoullische Ungleichung

Sei $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (\hat{=} A(n)).$$

Induktionsanfang $A(0)$ lautet $1 \geq 1$ und ist wahr.

Induktionsschritt Ist $A(n)$ wahr, so ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \quad (\text{hier benutzen wir } A(n)) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x \quad (\text{da } nx^2 \geq 0). \end{aligned}$$

■

1.2 Die reellen Zahlen

Wir stellen uns reelle Zahlen zunächst als (nicht unbedingt abbrechende) Dezimalbrüche vor, etwa

$$\pi = 3.14159\dots$$

Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{R} . Offenbar sind \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 Teilmengen von \mathbb{R} . Weitere für uns interessante Teilmengen sind die *Menge der ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

sowie die *Menge der rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}.$$

Dabei gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Reelle Zahlen, die nicht rational sind, heißen *irrational*.

Rationale Zahlen entstehen also als Quotienten ganzer Zahlen (wobei wir natürlich nicht durch 0 dividieren). Berechnet man diese Quotienten mit dem üblichen Divisionsverfahren, so erhält man einen abbrechenden Dezimalbruch wie $\frac{9}{5} = 1.8$ oder einen periodischen Dezimalbruch wie

$$\frac{115}{990} = 0,1161616\dots = 0,1\overline{16}.$$

Umgekehrt entspricht jeder periodische Dezimalbruch einem Quotienten ganzer Zahlen, den man wie folgt gewinnen kann: Ist z.B. $x = 1,2\overline{31}$, so ist

$$\begin{aligned} 1000x &= 1231,\overline{31} = 1231,313131\dots, \\ 10x &= 12,\overline{31} = 12,313131\dots, \end{aligned}$$

und Subtraktion liefert

$$990x = 1219 \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1219}{990}.$$

Betrachtet man die abbrechenden Dezimalbrüche als Dezimalbrüche mit der Periode 0, so können wir festhalten:

Die rationalen Zahlen sind gerade diejenigen reellen Zahlen, die durch periodische Dezimalbrüche dargestellt werden können.

Entsprechend werden die irrationalen Zahlen durch nichtperiodische Dezimalbrüche wie $0.101001000100001\dots$ dargestellt.

Wenden wir das oben beschriebene Verfahren auf $x = 0.\overline{9} = 0,999\dots$ an, so erhalten wir wegen $10x = 9,\overline{9}$, dass $9x = 9$ bzw. $x = 1$. Die Gleichheit

$$0,999\dots = 1$$

ist kein Widerspruch. Sie zeigt nur, dass verschiedene Dezimalbrüche ein und dieselbe reelle Zahl darstellen können. Möchte man eine eindeutige Darstellung

reeller Zahlen durch Dezimalbrüche erzwingen, so muß man die Periode $\bar{9}$ (oder die Periode $\bar{0}$) verbieten.

Will man Analysis betreiben, so ist die naive Vorstellung von reellen Zahlen als Dezimalbrüchen nicht ausreichend. Andererseits ist ein systematischer Aufbau einer Theorie der reellen Zahlen recht schwierig. Wir beschränken uns daher darauf, ein System von Axiomen zusammenzustellen, die von der Menge der reellen Zahlen erfüllt werden und auf die wir im weiteren stets zurückgreifen. Unter einem Axiom versteht man dabei eine als wahr anerkannte oder als wahr angenommene Aussage, die nicht auf einfachere Aussagen zurückgeführt werden kann.

Auf \mathbb{R} gibt es zwei Rechenoperationen: die Addition $+$ und die Multiplikation \cdot , die je zwei reellen Zahlen a, b die reellen Zahlen $a + b$ und $a \cdot b$ zuordnen. Dabei sollen die folgenden Regeln gelten:

Körperaxiome

- (A1) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)
- (A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz)
- (A3) Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, die *Null*, mit $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- (A4) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.
- (A5) $ab = ba$ (Kommutativgesetz)
- (A6) $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativgesetz)
- (A7) Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$ mit $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
Diese heißt *Eins*.
- (A8) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$.
- (A9) $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz)

Die Axiome (A1)–(A4) bilden die Rechenregeln für die Addition und (A5)–(A8) die für die Multiplikation. (A9) regelt die Beziehungen zwischen Addition und Multiplikation. Die Bezeichnung *Körperaxiome* kommt daher, dass eine Menge mit zwei Operationen $+$ und \cdot , für die die Regeln (A1)–(A9) gelten, ein *Körper* heißt. Also ist \mathbb{R} (genau wie \mathbb{Q}) ein Körper.

Aus diesen Axiomen lassen sich alle weiteren Rechenregeln wie $a \cdot 0 = 0$ ableiten. Wir werden das nicht tun, sondern vermerken lediglich die folgenden Aussagen über das Lösen von Gleichungen.

Folgerung 1.1 *Seien a, b reell. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$a + x = b.$$

Warum? Nun, wir müssen uns überlegen, dass es eine solche Zahl x gibt und dass sie eindeutig bestimmt ist. Die Existenz einer Zahl mit bestimmten Eigenschaften kann man zeigen, indem man eine solche Zahl einfach angibt. In unserem Fall ist

das einfach. Für $x := (-a) + b$ ist nämlich

$$a + x = a + ((-a) + b) \stackrel{(A2)}{=} (a + (-a)) + b \stackrel{(A4)}{=} 0 + b \stackrel{(A1)}{=} b + 0 \stackrel{(A3)}{=} b.$$

Die Eindeutigkeit ergibt sich z.B. so. Ist x eine Zahl mit $a + x = b$, so ist

$$x = x + 0 = 0 + x = ((-a) + a) + x = (-a) + (a + x) = (-a) + b,$$

d.h. es ist notwendigerweise $x = (-a) + b$. ■

Folgerung 1.2 *Seien a, b reell und $a \neq 0$. Dann gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit*

$$a \cdot x = b.$$

Die Lösung ist natürlich die Zahl $x = a^{-1}b$. ■

Auf \mathbb{R} ist außerdem eine Ordnung $<$ erklärt. Für diese soll gelten:

Ordnungsaxiome

(A10) Es gilt genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$ oder $b < a$.

(A11) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$ (Transitivität).

(A12) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(A13) Aus $a < b$ folgt $ac < bc$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$.

Außerdem vereinbaren wir die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} a \leq b, & \text{ wenn } a < b \text{ oder } a = b \\ a > b, & \text{ wenn } b < a \\ a \geq b, & \text{ wenn } b \leq a, \end{aligned}$$

und wir nennen $a \in \mathbb{R}$

- *positiv*, wenn $a > 0$,
- *negativ*, wenn $a < 0$, und
- *nichtnegativ*, wenn $a \geq 0$.

Den *Betrag* von $a \in \mathbb{R}$ erklären wir durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Schließlich führen wir Bezeichnungen für Intervalle ein. Für $a < b$ sei

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{offenes Intervall.} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} [a, b] \\ (a, b] \\ [a, b) \\ (a, b) \end{aligned}} \right\} \text{halboffene Intervalle}$$

Aus den Ordnungsaxiomen folgt beispielsweise, dass man Ungleichungen addieren und unter bestimmten Bedingungen auch multiplizieren darf:

- Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.
- Aus $0 < a < b$ und $0 < c < d$ folgt $ac < bd$.

Dagegen kehrt sich bei Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl die Ordnungsrelation $<$ um:

- Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $ac > bc$.

Archimedisches Axiom

(A14) Zu beliebigen positiven reellen Zahlen x, y gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n \cdot x > y$.

Dieses Axiom wird z.B. beim Beweis einiger Konvergenzaussagen benutzt. Es besagt, dass man eine (möglicherweise sehr kleine) positive Zahl nur hinreichend oft zu sich selbst addieren muß, um eine beliebige (sehr große) Zahl zu übertreffen.

Die Axiome (A1) – (A14) gelten auch für die rationalen Zahlen. Erst das folgende Axiom charakterisiert die reellen Zahlen vollständig. Dieses Axiom ist für die Analysis besonders wichtig. Vor seiner Formulierung müssen wir einige Begriffe einführen.

Ist M eine Teilmenge der reellen Zahlen und k eine reelle Zahl so, dass $m \leq k$ für alle $m \in M$, so heißt M *nach oben beschränkt*, und k heißt eine *obere Schranke* für M . Ist k eine obere Schranke für M und gibt es keine kleinere obere Schranke für M , so heißt k das *Supremum* von M , und man schreibt $k = \sup M$. Analog erklärt man die Begriffe *nach unten beschränkt*, *untere Schranke* und *größte untere Schranke*. Besitzt M eine größte untere Schranke, so heißt diese das *Infimum* von M , und wir schreiben $\inf M$ dafür.

Beispiele Für $M := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ ist 3 eine obere Schranke und 2 die kleinste obere Schranke. Es ist also M nach oben beschränkt und $\sup M = 2$. Auch für $M' := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ ist $\sup M' = 2$. ■

Das Supremum einer Menge M muß also nicht zu M gehören. Wenn es dazu gehört, nennen wir es das *Maximum* von M und schreiben $\max M$ statt $\sup M$. Gehört das Infimum einer Menge zur Menge, so nennen wir es das *Minimum* und schreiben $\min M$ statt $\inf M$. Für die Mengen im Beispiel ist also 2 das Maximum von M , während M' kein Maximum besitzt. Schließlich heißt eine Menge *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Vollständigkeitsaxiom

(A15) Jede nichtleere und nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Wir überlegen uns, dass dieses Axiom in der Menge der rationalen Zahlen nicht gilt. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\},$$

die entsteht, indem wir die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ an der nullten, ersten, zweiten, ... Stelle nach dem Komma abbrechen. Dann ist M eine Menge rationaler Zahlen, deren Supremum *in* \mathbb{R} gleich $\sqrt{2}$ ist. Um zu zeigen, dass diese Menge kein Supremum *in* \mathbb{Q} hat, müssen wir uns überlegen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist, also

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \quad (1.1)$$

Dazu gehen wir indirekt vor, d.h. wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gibt es natürliche Zahlen m, n mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, die wir darüber hinaus so wählen, dass der Nenner n *minimal* wird. (Wir erinnern uns: jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} hat ein kleinstes Element.) Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt{2}n &= m && | \text{quadrieren} \\ 2n^2 &= m^2 && | + 2n^2 - 4mn + m^2 \\ 4n^2 - 4mn + m^2 &= 2(m^2 - 2mn + n^2) \\ (2n - m)^2 &= 2(m - n)^2. \end{aligned}$$

Wegen $1 < \frac{m}{n} < 2$ ist $n < m < 2n$, d.h. $2n - m$ und $m - n$ sind positiv. Wurzelziehen liefert also

$$2n - m = \sqrt{2}(m - n)$$

bzw. $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$. Der Nenner $m - n$ ist aber *kleiner* als n , da ja $2n - m > 0$. Wir haben also eine Darstellung von $\sqrt{2}$ mit kleinerem Nenner gefunden, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Die Annahme erweist sich so als falsch, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ■

1.3 Die komplexen Zahlen

Die Tatsache, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen hat, zwingt uns dazu, den Körper der reellen Zahlen zu erweitern.

Definition 1.3 Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist wie folgt erklärt:

- Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) reeller Zahlen. Es heißt x Realteil und y Imaginärteil von z , geschrieben: $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.
- Zwei komplexe Zahlen $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ heißen gleich, wenn $x = u$ und $y = v$, d.h. wenn $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$.
- Die Summe der komplexen Zahlen $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ ist die komplexe Zahl

$$z + w := (x+u, y+v),$$

und ihr Produkt ist

$$zw := (xu - yv, xv + yu).$$

Es ist nicht schwierig (aber etwas mühsam) nachzurechnen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind. Die Menge \mathbb{C} ist also ein Körper, und für komplexe Zahlen gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle. Beispielsweise ist

- $(0, 0)$ das Nullelement, denn $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$,
- $(1, 0)$ das Einselement, denn $(x, y)(1, 0) = (x, y)$,
- $(-x, -y)$ die zu $z = (x, y)$ entgegengesetzte Zahl $-z$, denn

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0),$$

- $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ die zu $z = (x, y) \neq (0, 0)$ reziproke Zahl z^{-1} , denn

$$(x, y) \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} \right) = (1, 0).$$

Dagegen ist auf \mathbb{C} keine Ordnung erklärt, die die Ordnungsaxiome erfüllt!

Beispiel 1 Für komplexe Zahlen der speziellen Gestalt $(x, 0)$ und $(u, 0)$ ist

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) \quad \text{und} \quad (x, 0)(u, 0) = (xu, 0).$$

Man erhält in beiden Fällen eine komplexe Zahl der Gestalt $(a, 0)$, und die reelle Zahl a wird wie im Reellen aus x und u berechnet. In diesem Sinn ist \mathbb{R} in \mathbb{C} enthalten, und man schreibt statt $(x, 0)$ einfach x . ■

Beispiel 2 Die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ spielt eine besondere Rolle. Für sie ist nämlich

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

In \mathbb{C} läßt sich also aus -1 eine Quadratwurzel ziehen! ■

Mit diesen Vereinbarungen und Bezeichnungen führen wir eine zweckmäßigere Schreibweise für komplexe Zahlen ein: Wir schreiben $z = (x, y)$ als

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Addition und Multiplikation sehen in dieser Schreibweise so aus:

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v), \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu + iyiv) + (xiv + iyu) = (xu - yv) + i(xv + yu), \end{aligned}$$

und die Division führt man am besten so aus:

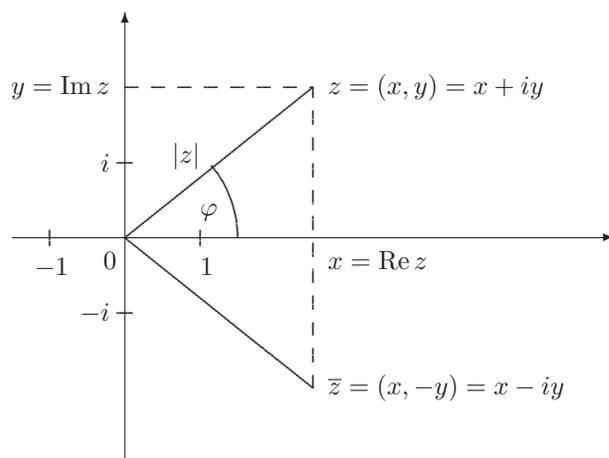
$$\frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} = \frac{xu + yv + i(yu - xv)}{u^2 + v^2}.$$

Wir haben also mit der Zahl $u - iv$ erweitert. Allgemein nennen wir für jede Zahl $z = x + iy$ die Zahl $\bar{z} = x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Dabei gilt

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

So wie man \mathbb{R} als Zahlengerade auffassen kann, ist es praktisch, sich \mathbb{C} als eine Zahlenebene vorzustellen, die oft *Gaußsche Zahlenebene* heißt.



Neben der Darstellung von $z = (x, y) = x + iy$ in kartesischen Koordinaten ist oft eine Darstellung in *Polarkoordinaten* r, φ vorteilhaft. Man beschreibt die Lage von z also durch den Abstand r von z zur 0 und (für $z \neq 0$) durch den Winkel φ von z mit der positiven reellen Achse. Wir messen diesen Winkel meist im *Bogenmaß*, d.h. $360^\circ \hat{=} 2\pi$. Der Winkel φ ist nur bis auf additive Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Wir können die Angabe von φ eindeutig machen durch die Forderung $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dann schreiben wir

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg z && \text{Argument von } z \neq 0, \\ r &= |z| && \text{Betrag von } z. \end{aligned}$$

Aus der Skizze können wir unmittelbar ablesen:

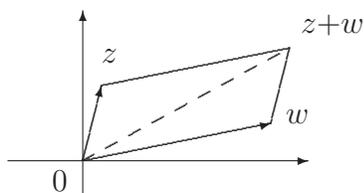
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras}), \quad (1.2)$$

$$x = \operatorname{Re} z = r \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = r \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Für den Betrag hat man die folgenden Eigenschaften:

$$|z|^2 = z \bar{z}, \quad |zw| = |z| |w|, \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Diese Ungleichung heißt die *Dreiecksungleichung*.



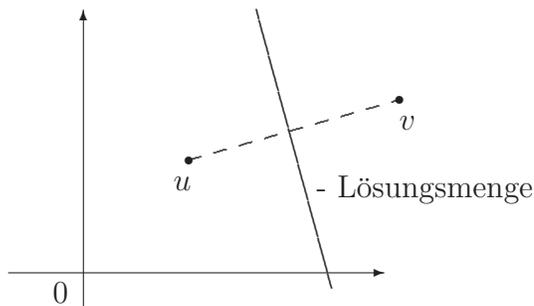
Man beachte, dass wir damit auch den Betrag einer reellen Zahl definiert haben, der natürlich mit dem aus der Schule bekannten Betrag übereinstimmt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist oft nützlich, sich die Zahl $|z - w|$ als den *Abstand* der komplexen Zahlen z und w vorzustellen. So ist

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2\}$$

gerade die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt 1 und dem Radius 2, und eine Gleichung wie $|z - u| = |z - v|$ (mit gegebenen Zahlen $u \neq v \in \mathbb{C}$) kann man wie folgt lösen: Wir suchen alle $z \in \mathbb{C}$, die von u und v den *gleichen Abstand* haben. Die Lösungsmenge ist also gerade die Mittelsenkrechte der Strecke, die u und v verbindet.



Die Beziehungen (1.3) führen uns auf die *trigonometrische Darstellung* einer komplexen Zahl:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.4)$$

Nützlich ist die folgende (zunächst rein formale) Vereinbarung:

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ schreiben wir $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Beispielsweise gilt dann:

$$|e^{i\varphi}| = 1, \quad e^{i \cdot 0} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

und wir können die Zahl z auch schreiben als

$$z = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi}, \quad (1.5)$$

was nichts anderes als die trigonometrische Darstellung ist.

Die trigonometrische Darstellung ist besonders geeignet für das Multiplizieren (und damit für das Dividieren, Potenzieren und Radizieren) komplexer Zahlen, weniger für die Addition. Das liegt an den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Mit diesen kann man leicht nachrechnen, dass für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ gilt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

und

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

falls $z_2 \neq 0$. Man multipliziert also komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Insbesondere ist

$$\underbrace{e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} \cdot \dots \cdot e^{i\varphi}}_{k \text{ Faktoren}} = e^{i k \varphi},$$

und hieraus bekommen wir die *Moivresche Formel*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi).$$

Einer der Gründe für die Einführung komplexer Zahlen war der Wunsch, uneingeschränkt Wurzeln ziehen zu können. Dieses Ziel haben wir erreicht, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 1.4 Sei $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ und $a = r e^{i\varphi}$. Dann hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene komplexe Lösungen. Diese sind gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

mit $k = 0, 1, \dots, n-1$. Die Gleichung $z^n = 0$ hat nur die Lösung $z = 0$.

Mit der Moivreschen Formel kann man leicht zeigen, dass jede der Zahlen z_k eine Lösung ist, und aus der Darstellung der Multiplikation in trigonometrischer Form folgt, dass es keine anderen Lösungen geben kann. (Wie?)

Beispiel Wir suchen alle Lösungen von $z^4 = -2 + 2i$. Zunächst bringen wir die rechte Seite in trigonometrische Form. Es ist $|-2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ sowie

$$\cos \varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da $-2 + 2i$ im 2. Quadranten liegt, muss $\varphi = \arg(-2 + 2i) = \frac{3}{4}\pi$ sein. Also ist

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{4}\pi},$$

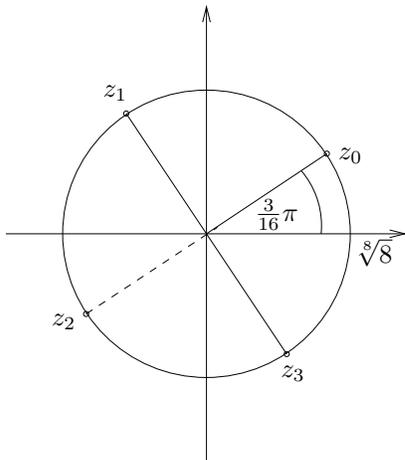
und die Gleichung $z^4 = -2 + 2i$ hat genau die folgenden Lösungen:

$$z_0 = \sqrt[8]{8} e^{i\frac{3}{16}\pi} = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{3}{16}\pi + i \sin \frac{3}{16}\pi \right),$$

$$z_1 = \sqrt[8]{8} e^{i\frac{11}{16}\pi} = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{11}{16}\pi + i \sin \frac{11}{16}\pi \right),$$

$$z_2 = \sqrt[8]{8} e^{i\frac{19}{16}\pi} = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{19}{16}\pi + i \sin \frac{19}{16}\pi \right),$$

$$z_3 = \sqrt[8]{8} e^{i\frac{27}{16}\pi} = \sqrt[8]{8} \left(\cos \frac{27}{16}\pi + i \sin \frac{27}{16}\pi \right).$$



Die Lösungen bilden also die Ecken eines Quadrats. Das ist kein Zufall. Allgemein bilden die Lösungen von $z^n = a$ die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks. Die n Lösungen von $z^n = 1$ heißen auch die n *Einheitswurzeln*. ■

1.4 Mengen und Mengenoperationen

Wir haben bereits in Abschnitt 1.1 vereinbart, was wir unter einer „Menge“ verstehen wollen, und wir haben auch die Begriffe „Teilmenge“ und „leere Menge“ erklärt. Wir schauen uns nun Operationen mit Mengen an.

Definition 1.5 Sei E eine Menge, und A, B seien Teilmengen von E . Dann heißt

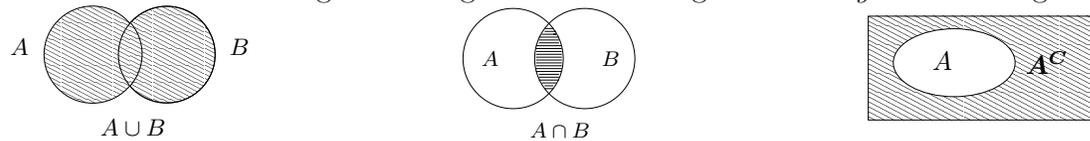
- $A \cup B := \{x \in E : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung von A und B ,
- $A \cap B := \{x \in E : x \in A \text{ und } x \in B\}$ Durchschnitt von A und B ,

- $A \setminus B := \{x \in E : x \in A \text{ und } x \notin B\}$ Differenz von A und B .

Zwei Mengen $A, B \subseteq E$ heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$, und die Menge $E \setminus A = A^c$ heißt auch das *Komplement* von A in E .

Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge A_n von E gegeben, so versteht man unter der *Vereinigung* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ die Menge aller Elemente $x \in E$, die in *mindestens einer* der Mengen A_n liegen, und der *Durchschnitt* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ist die Menge aller $x \in E$, die in *jeder* der Mengen A_n liegen.

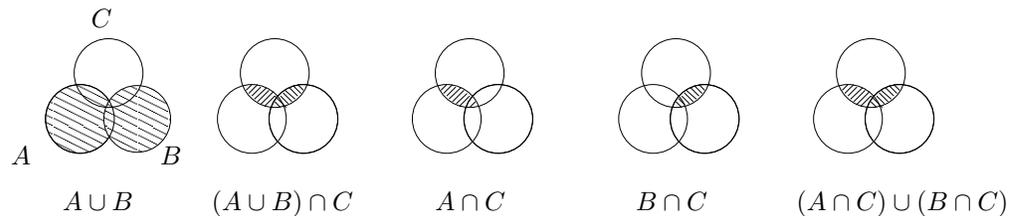
Eine Veranschaulichung von Mengen kann über sog. *Venn-Diagramme* erfolgen:



Für das Rechnen mit Mengen hat man die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) && \text{Assoziativität,} \\
 A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A && \text{Kommutativität,} \\
 (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
 (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) &&&& \left. \vphantom{\begin{aligned} (A \cup B) \cap C \\ (A \cap B) \cup C \end{aligned}} \right\} \text{Distributivität.}
 \end{aligned}$$

Anschaulich läßt sich beispielsweise das erste Distributivgesetz wie folgt einsehen:



Weiter gelten die *de Morganschen Regeln*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Die erste dieser Regeln läßt sich wie folgt veranschaulichen:

Zum Selbsteintrag während der Vorlesung

Formale Beweise dieser Regeln werden geführt, indem man die Definition der Gleichheit zweier Mengen benutzt: $A = B$ wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Um also z.B. die erste der de Morganschen Regeln zu bestätigen, muß man

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{und} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$$

zeigen. Wir tun das für die erste dieser Inklusionen. Dazu schreiben wir \Rightarrow für „daraus ergibt sich“ oder „daraus folgt“.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \text{ liegt nicht in } A \cup B \\ &\Rightarrow x \text{ liegt nicht in } A \text{ und nicht in } B \\ &\Rightarrow x \in A^c \text{ und } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Inklusion beweist man genauso. In diesem Fall genügt es, die Pfeile einfach umzudrehen. Man schreibt dann einfach \iff und liest das als „ist äquivalent zu“ oder „genau dann, wenn“.

Definition 1.6 Für zwei Mengen A, B heißt

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

ihre kartesische Produkt.

Beispielsweise ist

$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\},$$

und $[2, 4] \times [1, 2]$ kann man sich als Rechteck vorstellen:

Zum Selbsteintrag während der Vorlesung

Die Teilmengen von $A \times B$ (insbesondere die von $A \times A$) heißen *Relationen*.

1.5 Abbildungen

Einer der zentralen Begriffe der Mathematik ist der Begriff der *Abbildung* oder *Funktion*. Wir führen diesen Begriff zunächst ganz allgemein ein, wozu wir die Sprache der Mengen benutzen. Später spezialisieren wir uns auf reellwertige Funktionen. Wir vereinbaren:

Seien X, Y nichtleere Mengen. Eine Vorschrift f , die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet, heißt *Abbildung von X in Y* . Wir schreiben $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$. Das Element $y = f(x)$ heißt das *Bild* von x , und x heißt ein *Urbild* von y . Die Menge X heißt auch *Definitionsbereich $D(f)$ der Abbildung f* , und die Menge

$$B(f) = \{y \in Y : \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

heißt *Bildmenge oder Wertebereich von f* .

Achtung: Im „Arbeitsbuch“ ist zugelassen, dass $D(f)$ eine *echte* Teilmenge von X ist.

Achtung: Wir schreiben *NICHT*: „die Funktion $y = f(x)$ “. Für uns ist immer $f(x)$ ein Element von Y . Die Funktion selbst ist f .

Die Menge $\{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}$ heißt *Graph der Abbildung f* . Der Graph ist also eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$. Offenbar ist jede Abbildung durch ihren Graphen eindeutig bestimmt.

Beispiele

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x \quad B(f) = \mathbb{R}$
- (2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad B(f) = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
- (3) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad B(f) = \mathbb{R}^+$
- (4) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2 \quad B(f) = \mathbb{R}^+$
- (5) $X :=$ Menge aller nichtleeren beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$
 $f : X \rightarrow Y, \quad M \mapsto \inf M \quad B(f) = \mathbb{R}.$

Definition 1.7 Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

- *injektiv oder eineindeutig*, wenn für $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist, d.h. wenn jedes $y \in B(f)$ genau ein Urbild besitzt.
- *surjektiv oder Abbildung auf Y* , wenn $B(f) = Y$.
- *bijektiv*, wenn sie *injektiv und surjektiv* ist.

In den obigen Beispielen ist die Abbildung f in

- (1) bijektiv
- (2) weder surjektiv noch injektiv
- (3) injektiv, nicht surjektiv
- (4) bijektiv
- (5) surjektiv, nicht injektiv

Für jede nichtleere Menge X heißt $f : X \rightarrow X, x \mapsto x$, die *identische Abbildung*. Sie ist offenbar bijektiv. Wir bezeichnen sie mit Id_X oder Id .

Definition 1.8 Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir nennen die durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{genau dann, wenn } f(x) = y$$

definierte Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ die Umkehrabbildung von f .

Ist $f : X \rightarrow Y$ injektiv, so ist $f : X \rightarrow B(f)$ bijektiv, und man kann die Umkehrabbildung $f^{-1} : B(f) \rightarrow X$ bilden. In jedem Fall ist

$$D(f^{-1}) = B(f), \quad B(f^{-1}) = D(f) = X.$$

Im Beispiel (1) ist die Umkehrabbildung wieder

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

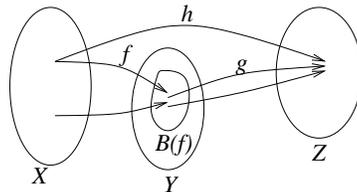
und im Beispiel (4) ist

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad y \mapsto \sqrt{y}.$$

Definition 1.9 Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Die Abbildung

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

heißt Verknüpfung (Hintereinanderschaltung, Verkettung) von f und g .



Man beachte, dass die Reihenfolge von f und g wesentlich ist. So ist für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

die Funktion $h = g \circ f$ gegeben durch $h(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$, während $\ell = f \circ g$ gegeben wird durch $\ell(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2$. Auch muß $f \circ g$ gar nicht erklärt sein, wenn man $g \circ f$ bilden kann. Wichtig ist offenbar, dass $B(f) \subseteq D(g)$.

Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist offenbar

$$f \circ \text{Id}_X = f, \quad \text{Id}_Y \circ f = f,$$

und für jede bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$, d.h.

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_X.$$

Schließlich ist die Hintereinanderausführung assoziativ:

Satz 1.10 Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow W$ Abbildungen, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Satz 1.11 Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ bijektiv, so ist auch $g \circ f : X \rightarrow Z$ bijektiv, und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis ↗ Übung.

2 Der Vektorraum \mathbb{R}^n

In den folgenden Wochen wenden wir uns der Linearen Algebra zu, die man als eine abstrakte Form des Rechnens mit Vektoren auffassen kann. Ein zentrales Thema werden *lineare Räume* (= Vektorräume) sowie *lineare Abbildungen* (beschrieben durch Matrizen) zwischen ihnen sein. Damit stellen wir auch die Grundlagen bereit für die Behandlung der Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher im kommenden Semester.

2.1 Vektoren und Geraden im \mathbb{R}^2

In diesem Abschnitt arbeiten wir in einer Ebene, in der wir uns ein kartesisches Koordinatensystem mit Koordinatenursprung O und mit Koordinaten x, y denken. Jeder Punkt der Ebene wird also durch ein Koordinatenpaar (x, y) eindeutig beschrieben, so dass wir die Ebene mit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifizieren können. Insbesondere hat der Punkt O die Koordinaten $(0, 0)$.

Als erstes geometrisches Objekt im \mathbb{R}^2 interessiert uns die Gerade.

Definition 2.1 *Eine Gerade im \mathbb{R}^2 ist die Menge aller Lösungen (x, y) einer linearen Gleichung*

$$Ax + By = C, \quad (2.1)$$

wobei A, B, C reelle Zahlen und A und B nicht beide gleich 0 sind.

Im Falle $B \neq 0$ können wir (2.1) nach y umstellen und erhalten

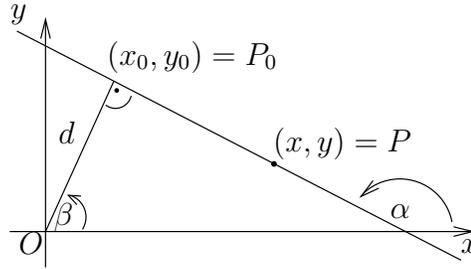
$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Insbesondere ist in diesem Fall $-\frac{A}{B}$ der Anstieg der Geraden (2.1). Man beachte auch, dass die Gleichungen

$$\lambda Ax + \lambda By = \lambda C \quad \text{mit} \quad \lambda \neq 0$$

die gleiche Gerade wie die Gleichung (2.1) beschreiben. Neben (2.1) gibt es zahlreiche weitere Möglichkeiten, Geraden zu beschreiben, von denen wir uns zwei näher anschauen.

Bei der *Hesseschen Normalform* der Geradengleichung geht man davon aus, dass eine Gerade eindeutig festgelegt ist durch ihren Abstand d vom Koordinatenursprung O und durch den Winkel $\beta \in [0, 2\pi)$, den das von O auf die Gerade gefällte Lot mit der positiven x -Achse bildet. Im Fall $d = 0$ ist dieser Winkel nur bis auf π bestimmt.



Ist $P_0 = (x_0, y_0)$ der Lotfußpunkt und $P = (x, y) \neq P_0$ ein weiterer Punkt der Geraden, und hat die Gerade den Anstieg $\tan \alpha$, so gilt

$$y - y_0 = (\tan \alpha) (x - x_0).$$

Wegen $\sin \alpha = \cos \beta$ und $\cos \alpha = -\sin \beta$ erhält man hieraus

$$(-\sin \beta) (y - y_0) = (\cos \beta) (x - x_0)$$

bzw.

$$x \cos \beta + y \sin \beta = x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta.$$

Wegen $x_0 \cos \beta + y_0 \sin \beta = d$ erhalten wir die *Hessesche Normalform*

$$x \cos \beta + y \sin \beta = d \tag{2.2}$$

der Geradengleichung.

Will man die allgemeine Geradengleichung (2.1) auf Hessesche Normalform bringen, muß man dafür sorgen, dass die Quadratsumme der Koeffizienten A und B den Wert 1 erhält (da $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$) und dass die rechte Seite ≥ 0 wird. Es gilt:

Satz 2.2 Sei $Ax + By = C$ eine Geradengleichung und

$$\lambda := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} & \text{für } C \geq 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}} & \text{für } C < 0. \end{cases}$$

Dann erhält man die Hessesche Normalform

$$x \cos \beta + y \sin \beta = d$$

durch Multiplikation von $Ax + By = C$ mit λ , d.h. es ist

$$\cos \beta = A\lambda, \quad \sin \beta = B\lambda, \quad d = C\lambda \geq 0.$$

Mit der Hesseschen Normalform läßt sich bequem arbeiten, wenn man sich für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Gerade interessiert.

Satz 2.3 Sei g eine Gerade, die O nicht enthält, und (2.2) sei ihre Hessesche Normalform. Weiter sei $P = (x^*, y^*)$ ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann ist

$$x^* \cos \beta + y^* \sin \beta - d > 0,$$

wenn P und O auf verschiedenen Seiten von g liegen und

$$x^* \cos \beta + y^* \sin \beta - d < 0,$$

wenn P und O auf der gleichen Seite von g liegen. Der Abstand von P zur Geraden g ist gleich

$$|x^* \cos \beta + y^* \sin \beta - d|.$$

Beispiel Wir suchen die allgemeine Form (2.1) und die Hessesche Normalform (2.2) der Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_0 = (3, 8)$ und $P_1 = (-6, -4)$. Der Ansatz $Ax + By = C$ liefert nach Einsetzen

$$3A + 8B = C, \quad -6A - 4B = C,$$

woraus durch Subtraktion folgt $9A + 12B = 0$. Wir wählen z.B. $A = 4$. Dann ist $B = -3$ und $C = -12$. Also lautet die gesuchte Gleichung

$$4x - 3y = -12.$$

Nach Satz 2.2 ist $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{-1}{5}$. Damit erhalten wir die Hessesche Normalform

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = \frac{12}{5}.$$

Für $P = (x^*, y^*) = (1, 2)$ ist $-\frac{4}{5}x^* + \frac{3}{5}y^* - \frac{12}{5} = -2$. Also liegt P auf der gleichen Seite der Geraden wie O , und der Abstand von P zur Geraden ist gleich 2. ■

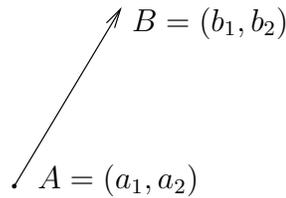
Weitere Möglichkeiten der Beschreibung von Geraden eröffnen sich bei Verwendung von Vektoren. Ein (zweidimensionaler) *Vektor* \vec{v} ist ein Paar reeller Zahlen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben Vektoren grundsätzlich als Spalten. Aus Platzgründen werden wir aber oft $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ schreiben, wobei T für *Transponieren* steht:

$$(v_1, v_2)^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T = (v_1, v_2).$$

Anschaulich stellt man sich Vektoren als Pfeile vor. Genauer: Unter einem *Pfeil* \overrightarrow{AB} versteht man ein Paar von Punkten A, B der Ebene, die durch eine Strecke verbunden sind, wobei A Anfangspunkt und B Endpunkt des Pfeiles heißen.



Definition 2.4 Ein Pfeil \overrightarrow{AB} mit $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ stellt genau dann den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dar, wenn

$$v_1 = b_1 - a_1 \quad \text{und} \quad v_2 = b_2 - a_2.$$

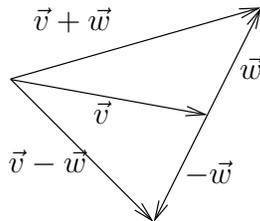
Man kann einen Vektor also auffassen als eine Klasse von Pfeilen gleicher Richtung und gleicher Länge.

Rechenregeln für Vektoren

(A) *Summe* und *Differenz* der Vektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ sind die Vektoren

$$\vec{v} + \vec{w} := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)^T \quad \text{und} \quad \vec{v} - \vec{w} := (v_1 - w_1, v_2 - w_2)^T.$$

Die Addition von Vektoren ist kommutativ und assoziativ. *Geometrische Interpretation:*



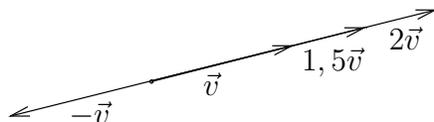
(B) Das *Produkt* des Vektors $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ mit der Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Vektor

$$\lambda \vec{v} := (\lambda v_1, \lambda v_2)^T.$$

Dabei gelten die *Distributivgesetze*

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} \quad \text{und} \quad \lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}.$$

Geometrische Interpretation:



(C) Die *Länge* (oder Euklidische Norm) des Vektors $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ ist die Zahl

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Für beliebige Vektoren \vec{v}, \vec{w} gelten die *Dreiecksungleichungen*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \quad \left| \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \right| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

Außerdem ist $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|$, und $\|\vec{v}\| = 0$ gilt genau dann, wenn \vec{v} der *Nullvektor* $(0, 0)^T$ ist.

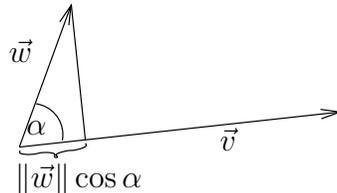
(D) Ein Vektor der Länge 1 heißt *Einheitsvektor*. Spezielle Einheitsvektoren sind $\vec{e}_1 := (1, 0)^T$ und $\vec{e}_2 := (0, 1)^T$. Jeder Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ läßt sich auf genau eine Weise als *Linearkombination* dieser Vektoren schreiben:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2.$$

(E) Das *Skalarprodukt* (oder innere Produkt) der Vektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ ist die *Zahl*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen den Richtungen von \vec{v} und \vec{w} ist:



Insbesondere ist $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$. Statt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ schreibt man oft auch $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Es gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{w} \cdot \vec{v} && \text{(Kommutativität)} \\ \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= (\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w}) && \text{("Assoziativität")} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$.

Damit ergibt sich eine bequeme Möglichkeit der Berechnung des Skalarproduktes der Vektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$ mittels Koordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2) \cdot (w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2) \\ &= v_1w_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + v_1w_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + v_2w_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + v_2w_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2, \end{aligned}$$

d.h.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2. \quad (2.3)$$

Hieraus erhält man eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{v} \neq 0$ und $\vec{w} \neq 0$:

$$\cos \alpha = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}}. \quad (2.4)$$

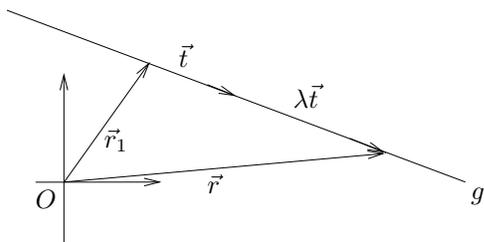
Schließlich nennen wir zwei Vektoren \vec{v}, \vec{w} *orthogonal*, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. In diesem Fall schreibt man auch $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Wir kommen nun zur vektoriellen Darstellung von Geraden. Dazu bemerken wir zunächst, dass der Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und der Vektor $\vec{r} = (x, y)^T$ formal verschiedene Objekte sind. Man kann diese Objekte aber miteinander identifizieren, wenn man sich \vec{r} als Pfeil \overrightarrow{OP} vorstellt. Wir nennen \vec{r} dann auch den *Ortsvektor* von P .

Sei nun g eine Gerade, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)^T$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P_1 auf g und \vec{t} ein Vektor, der die Richtung von g angibt. (Die Gerade g ist offenbar durch die Angabe von \vec{r}_1 und \vec{t} eindeutig bestimmt.) Dann werden die Ortsvektoren aller Punkte auf g durch

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

beschrieben.



Die Darstellung (2.5) heißt auch *Parameterdarstellung* von g mit dem Parameter λ .

Wir sehen uns noch die vektorielle Schreibweise der Hesseschen Normalform an. Sei g eine Gerade, und zunächst sei $O \notin g$. Weiter sei \vec{r}_0 der Ortsvektor des Fußpunktes P_0 des Lotes von O auf g . Wir stellen die Gerade g in der Parameterform $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{t}$ mit einem geeigneten Richtungsvektor \vec{t} dar. Dann ist $\vec{t} \cdot \vec{r}_0 = 0$. Für den Vektor $\vec{n} := \frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|}$ gilt

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{und} \quad \|\vec{n}\| = 1. \quad (2.6)$$

Ein Vektor \vec{n} mit diesen Eigenschaften heißt *Einheitsnormalenvektor* zu g . Ist $O \in g$, so können wir \vec{n} nicht mehr aus dem Ortsvektor \vec{r}_0 von P_0 konstruieren und müssen ihn auf andere Weise wählen.

Wir multiplizieren die Geradengleichung $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{n}$ skalar mit \vec{n} und erhalten

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (\vec{r}_0 + \lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$$

bzw.

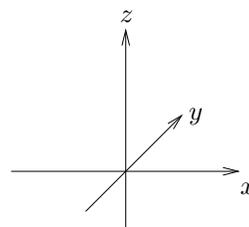
$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Das ist die Hessesche Normalform in Vektorschreibweise. Man beachte, dass

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|} = \frac{\|\vec{r}_0\|^2}{\|\vec{r}_0\|} = \|\vec{r}_0\| = d.$$

2.2 Vektoren, Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3

In diesem Abschnitt arbeiten wir im Raum, in dem wir uns ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung 0 und mit Koordinaten x, y, z denken. Die Koordinatenachsen sollen wie in der Skizze angeordnet sein. Jeder Punkt des Raumes wird also durch ein Koordinatentripel (x, y, z) eindeutig beschrieben, so dass wir den Raum mit dem \mathbb{R}^3 identifizieren können.



Definition 2.5 Eine Ebene im \mathbb{R}^3 ist die Menge aller Lösungen (x, y, z) einer linearen Gleichung

$$Ax + By + Cz = D, \quad (2.7)$$

wobei A, B, C, D reelle Zahlen und A, B, C nicht alle gleich 0 sind.

Eine Gerade im Raum beschreiben wir als Schnitt zweier nicht paralleler Ebenen.

Definition 2.6 Eine Gerade im \mathbb{R}^3 ist die Menge aller Tripel (x, y, z) , die die beiden Ebenengleichungen

$$Ax + By + Cz = D \quad \text{und} \quad \hat{A}x + \hat{B}y + \hat{C}z = \hat{D}$$

gleichzeitig lösen. Dabei wird verlangt, dass es keine reelle Zahl λ gibt, so dass $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = \lambda(A, B, C)$.

Da die vektoriellen Darstellungen von Geraden und Ebenen oft bequemer zu handhaben sind, führen wir zunächst Vektoren im \mathbb{R}^3 ein. Ein (räumlicher) Vektor \vec{v} ist ein Tripel reeller Zahlen:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3)^T \quad \text{mit} \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}.$$

Versteht man unter einem Pfeil \overrightarrow{AB} nun ein Paar von Punkten A, B des Raumes, die durch eine Strecke mit Anfangspunkt A und Endpunkt B verbunden sind, können wir den Begriff des Vektors auch so fassen:

Definition 2.7 Ein Pfeil \overrightarrow{AB} mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ stellt genau dann den Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ dar, wenn

$$v_1 = b_1 - a_1, \quad v_2 = b_2 - a_2 \quad \text{und} \quad v_3 = b_3 - a_3.$$

Rechenoperationen und Rechenregeln für räumliche Vektoren lassen sich wörtlich aus dem zweidimensionalen Fall übertragen. Insbesondere sind Addition und Multiplikation mit Zahlen wieder komponentenweise erklärt und die *Länge* von $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ist durch

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (2.8)$$

gegeben. Es gelten wieder die Dreiecksungleichungen

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \quad \left| \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \right| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|.$$

Vektoren der Länge 1 heißen *Einheitsvektoren*. Spezielle Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T,$$

und jeder Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ läßt sich eindeutig als Linearkombination

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

schreiben. Auch das *Skalarprodukt* der Vektoren \vec{v} und \vec{w} definieren wir wie im \mathbb{R}^2 durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \alpha, \quad (2.9)$$

wobei α wieder für den von \vec{v} und \vec{w} eingeschlossenen Winkel steht. Insbesondere gilt für die Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

wobei δ_{ik} das *Kronecker-Symbol* heißt. Damit findet man leicht die folgende Berechnungsmöglichkeit des Skalarprodukts.

Satz 2.8 Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ ist gleich

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3. \quad (2.10)$$

Die Vektoren \vec{v}, \vec{w} heißen *senkrecht*, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. In diesem Fall schreibt man auch $\vec{v} \perp \vec{w}$. Zwei Vektoren heißen *parallel*, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich 0 oder π ist.

Wir definieren nun für Vektoren im \mathbb{R}^3 ein neues Produkt, das *Vektorprodukt* (oder äußere Produkt). Das Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{v} und \vec{w} ist wieder

ein Vektor, und wir müssen erklären, wie lang dieser Vektor ist und in welche Richtung er zeigt.

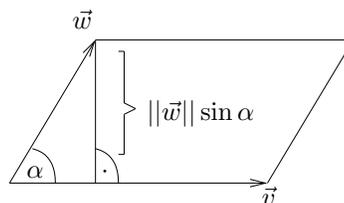
Seien zunächst \vec{v} und \vec{w} zwei nicht parallele Vektoren. Dann sei \vec{n} der durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmte Vektor:

- a) \vec{n} hat die Länge 1.
- b) \vec{n} steht senkrecht auf \vec{v} und \vec{w} .
- c) Die Vektoren \vec{v}, \vec{w} und \vec{n} bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*, d.h. es gilt die *Rechte-Hand-Regel*: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung \vec{v} und der Zeigefinger in Richtung \vec{w} , so zeigt der senkrecht zu Daumen und Zeigefinger stehende Mittelfinger in Richtung \vec{n} .

(Beispielsweise bilden die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.) Äquivalent zu (c) ist die folgende Beschreibung: \vec{n} zeigt in die Richtung, in die eine Rechtsschraube (Korkenzieher) vorrückt, wenn man ihr eine Drehung um $0 < \alpha < 180^\circ$ erteilt, die die Richtung von \vec{v} in die von \vec{w} überführt.

Weiter sei F der Flächeninhalt des von \vec{v} und \vec{w} aufgespannten Parallelogramms, d.h.

$$F = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \alpha.$$



Dann heißt der Vektor

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{cases} \vec{0} = (0, 0, 0)^T & \text{falls } \vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ parallel sind} \\ F \vec{n} & \text{sonst} \end{cases}$$

das *Vektorprodukt* von \vec{v} und \vec{w} .

Satz 2.9 Für das Vektorprodukt gelten die folgenden Rechenregeln, wobei \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} räumliche Vektoren und λ eine reelle Zahl ist:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= -(\vec{w} \times \vec{v}) && (\text{Antikommutativität}), \\ \lambda(\vec{v} \times \vec{w}) &= (\lambda\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\lambda\vec{w}) && (\text{„Assoziativität“}), \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w}) && (\text{Distributivität}). \end{aligned}$$

Diese Regeln lassen sich leicht bestätigen, wenn man die Koordinatendarstellung des Vektorprodukts benutzt. Dazu beachten wir, dass

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= -(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= -(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= -(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2, \end{aligned}$$

da die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ senkrecht aufeinander stehen und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Für $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$ und $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$ hat man also

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3) \times (w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3) \\ &= v_1 w_1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + v_1 w_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + v_1 w_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + v_2 w_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + v_2 w_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + v_2 w_3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \\ &\quad + v_3 w_1 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + v_3 w_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + v_3 w_3 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Satz 2.10 Das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ ist gegeben durch

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)^T.$$

Wir sehen uns nun vektorielle Darstellungen von Geraden und Ebenen im Raum an. Die Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3 sieht formal wie die Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^2 aus: es treten lediglich Vektoren mit drei Komponenten statt mit zwei Komponenten auf. *Geraden* im \mathbb{R}^3 werden also beschrieben durch Gleichungen wie

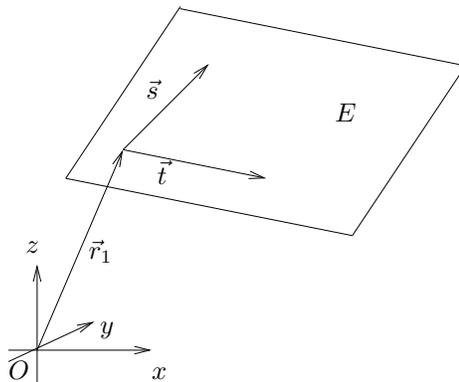
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

wobei \vec{r}_1 der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Geraden und $\vec{t} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor in der Richtung der Geraden ist.

Ganz ähnlich wird eine *Ebene* im \mathbb{R}^3 beschrieben als die Menge aller Ortsvektoren \vec{r} , die einer Gleichung

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{s} + \mu \vec{t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

genügen, wobei \vec{r}_1 der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene ist und $\vec{s}, \vec{t} \neq \vec{0}$ nicht parallele Vektoren sind, die in der Ebene liegen.



Zur *Hesseschen Normalform* der Ebenengleichung $Ax + By + Cz = D$ gelangt man durch Einführung des Normalenvektors

$$A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3,$$

der noch zu normieren ist:

$$\vec{n} := \pm \frac{A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3}{\|A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3\|} = \pm \frac{A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.13)$$

Das Vorzeichen wählen wir so wie das Vorzeichen von D .

Satz 2.11 Sei E eine Ebene im \mathbb{R}^3 , \vec{r}_1 der Ortsvektor eines beliebig gewählten Punktes aus E und \vec{n} der durch (2.13) definierte Normalenvektor. Die Hessesche Normalform von E ist dann gegeben durch

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}.$$

Die rechte Seite $\vec{r}_1 \cdot \vec{n} = |D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ ist gleich dem Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung.

Mit der Hesseschen Normalform lassen sich Abstände zwischen Punkt und Ebene leicht berechnen.

Satz 2.12 Der Abstand eines Punktes $P_* \in \mathbb{R}^3$ mit Ortsvektor \vec{r}_* von der Ebene $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0$ ist gleich dem Betrag der Zahl

$$d^* := (\vec{r}_* - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}.$$

Ist $d^* \neq 0$, so liegen P_* und O auf der gleichen Seite von E wenn $d^* < 0$ und auf verschiedenen Seiten von E wenn $d^* > 0$.

Als Anwendung der eingeführten Begriffe berechnen wir den Abstand zweier windschiefer Geraden im \mathbb{R}^3 mit Hilfe der gemeinsamen Lotrichtung. Die Geraden seien durch ihre Parameterdarstellungen gegeben:

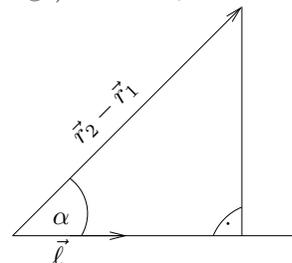
$$\begin{aligned} g_1 : \quad \vec{r} &= \vec{r}_1 + \lambda \vec{s}, & \lambda &\in \mathbb{R}, \\ g_2 : \quad \vec{r} &= \vec{r}_2 + \mu \vec{t}, & \mu &\in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{s}, \vec{t} \neq 0$ nicht parallel sein sollen. Dann steht der Einheitsvektor

$$\vec{\ell} := \frac{\vec{s} \times \vec{t}}{\|\vec{s} \times \vec{t}\|}$$

senkrecht auf beiden Geraden. Der gesuchte Abstand ergibt sich als Länge der Projektion des Vektors $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (oder eines anderen Vektors, der von einem Punkt von g_1 auf einen Punkt von g_2 zeigt) auf $\vec{\ell}$, d.h. als

$$|\vec{\ell} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|.$$



2.3 Der Vektorraum \mathbb{R}^n

Wir verallgemeinern die Überlegungen der vergangenen Abschnitte und betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Vektorraum \mathbb{R}^n aller Vektoren (n -Tupel) $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Wir führen eine komponentenweise Addition und Multiplikation mit Zahlen ein:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n)^T + (y_1, \dots, y_n)^T &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T \\ \lambda(x_1, \dots, x_n)^T &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dann gelten die in Abschnitt 2.1 vermerkten Rechenregeln, und jeder Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ kann eindeutig als Linearkombination

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

geschrieben werden.

In Analogie zu (2.8) definieren wir die *Länge* (oder *Euklidische Norm*) des Vektors $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ durch

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.14)$$

Da wir uns im \mathbb{R}^n (mit $n \geq 4$) nicht mehr auf die Anschauung verlassen können, ist im Moment keineswegs klar, ob die Dreiecksungleichung für alle n gilt.

Schwierigkeiten bereitet zunächst auch die Definition des Skalarprodukts zweier Vektoren $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$, da wir uns Winkel im \mathbb{R}^n für $n \geq 4$ schlecht vorstellen können. Hier hilft uns ein Blick auf (2.3) und (2.10), und wir definieren das *Skalarprodukt* von \vec{x} und \vec{y} einfach als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (2.15)$$

Für das so definierte Skalarprodukt gelten wieder die in Abschnitt 2.1 vermerkten Rechenregeln. Man beachte auch, dass

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}. \quad (2.16)$$

Satz 2.13 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Für beliebige Vektoren $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ gilt*

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

oder, ausführlich geschrieben,

$$|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}.$$

Beweis Ist \vec{y} der Nullvektor, dann ist die Aussage des Satzes sicher richtig. Sei also $\vec{y} \neq \vec{0}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{y} \right\|^2 = \left(\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{y} \right) \cdot \left(\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{y} \right) \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \vec{x} \cdot \vec{y} + \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \right)^2 \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2}. \end{aligned}$$

Umstellen ergibt

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

■

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist außerordentlich nützlich, und wir diskutieren zwei Anwendungen.

Für $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ zeigt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, dass

$$-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Es gibt daher eine eindeutig bestimmte Zahl $\alpha \in [0, 180^\circ]$ so, dass

$$\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \cos \alpha.$$

Wir nennen α den *Winkel* zwischen den Vektoren \vec{x} und \vec{y} . Insbesondere stehen \vec{x} und \vec{y} *senkrecht* aufeinander, wenn $\alpha = 90^\circ$ bzw. $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Als zweite Anwendung zeigen wir die Dreiecksungleichung. Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2 \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung. ■

Ein Vektorprodukt wird in \mathbb{R}^n mit $n \neq 3$ nicht eingeführt.

3 Lineare Räume

Wir haben bisher Vektoren im \mathbb{R}^n betrachtet. Wir behandeln nun Vektoren in größerer Allgemeinheit und definieren „Vektorräume“ oder „lineare Räume“, indem wir die für Vektoren im \mathbb{R}^n gültigen Rechenregeln als *Axiome* fordern.

3.1 Definition und Beispiele

Definition 3.1 Ein linearer Raum (oder Vektorraum) über dem Körper \mathbb{R} ist eine nichtleere Menge V , für deren Elemente zwei Operationen erklärt sind: eine Addition, die je zwei Elementen u, v aus V ihre Summe $u + v \in V$ zuordnet, und eine Multiplikation mit Skalaren, die jedem Element $u \in V$ und jeder reellen Zahl λ ihr Produkt $\lambda u \in V$ zuordnet. Dabei sollen für alle $u, v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln gelten:

- (A1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativität).
- (A2) $u + v = v + u$ (Kommutativität).
- (A3) Es gibt genau ein Nullelement $\vec{0} \in V$ mit
 $\vec{0} + u = u$ für alle $u \in V$.
- (A4) Zu jedem $u \in V$ gibt es genau ein entgegengesetztes Element $-u \in V$ mit $u + (-u) = \vec{0}$.
- (S1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributivität).
- (S2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (Distributivität).
- (S3) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ („Assoziativität“).
- (S4) $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$.

Die Axiome (A1) – (A4) stimmen mit den ersten vier Körperaxiomen aus Abschnitt 1.2 überein. Wie Folgerung 1.1 kann man daher zeigen:

Folgerung 3.2 Für beliebige Elemente u, v eines Vektorraumes V gibt es genau ein Element $x \in V$, welches die Gleichung $u + x = v$ löst, nämlich das Element $x = v + (-u)$.

Anstelle von $v + (-u)$ schreibt man meist $v - u$. Außerdem ist es üblich, die Elemente eines Vektorraumes *Vektoren* zu nennen (auch wenn wir sie nicht mit gerichteten Objekten wie Pfeilen identifizieren).

Folgerung 3.3 Für beliebige Vektoren $v \in V$ und Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$-(-v) = v, \quad 0v = \vec{0}, \quad \lambda \vec{0} = \vec{0},$$

und aus $\lambda v = \vec{0}$ folgt, dass $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

Der Deutlichkeit halber wurde in dieser Folgerung das Nullelement des Vektorraumes mit $\vec{0}$ bezeichnet.

Beispiel 1 Der \mathbb{R}^n mit den in Abschnitt 2.3 eingeführten Operationen der Addition und der Multiplikation mit Zahlen bildet offenbar einen Vektorraum über \mathbb{R} . Das Nullelement ist der Vektor $\vec{0} = (0, \dots, 0)^T$, und der zu $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ entgegengesetzte Vektor ist $-x = (-x_1, \dots, -x_n)^T$. ■

Beispiel 2 Sei V die Menge aller Polynome $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ vom Grad $\leq n$. Mit der Addition

$$\begin{aligned} (P + Q)(x) &:= P(x) + Q(x) \\ &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

und der Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda P)(x) := \lambda(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n,$$

wird V zu einem Vektorraum über \mathbb{R} . ■

Beispiel 3 Auch die Menge $C([a, b])$ aller auf dem Intervall $[a, b]$ definierten stetigen reellwertigen Funktionen bildet einen Vektorraum über \mathbb{R} , wenn wir die Summe von $f, g \in C([a, b])$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in [a, b]$$

und das Produkt von $f \in C([a, b])$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad x \in [a, b]$$

erklären. ■

Anmerkung Man betrachtet auch Vektorräume über \mathbb{C} oder über anderen Körpern. Man verlangt dann, dass eine Multiplikation mit komplexen Zahlen erklärt sein muß, wobei wieder die Axiome (S1)-(S4) gelten sollen. Ein konkretes Beispiel eines Vektorraumes über \mathbb{C} ist der Raum \mathbb{C}^n aller n -Tupel $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ von komplexen Zahlen, für die wir die Operationen wie im Fall \mathbb{R}^n komponentenweise erklären.

Viele der folgenden Aussagen gelten gleichermaßen für Vektorräume über \mathbb{R} und Vektorräume über \mathbb{C} . Man spricht daher oft von *Vektorräumen über \mathbb{K}* , wobei \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} steht.

3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Sind u_1, \dots, u_k Vektoren eines Vektorraumes über \mathbb{K} , so heißt jeder Vektor der Form

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k \quad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$$

eine *Linearkombination* der Vektoren u_1, \dots, u_k .

Definition 3.4 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Die Vektoren $u_1, \dots, u_k \in V$ heißen linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist und wenn keiner dieser Vektoren der Nullvektor ist. Andernfalls heißen u_1, \dots, u_k linear abhängig.

Eine äquivalente Beschreibung der linearen Unabhängigkeit liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.5 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Die Vektoren $u_1, \dots, u_k \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = \vec{0}$ notwendig folgt, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Beispiele Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, denn aus

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \stackrel{!}{=} (0, 0, 0)^T = \vec{0}$$

folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dagegen sind die Vektoren

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 3)^T, \quad \vec{u}_2 = (0, 1, -1)^T, \quad \vec{u}_3 = (1, 4, 1)^T$$

linear abhängig, denn es ist ja z.B. $\vec{u}_1 = \vec{u}_3 - 2\vec{u}_2$.

Auch die Polynome $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $P_2(x) = x^2$, die wir als Elemente des Vektorraumes aller Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten betrachten, sind linear unabhängig. Wir machen dazu den Ansatz $0 = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ (wobei 0 für das Null-Polynom steht) und zeigen, dass dann $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ sein muss. Der Ansatz liefert

$$0 = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) \quad \text{bzw.} \quad \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x = 0$ und erhalten $\alpha_0 = 0$. Nun leiten wir $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0$ ab, erhalten $\alpha_1 + 2\alpha_2 x = 0$, setzen wieder $x = 0$ und bekommen $\alpha_1 = 0$. Schließlich leiten wir $2\alpha_2 x = 0$ ab und finden $2\alpha_2 = 0$, also $\alpha_2 = 0$. ■

Definition 3.6 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} .

a) V heißt unendlich-dimensional, wenn es beliebig viele linear unabhängige Vektoren in V gibt. Wir schreiben dann

$$\dim V = \infty.$$

Andernfalls heißt V endlich-dimensional.

- b) Ist V endlich-dimensional, so heißt die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V die Dimension von V . Ist diese maximale Anzahl gleich n , so schreiben wir

$$\dim V = n.$$

- c) Ist V ein Vektorraum der Dimension n , so heißt jedes System von n linear unabhängiger Vektoren aus V eine Basis von V .

Beispiele Alle hier betrachteten Vektorräume sind reell. Der Raum \mathbb{R}^n hat die Dimension n , und die Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bilden in ihm eine Basis. Natürlich gibt es auch andere Basen, z.B. bilden

$$\vec{u} = (1, 2)^T \quad \text{und} \quad \vec{v} = (0, 7)^T \quad (3.1)$$

eine Basis von \mathbb{R}^2 . Der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ hat die Dimension $n + 1$, und die Polynome

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \dots, P_n(x) = x^n$$

bilden in ihm eine Basis. Dagegen ist $C([0, 1])$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, da er alle Polynome P_0, P_1, P_2, \dots , enthält und diese linear unabhängig sind. Unendlich-dimensionale Vektorräume werden in der Funktionalanalysis betrachtet. ■

Anmerkung Man beachte, dass $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als komplexer Vektorraum die Dimension 1 hat und als reeller Vektorraum die Dimension 2. ■

Satz 3.7 Sei V Vektorraum über \mathbb{K} und u_1, \dots, u_k eine Basis von V . Dann läßt sich jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ mit $u_i \in \mathbb{K}$ darstellen.

Beweis Wäre ein Vektor $v \in V$ nicht auf diese Weise darstellbar, so wären die $k + 1$ Vektoren u_1, \dots, u_k und v linear unabhängig, was der Definition der Basis widerspricht. Wir zeigen noch die Eindeutigkeit der Darstellung. Aus $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ und $v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$ folgt durch Subtraktion

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)u_k.$$

Nach Lemma 3.5 ist $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$. ■

Beispiel Wir wollen $(1, 0)^T$ als Linearkombination der Basisvektoren (3.1) darstellen. Der Ansatz $(1, 0)^T = \alpha(1, 2)^T + \beta(0, 7)^T$ liefert das Gleichungssystem $1 = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta$, $0 = 2\alpha + 7\beta$ mit der Lösung $\alpha = 1$, $\beta = -2/7$. Also ist

$$(1, 0)^T = (1, 2)^T - \frac{2}{7}(0, 7)^T. \quad \blacksquare$$

Anmerkung Sei V Vektorraum und u_1, \dots, u_k eine Basis von V . Für je zwei Vektoren $a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ und $b = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$ gilt dann

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k)u_k,$$

d.h. die Addition von a und b kann auf die Addition ihrer Koordinaten α_i, β_i (also von Zahlen) zurückgeführt werden. ■

Definition 3.8 Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V über \mathbb{K} heißt (linearer) Unterraum oder (linearer) Teilraum von V , wenn für beliebige Vektoren $u, v \in U$ und beliebige Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\alpha u + \beta v \in U.$$

Jeder Unterraum eines Vektorraumes ist wieder ein Vektorraum.

Beispiele Seien v_1, \dots, v_r Vektoren in V . Dann bildet die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren einen Teilraum U von V . Wir bezeichnen ihn mit

$$U = \text{span} \{v_1, \dots, v_r\}$$

und sagen, dass U von den Vektoren v_1, \dots, v_r *aufgespannt* wird oder dass die Vektoren v_1, \dots, v_r ein *Erzeugendensystem* von U bilden. Jeder endlich dimensionale Vektorraum wird in diesem Sinn von seiner Basis aufgespannt.

Die ein- bzw. zweidimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^3 sind genau die Geraden bzw. Ebenen in \mathbb{R}^3 , die durch den Nullpunkt $(0, 0, 0)$ verlaufen. Da wir als Ortsvektor \vec{r}_1 jeweils den Nullvektor wählen können, sehen die Parameterdarstellungen dieser Geraden bzw. Ebenen nämlich so aus:

$$\vec{r} = \lambda \vec{t} \quad \text{bzw.} \quad \vec{r} = \lambda \vec{s} + \mu \vec{t},$$

d.h. Geraden werden durch einen und Ebenen durch zwei Vektoren aufgespannt, und die Bedingung, dass \vec{s} und \vec{t} ungleich 0 und nicht parallel sind, garantiert, dass \vec{s} und \vec{t} linear unabhängig sind. ■

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

4.1 Lineare Abbildungen

Wir beschäftigen uns nun mit Abbildungen zwischen linearen Räumen. Von besonderem Interesse sind Abbildungen, die die Struktur der linearen Räume respektieren.

Definition 4.1 Seien V und W lineare Räume über \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$$

für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Die Bildmenge $\{\varphi(v) : v \in V\} \subseteq W$ bezeichnen wir mit $\text{Im } \varphi$ (von image). Die Menge $\{v \in V : \varphi(v) = 0\} \subseteq V$ heißt der Kern von φ und wird mit $\text{Ker } \varphi$ (von Kern oder kernel) bezeichnet.

Beispiel 1 Die folgenden Abbildungen sind linear:

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto -v && \text{(Drehung um } 180^\circ\text{),} \\ \varphi_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto 2v && \text{(Streckung um Faktor 2),} \\ \varphi_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & (v_1, v_2)^T &\mapsto (v_1, 0)^T && \text{(orthogonale Projektion auf } x\text{-Achse).}\end{aligned}$$

Es gilt nämlich für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi_1(\alpha v + \beta w) &= -(\alpha v + \beta w) = \alpha(-v) + \beta(-w) = \alpha\varphi_1(v) + \beta\varphi_1(w), \\ \varphi_2(\alpha v + \beta w) &= 2(\alpha v + \beta w) = 2\alpha v + 2\beta w = \alpha\varphi_2(v) + \beta\varphi_2(w), \\ \varphi_3(\alpha(v_1, v_2)^T + \beta(w_1, w_2)^T) &= \varphi_3((\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2)^T) \\ &= (\alpha v_1 + \beta w_1, 0)^T = \alpha(v_1, 0)^T + \beta(w_1, 0)^T \\ &= \alpha\varphi_3((v_1, v_2)^T) + \beta\varphi_3((w_1, w_2)^T). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Beispiel 2 Sei $V = W$ der lineare Raum aller Polynome. Dann ist

$$\varphi : V \rightarrow W, \quad p \mapsto p' \quad \text{(Ableitung)}$$

eine lineare Abbildung. Für beliebige $p, q \in V$ und $\alpha, \beta \in W$ ist nämlich

$$\varphi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q' = \alpha\varphi(p) + \beta\varphi(q).$$

Der Kern dieser linearen Abbildung besteht gerade aus den konstanten Polynomen. ■

Beispiel 3 Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto v + (1, 0)^T \quad \text{(Verschiebung um } (1, 0)^T\text{)}$$

ist dagegen *nicht* linear. Für den Nullvektor $v = (0, 0)^T$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\varphi(2v) &= 2v + (1, 0)^T = (1, 0)^T, \\ 2\varphi(v) &= 2(v + (1, 0)^T) = 2(1, 0)^T = (2, 0)^T.\end{aligned}$$

Auch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht linear. Warum? ■

Wir sehen uns nun einfache Eigenschaften linearer Abbildungen an.

Lemma 4.2 a) *Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ bildet den Nullvektor von V auf den Nullvektor von W ab.*

b) *Ist $\varphi : V \rightarrow W$ linear, so ist $\text{Ker } \varphi$ ein linearer Teilraum von V , und $\text{Im } \varphi$ ist ein linearer Teilraum von W .*

Beweis Wir überlegen uns nur den ersten Teil von Aussage (b). Sind $u, v \in \text{Ker } \varphi$, so ist wegen $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0$ auch $u + v \in \text{Ker } \varphi$. Ist $u \in \text{Ker } \varphi$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist wegen $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) = 0$ auch $\lambda u \in \text{Ker } \varphi$. Also ist $\text{Ker } \varphi$ ein linearer Raum. ■

Sind $\varphi, \psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen, so definiert man ihre *Summe* $\varphi + \psi : V \rightarrow W$ durch

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v).$$

Sind $\varphi : V \rightarrow U, \psi : U \rightarrow W$ lineare Abbildungen, so ist ihre *Verkettung* (oder Hintereinanderausführung) $\psi \circ \varphi : V \rightarrow W$ erklärt durch

$$(\psi \circ \varphi)(v) := \psi(\varphi(v)).$$

Lemma 4.3 *Summe und Verkettung linearer Abbildungen sind wieder lineare Abbildungen.*

Den Beweis können Sie als Übungsaufgabe leicht führen.

Lemma 4.4 a) *Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, und sie ist genau dann surjektiv, wenn $\text{Im } \varphi = W$.*

b) *Ist die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$, und diese ist wieder linear.*

Beweis Wir zeigen nur den ersten Teil von Aussage (a). Seien $u, v \in V$ Vektoren mit $\varphi(u) = \varphi(v)$, und sei $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. Dann ist $\varphi(u - v) = 0$, d.h. $u - v \in \text{Ker } \varphi$, und folglich $u - v = 0$. Also ist φ injektiv.

Sei umgekehrt φ injektiv und $v \in \text{Ker } \varphi$. Dann ist $\varphi(v) = 0 = \varphi(0)$ (vgl. Lemma 4.2(a)), und aus der Injektivität folgt $v = 0$. ■

Satz 4.5 Sei V ein endlich-dimensionaler linearer Raum mit einer Basis e_1, \dots, e_n . Dann ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ bereits durch die Angabe der Bilder der Basisvektoren

$$a_i := \varphi(e_i) \in W, \quad i = 1, \dots, n,$$

eindeutig festgelegt: Für $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ ist

$$\varphi(v) = \varphi(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = v_1 a_1 + \dots + v_n a_n.$$

Beispiel 4 Wir bezeichnen mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Koordinateneinheitsvektoren von \mathbb{R}^3 . Da diese eine Basis von \mathbb{R}^3 bilden, ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch Vorgabe von $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_3)$ eindeutig bestimmt. Wir wählen beispielsweise

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{e}_2) = \varphi(\vec{e}_3) = 0.$$

Für $v = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = (v_1, v_2, v_3)^T$ ist dann $\varphi(v) = v_1 \vec{e}_1 = (v_1, 0, 0)^T$. Für diese Abbildung ist

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi &= \{(v_1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : v_1 \in \mathbb{R}\}, & \dim \text{Im } \varphi &= 1, \\ \text{Ker } \varphi &= \{(0, v_2, v_3)^T \in \mathbb{R}^3 : v_2, v_3 \in \mathbb{R}\}, & \dim \text{Ker } \varphi &= 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist $\dim \text{Im } \varphi + \dim \text{Ker } \varphi = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Der folgende wichtige Satz sagt aus, dass das Bestehen dieser Gleichheit kein Zufall ist.

Satz 4.6 (Dimensionsatz) Sei V ein n -dimensionaler linearer Raum und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = n = \dim V. \quad (4.1)$$

Beweis Wir wählen eine Basis c_1, \dots, c_ℓ von $\text{Ker } \varphi$ und eine Basis $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_r)$ von $\text{Im } \varphi$ und zeigen, dass $c_1, \dots, c_\ell, b_1, \dots, b_r$ eine Basis von V ist.

Lineare Unabhängigkeit von $c_1, \dots, c_\ell, b_1, \dots, b_r$: Aus $\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i c_i + \sum_{j=1}^r \beta_j b_j = 0$ folgt $\sum_{j=1}^r \beta_j \varphi(b_j) = 0$. Da die $\varphi(b_j)$ linear unabhängig sind, ist $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Aus $\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i c_i = 0$ folgt weiter $\gamma_1 = \dots = \gamma_\ell = 0$.

Zeigen, dass $\text{span}\{c_1, \dots, c_\ell, b_1, \dots, b_r\} = V$: Sei $v \in V$. Schreiben $\varphi(v)$ als $\sum_{j=1}^r \beta_j \varphi(b_j)$. Dann ist $\varphi(v) = \varphi(\sum_{j=1}^r \beta_j b_j)$, d.h. $v - \sum_{j=1}^r \beta_j b_j$ liegt in $\text{Ker } \varphi$. Wir können dieses Element also als

$$v - \sum_{j=1}^r \beta_j b_j = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i c_i$$

schreiben. Folglich ist $v \in \text{span}\{c_1, \dots, c_\ell, b_1, \dots, b_r\}$. ■

Folgerung 4.7 Sei $\dim V < \infty$. Ist die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ bijektiv, so ist $\dim W = \dim V$.

Denn wegen $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ und $\text{Im } \varphi = W$ reduziert sich (4.1) auf $\dim W = \dim V$.

Folgerung 4.8 Sei $\dim V = \dim W < \infty$. Dann ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Auch das folgt leicht aus (4.1): Ist $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, so ist $\dim \text{Ker } \varphi = 0$. Dann ist $\dim \text{Im } \varphi = \dim W$, also $\text{Im } \varphi = W$. Die umgekehrte Richtung zeigt man ähnlich. ■

4.2 Matrizen

Wir lernen nun die grundlegenden Begriffe und Regeln der Matrizenrechnung kennen, die zahlreiche Anwendungen in Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften hat und für viele Aufgaben eine bequeme Sprache bereitstellt.

Definition 4.9 Seien m, n natürliche Zahlen. Unter einer reellen (komplexen) $m \times n$ -Matrix versteht man ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Eine $m \times n$ -Matrix setzt sich aus m Zeilenvektoren und n Spaltenvektoren zusammen.

Die Menge aller reellen (komplexen) $m \times n$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m,n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{m,n}$). Schließlich heißt eine $m \times n$ -Matrix A quadratisch, wenn $m = n$. In diesem Fall heißt das n -Tupel $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ die Diagonale (oder auch Hauptdiagonale) von A .

Matrizen mit nur einer Spalte oder einer Zeile kann man mit spalten- oder zeilenweise geschriebenen Vektoren identifizieren. Statt $\mathbb{R}^{m,1}$ bzw. $\mathbb{R}^{1,n}$ schreibt man daher oft \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R}^n .

Eine Matrix, deren Einträge alle gleich Null sind, heißt *Nullmatrix*: $0 = (0)_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Die $m \times m$ -Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt die $m \times m$ -Einheitsmatrix.

Wir definieren nun Rechenoperationen mit Matrizen.

a) *Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl*

Ist $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist λA die $m \times n$ -Matrix

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{m,n}.$$

Man multipliziert also einfach elementweise.

b) *Addition von Matrizen*

Die Summe der $m \times n$ -Matrizen $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ ist die $m \times n$ -Matrix

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

Man addiert also elementweise.

c) *Multiplikation von Matrizen*

Das Produkt AB zweier Matrizen A, B kann nur gebildet werden, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist. Sei also $A = (a_{ij})_{m,n}$ eine $m \times n$ -Matrix und $B = (b_{ij})_{n,r}$ eine $n \times r$ -Matrix. Dann ist ihr Produkt AB die $m \times r$ -Matrix

$$AB := (c_{ij})_{m,r} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Das Element c_{ij} ist also das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B .

d) *Transponieren von Matrizen*

Ist $A = (a_{ij})_{m,n}$ eine $m \times n$ -Matrix, so versteht man unter ihrer Transponierten die $n \times m$ -Matrix

$$A^T := (b_{ij})_{n,m} \quad \text{mit} \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Für das Addieren gelten wieder die Regeln (A1) – (A4), die wir bereits mehrfach notiert haben (zuletzt in Definition 3.1). Für die Multiplikation gelten die folgenden Regeln, wobei wir annehmen, dass die Matrizen A, B, C so beschaffen sind, dass alle auftretenden Operationen erklärt sind:

$$\begin{array}{l} (AB)C = A(BC) \quad \text{Assoziativität,} \\ \left. \begin{array}{l} A(B + C) = AB + AC \\ (A + B)C = AC + BC \end{array} \right\} \text{Distributivität,} \\ (AB)^T = B^T A^T. \end{array}$$

Außerdem ist $AI = IA = A$ mit der Einheitsmatrix I . Man beachte aber, dass im Allgemeinen $AB \neq BA$ ist. Das Matrixprodukt ist also nicht kommutativ.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Definition 4.10 Eine $n \times n$ -Matrix A heißt invertierbar (oder regulär oder nicht-singulär), wenn es eine $n \times n$ -Matrix B so gibt, dass

$$AB = BA = I. \quad (4.2)$$

Ist A invertierbar, so ist die Matrix B aus (4.2) eindeutig bestimmt. Sie heißt die Inverse von A und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Beispiel Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, und $A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, denn

$$\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad \blacksquare$$

Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar, so sind auch AB sowie A^T invertierbar, und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (4.3)$$

Wir werden später Möglichkeiten kennen lernen, A^{-1} zu bestimmen.

Wir sehen uns nun den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $m \times n$ -Matrizen an. Sei zunächst $A = (a_{ij})_{m,n}$ eine $m \times n$ -Matrix und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann können wir das Matrixprodukt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

bilden und erhalten einen Vektor aus dem \mathbb{R}^m . Jede $m \times n$ -Matrix A definiert also eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax,$$

und diese Abbildung ist *linear*, wie man mit dem Distributivgesetz für die Matrixmultiplikation leicht einsieht.

Sei umgekehrt $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, und sei $\vec{a}_i = \varphi(\vec{e}_i)$ das Bild des Koordinateneinheitsvektors $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$. Wir stellen jeden Vektor \vec{a}_i in der Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ von \mathbb{R}^m dar:

$$\vec{a}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + \dots + a_{mi}\vec{e}_m = \sum_{j=1}^m a_{ji}\vec{e}_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

und ordnen die Koeffizienten a_{ji} in einer $m \times n$ -Matrix an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

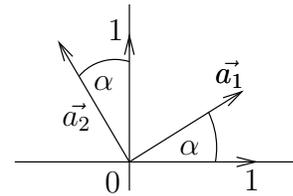
Die Spalten von A sind also die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Für jeden Vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i \varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{a}_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m a_{ji} \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) \vec{e}_j \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}. \end{aligned}$$

Also definiert jede Matrix eine lineare Abbildung, und umgekehrt kann man jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Multiplikation mit einer Matrix realisieren. Man sagt auch, dass φ durch die Matrix (4.4) dargestellt wird.

Wichtige Anmerkung Man kann diese Überlegungen auch mit anderen Basen $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ von \mathbb{R}^n bzw. $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ von \mathbb{R}^m durchführen. Man erhält wiederum eine Darstellung von φ als Matrix, die sich aber i.Allg. von der Matrix (4.4) unterscheidet. Die Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix hängt also von den gewählten Basen ab. ■

Beispiel Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Koordinatenursprung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dabei geht $\vec{e}_1 = (1, 0)^T$ in den Vektor $\vec{a}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ über und $\vec{e}_2 = (0, 1)^T$ in $\vec{a}_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$. Die Darstellung von φ als Matrix (bezüglich der Koordinateneinheitsvektoren) ist also



$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Sind φ_1, φ_2 lineare Abbildungen und A_1, A_2 die entsprechenden Matrizen, so gilt unter der Voraussetzung, dass alle vorkommenden Operationen ausgeführt werden können:

- der Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ entspricht die Summe $A_1 + A_2$,
- der Hintereinanderausführung $\varphi_1 \circ \varphi_2$ entspricht das Produkt $A_1 A_2$,
- der Umkehrabbildung φ_1^{-1} entspricht die inverse Matrix A_1^{-1} .

Damit haben wir zugleich eine Rechtfertigung für die seltsam erscheinende Definition des Matrixprodukts gefunden.

4.3 Der Rang einer Matrix

Da sich (nach Wahl einer Basis) lineare Abbildungen und Matrizen einander entsprechen, sollte sich z.B. die Dimension des Bildraumes an der Matrix „ablesen“ lassen. Dazu führen wir die folgenden Begriffe ein.

Definition 4.11 Sei $A = (a_{ij})_{m,n}$ eine Matrix. Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) von A heißt der Spaltenrang (Zeilenrang) von A .

Satz 4.12 Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{m,n}$ sind die folgenden drei Größen gleich: der Zeilenrang, der Spaltenrang und die Dimension des Bildraumes der durch A definierten linearen Abbildung $x \mapsto Ax$.

Man spricht daher vom *Rang* von A und schreibt

$$\text{rang } A = r \text{ (deutsch)} \quad \text{oder} \quad \text{rank } A = r \text{ (englisch),}$$

falls der Rang von A gleich r ist.

Zur Bestimmung des Ranges einer Matrix ist der folgende Satz nützlich. Zugleich wird dieser Satz eine Beweismöglichkeit für Satz 4.12 aufzeigen.

Satz 4.13 Der Rang einer Matrix A bleibt bei jeder der folgenden elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen unverändert:

- Addition einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte),
- Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer Zahl $\neq 0$,
- Vertauschen zweier Zeilen (Spalten).

Beispiel Wir wollen den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ bestimmen, indem wir diese Matrix durch die elementaren Umformungen aus Satz 4.13 in eine Gestalt bringen, die uns das Ablesen ihres Ranges ermöglicht.

1. Tausch von Zeile 1 und Zeile 2: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
2. 3. Zeile minus 1. Zeile: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
3. 3. Zeile minus 2. Zeile: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $(1, -2, 2)$ und $(0, 2, 7)$ sind linear unabhängig, also ist der Rang dieser Matrix gleich 2. Im Allgemeinen benutzt man die elementaren Umformungen, um eine Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} \diagdown & \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \} r \text{ Zeilen}$$

zu erzielen, bei der die Elemente auf dem angedeuteten Teil der Diagonalen ungleich 0 sind. Dann ist r der Rang dieser Matrix.

Man kann die Umformung der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ auch weiter treiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Form erkennt man unmittelbar, dass Zeilen- und Spaltenrang gleich 2 sind. ■

Satz 4.14 *Jede Matrix $A \neq 0$ lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Gestalt $\begin{pmatrix} I_{r,r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei $I_{r,r}$ die $r \times r$ Einheitsmatrix ist. Dann ist $\text{rang } A = r$.*

5 Lineare Gleichungssysteme

Eine der häufigsten mathematischen Aufgaben ist die Lösung linearer Gleichungssysteme. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit Lösbarkeitsbedingungen und mit der Struktur der Lösung, und anschließend lernen wir den Gaußschen Algorithmus zur praktischen Lösung linearer Gleichungssysteme kennen.

5.1 Lösbarkeit und Lösungsstruktur

Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei sind die a_{ij} und die b_i vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen. Da alle Überlegungen in diesem Abschnitt unabhängig davon sind, ob wir im Reellen oder im Komplexen arbeiten, schreiben wir wieder \mathbb{K} für einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Das System (5.1) zu lösen bedeutet, Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ so zu finden, dass alle Gleichungen in (5.1) zugleich erfüllt sind.

Mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

können wir das System (5.1) auch kurz als

$$Ax = b \tag{5.2}$$

schreiben, wobei nun der Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ zu bestimmen ist. Die Matrix A heißt *Koeffizientenmatrix* von (5.2) bzw. (5.1). Die folgenden Beispiele zeigen, dass beim Lösen linearer Gleichungssysteme sehr unterschiedliche Situationen auftreten können.

Beispiele

a) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

ist nicht lösbar.

b) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle Vektoren der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{K}.$$

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{array}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $x_1 = 0, x_2 = 1$ bzw. $x = (0, 1)^T$. ■

Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen das System (5.1) lösbar ist und wann seine Lösungen eindeutig bestimmt sind, und wir beginnen mit homogenen Systemen.

Definition 5.1 *Das lineare Gleichungssystem (5.2) heißt homogen, wenn $b = 0$ ist, andernfalls heißt (5.2) inhomogen. Das System $Ax = 0$ heißt das zu (5.2) gehörende homogene Gleichungssystem.*

Homogene Gleichungssysteme sind stets lösbar: eine Lösung ist der Nullvektor. Wenn wir die $m \times n$ -Matrix A mit einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m identifizieren, so sind die Lösungen des Systems $Ax = 0$ genau die Vektoren, die im Kern dieser Abbildung liegen. Bezeichnen wir diese lineare Abbildung einfach mit A und schreiben wir L_h für die Menge aller Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$, so ist also

$$L_h = \text{Ker } A.$$

Lemma 4.2 (b) und der Dimensionssatz liefern sofort das folgende Resultat.

Lemma 5.2 *Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Dann bildet die Lösungsmenge L_h der homogenen Gleichung $Ax = 0$ einen linearen Unterraum von \mathbb{K}^n , und die Dimension dieses Raumes ist gleich*

$$\dim L_h = \dim \text{Ker } A = n - \text{rang } A.$$

Im Falle $\text{rang } A = n$ ist die Lösung von $Ax = 0$ also eindeutig bestimmt und gleich dem Nullvektor. Im Fall $\text{rang } A < n$ findet man eine Basis f_1, \dots, f_l von L_h (mit $l = n - \text{rang } A > 0$) und kann jede Lösung x der homogenen Gleichung in der Form

$$x = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_l f_l, \quad \lambda_i \in \mathbb{K},$$

schreiben. Die Lösung hängt also von $l = n - \text{rang } A$ frei wählbaren Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ ab.

Wir sehen uns nun inhomogene Systeme $Ax = b$ an und schreiben sie in der Form

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b \quad \text{mit} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Das System $Ax = b$ lösen heißt also, den Vektor b als Linearkombination der Spaltenvektoren a_1, \dots, a_n von A darzustellen. Fügt man zur Matrix A noch den Spaltenvektor b als $n + 1$. Spalte hinzu, so erhält man die *erweiterte Matrix* $(A, b) \in \mathbb{K}^{m, n+1}$ des Systems (5.2), mit der wir das folgende Kriterium formulieren können.

Lemma 5.3 *Das lineare Gleichungssystem (5.2) ist genau dann lösbar, wenn*

$$\text{rang } A = \text{rang } (A, b). \quad (5.3)$$

Wir nehmen nun an, dass die Bedingung (5.3) erfüllt ist. Sind x und \hat{x} zwei Lösungen von (5.2), d.h. ist $Ax = b$ und $A\hat{x} = b$, so ist

$$A(x - \hat{x}) = Ax - A\hat{x} = 0;$$

der Vektor $y := x - \hat{x}$ löst also das homogene System $Ay = 0$. Ist umgekehrt y eine Lösung des homogenen Systems und \hat{x} eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist auch $x := \hat{x} + y$ eine Lösung des inhomogenen Systems:

$$Ax = A\hat{x} + Ay = b + 0 = b.$$

Lemma 5.4 *Das lineare Gleichungssystem (5.2) sei lösbar. Dann besteht die Lösungsmenge L_i dieses Systems aus allen Vektoren der Gestalt*

$$x = \hat{x} + y \quad \text{mit} \quad y \in L_h = \text{Ker } A, \quad (5.4)$$

wobei \hat{x} eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist.

Formal kann man (5.4) schreiben als

$$L_i = \hat{x} + L_h.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems muß man also *eine spezielle Lösung* \hat{x} der Gleichung $Ax = b$ sowie die *allgemeine Lösung* der zugehörigen homogenen Gleichung finden.

Aus den Lemmas 5.2 - 5.4 folgt außerdem sofort, dass die Gleichung $Ax = b$ genau dann *eindeutig lösbar* ist, wenn

$$\text{rang } A = \text{rang } (A, b) = n. \quad (5.5)$$

Sehen wir uns noch einmal die Beispiele vor Definition 5.1 an.

Beispiele

a) Hier ist

$$1 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

also ist das System nicht lösbar.

b) Hier ist

$$1 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 < 2,$$

Also ist das System lösbar, und die Lösungen hängen von $2 - 1 = 1$ reellen Parameter ab.

c) Hier ist schließlich

$$2 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

d.h. das System ist lösbar, und die Lösung ist eindeutig bestimmt. ■

Anmerkung Die in Lemma 5.4 festgestellte Struktur der Lösung trifft auf beliebige lineare Gleichungen $\varphi(x) = b$ mit einer linearen Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ zu. Wir kommen z.B. im Abschnitt über Differentialgleichungen darauf zurück.

Ist A eine $n \times n$ -Matrix (d.h. quadratisch) und ist $\text{rang } A = n (= m)$, so ist A invertierbar, und die (eindeutig bestimmte) Lösung von $Ax = b$ lautet

$$x = A^{-1}b. \quad (5.6)$$

Für die praktische Bestimmung der Lösung x ist (5.6) allerdings wenig geeignet, da die Ermittlung der inversen Matrix recht mühsam ist.

5.2 Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus oder das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (5.1) bzw. (5.2) beruht auf der Beobachtung, dass sich die Lösungsmenge dieses Systems nicht ändert, wenn in der *erweiterten* Systemmatrix die folgenden *elementaren Zeilenoperatoren* durchgeführt werden:

- (a) Addition einer Zeile zu einer anderen.
- (b) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.
- (c) Vertauschen zweier Zeilen.

Außerdem wollen wir noch zulassen:

- (d) Vertauschen zweier Spalten der Systemmatrix.

Letzteres entspricht einer Umbenennung der gesuchten Zahlen x_1, \dots, x_n . Ziel ist es, durch diese Operationen eine „Dreiecks-“ oder wenigstens „Trapez-Gestalt“ der Systemmatrix zu erreichen, aus der man die Lösung durch „Rückwärtseinsetzen“ gewinnt. Sehen wir uns zunächst einige Beispiele an.

Beispiel 1 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

hat die erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten, dritten und vierten Zeile führt auf

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_4 & = & 1. \end{array}$$

Wir erhalten ein System von Dreiecksgestalt. Aus der letzten Gleichung folgt $x_4 = 1$. Wir setzen dies in die vorletzte Gleichung ein und erhalten $x_3 = 0$. In die

zweite Gleichung eingesetzt liefert dies $x_2 = 0$, und aus der ersten Gleichung folgt schließlich, dass auch $x_1 = 0$. Die Lösung des Systems ist also eindeutig bestimmt und lautet $(0, 0, 0, 1)^T$, d. h. sie besteht aus einem einzigen Punkt. ■

Beispiel 2 Das Gleichungssystem werde durch die erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

beschrieben. Austausch von erster und zweiter Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{array} \right).$$

Addition des Doppelten der ersten Zeile zur letzten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

und Division der zweiten Zeile durch 3 liefert schließlich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{5.7}$$

bzw. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Die letzte Zeile der Matrix (5.7) entspricht der Gleichung $0 = 0$, die wir natürlich weglassen. Zum Auflösen von (5.8) wählt man $x_3 = t$ als Parameter. Aus der letzten Gleichung von (5.8) folgt dann

$$x_2 + 2t = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 1 - 2t,$$

und durch Einsetzen in die erste Zeile findet man

$$x_1 + 2(1 - 2t) + 3t = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = -1 + t.$$

Die Lösungsmenge des Systems besteht also aus allen Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hier erkennen wir die in Lemma 5.4 beschriebene Struktur: die Lösung des inhomogenen Systems setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems, nämlich $(-1, 1, 0)^T$, und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems, nämlich allen Vielfachen von $(1, -2, 1)^T$. Geometrisch gesehen ist die Lösungsmenge also eine Gerade. ■

Beispiel 3 Wir betrachten das System mit der erweiterten Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{array} \right),$$

die sich von Beispiel 2 nur vom Eintrag in der rechten unteren Ecke unterscheidet. Die im Beispiel 2 durchgeführten Operationen führen nun auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Die letzte Gleichung des umgeformten Systems lautet also $0 = 3$. Dieser Widerspruch zeigt, dass das System keine Lösung besitzt. Die Lösungsmenge ist also leer. ■

Wir kommen nun zum allgemeinen System (5.1) zurück. Durch die elementaren Operationen (a) - (d) kann man die erweiterte Systemmatrix dieses Systems stets in die folgende Gestalt bringen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & c_{23} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & 1 & \dots & c_{3r} & c_{3,r+1} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ \hline & & & & & & & & d_{r+1} \\ & & 0 & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & & d_m \end{array} \right)_{m,n}. \quad (5.9)$$

Aus dieser Darstellung können wir alle gewünschten Informationen über das Gleichungssystem gewinnen:

- (1) Das System ist genau dann lösbar, wenn

$$d_{r+1} = \dots = d_m = 0. \quad (5.10)$$

- (2) Der Rang der Systemmatrix ist gleich r .

- (3) Ist die Bedingung (5.10) erfüllt, so können wir die Lösung des Systems wie folgt gewinnen: Wir wählen $n-r = n - \text{rang } A$ Parameter $t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und setzen

$$x_{r+1} = t_1, \quad x_{r+2} = t_2, \dots \quad x_n = t_{n-r}.$$

Die r -te Gleichung von (5.9) lautet dann

$$x_r + c_{r,r+1}t_1 + \dots + c_{rn}t_{n-r} = d_r$$

bzw.

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}t_1 - \dots - c_{rn}t_{n-r}.$$

Wir setzen dies in die $r-1$ -te Gleichung von (5.9) ein und erhalten eine Darstellung von x_{r-1} in Abhängigkeit von t_1, \dots, t_{n-r} , usw.

Wir fahren so fort bis zur ersten Zeile und erhalten die Lösung in der Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 + f_{11}t_1 + \dots + f_{1,n-r}t_{n-r}, \\ &\quad \vdots \\ x_r &= e_r + f_{r1}t_1 + \dots + f_{r,n-r}t_{n-r}, \\ x_{r+1} &= t_1 \\ &\quad \vdots \\ x_n &= t_{n-r} \end{aligned}$$

mit gewissen Zahlen e_i und f_{ij} und Parametern t_1, \dots, t_{n-r} . In Vektorschreibweise lautet die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-r} \begin{pmatrix} f_{1,n-r} \\ \vdots \\ f_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

in der wir wieder die Lösungsstruktur aus Lemma 5.4 erkennen.

Man kann sich das „Rückwärtseinsetzen“ sparen, wenn man (ähnlich wie bei der Rangberechnung angedeutet) durch weitere elementare Operationen aus (5.9)

eine Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{c}_{1,r+1} & \dots & \hat{c}_{1n} & \hat{d}_1 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{c}_{2,r+1} & \dots & \hat{c}_{2n} & \hat{d}_2 \\ & & 1 & \dots & 0 & \hat{c}_{3,r+1} & \dots & \hat{c}_{3n} & \hat{d}_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & \hat{c}_{r,r+1} & \dots & \hat{c}_{rn} & \hat{d}_r \\ \hline & & & & & & & & \hat{d}_{r+1} \\ & & 0 & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & & \hat{d}_n \end{array} \right)$$

erzeugt, aus der man im Falle $\hat{d}_{r+1} = \dots = \hat{d}_n = 0$ sofort die Darstellung der Lösung in der Form (5.11) ablesen kann.

Wir sehen uns ein abschließendes Beispiel an.

Beispiel Die erweiterte Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems sei

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & -2 & 14 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 10 \end{array} \right).$$

Durch elementare Operationen gelangen wir nacheinander zu den Matrizen

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/7 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/7 \end{array} \right), \end{aligned}$$

wobei wir Nullzeilen weglassen und im letzten Schritt die dritte und vierte Spalte getauscht haben, wodurch x_3 und x_4 ihre Rollen tauschen. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} x_4 &= -3/7, \\ x_2 + 2x_4 &= -2, \quad \text{d.h. } x_2 = -2 + 6/7 = -8/7, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_3 &= 2, \quad \text{d.h. } x_1 = 2 + 16/7 - 3/7 - x_3. \end{aligned}$$

Mit dem Parameter $x_3 = t$ folgt schließlich

$$x_1 = 27/7 - t, \quad x_2 = -8/7, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -3/7$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/7 \\ -8/7 \\ 0 \\ -3/7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

■

6 Folgen und Reihen reeller Zahlen

6.1 Folgen und Grenzwerte

Definition 6.1 Ordnet man jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zu, so entsteht eine (unendliche) Folge (reeller Zahlen)

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Die a_n heißen Glieder der Folge, und man schreibt die Folge als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n \geq 1}$.

Beispielsweise ist $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ die Folge $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$. Der Index der Folgenglieder muß nicht unbedingt bei 1 beginnen:

$$\left(\frac{1}{n(n-1)} \right)_{n \geq 2} \text{ ist die Folge } \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$$

Die Vorstellung, dass sich die Folgenglieder einer bestimmten Zahl immer mehr nähern, wird durch folgenden Begriff präzisiert.

Definition 6.2 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl a mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon). \quad (6.1)$$

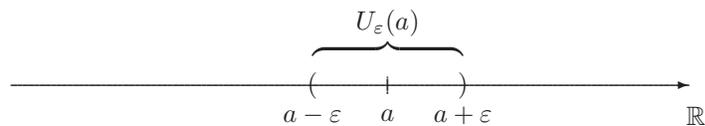
Die Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge, und man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Forderung (6.1) umschreibt man auch so: Für alle bis auf endlich viele Zahlen n gilt die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$. Anschaulich bedeutet Definition 6.2, dass im Fall der Konvergenz und für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ alle Glieder der Folge ab einem gewissen Index in der ε -Umgebung um a ,

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

liegen.



Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*, und eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt auch *Nullfolge*. Beispielsweise sind $(n)_{n \geq 1} = 1, 2, 3, \dots$ und $((-1)^n)_{n \geq 1} = -1, 1, -1, 1, \dots$ divergente Folgen.

Beispiel 1 Wir betrachten die Folge

$$\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \geq 1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$$

Das Verhalten der berechneten Folgenglieder legt die Vermutung nahe, dass diese Folge gegen 0 konvergiert. Wir wollen das bestätigen und wählen dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Unsere Aufgabe ist es, eine Zahl $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass

$$\left| \frac{1}{n(n+1)} - 0 \right| = \frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon). \quad (6.2)$$

Nun kann man daran denken, die Ungleichung $\frac{1}{n(n+1)} < \varepsilon$ nach n umzuformen und so $N(\varepsilon)$ zu bestimmen. Das ist natürlich unbequem. Zum Glück müssen wir aber gar nicht das kleinstmögliche $N(\varepsilon)$ bestimmen, sondern nur irgend eins. Wir schätzen daher erst nach oben ab:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

und suchen nun $N(\varepsilon)$ so, dass

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon). \quad (6.3)$$

Nun ist $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ genau dann, wenn $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ bzw. $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Wir können also für $N(\varepsilon)$ irgendeine natürliche Zahl wählen, die größer ist als $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Dann gilt (6.3) und damit erst recht (6.2). Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$, und nebenbei haben wir auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ erhalten. ■

Ähnlich kann man sich überlegen:

Beispiel 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ für $k > 0$.

Beispiel 3 Die Folge $(x^n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent, wenn $x \in (-1, 1]$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Beispiel 4

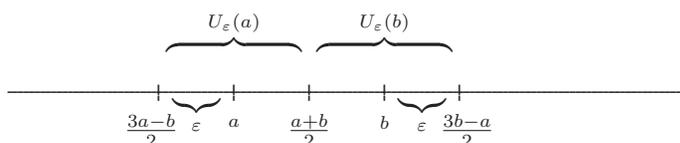
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} &= 1 && \text{für alle } x > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} &= 0 && \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

In allen betrachteten Beispielen haben wir für jede konvergente Folge nur einen Grenzwert gefunden. Das ist kein Zufall.

Satz 6.3 Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis Angenommen, (a_n) ist eine Folge, die zwei Grenzwerte a und b mit $a < b$ hat. Wir wählen $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Dann ist

$$U_\varepsilon(a) = \left(\frac{3a-b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2} \right).$$



Aus der Definition des Grenzwertes folgt nun, dass – mit Ausnahme endlich vieler – alle Folgenglieder kleiner als $\frac{a+b}{2}$ sind (da sie in $U_\varepsilon(a)$ liegen) und gleichzeitig größer als $\frac{a+b}{2}$ sind (da sie in $U_\varepsilon(b)$ liegen). Das ist aber unmöglich. ■

Hier sind die Rechenregeln für Grenzwerte.

Satz 6.4 Seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$, $(a_n b_n)_{n \geq 1}$ und $(c a_n)_{n \geq 1}$ mit $c \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = ca.$$

Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$, und es ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a \leq b$.

Beispiel 5 Für $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 6 Es ist $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}$. ■

Man beweist Satz 6.4, indem man die Bedingungen aus Definition 6.2 direkt überprüft. Nützlich sind dabei die folgenden Begriffe und Aussagen.

Definition 6.5 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Satz 6.6 a) *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

b) *Das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.*

Beweis für (b) Sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Wir wählen K so, dass $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n ist dann

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq K |a_n|. \quad (6.4)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim a_n = 0$ finden wir ein $N(\varepsilon)$ so, dass

$$|a_n| < \varepsilon/K \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Wegen (6.4) ist dann

$$|a_n b_n - 0| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon). \quad \blacksquare$$

Ein einfaches und sehr anschauliches Konvergenzkriterium ist das folgende.

Satz 6.7 (Einschließungskriterium) *Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind die Folgen (a_n) und (c_n) konvergent und haben sie den gleichen Grenzwert a , so konvergiert auch die Folge (b_n) , und ihr Grenzwert ist ebenfalls a .*

Beispiel 7 Wir benutzen dieses Kriterium, um zu zeigen, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 1}$ konvergiert und dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (6.5)$$

Wir zeigen dazu, dass die Folge (b_n) mit $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$ eine Nullfolge ist (offenbar ist $b_n \geq 0$). Dazu benötigen wir den *binomischen Satz*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

mit den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Mit diesem Satz erhalten wir zunächst

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + b_n)^n = 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \dots + \binom{n}{n} b_n^n.$$

Vernachlässigen wir alle Summanden bis auf den ersten und dritten, so folgt für $n \geq 2$

$$n > 1 + \binom{n}{2} b_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} b_n^2,$$

so dass $b_n^2 < \frac{2}{n}$ ist. Da andererseits $b_n \geq 0$ ist, erhalten wir die Abschätzung

$$0 \leq b_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = 0$ liefert das Einschließungskriterium, dass auch $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ist, d.h. (6.5) gilt. \blacksquare

6.2 Konvergenzkriterien und Vollständigkeit von \mathbb{R}

Um die Konvergenz einer Folge festzustellen, haben wir bisher im wesentlichen nur die Möglichkeit über Definition 6.2. Dazu benötigen wir aber die Kenntnis des Grenzwertes (oder wenigstens eine Vermutung über den Grenzwert der Folge). Bei Folgen wie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \geq 1}$ ist das aussichtslos. Wir stellen daher in diesem Abschnitt einige Kriterien bereit, die uns die Konvergenz einer Folge liefern, ohne dass wir deren Grenzwert vermuten müssen. Diese Kriterien beruhen auf dem Vollständigkeitsaxiom. Allerdings liefern uns diese Kriterien nicht unmittelbar den Grenzwert selbst. Es sind *Existenzaussagen*.

Definition 6.8 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend, wenn

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots, \quad \text{d.h. } a_n \leq a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und sie heißt monoton fallend, wenn

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots, \quad \text{d.h. } a_n \geq a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 6.9 (Monotoniekriterium) Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte (bzw. monoton fallende und nach unten beschränkte) Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Wir überlegen uns die einfache *Begründung* für die erste Aussage. Ist die Folge (a_n) nach oben beschränkt, so existiert das Supremum $M := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach Definition des Supremums finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein Folgenglied a_N mit $M - \varepsilon < a_N \leq M$. Da die Folge (a_n) monoton wächst und M eine obere Schranke ist, haben wir $M - \varepsilon < a_n \leq M$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert die Folge (a_n) , und M ist ihr Grenzwert. ■

Beispiel 8 Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt. Also konvergiert sie. ■

Beispiel 9 Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert. Diese Folge *wächst monoton*: Für $n \geq 2$ ist nämlich

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1}.$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1,$$

also $a_n \geq a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$.

Die Folge (a_n) ist aber auch *nach oben beschränkt*: Aus dem binomischen Satz folgt zunächst

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Für $k \geq 1$ schätzen wir ab:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Hieraus und mit der Summenformel für die geometrische Reihe folgt:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} < 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3. \end{aligned}$$

Nach dem Monotoniekriterium existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dieser Grenzwert heißt *Eulersche Zahl e*. Die Zahl e ist irrational mit

$$e = 2.71\ 82\ 81\ 82\ 84\ 5\dots \quad \blacksquare$$

Beispiel 10 Sei $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ist offenbar monoton wachsend, und sie ist auch nach oben beschränkt:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3$$

(vgl. Beispiel 9). Also konvergiert (a_n) , und man kann zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e. \quad \blacksquare$$

Wir wollen noch ein weiteres Konvergenzkriterium angeben, welches sich nicht nur auf monotone Folgen anwenden läßt, und welches außerordentlich wichtig für die Begründung der Analysis ist. Dazu definieren wir:

Definition 6.10 Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt *Cauchyfolge oder Fundamentalfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N(\varepsilon).$$

Die Folgenglieder müssen sich also in einem bestimmten Sinn immer näher kommen.

Satz 6.11 (Cauchy-Kriterium) *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Die Tatsache, dass dieses Kriterium gilt, bezeichnet man als *Vollständigkeit* von \mathbb{R} . In diesem Sinn ist auch \mathbb{C} vollständig.

Einige Anmerkungen zum Beweis des Cauchy-Kriteriums: Es ist leicht zu sehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Die umgekehrte Behauptung zeigt man in drei Schritten:

1. Schritt Cauchyfolgen sind beschränkt. Das ist ebenfalls leicht zu sehen.

2. Schritt Hier muß man den folgenden Satz beweisen, der eine wichtige Aussage über Folgen reeller Zahlen macht.

Satz 6.12 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beispielsweise bilden die Folgenglieder mit geraden Indizes eine konvergente Teilfolge von $((-1)^n)_{n \geq 1}$.

3. Schritt Man zeigt, dass jede Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, selbst konvergiert. Das ist wieder einfach. ■

Beispiel 11 Für $n \geq 1$ sei $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchyfolge ist. Für $m \geq n + 2$ ist

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^m (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right| = \left| (-1)^n \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} \right|. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Weiter ist

$$\sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) + \dots > 0$$

sowie

$$\sum_{k=n+2}^m (-1)^{k-n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+2} - \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) - \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) - \dots < \frac{1}{n+2}.$$

Hieraus und aus (6.6) folgt $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1}$, und dies gilt sogar für alle $m \geq n$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir N so, dass $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ mit $m \geq n$ ist dann

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent. Man kann zeigen, dass der Grenzwert dieser Folge gleich $\ln 2$ ist. ■

6.3 Reihen

Mit Hilfe der Körperaxiome lassen sich Summen *endlich* vieler Zahlen erklären. Wir untersuchen in diesem Abschnitt Summen *unendlich* vieler Zahlen - so genannte Reihen. Dazu betrachten wir Reihen als spezielle Folgen.

Definition 6.13 Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$. Die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ heißt die zu (a_n) gehörende Reihe. Die Zahlen a_n heißen Glieder der Reihe, und die s_n ihre Partialsummen. Ist die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ konvergent und s ihr Grenzwert, so heißt die Reihe konvergent, die Zahl s heißt ihre Summe, und man schreibt $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Nichtkonvergente Reihen heißen divergent.

Eine Reihe ist also die Folge ihrer Partialsummen. Häufig wählt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch als *Bezeichnung* für die Reihe (s_n) . Aus dem Kontext wird in der Regel klar, ob $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für die Reihe selbst oder für ihre Summe steht.

Beispiel 12 Die geometrische Reihe. Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $a_n = q^n$ für $n \geq 0$. Aus Beispiel 2, Abschnitt 1.1, wissen wir, dass

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Damit ist klar: die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist $\frac{1}{1-q}$ ihre Summe. ■

Beispiel 13 Die harmonische Reihe. Das ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Sie divergiert, denn für jedes $n \geq 1$ ist

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d.h. (s_n) ist keine Cauchyfolge und deshalb erst recht nicht konvergent. ■

Beispiel 14 Aus den Beispielen 10 und 11 wissen wir: die so genannte *Leibniz-Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ konvergiert (gegen $\ln 2$), und auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert (gegen e). ■

Beispiel 15 Für die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ haben wir

$$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Also konvergiert diese Reihe, und ihre Summe ist 1. ■

Da die Konvergenz von Reihen über die Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen erklärt ist, kann man Konvergenzkriterien für Folgen auf Reihen übertragen.

Satz 6.14 (Cauchy-Kriterium für Reihen) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so gibt, dass

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > n \geq N(\varepsilon).$$

Man beachte, dass

$$s_m - s_n = \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k.$$

Aus dem Cauchy-Kriterium bekommt man das folgende *notwendige Konvergenzkriterium*, indem man $m = n + 1$ setzt.

Folgerung 6.15 (Notwendiges Kriterium) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Die Umkehrung gilt natürlich *nicht*, wie die harmonische Reihe zeigt.

Ein spezielles Konvergenzkriterium hat man für *alternierende Reihen*:

Satz 6.16 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ gelte $b_k \geq 0$ und $b_k \geq b_{k+1}$ für alle $k \geq 0$, und es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Dann ist diese Reihe konvergent.

Dieses Kriterium kann man mit der gleichen Idee beweisen, die wir in Beispiel 11 für die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ genutzt haben.

Das Leibniz-Kriterium liefert z.B. die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}. \quad \blacksquare$$

Schauen wir uns noch Summen und Differenzen von Reihen an. Aus Satz 6.4 erhalten wir sofort:

Satz 6.17 Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so ist für beliebige Zahlen α und β auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent, und ihre Summe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Man beachte aber, dass man Reihen nicht beliebig umordnen darf (während man bei endlichen Summen das Kommutativgesetz hat). Auch Produkte konvergenter Reihen bereiten gewisse Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten lassen sich vermeiden, wenn man einen stärkeren Konvergenzbegriff zu Grunde legt.

6.4 Absolut konvergente Reihen

Definition 6.18 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispielsweise ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergent (Leibniz-Kriterium), jedoch nicht absolut konvergent (harmonische Reihe). Dagegen ist $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$ eine konvergente (Leibniz-Kriterium) und auch absolut konvergente Reihe (Reihe für e). Reihen mit ausschließlich nichtnegativen Gliedern sind genau dann absolut konvergent, wenn sie konvergieren.

Satz 6.19 Absolut konvergente Reihen sind konvergent.

Beweis Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, und wir setzen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ sowie $S_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$. Für $m > n$ ist dann

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m| = S_m - S_n.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N so, dass $|S_m - S_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Dann ist aber auch $|s_m - s_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Das Cauchy-Kriterium liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. ■

Wir sehen uns nun einige Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen an.

Satz 6.20 (Vergleichskriterium) a) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und gilt $|a_k| \leq b_k$ für alle k , so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
 b) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent und ist $0 \leq b_k \leq a_k$ für alle k , so divergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Im Fall (a) heißt $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, und im Fall (b) eine divergente Minorante.

Aussage (a) kann man sich z.B. so klarmachen: Für jede Partialsumme s_n von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ gilt:

$$s_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq b_0 + b_1 + \dots + b_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Die Folge (s_n) ist also nach oben beschränkt, und sie ist offenbar monoton wachsend. Nach dem Monotoniekriterium konvergiert diese Folge. ■

Für die Anwendung dieses Kriteriums ist es offenbar wichtig, einen großen Vorrat an Vergleichsreihen zu besitzen.

Beispiel 16 Die Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ lassen sich nach oben abschätzen durch

$$\frac{1}{n^2} \leq \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 1 \\ \frac{1}{n(n-1)}, & \text{wenn } n > 1. \end{cases}$$

Die Reihe $1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ ist aber konvergent, wie wir aus Beispiel 15 wissen. Also konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ihre Summe (die wir auf diese Weise nicht erhalten können) ist übrigens $\pi^2/6$. Diese Reihe kann nun ihrerseits wieder als konvergente Majorante für Reihen wie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ mit $r \geq 2$ dienen. ■

Beispiel 17 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, da die harmonische Reihe eine divergente Minorante für diese Reihe ist. ■

Satz 6.21 (Quotientenkriterium) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n .

a) Wenn es ein $q \in (0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Falls der Grenzwert $q^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert, so läßt sich das Quotientenkriterium auch so fassen:

Folgerung 6.22 (Quotientenkriterium in Limesform) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut für $q^* < 1$, und sie divergiert für $q^* > 1$.

Im Fall $q^* = 1$ ist keine Aussage möglich, wie die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{6.7}$$

zeigen. In beiden Fällen ist $q^* = 1$. Die erste Reihe divergiert aber, während die zweite konvergiert.

Satz 6.23 (Wurzelkriterium) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

a) Wenn es ein $q \in (0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ so gibt, dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

b) Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \quad \text{für alle } k \geq N,$$

so divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Existiert der Grenzwert $q^* := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, so kann man das Wurzelkriterium wie folgt formulieren:

Folgerung 6.24 (Wurzelkriterium in Limesform) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent für $q^* < 1$ und divergent für $q^* > 1$.

Für $q^* = 1$ ist wieder keine Entscheidung möglich, wie die Reihen (6.7) zeigen. Die Sätze 6.21 und 6.23 werden mit dem Vergleichskriterium bewiesen, wobei die geometrische Reihe als Vergleichsreihe dient. Ist etwa

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad \text{für } k \geq N,$$

so ist $|a_k| \leq q^k$, und $\sum_{k=N}^{\infty} q^k$ ist eine konvergente Majorante für $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$. ■

Beispiel 18 Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!(k+1)!(2k)!}{(2k+2)!k!k!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{4k^2 + 6k + 2}.$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4} < 1$ konvergiert diese Reihe. ■

Beispiel 19 Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut, denn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0. \quad \blacksquare$$

Wir sehen uns nun noch Produkte von Reihen an. Das Produkt der beiden endlichen Summen $a_0 + \dots + a_n$ und $b_0 + \dots + b_m$ ist gleich der Summe über alle Produkte $a_i b_j$ mit $0 \leq i \leq n$ und $0 \leq j \leq m$. Analog entstehen beim formalen Multiplizieren der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ die Produkte

$$\begin{array}{cccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \quad (6.8)$$

Es ist keineswegs klar, wie diese Produkte in einer „neuen“ Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, dem „Produkt“ der Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$, angeordnet werden sollen. Man kann aber zeigen, dass es auf die Art der Anordnung überhaupt nicht ankommt, falls beide

Reihen absolut konvergieren. Insbesondere für Potenzreihen, die wir später kennen lernen, ist folgende Variante des Durchlaufens der Produkte (6.8) interessant

$$\begin{array}{ccccc}
 a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 \\
 & \diagup & & \diagup & \\
 a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 \\
 & \diagup & & \diagup & \\
 a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2
 \end{array}$$

Die Summe der Elemente der n -ten Diagonale ist gerade $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$.

Definition 6.25 Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen, so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k$ das Cauchy-Produkt der Ausgangsreihen.

Satz 6.26 Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien absolut konvergent. Dann ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beispiel 20 Für $x, y \in \mathbb{R}$ sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ absolut konvergent (vgl. Beispiel 19). Wir berechnen das Cauchy-Produkt dieser Reihen:

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},
 \end{aligned}$$

wobei wir die binomische Formel benutzt haben. Nach Satz 6.26 ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

■

7 Reelle Funktionen und Stetigkeit

7.1 Stetige Funktionen

In diesem Abschnitt ist X eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} (meist ein Intervall), und wir betrachten Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 7.1 Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus X gilt: Die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte konvergiert, und ihr Grenzwert ist $f(x_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Ist f in jedem Punkt von X stetig, so heißt f stetig auf X .

Eine äquivalente Beschreibung ist die folgende.

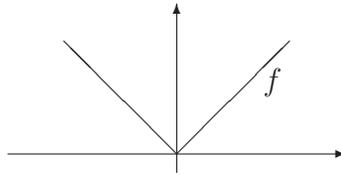
Satz 7.2 Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so existiert, dass für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

In Kurzfassung:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) : \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).$$

Beispiel 1: Die Betragsfunktion

Das ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ mit dem folgenden Graphen:



Sie ist auf ganz \mathbb{R} stetig, wie man leicht mit der Dreiecksungleichung erhält. Aus $x_n \rightarrow x_0$ folgt nämlich wegen

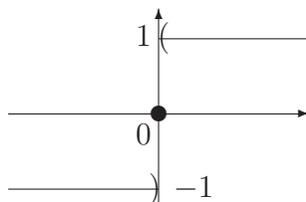
$$\left| |x_n| - |x_0| \right| \leq |x_n - x_0| \rightarrow 0,$$

dass auch $|x_n| \rightarrow |x_0|$. ■

Beispiel 2: Die Signumfunktion

Das die Funktion

$$\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$



Sie ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, nicht aber in $x_0 = 0$. Es ist nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1 \neq 0 = \operatorname{sgn} 0. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3: Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

heißt *Polynom n. Grades*, und die a_i heißen seine *Koeffizienten*. Polynome sind auf ganz \mathbb{R} stetig. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen x_0 konvergiert, so ist nach Satz 6.4

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \dots + a_1 x_k + a_0) \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so erhält man ihre *Summe* $f + g$, ihr *Produkt* fg und – falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ – ihren *Quotienten* f/g durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Satz 7.3 Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig, so sind auch $f + g$, fg und – falls $g(x) \neq 0$ für $x \in X$ – auch f/g in x_0 stetig. Ist $f : X \rightarrow B(f)$ in $x_0 \in X$ stetig und $h : B(f) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig, so ist $h \circ f$ in x_0 stetig.

Dies folgt schnell aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 6.4) und der Definition der Stetigkeit.

Beispiel 4: Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist der Quotient P/Q zweier Polynome P, Q . Sie ist auf $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ erklärt und nach Satz 7.3 und Beispiel 3 auf dieser Menge stetig. \blacksquare

Eng verwandt mit dem Begriff der Stetigkeit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion in einem Punkt. Dazu nennen wir $x_0 \in \mathbb{R}$ einen *Häufungspunkt*

von $X \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Folge (x_n) in X mit $x_n \neq x_0$ für alle n gibt, die gegen x_0 konvergiert. Man beachte, dass x_0 nicht zu X gehören muss. Beispielsweise sind 1, 2, 3 Häufungspunkte des Intervalls $[1,3)$.

Definition 7.4 Sei x_0 ein Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{R}$. Man sagt, dass der Grenzwert einer Funktion $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 existiert und gleich $y_0 \in \mathbb{R}$ ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $X \setminus \{x_0\}$ mit Grenzwert x_0 der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existiert und gleich y_0 ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

Wir schreiben dann auch $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Man beachte, dass man den Grenzwert einer Funktion auch an Stellen erklären kann, an denen die Funktion nicht definiert ist. Wichtig ist aber, dass x_0 ein Häufungspunkt von $D(f)$ ist.

Beispiel 5 Die Signumfunktion aus Beispiel 2 besitzt keinen Grenzwert im Punkt $x_0 = 0$, denn für die Folgen $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{-1}{n})$ mit Grenzwert 0 gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1, \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \left(\frac{-1}{n} \right) = -1.$$

■

In diesem Beispiel hat man aber folgenden Effekt: Nähert sich eine Folge (x_n) von oben der Null (ist also $x_n > 0$ für alle n), so existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ und ist gleich 1. Man sagt auch, dass 1 der *rechtsseitige Grenzwert* von f ist. Analog dazu ist -1 der *linksseitige Grenzwert* von $f = \operatorname{sgn}$. Allgemein definiert man

Definition 7.5 Sei x_0 ein Häufungspunkt von $X \cap (x_0, \infty)$. Man sagt, dass der rechtsseitige Grenzwert von $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 existiert und gleich $y_0 \in \mathbb{R}$ ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $X \cap (x_0, \infty)$ mit Grenzwert x_0 der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existiert und gleich y_0 ist. Man schreibt dann auch

$$y_0 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \text{ oder } y_0 = \lim_{x \searrow x_0} f(x) \text{ oder } y_0 = f(x_0 + 0).$$

Ersetzt man (x_0, ∞) durch $(-\infty, x_0)$ und $>$ durch $<$, erhält man den Begriff des linksseitigen Grenzwertes. Es ist also z.B. $\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn} x = -1$.

Sei wieder X Teilmenge von \mathbb{R} . Ein Punkt $x \in X$ heißt *isoliert*, wenn er kein Häufungspunkt von X ist. Z.B. ist jeder Punkt von \mathbb{N} (also jede natürliche Zahl) isoliert, wenn wir \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R} betrachten.

Mit diesen Begriffen können wir eine weitere äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit geben:

Satz 7.6 Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in X$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) x_0 ist ein isolierter Punkt von X ,
- (b) x_0 ist Häufungspunkt von X , der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert, und dieser Grenzwert ist gleich $f(x_0)$.

Das folgt sofort aus den Definitionen. Man beachte, dass für einen isolierten Punkt $x_0 \in X$ eine Folge (x_n) aus X genau dann gegen x_0 konvergiert, wenn $x_n = x_0$ für alle hinreichend großen n .

Die folgenden Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten ergeben sich wieder aus Satz 6.4.

Satz 7.7 Die Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sollen an der Stelle x_0 einen Grenzwert besitzen. Dann besitzen auch die Funktionen $f + g, fg$ und cf mit $c \in \mathbb{R}$ sowie – falls $g(x) \neq 0$ für $x \in X$ und falls $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ – die Funktion f/g einen Grenzwert in x_0 , und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) &= c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \end{aligned}$$

Beispiel 6 Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4}(x^2+x-6)}{\lim_{x \rightarrow 4}(x-2)} = \frac{14}{2} = 7$, und $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$. ■

7.2 Einige spezielle Funktionen

7.2.1 Polynome

Wir ergänzen unsere Kenntnisse über Polynome durch folgenden wichtigen Satz aus der Linearen Algebra.

Satz 7.8 (Identitätssatz) Stimmen die Werte der Polynome f, g vom Grad $\leq n$ in $n+1$ verschiedenen Punkten überein, so haben f und g dieselben Koeffizienten, und es ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hierauf beruht die Methode des *Koeffizientenvergleichs*: Ist $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist $a_i = b_i$ für $i = 0, \dots, n$. Wir benutzen diese Methode, um uns folgendes zu überlegen.

Ist $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom vom Grad n und $x_0 \in \mathbb{R}$, so gibt es ein Polynom $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ vom Grad $n-1$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x - x_0)g(x) + c \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Aus (7.1) folgt $c = f(x_0)$. Ist x_0 Nullstelle von f , so kann f faktorisiert werden: $f(x) = (x - x_0)g(x)$. Mehrfache Anwendung dieser Überlegung zeigt: ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Um (7.1) zu zeigen, vergleichen wir die Koeffizienten der Polynome auf der linken bzw. rechten Seite von (7.1):

$$\begin{aligned} \text{bei } x^n : \quad & a_n = b_{n-1} \\ \text{bei } x^{n-1} : \quad & a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1} \\ & \vdots \\ \text{bei } x^1 : \quad & a_1 = b_0 - x_0 b_1 \\ \text{bei } x^0 : \quad & a_0 = c - x_0 b_0. \end{aligned}$$

Hieraus berechnet man $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ und c :

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + x_0 b_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= a_1 + x_0 b_1 \\ c &= a_0 + x_0 b_0. \end{aligned}$$

Ein bequemes Berechnungsverfahren bietet das *Hornerschema*:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ & x_0 b_{n-1} & x_0 b_{n-2} & \dots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & c. \end{array}$$

Beispielsweise ist für $f(x) = x^5 + 2x^4 - 12x + 5$ und $x_0 = 2$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 5 \\ & 2 & 8 & 16 & 32 & 40 \\ \hline 1 & 4 & 8 & 16 & 20 & 45 \end{array}$$

Also ist $f(2) = 45$ und $x^5 + 2x^4 - 12x + 5 = (x - 2)(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 20) + 45$. ■

Ist also x_0 eine Nullstelle von f , so gibt es ein Polynom g_1 so, dass $f(x) = (x - x_0)g_1(x)$. Ist x_0 auch Nullstelle von g_1 , so gibt es ein Polynom g_2 so, dass

$f(x) = (x - x_0)^2 g_2(x)$. Wir fahren so fort und finden eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = (x - x_0)^\ell g_\ell(x)$, aber $g_\ell(x_0) \neq 0$. Dann heißt ℓ die *Ordnung der Nullstelle* x_0 von f . Analog heißt x_0 eine *Polstelle* ℓ . Ordnung der rationalen Funktion $f = g/h$, wenn $g(x_0) \neq 0$ und wenn x_0 Nullstelle ℓ . Ordnung von h ist.

7.2.2 Wurzelfunktionen

Definition 7.9 Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (*monoton fallend*), wenn für $x, y \in X$ mit $x < y$ stets $f(x) \leq f(y)$ ($f(y) \leq f(x)$) ist. Die Funktion f heißt *streng monoton wachsend* (*streng monoton fallend*), wenn aus $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ (bzw. $f(y) < f(x)$) folgt.

Ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder streng monoton fallend), so ist sie offenbar injektiv. Man kann daher die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \rightarrow X$ zu $f : X \rightarrow B(f)$ bilden. Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht, indem der Graph von f an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten gespiegelt wird.

Beispiel 7 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

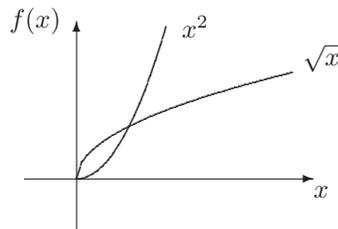
$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend (aus $0 \leq x < y$ folgt $x^n < y^n$), und ihr Bild ist das unendliche Intervall $[0, \infty)$. Also ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto x^n \tag{7.2}$$

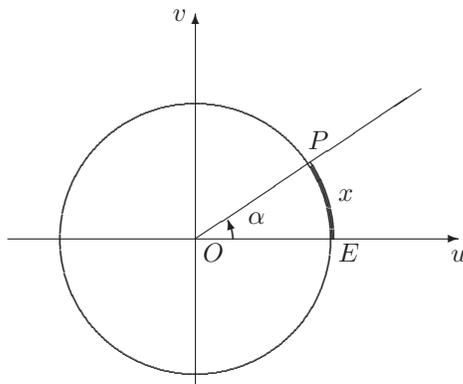
bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} . Statt $f^{-1}(x)$ schreibt man auch $\sqrt[n]{x}$. Die Umkehrfunktion zu 7.2 ist also die n -te Wurzelfunktion

$$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$



7.2.3 Trigonometrische Funktionen

Die Menge $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ stellt in einem kartesischen Koordinatensystem den *Einheitskreis*, d.h. den Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 dar. Die Größe des Winkels α messen wir im *Bogenmaß* x , d.h. als Länge des Kreisbogens zwischen E und P . Messen wir α im Gegenuhrzeigersinn, so erhält x ein positives Vorzeichen, anderenfalls ein negatives.

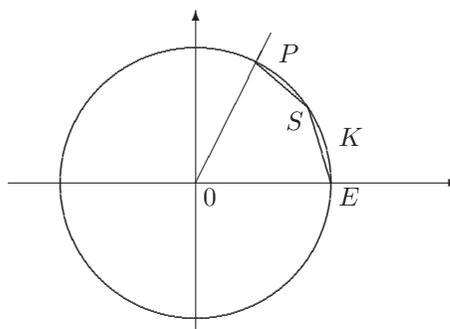


Winkel größer als 360° sind natürlich zugelassen. Da der Umfang des Einheitskreises 2π ist, entsprechen sich also

$$360^\circ \longleftrightarrow 2\pi, \quad 180^\circ \longleftrightarrow \pi, \quad 90^\circ \longleftrightarrow \pi/2, \quad 60^\circ \longleftrightarrow \pi/3, \quad 30^\circ \longleftrightarrow \pi/6.$$

Mit dem Lineal können wir Längen von Strecken messen. Damit ist auch klar, was die Länge eines Streckenzuges ist. Wie aber mißt man die Länge eines Kreisbogens? Genauer: wie *definiert* man die Länge eines Kreisbogens K ?

Eine Möglichkeit ist die folgende: Wir zeichnen einen Streckenzug S von E nach P , dessen Ecken auf dem Kreisbogen liegen. Seine Länge sei $L(S)$ (diese ist wohldefiniert). Da sicher $L(S) \leq L(K)$ sein soll, definiert man die Länge $L(K)$ des Kreisbogens K als das Supremum über alle $L(S)$, wobei S die Streckenzüge von E nach P durchläuft. ■

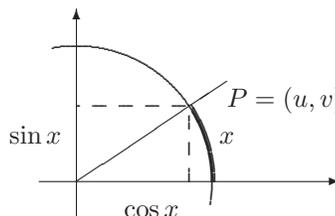


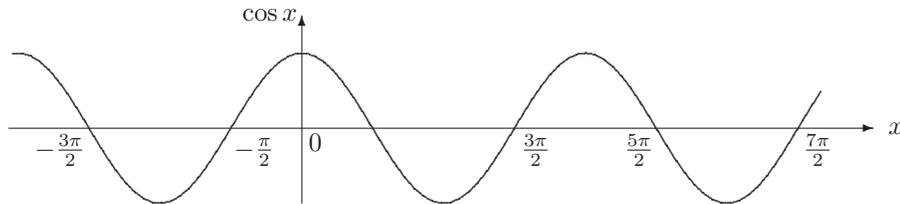
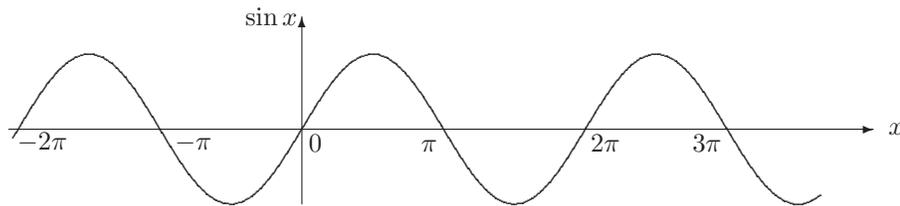
Durch jeden Winkel mit dem Bogenmaß x wird eindeutig ein Punkt $P = (u, v)$ auf dem Einheitskreis erzeugt, dessen Koordinaten von x abhängen. Man schreibt für $x \in \mathbb{R}$

$$u = \cos x, \quad v = \sin x$$

und erklärt auf diese Weise die *Sinus-* und *Cosinusfunktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & x &\mapsto \sin x \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], & x &\mapsto \cos x . \end{aligned}$$





Aus den Definitionen folgt sofort, dass $B(\sin) = B(\cos) = [-1, 1]$ und dass \sin und \cos *periodische Funktionen* mit der Periode 2π sind:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem ist \sin eine *ungerade* und \cos eine *gerade Funktion*:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Wichtig sind die folgenden Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned}$$

aus denen zahlreiche weitere Beziehungen zwischen \sin und \cos folgen, wie

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Außerdem lesen wir aus obiger Skizze sofort ab, dass

$$|\sin x| \leq |x|. \quad (7.4)$$

Satz 7.10 *Die Funktionen \sin und \cos sind stetig auf \mathbb{R} .*

Beweis Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus (7.3) folgt

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right|,$$

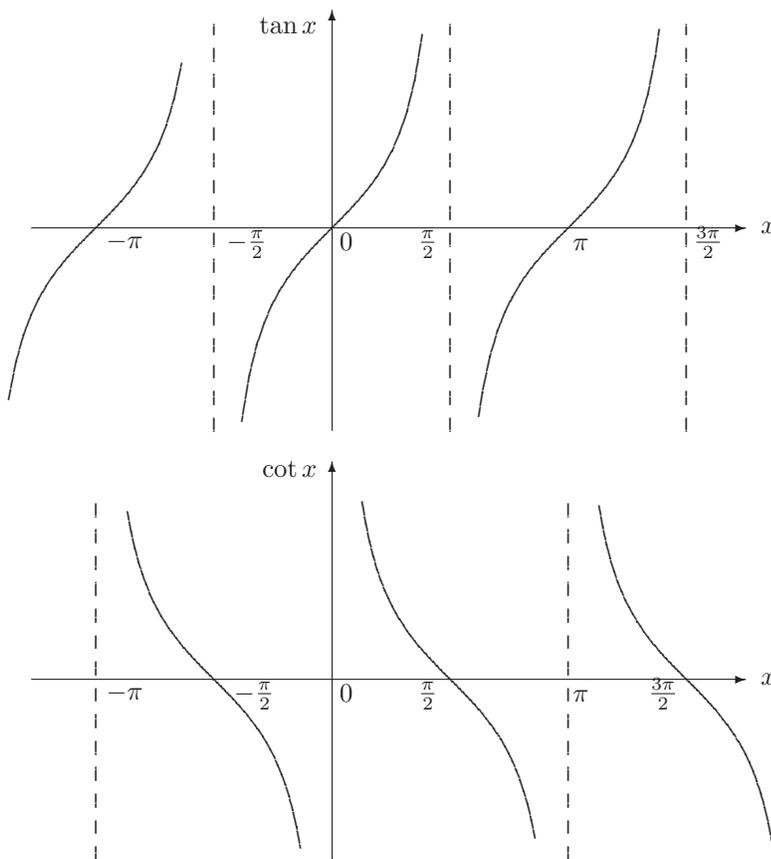
und mit (7.4) erhalten wir

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Hieraus folgt sofort die Stetigkeit der Sinusfunktion. Die Stetigkeit der Cosinusfunktion folgt aus $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (vgl. Satz 7.3). ■

Die Nullstellen der Sinusfunktion sind die Zahlen $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und die der Cosinusfunktion die Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir erklären die *Tangensfunktion* \tan und die *Cotangensfunktion* \cot durch

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cot : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto \frac{\cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$



Beide Funktionen sind periodisch mit der Periode π :

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x,$$

und beide Funktionen sind ungerade:

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x.$$

Für alle zulässigen x, y gelten die Additionstheoreme

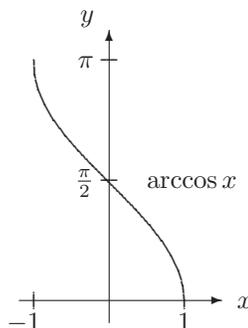
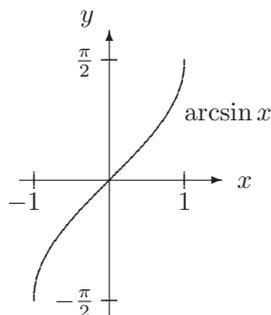
$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \cot(x+y) &= \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}. \end{aligned}$$

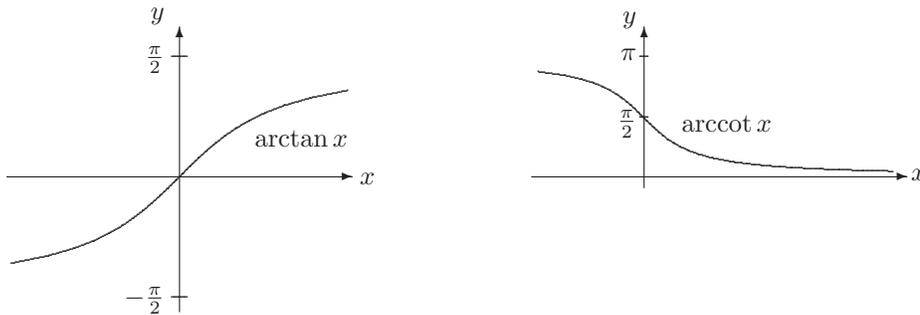
Schließlich sind nach Satz 7.3 beide Funktionen \tan und \cot stetig.

Wir schauen uns noch das Problem der Umkehrfunktion der trigonometrischen Funktionen an. Wegen der Periodizität ist keine der Funktionen \sin, \cos, \tan, \cot auf ihrem gesamten Definitionsbereich injektiv, und es besitzt keine dieser Funktionen auf dem gesamten Definitionsbereich einer Umkehrfunktion. Man sucht sich daher für diese Funktionen (möglichst große) Intervalle, auf denen die Funktionen streng monoton (wachsend oder fallend) sind. Betrachtet man die trigonometrischen Funktionen auf diesen Intervallen, so werden sie injektiv und können umgekehrt werden. Diese Intervalle sind natürlich nicht eindeutig bestimmt (z.B. ist der Sinus auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ streng monoton fallend), und jede Wahl eines solchen Intervalls liefert eine andere Umkehrfunktion. Üblich und praktisch ist es, die folgenden Intervalle zu wählen:

<i>Funktion</i>	<i>Umkehrfunktion</i>
$\sin : \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	$\arcsin : \quad [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$
$\cos : \quad [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	$\arccos : \quad [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$
$\tan : \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$	$\arctan : \quad \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$
$\cot : \quad (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$	$\operatorname{arccot} : \quad \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$

Die so definierten Umkehrfunktionen heißen *Arkusfunktionen* (lies z.B. *Arkussinus* für \arcsin).





Zur Stetigkeit der Arkusfunktionen kommen wir in Abschnitt 7.3.

7.2.4 Exponentialfunktion

Wir haben in Beispiel 19 aus Abschnitt 2.4 gesehen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (sogar absolut) konvergiert. Wir können daher die *Exponentialfunktion* durch

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (7.5)$$

erklären. Statt e^x schreibt man oft auch $\exp x$. Man kann zeigen, dass

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}. \quad (7.6)$$

Aus Beispiel 20 aus Abschnitt 6.4 wissen wir, dass

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Wegen $e^0 = 1$ folgt hieraus $e^x \neq 0$ und

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend. Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto e^x$$

besitzt also eine Umkehrfunktion, den *natürlichen Logarithmus*

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x.$$

Dabei gilt für $x, y > 0$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

und $e^{\ln x} = x$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\ln(e^x) = x$.

Mit Hilfe der Logarithmusfunktion definieren wir beliebige Potenzen wie folgt. Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ sei

$$a^b := e^{b \ln a}.$$

Durch $x \mapsto a^x$ wird die *Exponentialfunktion zur Basis a* auf \mathbb{R} erklärt.

Eigenschaften: Sei $a > 0$.

- a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.
- b) $a^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$, und $a^0 = 1$.
- c) $1^x = 1$, und für $a > 1$ ist $x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend sowie für $a < 1$ streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis $0 < a \neq 1$ heißt *Logarithmus zur Basis a* :

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x.$$

Eigenschaften: Sei $a > 1$ und $x, y > 0$.

- a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
- b) $a^{\log_a x} = x$ und $\log_a a^z = z$ für $z \in \mathbb{R}$.
- c) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Schließlich sind Exponential- und Logarithmusfunktionen stetig. Für die Funktion \exp kann man das wie folgt einsehen. Wegen

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0} |e^{x-x_0} - 1|$$

muß man nur zeigen, dass die Funktion \exp an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist. Für $|x| \leq 1$ ist nun

$$\begin{aligned} |e^x - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\ &= |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |x|(e - 1), \end{aligned}$$

d.h.

$$|e^x - 1| \leq (e - 1) |x| \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit der Exponentialfunktion an der Stelle 0. Die Stetigkeit der Logarithmusfunktion werden wir im folgenden Abschnitt erhalten.

7.3 Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir sehen uns nun einige Eigenschaften stetiger Funktionen an.

Satz 7.11 (Satz vom Maximum und Minimum) Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es Punkte $x_0, x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Sind x_0, x_1 solche Punkte, so sagt man, dass f in x_0 ein *Minimum* und in x_1 ein *Maximum* besitzt. Später werden wir Extremwertaufgaben lösen, d.h. wir suchen z.B. x so, dass $f(x)$ möglichst groß wird. Satz 7.11 gibt uns Bedingungen dafür an, dass solche Extremwertaufgaben überhaupt lösbar sind. Die Voraussetzung, dass das Intervall in Satz 7.11 abgeschlossen und beschränkt ist, ist dabei wesentlich. Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x) = x$ auf dem Intervall $(0, 1)$, so findet man keinen Punkt x_0 mit $f(x) \leq f(x_0)$, d.h. $x \leq x_0$, für alle $x \in (0, 1)$.

Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn ihr Wertebereich $B(f)$ beschränkt ist. Eine Folgerung von Satz 7.11 ist

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Das ist klar, denn nach Satz 7.11 liegt ihr Wertebereich im abgeschlossenen Intervall $[f(x_0), f(x_1)]$, und dieses ist beschränkt. Die Funktionen \sin und \cos sind auf ganz \mathbb{R} beschränkt, während die Funktionen \tan, \cot, \exp und \ln auf ihren Definitionsbereichen unbeschränkt sind.

Der folgende Satz entspricht der anschaulichen Vorstellung, dass Graphen stetiger Funktionen keine „Lücken“ aufweisen.

Satz 7.12 (Zwischenwertsatz) Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a, b]$. Dann gibt es zu jeder Zahl c zwischen dem Minimum und dem Maximum von f , d.h.

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) \leq c \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Es wird also jeder Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum von f angenommen, oder anders gesagt: der Wertebereich von f ist ein abgeschlossenes Intervall:

$$B(f) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right].$$

Insbesondere gilt:

Folgerung 7.13 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen (d.h. ist $f(a)f(b) < 0$), so hat f eine Nullstelle in (a, b) .

Aus den Voraussetzungen folgt nämlich, dass das Maximum von f positiv und das Minimum negativ ist. Die Zahl 0 liegt also zwischen Minimum und Maximum von f und wird daher angenommen. ■

Beispiel Die Funktion \exp nimmt positive Werte an (z.B. $e^0 = \exp 0 = 1$). Würde sie auch negative Werte annehmen, so hätte sie eine Nullstelle. Das ist aber nicht der Fall: wegen $e^x e^{-x} = e^0 = 1$ ist stets $e^x \neq 0$. Also nimmt e^x keine negativen Werte an, d.h. es ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. ■

Hier ist die Beweisidee für die Folgerung aus dem Zwischenwertsatz. Sei $I_0 := [a, b]$. Wir halbieren I_0 . Ist $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls hat für genau eines der Intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ die Funktion f an den Endpunkten unterschiedliche Vorzeichen. Sei I_1 dieses Intervall. Wir halbieren nun I_1 und gelangen wie beschrieben zu einem Intervall I_2 . Wir fahren auf diese Weise fort und erhalten eine Folge $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ ineinandergeschachtelter Intervalle, deren Längen gegen 0 gehen. Diese Intervalle ziehen sich auf einen Punkt x_0 zusammen. Dieser ist eine Nullstelle von f . ■

Dieses Verfahren der Intervallhalbierung kann auch zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen benutzt werden.

Im letzten Satz geht es um die Stetigkeit der Umkehrfunktion.

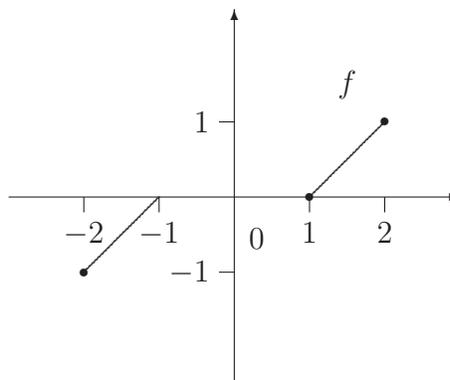
Satz 7.14 Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ streng monoton wachsend. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : B(f) \rightarrow [a, b]$, diese ist stetig und streng monoton wachsend.

Die Existenz von f^{-1} ist klar, da streng monoton wachsende Funktionen injektiv sind. Man beachte aber, dass diese Umkehrfunktion automatisch stetig ist, ohne dass man von f Stetigkeit verlangt!

Satz 7.14 gilt auch für offene Intervalle, und natürlich gilt er auch für streng monoton fallende Funktionen. Dagegen ist es wichtig, dass f auf einem *Intervall* streng monoton wächst. Das zeigt folgendes Beispiel.

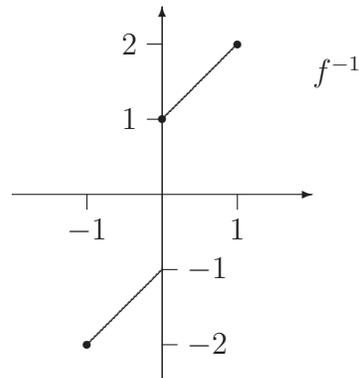
Beispiel Sei $X = [-2, -1) \cup [1, 2]$ und

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in [-2, -1) \\ x - 1 & \text{falls } x \in [1, 2] \end{cases}$$



Die Funktion f ist streng monoton wachsend, stetig, und sie bildet X bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow X$ ist erklärt durch

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{falls } x \in [-1, 0), \\ x + 1 & \text{falls } x \in [0, 1]. \end{cases}$$



Diese ist an der Stelle 0 unstetig. ■

Da die Funktionen

$$\begin{array}{ll} [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto x^n & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto e^x \\ [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto \sin x & [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto \cos x \\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto \tan x & (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto \cot x \end{array}$$

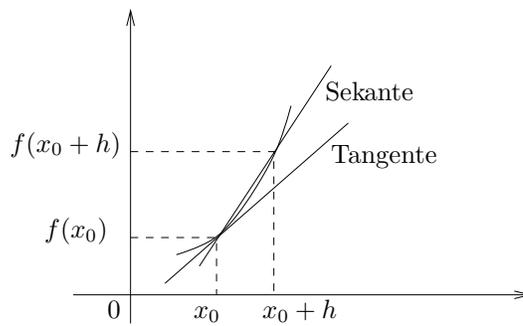
auf den angegebenen Intervallen streng monoton sind, sind ihre Umkehrfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, \ln , \arcsin , \arccos , \arctan , arccot stetig.

8 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung verdankt ihre Existenz im wesentlichen zwei Personen und zwei Problemkreisen.

Tangentenproblem (Leibniz) Gegeben ist eine reellwertige Funktion f , die auf einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist. Gesucht ist der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Anstieg der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ mit $h \neq 0$ ist leicht zu bestimmen:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Anschaulich erwartet man, dass sich der Anstieg der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ ergibt, wenn man den Grenzwert der Sekantenanstiege für $h \rightarrow 0$ betrachtet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Geschwindigkeitsproblem (Newton) Sei $s(t)$ die bis zur Zeit t zurückgelegte Weglänge eines Massepunktes bei geradliniger Bewegung. Bei gleichförmiger Bewegung ist der Quotient

$$v := \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

von den Zeitpunkten t_0, t unabhängig und gibt die Geschwindigkeit des Massepunktes an. Bei einer beschleunigten Bewegung kann dieser Quotient nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit sein. Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 sollte sich als Grenzwert ergeben:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

8.1 Definition der Ableitung

Definition 8.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in x_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (8.1)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}\big|_{x=x_0}$ bezeichnet.

Ist x_0 ein Endpunkt des Intervalles I , so betrachten wir einseitige Grenzwerte in (8.1). Ist f in jedem Punkt von I differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf I , und die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

heißt *Ableitung von f auf I* .

Ist f differenzierbar in x_0 , so wird die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ durch die Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

beschrieben.

Beispiel 1 Die Funktion $f : x \mapsto x^2$ ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar, und $f'(x) = 2x$. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 2 Die Funktion $f : x \mapsto |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = 1, \\ \lim_{h \nearrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1. \end{aligned}$$

Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h}$ existiert also nicht. Auch anschaulich ist klar, dass es im Punkt $(0, 0)$ keine Tangente an den Graphen von f gibt. \blacksquare

Dieses Beispiel zeigt, dass eine stetige Funktion nicht differenzierbar sein muss. Es gilt aber die Umkehrung.

Satz 8.2 Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f stetig in x_0 .

Beweis. Wir setzen $\alpha := f'(x_0)$ und definieren eine Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

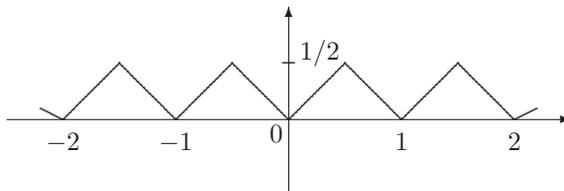
$$r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{falls } x \neq x_0 \\ 0 & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Die Funktion r ist stetig im Punkt x_0 , und es gilt

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0).$$

Für $x \rightarrow x_0$ hat die rechte Seite dieser Identität den Grenzwert $f(x_0)$. Also ist auch $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, d.h. f ist stetig in x_0 . ■

Anmerkung: Es gibt sogar Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} stetig, jedoch in keinem Punkt differenzierbar sind. Um eine solche Funktion anzugeben, sei zunächst g eine 1-periodische Funktion mit $g(x) = |x|$ auf $[-1/2, 1/2]$.



Die Funktion g ist genau an den Stellen $k/2$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Wir “verdichten” diese Stellen, indem wir für $j \in \mathbb{N}$ definieren

$$g_j(x) := \frac{1}{2^j} g(2^j x).$$

Jede Funktion g_j ist stetig und an den Stellen $k/2^{j+1}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar. Schließlich erklären wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x).$$

(Die Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach dem Majorantenkriterium). Die Funktion f ist nun auf ganz \mathbb{R} stetig (das beweisen wir später), aber in keinem Punkt differenzierbar. ■

8.2 Differentiationsregeln

Satz 8.3 Die Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen cf mit $c \in \mathbb{R}$, $f + g$, $f \cdot g$ und – falls $g(x_0) \neq 0$ – f/g an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} (cf)'(x_0) &= cf'(x_0), \\ (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\ (f/g)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir überlegen uns beispielsweise die Produktregel:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel 3 Sei $f(x) = 1/x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach der Quotientenregel ist diese Funktion in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Mit vollständiger Induktion kann man zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch $f(x) = x^{-n}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ erklärte Funktion in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und dass

$$f'(x) = -nx^{-n-1}. \quad \blacksquare$$

Für die Ableitung verketteter Funktionen hat man das folgende Resultat.

Satz 8.4 (Kettenregel) Seien $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $B(g) \subseteq J$. Ist g in $x_0 \in I$ differenzierbar und f in $g(x_0) \in J$ differenzierbar, so ist die verkettete Funktion $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Das kann man sich (zumindest für Funktionen g , die in einer Umgebung von x_0 den Wert $g(x_0)$ nur einmal annehmen) wie folgt klarmachen. Wir setzen $g(x_0) = y_0$ und $g(x) = y$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.
\end{aligned}$$

Da g an der Stelle x_0 stetig ist, strebt $y = g(x)$ gegen $y_0 = g(x_0)$ für $x \rightarrow x_0$. Es ist daher

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

also

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Beispiel 4 Sei $h(x) = (x^2 + 1)^{2003}$ auf \mathbb{R} . Dann ist $h = f \circ g$ mit $g(x) = x^2 + 1$ und $f(x) = x^{2003}$, und wir erhalten mit der Kettenregel

$$h'(x) = 2003(x^2 + 1)^{2002} \cdot 2x. \quad \blacksquare$$

Wir sehen uns noch die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion an. Sei also die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv. Dann ist $f : I \rightarrow B(f)$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $g := f^{-1} : B(f) \rightarrow I$ ist erklärt. Wenn nun f an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist *und* wenn g an der Stelle $f(x_0)$ differenzierbar ist, so folgt aus $(g \circ f)(x) = x$ und der Kettenregel

$$1 = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{bzw.} \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

mit $y_0 = f(x_0)$.

Es ist für Anwendungen dieser Regel sehr nützlich, dass man die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion gar nicht verlangen muss. Sie ergibt sich bereits aus der Differenzierbarkeit (und einigen weiteren Eigenschaften) von f . Genauer:

Satz 8.5 Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I differenzierbar, und es sei $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Dann besitzt f eine Umkehrfunktion $g = f^{-1} : B(f) \rightarrow I$, diese ist differenzierbar, und

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für alle $y \in B(f)$.

Beispiel 5 Sei $f(x) = x^2$ auf $I = (0, \infty)$. Dann ist $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x \in I$. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ist also differenzierbar auf $(0, \infty)$, und es ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{für } y > 0.$$

Man kann natürlich auch die Umkehrfunktion zu $f : x \mapsto x^2$ auf $[0, \infty)$ bilden. Diese ist aber in $y = 0$ *nicht* differenzierbar! (Warum?) ■

8.3 Ableitungen spezieller Funktionen

8.3.1 Polynome und rationale Funktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zur Berechnung der Ableitung der Funktion $f : x \mapsto x^n$ auf \mathbb{R} benutzen wir die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültige Identität

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

die man leicht nachrechnet. Mit dieser Identität folgt sofort

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1}.$$

Also ist die Funktion $f : x \mapsto x^n$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar, und

$$f'(x) = n x^{n-1}. \quad (8.2)$$

Für $n = 0$ rechnet man unmittelbar nach, dass die durch $f(x) = x^0 = 1$ erklärte Funktion auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist und dass $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei schließlich $n < 0$ und $f(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann findet man wie in Beispiel 3 mit der Quotientenregel, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und dass wieder $f'(x) = n x^{n-1}$ für alle $x \neq 0$. Die Beziehung (8.2) gilt also für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $x \neq 0$.

Mit (8.2) und Satz 8.3 können wir die Ableitungen beliebiger Polynome und beliebiger rationaler Funktionen (= Quotienten zweier Polynome) bestimmen.

8.3.2 Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen

Wir untersuchen zunächst die Differenzierbarkeit der durch $f(x) = e^x$ auf \mathbb{R} erklärten Exponentialfunktion. Wegen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \quad (8.3)$$

haben wir den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ zu bestimmen. Nach Definition der Exponentialfunktion ist für $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

Hieraus folgt für $x \neq 0$

$$\frac{e^x - 1}{x} - 1 = x \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots \right).$$

Für $0 < |x| < 1$ ist somit

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) = |x|(e - 2) \leq |x|.$$

Das zeigt unmittelbar, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (8.4)$$

Zusammen mit (8.3) erhalten wir, dass die Funktion $f = \exp$ auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist und dass

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (8.5)$$

Die Exponentialfunktion stimmt also mit ihrer Ableitung überein.

Die Umkehrfunktion zu $f : x \mapsto e^x$ ist die auf $(0, \infty)$ erklärte Funktion g mit $g(y) = \ln y$. Nach Satz 8.5 ist g in jedem Punkt $x \in (0, \infty)$ differenzierbar, und es ist

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \quad (8.6)$$

Mit (8.5), (8.6) und der Kettenregel können wir weitere Funktionen differenzieren.

Sei $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $a^x = e^{x \ln a}$ und erhalten mit der Kettenregel (wobei wir $g : x \mapsto x \ln a$ als innere und $h : x \mapsto e^x$ als äußere Funktion haben)

$$f'(x) = (a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a. \quad (8.7)$$

Sei nun $f(x) = \log_a x$ mit $a > 1$ und $x > 0$. Dann ist f die Umkehrfunktion zu $g : x \mapsto a^x$, und mit (8.7) und Satz 8.5 folgt

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{g'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \quad (8.8)$$

Weiter sei $f(x) = x^a$ mit $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $x^a = e^{a \ln x}$ und erhalten mit der Kettenregel (mit $g : x \mapsto a \ln x$ bzw. $h : x \mapsto e^x$ als innerer bzw. äußerer Funktion)

$$f'(x) = (x^a)' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}. \quad (8.9)$$

Abschließend betrachten wir noch die Funktion $f(x) = x^x$ für $x > 0$. Hier schreiben wir $f(x) = e^{x \ln x}$ und finden

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (1 + \ln x).$$

8.3.3 Trigonometrische Funktionen

Wir werden später sehen, dass man eine ähnliche Begründung wie für den Grenzwert (8.4) auch für den folgenden Grenzwert geben kann:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (8.10)$$

Anschaulich ist dieser Grenzwert zu erwarten, da für x nahe bei 0 gilt $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ und daher $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ für $x \neq 0$. Aus (8.10) und den in

Abschnitt 7.2.3 vermerkten Identitäten

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos \frac{x + x_0}{2} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin \frac{x + x_0}{2} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}$$

bekommt man die Differenzierbarkeit der Funktionen \sin und \cos auf \mathbb{R} sowie die Identitäten

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \quad (8.11)$$

Mit Quotientenregel findet man dann die Ableitung von \tan auf $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + k\pi)$:

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}, \end{aligned}$$

also

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad \text{und analog} \quad (\cot x)' = \frac{-1}{(\sin x)^2}. \quad (8.12)$$

Schließlich findet man mit Satz 8.5 und (8.11), (8.12) die Ableitungen der Arkusfunktionen. Für $f = \sin$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion $f^{-1} = \arcsin : (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ differenzierbar, und

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2}},$$

also

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad (8.13)$$

Ähnlich erhält man

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für } x \in (-1, 1) \quad (8.14)$$

und

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1 + x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (8.15)$$

8.4 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

8.4.1 Lokale Extrema

Definition 8.6 Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer. Die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in X$ ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X$$

(bzw. $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X$).

Satz 8.7 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a, b)$. Hat f in x_0 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Wir überlegen uns diese Aussage für den Fall eines lokalen Maximums. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ und dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Dann ist für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$

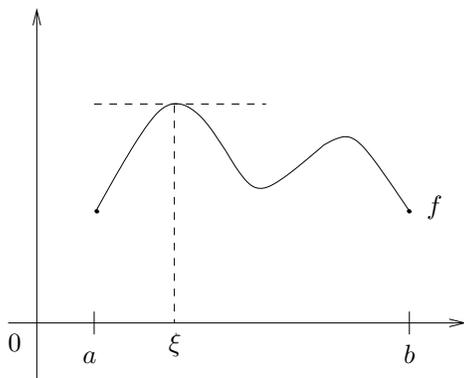
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{und folglich} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

während für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{und folglich} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also ist $f'(x_0) = 0$. ■

Satz 8.8 (Rolle) Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , und sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



Beweisidee Die Funktion f ist stetig auf $[a, b]$ und nimmt nach Satz 7.11 ihr Supremum und ihr Infimum an. Man überlegt sich, dass wenigstens eine dieser Größen im Inneren von $[a, b]$ angenommen wird. In diesem Punkt ist die Ableitung von f nach Satz 8.7 gleich 0. ■

8.4.2 Der Mittelwertsatz

Satz 8.9 (Mittelwertsatz) Die Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es (wenigstens) ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

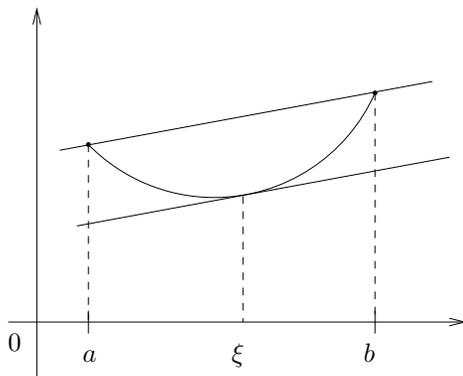
Für Beweisinteressierte: Für $x \in [a, b]$ sei

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Die Funktion h ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) , und es ist $h(a) = h(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad \blacksquare$$

Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist der Anstieg der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, und $f'(\xi)$ ist der Anstieg einer dazu parallelen Tangente.



Folgerung 8.10 Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) .

- Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.
- Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf $[a, b]$.
- f ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf $[a, b]$, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.

Beweis Wir überlegen uns nur die Aussage (a). Die übrigen Aussagen kann man ähnlich zeigen.

Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Nach Voraussetzung ist $f'(\xi) = 0$. Also ist $f(x_2) = f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in [a, b]$. ■

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ zeigt, dass die Ableitung einer streng monoton wachsenden Funktion durchaus in einigen Punkten gleich Null sein kann.

Mit Folgerung 8.10 ist klar, dass Funktionen wie $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsen.

8.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen

Im vergangenen Abschnitt haben wir mit Hilfe der Ableitungen das Monotonieverhalten einer Funktion charakterisiert. Nun schauen wir uns das Krümmungsverhalten an.

Definition 8.11 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

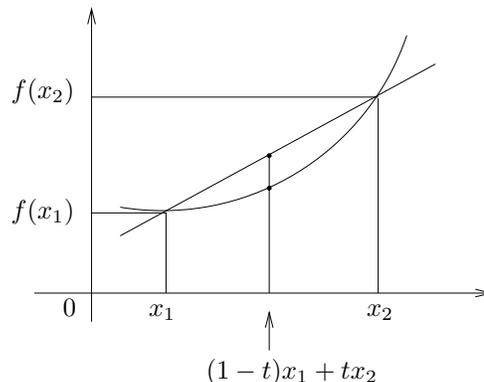
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \quad (8.16)$$

Steht in (8.16) das Relationszeichen \geq , so heißt f konkav auf $[a, b]$.

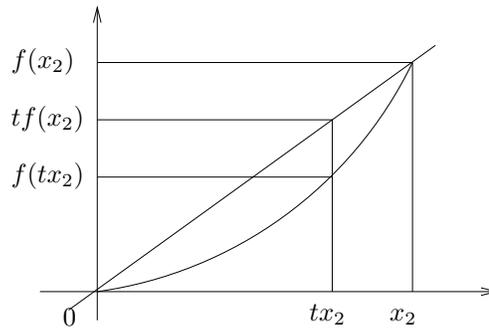
Man beachte, dass für beliebige Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$\{(1-t)x_1 + tx_2 : t \in [0, 1]\} = [x_1, x_2].$$

Geometrische Deutung: Der Graph einer konvexen (konkaven) Funktion liegt unterhalb (oberhalb) der Verbindungsstrecke zweier beliebiger seiner Punkte.



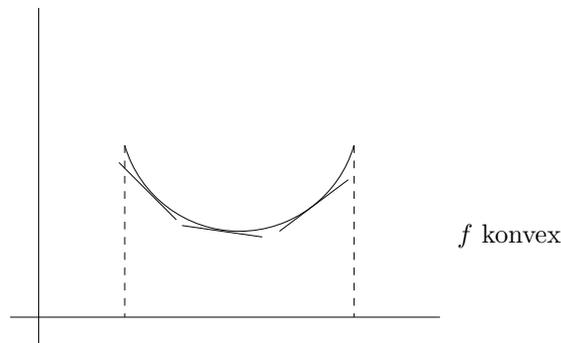
Diese Deutung sieht man am einfachsten ein, wenn man den Graphen von f so verschiebt, dass $x_1 = f(x_1) = 0$:



Spezialfall $x_1 = f(x_1) = 0$

Die Konvexität differenzierbarer Funktionen lässt sich wie folgt charakterisieren.

Satz 8.12 Sei f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann ist f genau dann konvex (konkav) auf $[a, b]$, wenn die Ableitung f' auf (a, b) monoton wachsend (fallend) ist.



Nun wissen wir aus Folgerung 8.10, dass man die Monotonie einer differenzierbaren Funktion f mit Hilfe ihrer Ableitung f' beschreiben kann. In Satz 8.12 benötigen wir die Monotonie der Ableitung. Diese könnten wir mit Mitteln der Differentialrechnung untersuchen, wenn wir wüssten, dass f' differenzierbar ist. Differenzierbare Funktionen auf (a, b) , deren Ableitung f' auf (a, b) differenzierbar ist, heißen *zweimal differenzierbar*, und $(f')'$ heißt *zweite Ableitung* von f . Statt $(f')'$ schreibt man f'' . Ganz analog erklärt man k -mal differenzierbare Funktionen und k -te Ableitungen. Für die k -te Ableitung von f im Punkt $x_0 \in (a, b)$ schreibt man

$$f^{(k)}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d^k f}{dx^k}(x_0).$$

Mitunter ist es zweckmäßig, die Funktion f selbst als 0-te Ableitung von f zu betrachten. Man schreibt dann $f = f^{(0)}$.

Aus Satz 8.12 und Folgerung 8.10 erhalten wir:

Satz 8.13 Sei f auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex (konkav) auf $[a, b]$, wenn $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.

Beispiele Für die Exponentialfunktion ist $(e^x)'' = (e^x)' = e^x$. Also ist \exp auf ganz \mathbb{R} konvex. Für die Sinusfunktion ist $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$. Also ist \sin z.B. auf $[0, \pi]$ konkav und auf $[\pi, 2\pi]$ konvex. ■

8.4.4 Der Satz von Taylor

Wir schreiben den Mittelwertsatz

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

in der Form

$$\exists \xi \in (x_0, x) : f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (8.17)$$

und interpretieren ihn neu: *Der Term $f'(\xi)(x - x_0)$ beschreibt den Fehler, den man begeht, wenn man die Funktion f durch die konstante Funktion $f(x_0)$ ersetzt.* Man kann nun daran denken, die Funktion f genauer zu approximieren, indem man nicht nur (wie in (8.17)) konstante Funktionen, sondern Polynome zur Approximation zulässt. Es ist nahe liegend, diese Polynome P so zu wählen, dass nicht nur die Funktionswerte $f(x_0)$ und $P(x_0)$ übereinstimmen (wie in (8.17)), sondern auch die Werte der Ableitungen $f'(x_0) = P'(x_0)$, $f''(x_0) = P''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}(x_0)$, wobei n der Grad des Polynoms P ist. Wir überlegen uns zunächst, wie ein solches Polynom aussieht und machen dazu den Ansatz

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Offenbar ist $P(x_0) = a_0$. Weiter ist

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

und daher $P'(x_0) = a_1$. Aus

$$P''(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

folgt $a_2 = \frac{1}{2}P''(x_0)$. Allgemein findet man

$$a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0),$$

was mit den Vereinbarungen $0! = 1$ und $P^{(0)} = P$ auch für $k = 0$ richtig ist. Wir erhalten damit

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Ist also f eine in x_0 n -mal differenzierbare Funktion, so wird durch

$$T_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \quad (8.18)$$

ein Polynom vom Grad $\leq n$ definiert, welches im Punkt x_0 in allen Ableitungen bis zur n -ten mit der Funktion f übereinstimmt. Dieses Polynom heißt das *Taylorpolynom der Ordnung n von f im Punkt x_0* . Der Fehler, der beim Ersetzen einer Funktion durch ihr Taylorpolynom gemacht wird, wird in folgendem Satz beschrieben. Dazu vereinbaren wir, eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *n -mal stetig differenzierbar* zu nennen, wenn sie auf $[a, b]$ n -mal differenzierbar und ihre n -te Ableitung stetig ist.

Satz 8.14 (Taylor) *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar, und auf (a, b) existiere die $n+1$ -te Ableitung. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ so, dass*

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k}_{= T_n(b, a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}}_{=: R_n(b, a)}. \quad (8.19)$$

Dabei ist $T_n(b, a)$ das Taylorpolynom der Ordnung n von f in a , und $R_n(b, a)$ heißt das Restglied nach Lagrange.

Beweisidee Man definiert eine Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - m \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei m so gewählt wird, dass $h(a) = 0$. Die Funktion h ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) , und es ist $h(a) = h(b) = 0$. Ihre Ableitung im Punkt $x \in (a, b)$ ist

$$h'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + m \frac{(b-x)^n}{n!}. \quad (8.20)$$

(Nachrechnen!) Nach Rolle gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Aus (8.20) erhält man damit für m

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (b-\xi)^n + m \frac{(b-\xi)^n}{n!} = 0 \quad \text{bzw.} \quad m = f^{(n+1)}(\xi).$$

Man setzt diesen Wert für m in die Definition von h ein, wählt $x = a$ und erhält (8.19). ■

Beispiel 6 Die Sinusfunktion ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar. Wir können also für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ Taylorpolynome beliebig hoher Ordnung bilden. Mit $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) =$

$\sin x$ erhalten wir für $a = x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ 1/k! & \text{für } k = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -1/k! & \text{für } k = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Die ersten Taylorpolynome von f im Punkt 0 sind also

$$\begin{aligned} T_0(x, 0) &= 0, \\ T_1(x, 0) &= x, \\ T_2(x, 0) &= T_1(x, 0), \\ T_3(x, 0) &= x - \frac{x^3}{3!}, \\ T_4(x, 0) &= T_3(x, 0), \end{aligned}$$

und der Satz von Taylor ergibt für $n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x, 0).$$

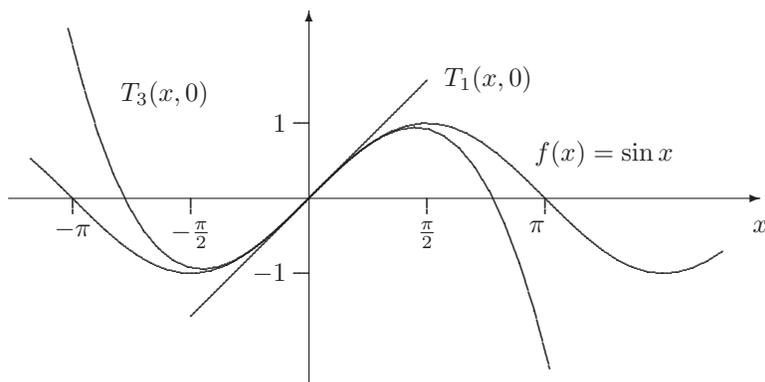
Das Restglied ist von der Gestalt

$$\frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} x^{2m} \quad \text{mit einem } \xi \in (0, x),$$

und wegen $|f^{(2m)}(\xi)| \leq 1$ können wir das Restglied abschätzen:

$$|R_{2m-1}(x, 0)| \leq \frac{|x|^{2m}}{(2m)!}.$$

Damit haben wir die Möglichkeit, $\sin x$ mit einer vorgegebenen Genauigkeit näherungsweise zu berechnen.



■

Beispiel 7 Sei $f(x) = \ln(x+1)$, $x_0 = a = 0$ sowie $x = b \in (-1, \infty)$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ und $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ für $k \geq 2$ und daher

$$f(0) = 0, \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Einsetzen in die Taylorsche Formel liefert

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

mit einem $\xi \in (0, x)$. Für $x = 1$ ist $\xi \in (0, 1)$ und folglich

$$|R_n(1, 0)| = \left| (-1)^n \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Wegen $R_n(1, 0) \rightarrow 0$ ist klar: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergiert gegen $\ln 2$. ■

Beispiel 8 Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(k)}(0) = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und somit

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit einem $\xi \in (0, x)$. Das n -te Taylorpolynom ist also gerade die n -te Partialsumme der Reihe, mit der wir \exp definiert haben. Wir kommen auf diesen Zusammenhang später zurück. ■

8.5 Anwendungen auf die Untersuchung von Funktionsgraphen

Wir sehen uns nun genauer an, wie sich für genügend oft differenzierbare Funktionen ihr Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie lokale Extrema mit Hilfe der Differentialrechnung effektiv untersuchen lassen. Wir wissen bereits:

- f hat in x_0 ein lokales Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (Satz 8.7)
- f monoton wachsend (fallend) $\Leftrightarrow f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) (Folgerung 8.10)
- f konvex (konkav) $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$). (Satz 8.13)

Für lokale Extrema haben wir bisher nur eine notwendige Bedingung angegeben. Wir ergänzen diese durch hinreichende Bedingungen. Anschaulich klar ist die folgende Bedingung.

Satz 8.15 Sei f differenzierbar auf (a, b) , $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, und f' wechsele in x_0 das Vorzeichen. Dann besitzt f ein lokales Maximum in x_0 , wenn das Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt für größer werdendes x , und ein lokales Minimum bei Wechsel von $-$ nach $+$.

Satz 8.16 Sei $n \geq 2$, f auf (a, b) n -mal stetig differenzierbar, und $x_0 \in (a, b)$. Weiter sei $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ist n gerade, so besitzt f in x_0 einen lokalen Extremwert, und zwar ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ und ein lokales Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$. Ist n ungerade, so liegt in x_0 kein Extremwert vor.

Wir wollen uns dies für $n = 2$ klarmachen, d.h. wir zeigen unter den Voraussetzungen des Satzes

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ hat lokales Minimum in } x_0, \\ f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 &\quad \Rightarrow \quad f \text{ hat lokales Maximum in } x_0. \end{aligned}$$

Sei $x \in (a, b)$. Der Satz von Taylor liefert uns die Existenz eines $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2.$$

Sei beispielsweise $f''(x_0) > 0$. Wegen der Stetigkeit von f'' gibt es dann eine Umgebung $U \subseteq (a, b)$ von x_0 , auf der f'' positiv ist. Für $x \in U$ ist auch $\xi \in U$, und wir erhalten

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 > 0 \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Also besitzt f in x_0 ein (sogar echtes) lokales Minimum. Den Fall $f''(x_0) < 0$ behandelt man analog. ■

Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt *Wendepunkt* von $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es eine Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ von x_0 gibt, so dass f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex (bzw. konkav) und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav (bzw. konvex) ist.

Satz 8.17 a) Sei f in (a, b) zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt von f . Dann ist $f''(x_0) = 0$.

b) Sei $n \geq 3$, f auf (a, b) n -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$. Weiter sei $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 ein Wendepunkt für f , falls n ungerade ist, und kein Wendepunkt, falls n gerade ist.

Die Begründung folgt wieder mit dem Satz von Taylor.

Beispiel 9 Wir betrachten die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Für diese ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$ für alle $x \in (-1, 1)$. Nach Satz 8.16 hat f in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, und nach Satz 8.17 hat f keine Wendepunkte. Man beachte, dass wir in $(-1, 1)$ keine lokalen Maxima gefunden haben. Da die Funktion f aber stetig ist, muss sie auf $[-1, 1]$ globale Maxima und Minima besitzen. Wie wir gesehen haben, kann das globale Maximum nur in den Endpunkten ± 1 des Intervalles angenommen werden. Wegen $f(1) = f(-1) = 1$ ist klar: Die Funktion f nimmt in ± 1 ihr globales Maximum an und in 0 ihr globales Minimum. ■

8.6 Anwendung auf die Bestimmung von Grenzwerten

Die folgende *Regel von de l'Hospital* hilft bei der Bestimmung von Grenzwerten von Brüchen der Gestalt "0/0".

Satz 8.18 Die Funktionen f und g seien auf (a, b) n -mal stetig differenzierbar, in $x_0 \in (a, b)$ gelte $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ sowie $g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, und dieser Grenzwert ist gleich $\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$.

Beweis Der Satz von Taylor liefert

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 + 0 + \dots + 0 + (x - x_0)^n f^{(n)}(\xi_x)/n!}{0 + 0 + \dots + 0 + (x - x_0)^n g^{(n)}(\eta_x)/n!} = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{g^{(n)}(\eta_x)}$$

mit gewissen Zahlen $\xi_x, \eta_x \in (x_0, x)$. (Man beachte, dass wegen $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ und wegen der Stetigkeit von $g^{(n)}$ auch $g^{(n)}(\eta_x) \neq 0$ für alle η_x aus einer geeigneten Umgebung von x_0 und dass dann auch $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$, die nahe genug an x_0 liegen.) Für $x \rightarrow x_0$ konvergieren ξ_x und η_x gegen x_0 . Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ sowie aus $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{g^{(n)}(\eta_x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 10 Für $a > 0$ und $\alpha, \beta > 0$ ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \frac{\alpha a^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 11 Die Regel von l'Hospital gilt auch, wenn unbestimmte Ausdrücke der Gestalt " ∞/∞ " vorliegen (vgl. Barner/Flohr, S. 276 – 277). So ist z.B.

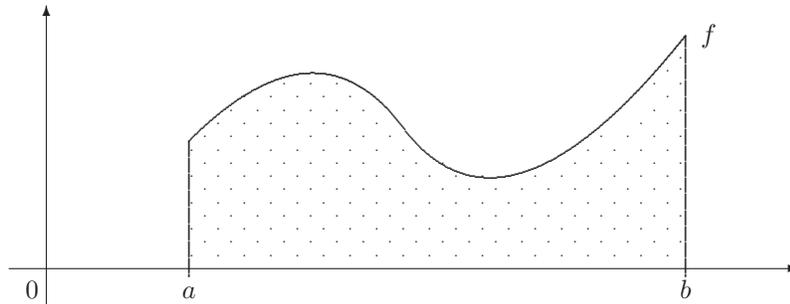
$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} -x = 0.$$

In diesem Beispiel haben wir einen unbestimmten Ausdruck " $0 \cdot \infty$ " in die Form " ∞/∞ " gebracht und darauf l'Hospital angewandt. Ähnlich lassen sich zahlreiche weitere Grenzwerte, die auf unbestimmte Ausdrücke wie " $\infty - \infty$ " oder " 1^∞ " führen, berechnen. ■

9 Integralrechnung

Es sind wenigstens zwei Probleme, die zur Herausbildung der Integralrechnung geführt haben.

Flächenberechnungen Gegeben ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$. Gesucht ist der Inhalt der von den Geraden $x = a, x = b, y = 0$ und vom Graphen der Funktion f berandeten Fläche. Genau genommen müssen wir dazu vorab die Frage klären, was wir unter dem Inhalt einer kompliziert geformten Fläche verstehen wollen. Es geht uns also nicht nur um eine Berechnungsvorschrift für Flächeninhalte, sondern auch um deren Definition.



Umkehrung des Differenzierens Kann man aus der Ableitung einer Funktion die Funktion selbst rekonstruieren? Gibt es für jede Funktion f eine Funktion F mit $F' = f$? Wenn ja, wie viele solcher Funktionen gibt es?

Zur Beantwortung dieser und anderer Fragen wurden verschiedene Integralbegriffe entwickelt, von denen wir einen der einfachsten - das Riemann-Integral - nun kennen lernen wollen.

9.1 Der Begriff des Riemann-Integrals

Eine nahe liegende Idee zur Berechnung des Inhalts eines komplizierten Gebietes (etwa des oben skizzierten) ist es, das Gebiet durch andere Gebiete „anzunähern“, deren Flächenberechnung einfacher ist, etwa durch Gebiete, die aus endlich vielen Rechtecken zusammengesetzt sind. Wir hoffen, dass wir dem wahren Flächeninhalt näherkommen, wenn wir die Approximation „verfeinern“, indem wir z.B. die Rechtecke schmaler machen. Diese vagen Vorstellungen wollen wir nun präzisieren.

Sei $[a, b]$ ein Intervall, und $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sei eine Menge von Punkten aus $[a, b]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Dann heißt Z eine *Zerlegung* von $[a, b]$. Für jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow$

\mathbb{R} und jede Zerlegung Z definieren wir für $j = 1, \dots, n$

$$m_j := \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$M_j := \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

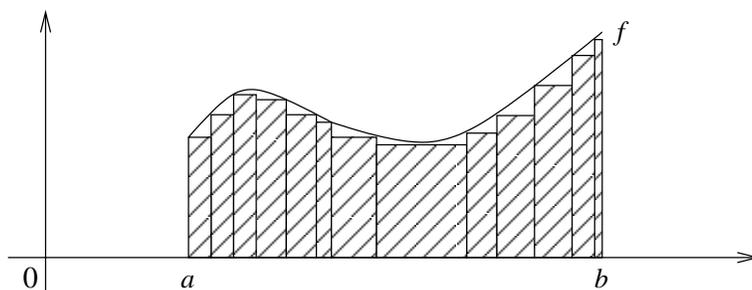
Dann heißen

$$U(Z, f) := \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1})$$

und

$$O(Z, f) := \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1})$$

die zur Zerlegung Z und zur Funktion f gehörende *Untersumme* und *Obersumme*.



In der Skizze ist die Untersumme gleich dem Flächeninhalt des schraffierten Bereichs.

Eine Zerlegung $Z' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$ heißt eine *Verfeinerung* der Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, wenn

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}.$$

Lemma 9.1 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

a) Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ und jede Verfeinerung Z' von Z gilt

$$U(Z, f) \leq U(Z', f), \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$

b) Für je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ gilt

$$U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f).$$

Beweis (a) Wir überlegen uns nur die erste der Behauptungen, und diese nur für den Fall, dass Z' genau einen Punkt x^* mehr enthält als Z . Sei also $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ und $x_{j-1} < x^* < x_j$. Für

$$\begin{aligned} m'_j &:= \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x^*]\}, \\ m''_j &:= \inf\{f(x) : x \in [x^*, x_j]\} \end{aligned}$$

ist $m_j \leq m'_j$ und $m_j \leq m''_j$, und wir schätzen ab:

$$m_j(x_j - x_{j-1}) = m_j(x_j - x^*) + m_j(x^* - x_{j-1}) \leq m''_j(x_j - x^*) + m'_j(x^* - x_{j-1}).$$

Da beim Übergang von $U(Z, f)$ zu $U(Z', f)$ lediglich der Summand $m_j(x_j - x_{j-1})$ durch $m''_j(x_j - x^*) + m'_j(x^* - x_{j-1})$ ersetzt wird, folgt die Behauptung.

(b) Sei Z' eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2 (z.B. $Z' = Z_1 \cup Z_2$). Nach Teil (a) ist $U(Z_1, f) \leq U(Z', f)$ und $O(Z', f) \leq O(Z_2, f)$, und die Ungleichung $U(Z', f) \leq O(Z', f)$ gilt offenbar. ■

Nach Lemma 9.1(b) ist die Menge aller Untersummen einer beschränkten Funktion nach oben (durch jede Obersumme) beschränkt, und die Menge aller Obersummen ist nach unten (durch jede Untersumme) beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existieren

$$U(f, a, b) := \sup_Z U(f, Z), \quad O(f, a, b) := \inf_Z O(f, Z),$$

wobei Infimum und Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ genommen werden.

Definition 9.2 Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Gilt

$$U(f, a, b) = O(f, a, b) =: r,$$

so heißt f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$. Der gemeinsame Wert r heißt dann das Riemann-Integral von f auf $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet. Es heißen a untere und b obere Grenze des Integrals, $[a, b]$ das Integrationsintervall, f der Integrand und x die Integrationsvariable.

Natürlich kann man die Integrationsvariable auch anders nennen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \dots$$

Ein einfaches Kriterium zum Überprüfen der Riemann-Integrierbarkeit ist das folgende.

Satz 9.3 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ so gibt, dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon.$$

Beweis (\Leftarrow) Für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ ist

$$U(Z, f) \leq U(f, a, b) \leq O(f, a, b) \leq O(Z, f). \quad (9.1)$$

Wir wählen eine Zerlegung Z_n so, dass $O(Z_n, f) - U(Z_n, f) < 1/n$. Wegen (9.1) ist dann $0 \leq O(f, a, b) - U(f, a, b) < 1/n$, und da dies für jedes n gilt, muss $O(f, a, b) = U(f, a, b)$ sein.

(\Rightarrow) Sei f Riemann-integrierbar und $J := \int_a^b f(x)dx$, und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da J das Infimum von Obersummen und das Supremum von Untersummen ist, gibt es Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a, b]$ mit

$$J - U(Z_1, f) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z_2, f) - J < \varepsilon/2.$$

Sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2 . Nach Lemma 9.1(a) ist dann $U(Z_1, f) \leq U(Z, f)$ sowie $O(Z, f) \leq O(Z_2, f)$ und daher

$$J - U(Z, f) < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad O(Z, f) - J < \varepsilon/2.$$

Addition dieser Ungleichungen liefert $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$. ■

Beispiel 1 Sei $0 \leq a < b$. Auf dem Intervall $[a, b]$ betrachten wir die Funktion $f : x \mapsto x^2$. Wir wählen eine gleichmäßige Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit

$$x_j = a + \frac{b-a}{n}j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n.$$

Mit $h := \frac{b-a}{n}$ ist dann $x_j - x_{j-1} = h$. Da f auf $[a, b]$ monoton wächst, ist

$$m_j = f(x_{j-1}) = x_{j-1}^2 \quad \text{und} \quad M_j = f(x_j) = x_j^2,$$

und wir erhalten

$$U(Z, f) = h \sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 \quad \text{und} \quad O(Z, f) = h \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Also ist

$$O(Z, f) - U(Z, f) = h(x_n^2 - x_0^2) = h(b^2 - a^2) = \frac{(b-a)(b^2 - a^2)}{n}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir n größer als $\frac{(b-a)(b^2 - a^2)}{\varepsilon}$. Für die zugehörige Zerlegung ist dann $O(Z, f) - U(Z, f) < \varepsilon$, d.h. f ist Riemann-integrierbar nach Satz 9.3. ■

Beispiel 2 Für die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

definierte *Dirichlet-Funktion* auf $[a, b]$ ist jede Obersumme gleich $b - a$ und jede Untersumme gleich 0. Also ist f nicht Riemann-integrierbar. ■

Wir haben das Riemann-Integral über Ober- und Untersummen eingeführt und wollen uns noch eine weitere Möglichkeit der Definition des Riemann-Integrals ansehen.

Sei wieder $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Für jedes $j = 1, 2, \dots, n$ sei ξ_j ein Punkt aus $[x_{j-1}, x_j]$. Dann heißt $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ein *Zwischenvektor* zu Z und

$$R(Z, \xi, f) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die zugehörige *Riemannsumme*. (Vgl. Skizze auf S. 238 des Arbeitsbuches)

Die Zahl

$$|Z| := \max_j (x_j - x_{j-1})$$

heißt auch die *Maschenweite* der Zerlegung Z . Man betrachtet nun Folgen $(R(Z_n, \xi^{(n)}, f))_{n \geq 1}$ von Riemannsummen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = 0$. Wenn *jede* dieser Folgen konvergiert, so haben diese Folgen einen gemeinsamen Grenzwert, und dieser Grenzwert stimmt mit dem Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

überein.

9.2 Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen

Satz 9.4 *Monotone Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.*

Beweis Das zeigt man wie im Beispiel 1. Ist beispielsweise f monoton wachsend und Z_n die Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle gleicher Länge, so ist

$$U(Z_n, f) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$$

sowie

$$O(Z_n, f) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

Also ist

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{j=1}^n f(x_j) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \right) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)),$$

und dies wird kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$, wenn n groß genug ist. ■

Satz 9.5 *Stetige Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.*

Beweisidee Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Man überlegt sich zuerst, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon/(b-a)$ für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$. (Dies ist *mehr* als die übliche Stetigkeit, da δ nicht von t_1, t_2 abhängt. Man sagt auch, dass stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen *gleichmäßig stetig* sind.)

Sei Z_n wieder eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle gleicher Länge mit $\frac{b-a}{n} < \delta$. Dann ist zunächst

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (M_j - m_j).$$

Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ihr Supremum und Infimum annehmen, gibt es für jedes j Punkte $\xi'_j, \xi''_j \in [x_{j-1}, x_j]$ so, dass $f(\xi'_j) = M_j$ und $f(\xi''_j) = m_j$. Aus $x_{j-1} \leq \xi'_j, \xi''_j \leq x_j$ folgt weiter $|\xi'_j - \xi''_j| < \delta$ und daher $f(\xi'_j) - f(\xi''_j) < \varepsilon/(b-a)$. Wir erhalten schließlich

$$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(\xi'_j) - f(\xi''_j)) < \frac{b-a}{n} \frac{n\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Insbesondere sind die uns bekannten elementaren Funktionen auf allen abgeschlossenen Intervallen in ihrem Definitionsbereich Riemann-integrierbar. Darüber hinaus kann man zeigen:

- Jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar.
- Ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und ist $f(x) = g(x)$ für alle Punkte x aus $[a, b]$ mit Ausnahme höchstens endlich vieler, so ist auch $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Man kann also Riemann-integrierbare Funktionen an endlich vielen Punkten abändern, ohne den Wert des Integrals zu ändern.

9.3 Eigenschaften des Riemannintegrals

Satz 9.6 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

a) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist cf Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (cf)(x)dx = \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

b) Die Summe $f + g$ ist Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

c) Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.

Die Aussagen (a) und (b) kann man am einfachsten so einsehen: Ist Z eine Zerlegung und ξ ein entsprechender Zwischenvektor, so gilt

$$R(Z, \xi, cf + g) = cR(Z, \xi, f) + R(Z, \xi, g).$$

Der Beweis von (c) ist etwas schwieriger. ■

Satz 9.7 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

a) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

b) Die Funktion $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$, ist Riemann-integrierbar, und

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Die Aussage in (b) heißt auch die *Dreiecksungleichung* für Integrale. Beachten Sie die Analogie zu den bekannten Ungleichungen

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \quad \text{und} \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Zum Beweis Aussage (a) ist klar, denn für jede Riemannsumme gilt

$$R(Z, \xi, f) \leq R(Z, \xi, g).$$

Schwieriger ist der Beweis, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist, falls f diese Eigenschaft besitzt. Wenn man aber davon ausgeht, dass $|f|$ Riemann-integrierbar ist,

wird der Beweis von (b) einfach: Aus $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt nämlich mit Teil (a)

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

und das ist die Behauptung. ■

Zur Integration über Teilintervalle gibt folgender Satz Auskunft.

Satz 9.8 a) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $a \leq c < d \leq b$, so ist f auch auf $[c, d]$ Riemann-integrierbar.

b) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $a < c < b$. Ist f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ Riemann-integrierbar, so ist f auch auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bisher haben wir das Integral $\int_a^b f(x)dx$ für $a < b$ definiert. Mitunter sind die folgenden *Vereinbarungen* nützlich:

a)
$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

b) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$ (mit $a < b$), so sei

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Mit diesen Vereinbarungen gilt:

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist für beliebige Punkte $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx.$$

Wir sehen uns noch einige Aussagen an, die für das Abschätzen von Integralen nützlich sind.

Satz 9.9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ sowie $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dann ist (für $a < b$)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{9.2}$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis Die Aussage (9.2) folgt aus der Ungleichung $m \leq f \leq M$ und aus Satz 9.7(a). Mit (9.2) ist klar, dass es eine Zahl $\eta \in [m, M]$ so gibt, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b - a). \quad (9.3)$$

Ist nun f stetig, so folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$ gibt. Damit ist auch die zweite Behauptung bewiesen. ■

Die im Beweis eingeführte Zahl η mit der Eigenschaft (9.3) ist für $a < b$ eindeutig bestimmt und heißt *Mittelwert* von f über $[a, b]$. Beachten Sie die Analogie zum arithmetischen Mittel von Zahlen a_1, \dots, a_n :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Satz 9.9 heißt deshalb auch *Mittelwertsatz der Integralrechnung*. Wir vermerken noch eine nützliche Verallgemeinerung von Satz 9.9.

Satz 9.10 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g \geq 0$ auf $[a, b]$, und seien m, M wie in Satz 9.9. Dann gilt

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Für $g \equiv 1$ erhalten wir gerade die Aussage von Satz 9.9.

9.4 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Diese Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen den Begriffen „Ableitung“ und „Integral“ her, ermöglichen es, eine differenzierbare Funktion bis auf eine Konstante aus ihrer Ableitung zu rekonstruieren, und sie bieten eine bequeme Möglichkeit zur Berechnung vieler Riemann-Integrale.

Definition 9.11 Sind $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, und ist F differenzierbar auf $[a, b]$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so heißt F eine Stammfunktion von f .

Satz 9.12 a) Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $C \in \mathbb{R}$, so ist auch $F + C$ eine Stammfunktion von f .

b) Je zwei Stammfunktionen von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Beweis Aussage (a) ist klar. Für den Beweis von Aussage (b) seien F_1, F_2 Stammfunktionen einer Funktion f auf $[a, b]$, d.h. es ist $F_1' = F_2' = f$. Dann ist $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0$, und nach Folgerung 8.10 (a) aus dem Mittelwertsatz ist die Funktion $F_1 - F_2$ konstant. ■

Eine Stammfunktion F von f wird oft als *unbestimmtes Integral* von f bezeichnet (im Gegensatz zum „bestimmten“ Integral $\int_a^b f(x)dx$), und man schreibt $F = \int f(x)dx$. Dies ist nicht sehr konsequent. Mit F ist ja z.B. auch $F + 1$ Stammfunktion und demzufolge auch $F + 1 = \int f(x)dx$. Wir wollen $\int f(x)dx$ als Bezeichnung für die *Menge alle Stammfunktionen* betrachten. Anstelle der etwas schwerfälligen Schreibweise

$$\int f(x)dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$$

schreibt man meist (jedoch auch nicht sehr exakt) $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Aus den uns bekannten Ableitungen spezieller Funktionen erhalten wir die folgenden unbestimmten Integrale (die man zusammen mit einigen anderen oft als „Grundintegrale“ bezeichnet).

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{auf} \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } \alpha = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{falls } \alpha = -2, -3, -4, \dots \\ (0, \infty) & \text{falls } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \end{cases}$$

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad \text{auf} \quad \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad \text{auf} \quad (-1, 1).$$

Wir kommen nun zu zwei Sätzen, die die Differential- und Integralrechnung (bzw. unbestimmte und bestimmte Integrale) miteinander verknüpfen.

Satz 9.13 *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion auf $[a, b]$. Eine solche Stammfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b]. \quad (9.4)$$

Beweis Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar. Also existiert das Integral in (9.4) für jedes $x \in [a, b]$, und die Funktion F ist wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass F auf $[a, b]$ differenzierbar ist und dass $F' = f$. Seien dazu $x, x+h \in [a, b]$ und $h \neq 0$. Dann ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Nach Satz 9.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) gibt es ein $\xi \in [x, x+h]$ so, dass

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi)(x+h-x) = hf(\xi).$$

Also ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \quad \text{mit einem } \xi \in [x, x+h]. \quad (9.5)$$

Halten wir x fest, so hängt ξ nur von h ab, und für $h \rightarrow 0$ strebt ξ gegen x . Da f stetig ist, konvergiert dann auch $f(\xi)$ gegen $f(x)$. Also existiert der Grenzwert von (9.5) für $h \rightarrow 0$, und es ist

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

Mit den Vereinbarungen aus dem vorigen Abschnitt ist

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

für jedes $c \in [a, b]$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 9.14 Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt für jede Stammfunktion F von f auf $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (9.6)$$

Beweis Ist F die durch (9.4) definierte Stammfunktion von f , so gilt (9.6) offenbar (man beachte, dass $F(a) = 0$ in diesem Fall). Ist nun $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von f , so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $G = F + C$ (Satz 9.12(b)). Dann ist aber

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

d.h. (9.6) gilt für jede Stammfunktion von f . ■

Die Sätze 9.13 und 9.14 sind als die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung bekannt.

Anmerkung 1 Satz 9.14 gilt auch in der folgenden allgemeineren Form:

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und besitzt f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion F , so gilt (9.6).

Allerdings gibt es Riemann-integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktion besitzen, wie die Funktion

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases}$$

zeigt. Diese ist Riemann-integrierbar, da sie auf $[-1, 1]$ mit Ausnahme des Punktes $x = 0$ stetig ist. Es gibt jedoch keine auf $[-1, 1]$ differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Für $x \in [-1, 0)$ müsste nämlich $F(x) = -x + c$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ sein, und für $x \in (0, 1]$ müsste $F(x) = x + d$ mit $d \in \mathbb{R}$ sein. Die Funktion F ist nur für $c = d$ stetig in $x = 0$. Dann stimmt $F(x)$ mit $|x| + c$ überein. Die Betragsfunktion ist aber in $x = 0$ nicht differenzierbar. ■

Anmerkung 2 Eine Funktion, die eine Stammfunktion besitzt, muss nicht Riemann-integrierbar sein. Beispielsweise ist die Funktion

$$F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar auf $[-1, 1]$, ihre Ableitung F' ist aber unbeschränkt und damit nicht Riemann-integrierbar. ■

Beispiele Sei $f(x) = x^2$ auf $[-1, 2]$. Dann ist $F(x) = \frac{x^3}{3}$ eine Stammfunktion von f (denn es ist $F'(x) = \frac{3}{3}x^2 = x^2 = f(x)$), und demnach ist

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = F(2) - F(-1) = \frac{8}{3} - \frac{(-1)}{3} = 3.$$

Ganz ähnlich findet man

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2,$$

wobei wir die Schreibweise $F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a)$ benutzt haben. ■

9.5 Einige Integrationstechniken

Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung reduzieren die Berechnung eines Riemann-Integrals über eine Funktion f auf die Bestimmung einer Stammfunktion von f . Wir lernen nun einige Aussagen kennen, die diese Aufgabe erleichtern. Allerdings bleibt die Bestimmung einer Stammfunktion (im Gegensatz zur „umgekehrten“ Aufgabe, der Bestimmung einer Ableitung) ein schwieriges

Problem. Im Gegensatz zu den Regeln der Differentiation, die uns die Differentiation beliebig komplizierter Funktionen ermöglichen, führen die Integrationsregeln, die wir uns nun ansehen werden, nicht immer zum Ziel. Mehr noch: bereits für so einfache Funktionen wie $x \mapsto 1/\ln x$ und $x \mapsto e^{-x^2}$, die nach Satz 9.13 eine Stammfunktion auf $(1, \infty)$ bzw. auf \mathbb{R} besitzen, ist es *nicht* möglich, diese Stammfunktion mit Hilfe endlicher Ausdrücke von „elementaren“ Funktionen (wie Potenz-, Exponential- und Winkelfunktionen sowie deren Umkehrfunktionen) zu beschreiben.

Wir gewinnen nun Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen durch „Umkehrung“ der uns bekannten Differentiationsregeln.

Linearität des Integrals

Sind F bzw. G Stammfunktionen von f bzw. g , so ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

Also besitzt auch $\alpha f + \beta g$ eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad (9.7)$$

Satz 9.15 *Besitzen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so besitzt auch $\alpha f + \beta g$ eine Stammfunktion auf $[a, b]$, und es gilt (9.7).*

Beispielsweise darf man Polynome gliedweise integrieren:

$$\int \sum_{j=0}^n a_j x^j dx = \sum_{j=0}^n a_j \int x^j dx = \sum_{j=0}^n a_j \frac{x^{j+1}}{j+1} + C.$$

Partielle Integration

Nach der Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ ist uv eine Stammfunktion von $u'v + uv'$. Besitzt nun eine der Funktionen $u'v$ und uv' eine Stammfunktion, dann auch die andere, und wir erhalten

$$uv = \int (u'v + uv') dx = \int u'v dx + \int uv' dx$$

bzw.

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx. \quad (9.8)$$

Satz 9.16 *Seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$, und uv' besitze eine Stammfunktion auf $[a, b]$ (das ist z.B. erfüllt, wenn v' stetig ist). Dann besitzt auch $u'v$ eine Stammfunktion auf $[a, b]$, und es gilt (9.8).*

Für Riemann-Integrale lautet (9.8), falls z.B. u', v' auf $[a, b]$ stetig sind:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Beispiel 1 Wir wollen $\int x \sin x dx$ bestimmen. Wählen wir $u'(x) = \sin x$ und $v(x) = x$, so erhalten wir mit (9.8) wegen $u(x) = -\cos x$

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + C. \end{aligned}$$

Hätten wir dagegen $u'(x) = x$ und $v(x) = \sin x$ gewählt, so hätten wir mit (9.8)

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

bekommen. Das Integral $\int x^2 \cos x dx$ ist aber komplizierter als das Ausgangsintegral. ■

Beispiel 2 Bei $\int \ln x dx$ hilft ein Trick: Wir wählen $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln x$ und erhalten

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3 Für $\int x^2 e^{3x} dx$ wenden wir partielle Integration zweimal an:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int (2x) \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx \\ &= \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) e^{3x} + C. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 4 Für $\int \cos^2 x dx$ hilft wieder ein einfacher Trick:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \cos x \cdot \cos x dx = \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) dx \\ &= \sin x \cos x + \int \sin x \sin x dx \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$$

bzw.

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C.$$

In diesem Beispiel hätte man einfacher benutzen können, dass $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2x))$ ist. Damit bekommt man sofort

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) + C. \quad \blacksquare$$

Integration durch Substitution

Sei F eine Stammfunktion von f , und g sei differenzierbar. Aus der Kettenregel wissen wir, dass

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Also ist $F \circ g : t \mapsto F(g(t))$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g' : t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t)$. Andererseits ist $(F \circ g)(t) = F(g(t))$ die Stammfunktion von f an der Stelle $g(t)$. Somit ist

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=g(t)} (= F(g(t))). \quad (9.9)$$

Satz 9.17 Die Funktion f besitze auf $[a, b]$ eine Stammfunktion, die Funktion g sei auf $[\alpha, \beta]$ differenzierbar, und es gelte $g([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Dann besitzt die Funktion $(f \circ g)g'$ auf $[\alpha, \beta]$ eine Stammfunktion, und es gilt (9.9).

Für Riemann-Integrale lautet (9.9) wie folgt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx.$$

Für das Bestehen dieser Identität hat man z.B. die Stetigkeit von f auf $[a, b]$ und von g' auf $[\alpha, \beta]$ zu fordern.

Beispiel 5 Mit $f(x) = x$ erhält man aus (9.9)

$$\int g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}(g(t))^2 + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 6 Für $f(x) = 1/x$ und $g(t) \neq 0$ erhält man aus (9.9)

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \ln |g(t)| + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 7 Ist F Stammfunktion von f , und sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so ist

$$\int f(at + b) dt = \frac{1}{a} \int f(at + b) \cdot a dt = \frac{1}{a} F(at + b) + C. \quad \blacksquare$$

Beispiel 8 Auf \mathbb{R} suchen wir $\int \cos t \sin^2 t dt$. Mit $f(x) = x^2$ und $g(t) = \sin t$ ist $g'(t) = \cos t$, und wir erhalten

$$\int \cos t \sin^2 t dt = \int x^2 dx \Big|_{x=\sin t} = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=\sin t} + C = \frac{\sin^3 t}{3} + C. \quad \blacksquare$$

Satz 9.17 führt ein Integral der Form $\int f(g(t)) g'(t) dt$ auf ein Integral der Form $\int f(x) dx$ zurück. Häufig möchte man den umgekehrten Weg gehen. Um $\int f(x) dx$ zu bestimmen, versucht man, die Integrationsvariable als $x = g(t)$ mit einer bijektiven differenzierbaren Funktion g zu schreiben und hofft, dass das unbestimmte Integral $\int f(g(t)) g'(t) dt$ berechnet werden kann.

Satz 9.18 Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig, und die Funktion g sei auf $[\alpha, \beta]$ definiert und besitze dort eine nirgends verschwindende stetige Ableitung, und es gelte $g([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Dann besitzt $(f \circ g)g'$ auf $[\alpha, \beta]$ eine Stammfunktion Φ , die Umkehrabbildung g^{-1} von g existiert, und $F := \Phi \circ g^{-1}$ ist eine Stammfunktion von f :

$$\left(F(x) + C = \Phi(t) \Big|_{t=g^{-1}(x)} + C = \right) \int f(g(t)) g'(t) dt \Big|_{t=g^{-1}(x)} = \int f(x) dx. \quad (9.10)$$

Für Riemann-Integrale lautet (9.10) folgendermaßen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt. \quad (9.11)$$

Formal kann man sich das Vorgehen in (9.11) so merken: In $\int_a^b f(x) dx$ substituiert man $x = g(t)$. Wegen $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ schreibt man formal $dx = g'(t) dt$ und setzt dies in das Integral ein. Dies ergibt (9.10). Für (9.11) muss man noch die Integrationsgrenzen substituieren: Läuft x von a bis b , so läuft $t = g^{-1}(x)$ von $g^{-1}(a)$ bis $g^{-1}(b)$.

Beweis von Satz 9.18 Die Stammfunktion Φ von $(f \circ g)g'$ existiert, da $(f \circ g)g'$ stetig ist (Hauptsatz). Da g' stetig und nie Null ist, ist g' nach dem Zwischenwertsatz entweder positiv auf ganz $[\alpha, \beta]$ oder negativ auf ganz $[\alpha, \beta]$. Also ist g entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf $[\alpha, \beta]$.

Hieraus folgt die Existenz der Umkehrfunktion h von $g : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$. Nach Satz 8.5 ist h auf $[a, b]$ differenzierbar, und

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Mit der Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von $F := \Phi \circ h$ und

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Phi'(h(x)) h'(x) = f(g(h(x))) g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f(x) g'(h(x)) / g'(h(x)) = f(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in [a, b]$. ■

Beispiel 9 Wir suchen $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ auf $(-a, a)$. Dazu substituieren wir $x := g(t) = a \sin t$ (man beachte, dass die Ableitung $g'(t) = a \cos t$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nicht verschwindet), und wir gelangen zu folgendem Integral

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C \quad (\text{nach Beispiel 4}). \end{aligned}$$

Für die Rücksubstitution $t = \arcsin \frac{x}{a}$ schreiben wir $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C. \end{aligned}$$
■

Beispiel 10 Wir suchen $\int \frac{1}{\sin x} dx$ auf $(0, \pi)$. Die Substitution $x = 2 \arctan t$ führt wegen $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ und

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \tan \frac{x}{2} \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

auf das Integral

$$\int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Rücksubstitution $t = \tan \frac{x}{2}$ liefert

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \quad \blacksquare$$

9.6 Stammfunktionen rationaler Funktionen

Für rationale Funktionen lassen sich Stammfunktionen stets auf konstruktivem Weg bestimmen. Dazu benötigen wir einige Resultate aus der Algebra.

Seien Q, R Polynome mit $Q \neq 0$. Zur Bestimmung einer Stammfunktion der rationalen Funktion $\frac{R}{Q}$ (die auf \mathbb{R} mit Ausnahme der Nullstellen von Q definiert ist) geht man wie folgt vor:

1. Schritt Ist der Grad von R größer oder gleich dem von Q , so liefert eine Polynomdivision von R durch Q Polynome P und S mit

$$\frac{R}{Q} = S + \frac{P}{Q},$$

wobei nun der Grad von P kleiner als der von Q ist. Für das Polynom S kann man stets eine Stammfunktion angeben. Wir betrachten von nun an nur noch P/Q .

2. Schritt Man zerlegt das Nennerpolynom Q multiplikativ in Polynome ersten und zweiten Grades mit reellen Koeffizienten. Dass dies möglich ist, folgt aus nachstehendem Satz

Satz 9.19 (Fundamentalsatz der Algebra) Für jedes Polynom $Q(x) = \sum_{i=0}^n q_i x^i$ mit $q_i \in \mathbb{R}$ und $q_n \neq 0$ gibt es reelle Zahlen b_i, c_j, d_j sowie natürliche Zahlen k_i, m_j, r und s so, dass

$$Q(x) = q_n \prod_{i=1}^r (x - b_i)^{k_i} \prod_{j=1}^s (x^2 + 2c_j x + d_j)^{m_j} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (9.12)$$

mit $k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = n$ und $d_j - c_j^2 > 0$ für alle j .

Zur Bestimmung der b_i, c_j, d_j kann man beispielsweise alle komplexen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von Q ermitteln. Dann ist $Q(x) = q_n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$. Die Terme $(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})$ mit $\lambda \notin \mathbb{R}$ werden zu

$$(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + |\lambda|^2$$

zusammengefasst. Die exakte Bestimmung der Nullstellen von Q ist oft unmöglich.

3. Schritt Ist die Zerlegung (9.12) gefunden, macht man den Ansatz

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^{m_j} \frac{B_{jm}x + C_{jm}}{(x^2 + 2c_j x + d_j)^m} \quad (9.13)$$

mit zu bestimmenden Zahlen A_{ik}, B_{jm} und C_{jm} . Hierdurch wird die rationale Funktion P/Q in einfachere rationale Funktionen zerlegt. Falls alle Nullstellen b_1, \dots, b_n von Q reell und einfach sind, reduziert sich der Ansatz (9.13) auf

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x - b_i}.$$

Satz 9.20 (Partialbruchzerlegung) Sei Q wie in (9.12), und sei P ein Polynom, dessen Grad kleiner als der von Q ist. Dann gibt es Zahlen A_{ik}, B_{jm} und C_{jm} so, dass (9.13) gilt, und diese Zahlen sind eindeutig bestimmt.

Die Zahlen A_{ik}, B_{jm}, C_{jm} können beispielsweise ermittelt werden, indem man (9.13) mit Q multipliziert und durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für die gesuchten Größen aufstellt. Auch das Einsetzen der Nullstellen von Q in die entstehenden Polynome kann hilfreich sein.

4. Schritt Zu allen in (9.13) vorkommenden Brüchen lassen sich durch partielle Integration und Substitution die Stammfunktionen effektiv bestimmen. Einige der folgenden Regeln müssen dazu wiederholt angewandt werden (man beachte, dass $d > c^2$):

$$\int \frac{dx}{(x-b)^k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k} (x-b)^{1-k} & \text{falls } k > 1 \\ \ln|x-b| & \text{falls } k = 1, \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2cx + d} = \frac{1}{\sqrt{d-c^2}} \arctan \frac{x+c}{\sqrt{d-c^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2cx + d)^m} = \frac{x+c}{2(m-1)(d-c^2)(x^2 + 2cx + d)^{m-1}} + \frac{(2m-3)}{2(m-1)(d-c^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + 2cx + d)^{m-1}} \quad \text{für } m \geq 2,$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 2cx + d} dx = \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + 2cx + d) + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{x^2 + 2cx + d},$$

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + 2cx + d)^m} dx = \frac{-\alpha}{2(m-1)(x^2 + 2cx + d)^{m-1}} + (\beta - \alpha c) \int \frac{dx}{(x^2 + 2cx + d)^{m-1}} \quad \text{für } m \geq 2.$$

Beispiel 11 Man bestimme $\int \frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1} dx$.

1. Schritt Polynomdivision

$$\frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{x^3 + x}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

2. Schritt Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$x^4 - x^3 - x + 1 = (x - 1)(x^3 - 1) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1).$$

3. Schritt Partialbruchzerlegung. Der Ansatz

$$\frac{x^3 + x}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

liefert nach Multiplikation mit $Q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$

$$x^3 + x = A_1(x - 1)(x^2 + x + 1) + A_2(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)^2 \quad (9.14)$$

bzw. nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^3 + x = (A_1 + B)x^3 + (A_2 - 2B + C)x^2 + (A_2 + B - 2C)x + (A_2 - A_1 + C).$$

Ein Vergleich der Koeffizienten auf der linken bzw. rechten Seite ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{bei } x^3: & \quad A_1 + B = 1 \\ \text{bei } x^2: & \quad A_2 - 2B + C = 0 \\ \text{bei } x^1: & \quad A_2 + B - 2C = 1 \\ \text{bei } x^0: & \quad A_2 - A_1 + C = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$A_1 = \frac{2}{3}, \quad A_2 = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0.$$

Die zu integrierende Funktion ist also

$$\frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

4. Schritt Unbestimmte Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} dx &= \int 1 dx + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{(x - 1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{3} \int \frac{x dx}{x^2 + x + 1} \\ &= x + \frac{2}{3} \ln|x - 1| - \frac{2}{3} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) \\ &\quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Alternativ hätte man z.B. in (9.14) $x = 1$ einsetzen können und so A_2 sofort gefunden. ■

9.7 Flächeninhalte

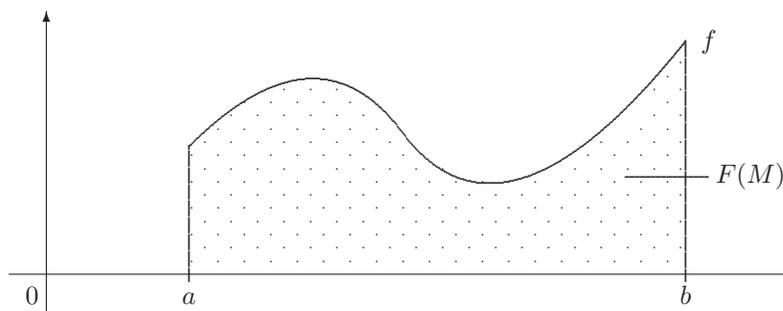
Eines der Motive zur Einführung des Riemann-Integrals war der Wunsch, Flächeninhalte zu definieren und zu berechnen.

Ist $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ Riemann-integrierbar, so definieren wir als Flächeninhalt der Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Zahl

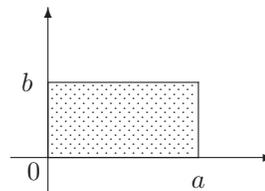
$$F(M) := \int_a^b f(x) dx.$$



Mit dieser Definition lassen sich auch die Inhalte komplizierter Mengen definieren und berechnen, wenn man akzeptiert, daß der Flächeninhalt die folgenden (aus unserer Erfahrung heraus plausiblen) Eigenschaften aufweist:

- (a) Geht M' aus M durch Verschiebung, Drehung oder Spiegelung an einer Geraden hervor, so ist $F(M') = F(M)$.
- (b) Kann man M in zwei disjunkte Teilmengen A, B zerlegen, von denen jede einen Flächeninhalt besitzt, so ist $F(M) = F(A) + F(B)$.

Beispiel 1 Für $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b$ findet man $F(M) = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a b dx = ab$. Der von uns definierte Flächeninhalt stimmt also für Rechtecke mit dem „bekannten“ Flächeninhalt überein.



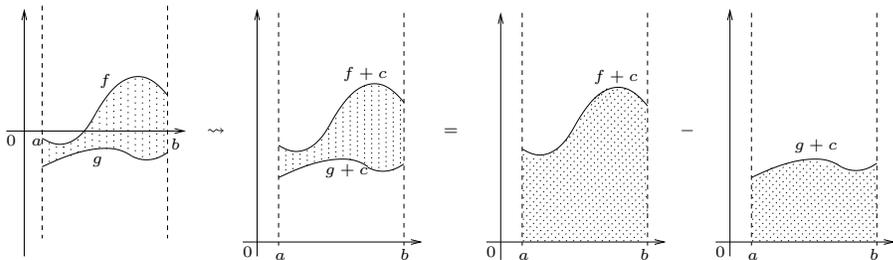
Beispiel 2 Die Dirichletfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

ist auf keinem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ Riemann-integrierbar. Unsere Definition erlaubt es daher nicht, der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ einen Flächeninhalt zuzuschreiben. ■

Beispiel 3 Die Funktionen f, g seien auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es sei $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Gesucht ist der Flächeninhalt der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) < y \leq f(x)\}.$$



Wir verschieben M um $c > 0$ in Richtung der positiven y -Achse, bis das Bild von M komplett oberhalb der x -Achse liegt. Mit den Eigenschaften (a), (b) folgt:

$$F(M) = \int_a^b (f(x) + c) dx - \int_a^b (g(x) + c) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Da wir dem Funktionsgraphen von g den Flächeninhalt 0 zuordnen können, können wir $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ auch als Flächeninhalt der Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

betrachten. Eine genauere Untersuchung des Begriffes Flächeninhalt erfolgt im Rahmen der Maßtheorie. ■

Beispiel 4 Oft ist der Graph einer Funktion f in Parameterdarstellung gegeben, etwa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

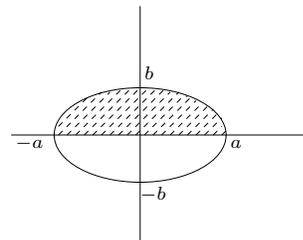
Unter entsprechenden Voraussetzungen an x und y (vgl. Satz 9.18, Substitutionsregel) gilt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \dot{x}(t) dt = \int_\alpha^\beta y(t) \dot{x}(t) dt,$$

wobei $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Beispielsweise wird durch

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$

eine Ellipse beschrieben. Für ihren Flächeninhalt findet man durch formale Rechnung



$$\begin{aligned}
F(M) &= 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{\pi}^0 y(t) \dot{x}(t) dt = 2ab \int_{\pi}^0 \sin t (-\sin t) dt \\
&= 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 2ab \left(-\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t \right) \Big|_0^{\pi} = \pi ab.
\end{aligned}$$

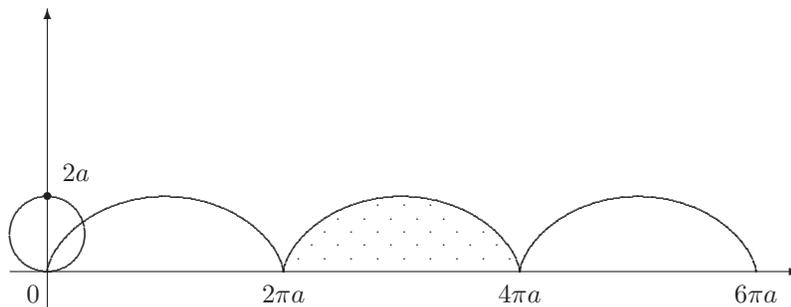
Streng genommen dürfen wir aber Satz 9.18 hier nicht anwenden, da ja $\dot{x}(t) = 0$ für $t = 0$ und $t = \pi$. Für eine korrekte Ableitung der Formel für den Flächeninhalt einer Ellipse kann man benutzen, dass

$$F(M) = 2 \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Beispiel 5 Durch

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

wird eine *Zykloide* definiert. Diese Kurve beschreibt den Weg eines Punktes auf der Kreisperipherie beim Abrollen des Kreises.



Für die Fläche unter einem Zykloidenbogen findet man (wieder durch formale Rechnung, die man wie in Beispiel 4 präzisieren kann)

$$\begin{aligned}
F(M) &= \int_0^{2\pi} y(t) \dot{x}(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{\cos t \sin t}{2} + \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 3a^2 \pi.
\end{aligned} \quad \blacksquare$$

9.8 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir das Integral $\int_a^b f(x) dx$ definiert unter der Voraussetzung, dass f eine beschränkte Funktion auf dem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist. Sind diese Voraussetzungen nicht alle erfüllt, so lassen sich in einigen Fällen

durch nahe liegende Grenzwertbildungen so genannte *uneigentliche* Riemann-Integrale definieren.

Wir beginnen mit dem Fall eines unendlichen Integrationsintervalles.

Definition 9.21 Die Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[a, t]$ mit $t > a$ Riemann-integrierbar. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (9.15)$$

so bezeichnen wir ihn mit $\int_a^\infty f(x) dx$ und nennen ihn uneigentliches Riemann-Integral von f auf $[a, \infty)$. Man sagt auch, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist oder dass $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergiert. Existiert der Grenzwert (9.15) nicht, so heißt $\int_a^\infty f(x) dx$ divergent. Schließlich heißt $\int_a^\infty f(x) dx$ absolut konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergiert.

Analoge Definitionen trifft man für

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx$$

sowie für

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^a f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Wie bei Reihen gelten die folgenden Aussagen.

Satz 9.22 Konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ absolut, so konvergiert es.

Satz 9.23 (Vergleichskriterium) Die Funktionen $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, t]$ mit $t > a$. Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq a$ und existiert $\int_a^\infty g(x) dx$, so ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ absolut konvergent, und es gilt

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx \leq \int_a^\infty g(x) dx.$$

Ist dagegen $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \geq a$ und divergiert $\int_a^\infty g(x) dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x) dx$.

Beispiel 1 Es ist

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^\alpha dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^\alpha dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha \neq -1 \\ \ln t & \text{falls } \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq -1 & \text{(Divergenz)} \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \text{falls } \alpha < -1 & \text{(Konvergenz)}. \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 2 Es ist

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_s^0 = \lim_{s \rightarrow -\infty} -\arctan s = \frac{\pi}{2}$$

und daher

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3 Wir zeigen, dass $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ für $n \geq 0$. Es ist nämlich

$$F(x) = -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} x^k$$

eine Stammfunktion des Integranden, wie man durch Differenzieren leicht bestätigt. Außerdem ist $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$, denn es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^k}{e^t} = 0 \quad \text{für jedes } k \geq 0,$$

wie man mit der l'Hospital'schen Regel sofort sieht. Also ist

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^n e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) - F(0) = -F(0) = n! \quad \blacksquare$$

Beispiel 4 Wir zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert. An der Stelle 0 ist der Integrand nicht definiert. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ lässt sich die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ aber zu einer auf $[0, \infty)$ stetigen Funktion fortsetzen, wenn man ihren Wert an der Stelle 0 durch 1 festlegt. Insbesondere existiert $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ als (eigentliches) Riemann-Integral und wir müssen noch die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ zeigen. Partielle Integration liefert für jedes $t > 1$

$$\int_1^t \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Offenbar existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left. -\frac{\cos x}{x} \right|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos t}{t} + \cos 1 \right) = \cos 1,$$

und es verbleibt, die Existenz des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx$ bzw. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ zu zeigen. Wegen

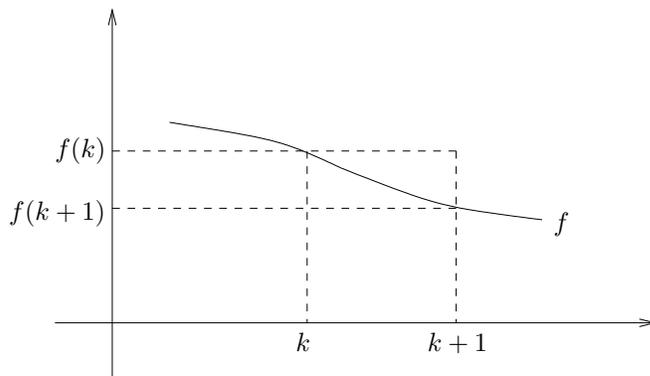
$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{für } x \geq 1$$

und Beispiel 1 existiert dieses uneigentliche Integral nach dem Vergleichskriterium. ■

Als eine Anwendung uneigentlicher Integrale vermerken wir das folgende *Integralkriterium* für die Konvergenz von Reihen.

Satz 9.24 Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergiert.

Beweis Für jedes $k \geq 1$ ist $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.



Aufsummieren von $k = 1, \dots, n-1$ ergibt für jedes $n \geq 2$

$$f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + \dots + f(n-1).$$

Für die Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n f(k)$ gilt also

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq s_{n-1}.$$

Aus der linken Ungleichung folgt: Ist $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergent, so bleiben die s_n beschränkt, also (da alle Reihenglieder nichtnegativ sind) konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Analog liefert die rechte Ungleichung die umgekehrte Behauptung. ■

Beispiel 5 Aus Beispiel 1 wissen wir, dass $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ für alle $\alpha > 1$ konvergiert. Also konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ für alle $\alpha > 1$. ■

Wir sehen uns eine weitere Verallgemeinerung des Integralbegriffes auf Funktionen an, die nicht auf ganz $[a, b]$ definiert und gegebenenfalls unbeschränkt sind.

Definition 9.25 Die Funktion $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei für jedes $c \in (a, b)$ auf $[a, c]$ Riemann-integrierbar. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx,$$

so bezeichnet man ihn mit $\int_a^b f(x) dx$ und nennt f uneigentlich integrierbar auf $[a, b]$.

Ganz analog definiert man diesen Begriff für Funktionen auf links halboffenen Intervallen.

Beispiel 6 Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{s \searrow 0} \int_s^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{s \searrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ -\ln s & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha \geq 1 \quad (\text{Divergenz}) \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1 \quad (\text{Konvergenz}). \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel 7 Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{s \searrow 0} \int_s^1 \ln x dx = \lim_{s \searrow 0} (x \ln x - x) \Big|_s^1 \\ &= -1 - \lim_{s \searrow 0} (s \ln s - s) = -1. \end{aligned}$$

Beispiel 8 Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{t \nearrow 1} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \nearrow 1} \arcsin x \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \nearrow 1} \arcsin t - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

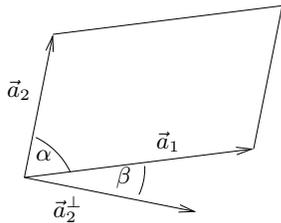
10 Determinanten

Man kann jeder quadratischen Matrix eine Zahl, die Determinante der Matrix, zuordnen, die wesentliche Informationen über die Matrix enthält.

10.1 Definition und Eigenschaften

Sei $A = (a_{ij})_{n,n}$ eine $n \times n$ -Matrix mit reellen Einträgen. Im Fall $n = 1$ versteht man unter der Determinante von $A = (a_{11})$ einfach die Zahl a_{11} , und man schreibt $\det A = a_{11}$. Die Definition der Determinanten von 2×2 - und 3×3 -Matrizen motivieren wir geometrisch. Sei zunächst $n = 2$.

Wir berechnen den Flächeninhalt des von den Spalten $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21})^T$ und $\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22})^T$ von A aufgespannten Parallelogramms.



Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich dem Betrag von $\|\vec{a}_1\| \|\vec{a}_2\| \sin \alpha$

(für $\alpha \in (0, 180^\circ)$ ist diese Zahl bereits nichtnegativ). Sei $\vec{a}_2^\perp = (a_{22}, -a_{12})^T$ der auf \vec{a}_2 senkrecht stehende Vektor. Dann ist $\|\vec{a}_2\| = \|\vec{a}_2^\perp\|$ sowie $\alpha = 90^\circ - \beta$, und daher gilt

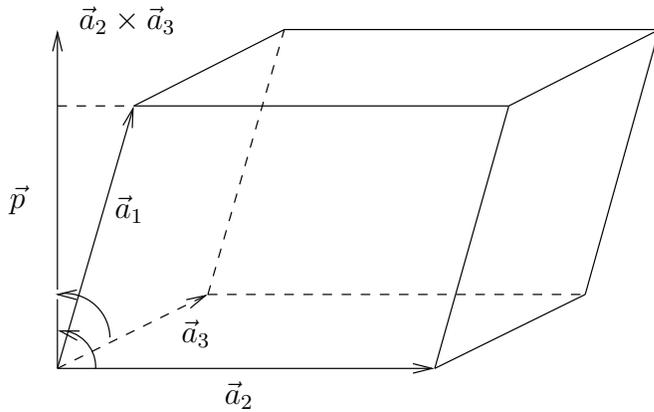
$$\begin{aligned} \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\| \sin \alpha &= \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2^\perp\| \sin(90^\circ - \beta) \\ &= \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2^\perp\| \cos \beta = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2^\perp. \end{aligned}$$

Die Formel (2.3) für das Skalarprodukt ergibt schließlich $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2^\perp = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$.

Definition 10.1 Die Determinante der 2×2 -Matrix $A = (a_{ij})_{2,2}$ ist die Zahl

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (10.1)$$

Analog berechnen wir nun das Volumen des von den Spalten \vec{a}_1, \vec{a}_2 und \vec{a}_3 der 3×3 -Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ aufgespannten Spats.



Dieses Volumen ist gleich dem Flächeninhalt des von \vec{a}_2 und \vec{a}_3 aufgespannten Parallelogramms, multipliziert mit der Höhe des Spats. Dieser Flächeninhalt ist gleich $\|\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\|$, und die Höhe ist die Länge der Projektion \vec{p} von \vec{a}_1 auf den Normaleneinheitsvektor des Parallelogramms, also gleich

$$\|\vec{p}\| = \left| \vec{a}_1 \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\|\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\|} \right|.$$

Das gesuchte Volumen ist daher gleich dem Betrag von $\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Diese Zahl bezeichnet man auch als *Spatprodukt* der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, und man schreibt

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] := \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3).$$

Schreiben wir die Spaltenvektoren als $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T$, $\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$ and $\vec{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ und benutzen wir die Formel (2.3) sowie den Satz 2.10, so finden wir eine Möglichkeit der Berechnung des Spatprodukts dreier Vektoren mit Hilfe der Koordinaten der Vektoren:

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (10.2)$$

Definition 10.2 Die Determinante der 3×3 -Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ ist die Zahl auf der rechten Seite von (10.2).

Als Merkhilfe dient die *Sarrussche Regel*, bei der man die ersten beiden Spalten noch einmal hinter die Matrix schreibt:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
 & \diagdown & \times & \times & \diagup & \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\
 & \diagup & \times & \times & \diagdown & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\
 - & - & - & + & + & +
 \end{array}$$

Für die Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix müssen wir die Formeln für 2×2 - und 3×3 -Determinanten verallgemeinern. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe. Jede Anordnung $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n heißt eine *Permutation* dieser Zahlen. Man kann sich leicht überlegen, dass es genau $n!$ verschiedene Permutationen der Zahlen von 1 bis n gibt. Eine Permutation heißt *gerade*, wenn sie durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente aus der Ausgangspermutation $(1, 2, \dots, n)$ hervorgeht, sonst *ungerade*. Schließlich definiert man das *Vorzeichen* $\text{sgn}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ der Permutation als $+1$ oder -1 , je nachdem, ob die Permutation gerade oder ungerade ist.

Definition 10.3 *Unter der Determinante der $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ versteht man die Zahl*

$$\det A = \sum_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)} \text{sgn}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \dots a_{n\nu_n},$$

wobei die Summe über alle Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis n genommen wird.

Man beachte, dass diese Definition natürlich auch für quadratische Matrizen mit komplexen Einträgen sinnvoll ist.

Beispiel Für $n = 3$ und $A = (a_{ij})_{3,3}$ haben wir $3! = 6$ Summanden:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) &\Rightarrow \text{keine Vertauschung} &\Rightarrow \text{sgn}(1, 2, 3) = 1 &\Rightarrow +a_{11}a_{22}a_{33} \\ (1, 3, 2) &\Rightarrow \text{eine Vertauschung} &\Rightarrow \text{sgn}(1, 3, 2) = -1 &\Rightarrow -a_{11}a_{23}a_{32} \\ (2, 1, 3) &\Rightarrow \text{eine Vertauschung} &\Rightarrow \text{sgn}(2, 1, 3) = -1 &\Rightarrow -a_{12}a_{21}a_{33} \\ (3, 2, 1) &\Rightarrow \text{eine Vertauschung} &\Rightarrow \text{sgn}(3, 2, 1) = -1 &\Rightarrow -a_{13}a_{22}a_{31} \\ (2, 3, 1) &\Rightarrow \text{zwei Vertauschungen} &\Rightarrow \text{sgn}(2, 3, 1) = 1 &\Rightarrow +a_{12}a_{23}a_{31} \\ (3, 1, 2) &\Rightarrow \text{zwei Vertauschungen} &\Rightarrow \text{sgn}(3, 1, 2) = 1 &\Rightarrow +a_{13}a_{21}a_{32}. \end{aligned}$$

Die Summe der Zahlen in der rechten Spalte ist die Determinante von A . Diese stimmt natürlich mit der aus Definition 10.2 überein. ■

Es folgen die wichtigsten Rechenregeln für Determinanten. Dazu führen wir eine kürzere Schreibweise für Matrizen ein. Sind a_1, \dots, a_n die Spalten einer Matrix A , so schreiben wir $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Satz 10.4 (a) *Die Determinante der $n \times n$ -Einheitsmatrix I ist 1:*

$$\det I = \det(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1.$$

(b) *Die Determinante ist linear in jeder Spalte:*

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \lambda^{(1)}b_j^{(1)} + \lambda^{(2)}b_j^{(2)}, a_{j+1}, \dots, a_n) &= \\ &= \lambda^{(1)} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j^{(1)}, a_{j+1}, \dots, a_n) + \\ &\quad + \lambda^{(2)} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j^{(2)}, a_{j+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

- (c) Vertauscht man in A zwei Spalten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen:

$$\det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) = -\det(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots).$$

- (d) Die Determinante ändert sich nicht beim Transponieren:

$$\det A = \det A^T.$$

- (e) Die Determinante ist multiplikativ: für beliebige $n \times n$ -Matrizen A, B gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

- (f) Ist A eine $n \times n$ -Matrix und λ eine Zahl, so gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Man beachte, dass wegen (d) die Eigenschaften (b) und (c) entsprechend auch für Zeilen gelten.

Die Berechnung von Determinanten mittels Definition 10.3 ist außerordentlich mühsam. Bereits für $n = 5$ hätte man 120 Produkte aus je 5 Faktoren zu berechnen und zu summieren. Die beiden folgenden Sätze bieten wesentlich praktikablere Möglichkeiten der Berechnung von Determinanten.

Satz 10.5 Sei A eine $n \times n$ -Matrix.

- (a) Ist ein Spalten- oder Zeilenvektor von A der Nullvektor, so ist $\det A = 0$.
- (b) Die Addition eines Vielfachen eines Spaltenvektors (Zeilenvektors) von A zu einem anderen Spaltenvektor (Zeilenvektor) von A läßt $\det A$ unverändert.
- (c) Die Determinante einer Matrix von Dreiecksgestalt (d.h. alle Einträge oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen sind Null) ist gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.

Man benutzt die Aussagen (b) und (c) aus Satz 10.4 sowie (b) aus Satz 10.5, um die Matrix A in Dreiecksgestalt zu bringen ohne ihre Determinante zu ändern. Dann kann die Determinante mit Satz 10.5 (c) bestimmt werden.

Beispiel 1

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot (-2) \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -12 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und nach Satz 10.5 (c) ist gesuchte Determinante gleich $-12 \cdot 2 = -24$. \blacksquare

Determinanten können auch berechnet werden, indem man sie nach einer beliebigen Zeile oder Spalte *entwickelt*. Streicht man in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die i -te Zeile und die k -te Spalte, so bleibt (nach „Zusammenschieben des Restes“) eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix übrig. Ihre Determinante heißt ein *Minor* von A und wird im Folgenden mit \tilde{A}_{ik} bezeichnet. Jeder $n \times n$ -Matrix hat offenbar genau n^2 Minoren.

Satz 10.6 (Entwicklungssatz) Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ und alle $i, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det A = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{i+\nu} a_{i\nu} \tilde{A}_{i\nu}$$

(Entwicklung nach der i -ten Zeile) sowie

$$\det A = \sum_{\mu=1}^n (-1)^{k+\mu} a_{\mu k} \tilde{A}_{\mu k}$$

(Entwicklung nach der k -ten Spalte).

Die Minoren sind Determinanten; sie können also nach dem gleichen Prinzip berechnet werden. Besonders vorteilhaft ist die Entwicklung nach Zeilen oder Spalten, die viele Nullen enthalten. Man beachte die alternierenden Vorzeichen.

Beispiel 2 Entwicklung nach der letzten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - 6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} + 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-3) - 6(-6) + 9(-3) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 3 Entwicklung jeweils nach der ersten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \det(a_{44}) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird klar, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen ist (Satz 10.5(c)). \blacksquare

10.2 Determinanten und invertierbare Matrizen

Zur Erinnerung: Eine $n \times n$ -Matrix heißt *invertierbar* (oder regulär), wenn es eine $n \times n$ -Matrix A^{-1} gibt mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Äquivalent zur Invertierbarkeit von A ist jede der folgenden Bedingungen:

- (a) Die lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$ ist bijektiv.
- (b) $\ker A = \{0\}$.
- (c) $\text{rang } A = n$.

Wir charakterisieren nun die Invertierbarkeit von A in Abhängigkeit von der Determinanten von A . Sei zunächst A invertierbar. Anwendung von Satz 10.4(e) auf $A \cdot A^{-1} = I$ liefert

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I = 1.$$

Die Determinante einer invertierbaren Matrix ist also ungleich Null, und es gilt

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Wir zeigen, dass umgekehrt jede Matrix A mit $\det A \neq 0$ invertierbar ist und dass man die inverse Matrix von A explizit beschreiben kann. Dazu benötigen

wir einige Bezeichnungen. Für jeden Minor \tilde{A}_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) von A definieren wir

$$A_{ik} := (-1)^{i+k} \tilde{A}_{ik}$$

und setzen

$$A_{\text{adj}} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Lemma 10.7 *Für jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ gilt*

$$A_{\text{adj}} \cdot A = A \cdot A_{\text{adj}} = \det A \cdot I. \quad (10.3)$$

Beweis Wir überlegen uns die Gleichheit $A \cdot A_{\text{adj}} = \det A \cdot I$. Dazu berechnen wir den ij -ten Eintrag von $A \cdot A_{\text{adj}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ik} \tilde{A}_{jk} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & a_{j-1,3} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & a_{j+1,3} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Diese Matrix entsteht, indem die j -te Zeile der Matrix A durch die i -te Zeile von A ersetzt wird. Die Gleichheit (10.4) folgt nun aus dem Entwicklungssatz durch Entwickeln nach der j -ten Zeile.

Es bleibt noch die Aufgabe, die Determinante der Matrix in (10.4) zu berechnen. Das ist einfach: Für $i = j$ ist dies gerade die Determinante von A , und für $i \neq j$ enthält die Matrix in (10.4) zwei gleiche Zeilen, so dass ihre Determinante gleich Null ist. Es ist also

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j, \end{cases}$$

und das ist die Behauptung. ■

Satz 10.8 *Eine $n \times n$ -Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. In diesem Fall gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{\text{adj}}. \quad (10.5)$$

Beispiel 4 Die 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Ist A eine invertierbare Matrix, so ist jedes Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar, und man kann die Lösung x berechnen aus $x = A^{-1}b$. Eine weitere Möglichkeit der Berechnung der Lösung bietet die Cramersche Regel.

Satz 10.9 (Cramersche Regel) Die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ sei eine invertierbare $n \times n$ -Matrix mit den Spalten a_1, a_2, \dots, a_n . Die Komponenten x_1, x_2, \dots, x_n des Lösungsvektors $x = A^{-1}b$ sind dann gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, a_2, \dots, a_n)}. \quad (10.6)$$

Im Nenner von (10.6) steht also die Determinante von A und im Zähler die Determinante der Matrix, die aus A entsteht, wenn die k -te Spalte von A durch die rechte Seite b des Gleichungssystems ersetzt wird.

Beweis Wir führen den Beweis nur für die erste Komponente x_1 des Lösungsvektors. Der Beweis für die übrigen Komponenten verläuft analog. Sei also $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung von $Ax = b$. Dann ist $x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n = b$ und daher

$$\begin{aligned} \det(b, a_2, a_3, \dots, a_n) &= \\ &= \det(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ &= \det(x_1a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + \det(x_2a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots + \det(x_na_n, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad (\text{Satz 10.4(b)}) \\ &= x_1 \det(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) + x_2 \det(a_2, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots + x_n \det(a_n, a_2, a_3, \dots, a_n) \quad (\text{Satz 10.4(b)}) \\ &= x_1 \det A + 0 + \dots + 0 \quad (\text{Satz 10.5(b)}) \\ &= x_1 \det A. \end{aligned}$$

Wegen $\det A \neq 0$ ist also $x_1 = \det(b, a_2, a_3, \dots, a_n) / \det A$. \blacksquare

Beispiel 6 Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 8x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 & = & 1 \\ & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

mit der Cramerschen Regel. Hier ist

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$(b, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (a_1, b, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(a_1, a_2, b) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Determinanten (nach Sarrus oder Entwicklungssatz) liefert $\det A = -2$ sowie

$$\det(b, a_2, a_3) = -112, \quad \det(a_1, b, a_3) = 60, \quad \det(a_1, a_2, b) = 93.$$

Die Lösung des Systems ist also

$$x_1 = 56, \quad x_2 = -30, \quad x_3 = -46,5. \quad \blacksquare$$

Man beachte, dass weder die Berechnung der inversen Matrix nach (10.5) noch die Lösung eines linearen Gleichungssystems über die Cramersche Regel für große n praktikabel sind, da der Aufwand zur Berechnung der Determinanten schnell ansteigt. Wir werden also weiter den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme benutzen.

11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir wissen bereits, dass man jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ durch eine $n \times n$ -Matrix A beschreiben kann, d.h. es ist $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Die Matrix A hängt dabei von der gewählten Basis in \mathbb{K}^n ab. Die Frage ist nun, ob man eine solche Basis findet, in der die Multiplikation mit A besonders einfach wird. Diese Frage wird uns auf die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix und damit in die Spektraltheorie linearer Abbildungen führen. Als wichtige Anwendung diskutieren wir die Lösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

11.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Am einfachsten ist die Anwendung einer Matrix A auf einen Vektor x wohl dann, wenn wir nur mit einer geeigneten Zahl λ multiplizieren müssen, d.h. wenn $Ax = \lambda x$. Die Idee ist daher, nach einer Basis von \mathbb{K}^n zu suchen, die aus Vektoren x_1, \dots, x_n besteht, für die es jeweils Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $Ax_i = \lambda_i x_i$ gibt. Die Darstellung von A in dieser Basis wäre dann einfach die Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Definition 11.1 Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine $n \times n$ -Matrix. Die komplexe Zahl λ heißt ein Eigenwert von A , wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ gibt, so dass die Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda x \quad \text{bzw.} \quad (A - \lambda I)x = 0$$

erfüllt ist. Jeder solche Vektor x heißt ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

Lemma 11.2 Sei λ ein Eigenwert von A . Nimmt man zu den zu λ gehörigen Eigenvektoren von A noch den Nullvektor hinzu, so erhält man einen linearen Raum, den so genannten Eigenunterraum von A zum Eigenwert λ .

Dies ist leicht einzusehen. Seien x, y Eigenvektoren zum Eigenwert λ und sei $t \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A(tx) &= tAx = t(\lambda x) = \lambda(tx), \\ A(x+y) &= Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y), \end{aligned}$$

d.h. tx und $x+y$ sind Eigenvektoren oder gleich Null. ■

Nach Definition 11.1 ist λ genau dann ein Eigenwert von A , wenn das homogene Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{11.1}$$

eine nichttriviale Lösung $x \neq 0$ besitzt (man beachte, dass das System (11.1) für jedes λ den Nullvektor als Lösung hat). Eine nichttriviale Lösung von (11.1) existiert nun genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist (andernfalls

wäre nämlich $x = (A - \lambda I)^{-1} \cdot 0 = 0$ die einzige Lösung des Systems). Nach Satz 10.8 ist die genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (11.2)$$

Berechnet man $\det(A - \lambda I)$ in Abhängigkeit von λ , so erhält man ein Polynom in λ vom Grad n .

Definition 11.3 Die Gleichung (11.2) heißt die charakteristische Gleichung der Matrix A , und das Polynom $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ heißt das charakteristische Polynom der Matrix A .

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (dessen reelle Version wir in Satz 9.19 kennen gelernt haben), hat jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten genau n komplexe Nullstellen (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Daher gilt

Satz 11.4 (a) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ besitzt genau n komplexe Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).

(b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so ist mit jedem nichtreellen Eigenwert λ auch die konjugiert-komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A .

Beispiel 1 Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$ und daher

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -2$. Analog erhält man für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 1$$

und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Eine reelle Matrix muss also keine reellen Eigenwerte besitzen. Nun sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad C - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Mit der Sarrusschen Regel findet man

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= (-\lambda)^2(2 - \lambda) + 3 - 3 - (2 - \lambda) - 3(-\lambda) - (-3)(-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix C sind also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 1$. Schließlich sei

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ein doppelter Eigenwert. ■

Zur Berechnung der zu einem Eigenwert λ von A gehörigen Eigenvektoren muss man das homogene Gleichungssystem $(A - \lambda I)x = 0$ lösen.

Beispiel 2 Wir berechnen die Eigenvektoren der Matrizen C und D aus Beispiel 1. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ von C erhält man die Matrix

$$C - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen von 1. und 3. Zeile und Division der 2. Zeile durch 3 führen auf die folgende Matrix, die wir mit den Operationen des Gaußalgorithmus weiter vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind also alle Vektoren

$$t(1, 1, 1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}, \tag{11.3}$$

und diese Vektoren bilden auch den Eigenunterraum von C zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$ sind gerade die Vektoren (11.3) mit $t \neq 0$. Ganz analog findet man die Eigenvektoren

$$t(0, 1, -1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{bzw.} \quad t(1, 0, 1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

zu den Eigenwerten $\lambda_2 = -1$ bzw. $\lambda_3 = 1$ von C . Für die Matrix D lautet das entsprechende Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 0.$$

Alle Eigenvektoren haben also die Gestalt

$$t(1, 0) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \blacksquare$$

Wir kommen zu einer wichtigen Eigenschaft von Eigenvektoren.

Satz 11.5 *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind linear unabhängig.*

Beweis Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und v_1, \dots, v_k seien zugehörige Eigenvektoren. Wir müssen zeigen, dass aus

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{folgt} \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \quad (11.4)$$

und benutzen dazu vollständige Induktion.

Für $k = 1$ ist die Aussage (11.4) offenbar richtig. Wir nehmen an, dass sie für $k - 1$ paarweise verschiedene Eigenwerte richtig ist und zeigen, dass sie dann auch für k paarweise verschiedene Eigenwerte gilt. Eine Anwendung von A auf die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0 \quad (11.5)$$

ergibt

$$\alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_{k-1} A v_{k-1} + \alpha_k A v_k = 0$$

bzw.

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0. \quad (11.6)$$

Andererseits liefert Multiplikation von (11.5) mit λ_k

$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0. \quad (11.7)$$

Wir subtrahieren (11.6) von (11.7) und erhalten

$$\alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind v_1, \dots, v_{k-1} linear unabhängig. Also ist

$$\alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) = \dots = \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0,$$

und da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, folgt hieraus $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Aus (11.5) folgt schließlich noch $\alpha_k = 0$, d.h. die Vektoren v_1, \dots, v_k sind tatsächlich linear unabhängig. ■

Da die Dimension von \mathbb{K}^n gleich n ist, kann wegen Satz 11.5 eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ höchstens n linear unabhängige Eigenvektoren besitzen. Genauer gilt:

Satz 11.6 *Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ der Vielfachheit m (d.h. ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A der Vielfachheit m), so besitzt A höchstens m linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ , d.h. die Dimension des Eigenuntertraumes von A zum Eigenwert λ ist höchstens m .*

Ist insbesondere λ ein einfacher Eigenwert von A , so ist der zugehörige Eigenuntertraum (also der Kern von $A - \lambda I$) eindimensional. Es hätte also in Beispiel 2 genügt, einen Eigenvektor von C zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ zu erraten, um die Beschreibung (11.3) des Eigenuntertraums von C zu diesem Eigenwert zu erhalten.

Hier sind noch zwei weitere Aussagen über Eigenwerte beliebiger Matrizen.

Satz 11.7 Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $A = (a_{ij})_{n,n}$, so gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad (11.8)$$

sowie

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A. \quad (11.9)$$

Die Summe $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ der Hauptdiagonalelemente einer Matrix A heißt auch die *Spur* von A . Aus (11.9) folgt insbesondere, dass eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn keiner ihrer Eigenwerte Null ist.

Satz 11.8 Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, so sind $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ die Eigenwerte von A^k . Ist A invertierbar, so sind $\lambda_1^{-k}, \dots, \lambda_n^{-k}$ die Eigenwerte von $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Wir haben hier die Vereinbarung $A^0 = I$ benutzt.

11.2 Koordinatentransformationen

Vorbereitend für die nächsten Abschnitte sehen wir uns nun an, wie sich die Darstellung eines Vektors oder einer Matrix bei einem Basiswechsel verändert. Dazu sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} (wer möchte, darf sich $V = \mathbb{K}^n$ vorstellen). Ist e_1, \dots, e_n eine Basis in V , so kann jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathbb{K} \quad (11.10)$$

geschrieben werden. Ist f_1, \dots, f_n eine weitere Basis von V , so kann v auch eindeutig geschrieben werden als

$$v = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n \quad \text{mit} \quad y_i \in \mathbb{K}. \quad (11.11)$$

Uns interessiert der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten x_i in (11.10) und y_i in (11.11). Dazu stellen wir jeden Basisvektor f_j in der Basis e_1, \dots, e_n dar:

$$f_j = c_{1j} e_1 + \dots + c_{nj} e_n = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i$$

mit eindeutig bestimmten *Zerlegungskoeffizienten* c_{ij} . Einsetzen in (11.11) ergibt

$$v = \sum_{j=1}^n y_j f_j = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \right) e_i,$$

und ein Koeffizientenvergleich mit (11.10) liefert schließlich

$$x_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.12)$$

Wir können diese Gleichungen auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x = Cy. \quad (11.13)$$

Die j . Spalte der Transformationsmatrix C besteht gerade aus den Zerlegungskoeffizienten von f_j bzgl. der Basis e_1, \dots, e_n . Bei Kenntnis von C können wir mit (11.13) aus der Darstellung (11.11) des Vektors v die Darstellung (11.10) bestimmen. Da die Matrix C invertierbar ist (ihre Spalten sind im wesentlichen gerade die linear unabhängigen Vektoren f_1, \dots, f_n), kann man auch umgekehrt (11.11) aus (11.10) durch $y = C^{-1}x$ bestimmen.

Beispiel 3 Wir betrachten die Basen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^2 .

Dann ist

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 \\ f_2 &= -2e_1 + e_2 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

In der Skizze ist $\vec{0A}$ der Vektor $y_1 f_1$ und $\vec{0B}$ der Vektor $y_2 f_2$. ■

Nun betrachten wir eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$. Diese hat bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit

$$\varphi(e_i) = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und bezüglich der Basis f_1, \dots, f_n die Matrixdarstellung $B = (b_{ij})_{n,n}$ mit

$$\varphi(f_i) = b_{1i}f_1 + \dots + b_{ni}f_n \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Sei nun $v \in V$ ein beliebiger Vektor und $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ bzw. $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ seine Koordinatenvektoren bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n bzw. f_1, \dots, f_n . Dann hat $\varphi(v)$ die Darstellung Ax bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n und By bezüglich der Basis f_1, \dots, f_n . Aus (11.13) wissen wir, dass

$$Ax = CBy \quad \text{und} \quad x = Cy.$$

Durch Einsetzen folgt hieraus $ACy = CBy$, und da dies für alle $y \in \mathbb{K}^n$ gelten muss, ist $AC = CB$ bzw.

$$B = C^{-1}AC. \quad (11.14)$$

Ist also A die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ in der Basis e_1, \dots, e_n , so ist $C^{-1}AC$ die Matrixdarstellung derselben Abbildung in der Basis f_1, \dots, f_n .

Definition 11.9 *Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ so gibt, dass*

$$B = C^{-1}AC.$$

Ähnliche Matrizen gehen also durch eine Koordinatentransformation auseinander hervor.

Satz 11.10 *Ähnliche Matrizen besitzen gleiche charakteristische Polynome und folglich auch gleiche Eigenwerte.*

Dies folgt sofort aus

$$B - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C = C^{-1}(A - \lambda I)C$$

und aus der Multiplikativität der Determinante (Satz 10.4(e)). ■

Um die Eigenwerte von A zu berechnen, kann man also ebenso die Eigenwerte einer zu A ähnlichen Matrix berechnen, falls dies einfacher ist. Auf dieser Idee beruhen viele numerische Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten.

11.3 Diagonalähnliche Matrizen

Wir kommen zu unserem Hauptthema zurück: Gibt es für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A ? Falls alle Eigenwerte von A einfach sind, kann diese Frage bejaht werden. In diesem Fall hat A nämlich n verschiedene Eigenwerte, zu jedem dieser Eigenwerte findet man einen Eigenvektor, und diese n Eigenvektoren sind linear unabhängig nach Satz 11.5, d.h. sie bilden eine Basis. Hat dagegen die Matrix A mehrfache Eigenwerte, so braucht eine Basis aus Eigenvektoren nicht zu existieren, wie die Matrix D aus Beispiel 2 zeigt.

In diesem Abschnitt sehen wir uns Matrizen an, für die eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Sei also $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n , die eine Basis von \mathbb{K}^n bilden. Die Eigenwertgleichungen

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n$$

können zu einer einzigen Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$A(v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$AT = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

mit $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T invertierbar, und wir erhalten

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (11.15)$$

Definition 11.11 Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, so dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Matrizen, für die es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, sind also diagonalähnlich. Mit anderen Worten: stellt man eine solche Matrix in der Basis dar, die aus ihren Eigenvektoren besteht, so erhält man eine Diagonalmatrix. Auch die Umkehrung ist richtig: Ist A diagonalähnlich, d.h. ist

$$C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

so sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Eigenwerte von A , und die k -te Spalte von C ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k . Da C invertierbar ist, sind die Spalten von C linear unabhängig, d.h. die Eigenvektoren von A bilden eine Basis.

Satz 11.12 Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalähnlich, wenn es eine Basis von \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von A gibt.

Für die Matrix C aus Beispiel 2 ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In den nächsten Abschnitten wollen wir Klassen von Matrizen angeben, für die man von vornherein weiß, dass sie diagonalähnlich sind (alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = A$ haben beispielsweise diese Eigenschaft). Vorher sehen wir uns eine spezielle Klasse von Basen in \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n genauer an.

11.4 Orthonormalbasen

Besonders angenehm ist das Arbeiten mit Basen, deren Vektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge (Norm) 1 haben. Die Basis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ aus den Koordinateneinheitsvektoren des \mathbb{R}^n hat beispielsweise diese Eigenschaft. Um solche Basen auch in \mathbb{C}^n betrachten zu können, verallgemeinern wir die Begriffe Skalarprodukt und Norm auf Vektoren aus \mathbb{C}^n .

Definition 11.13 (a) Das Skalarprodukt der Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ist die komplexe Zahl

$$\langle x, y \rangle := x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n. \quad (11.16)$$

(b) Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ heißen senkrecht, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

(c) Die Norm des Vektors $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ist die Zahl

$$\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}. \quad (11.17)$$

Man beachte, dass für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ diese Begriffe mit den früher eingeführten übereinstimmen. Wir werden im Weiteren die Schreibweise $\langle x, y \rangle$ statt $x \cdot y$ für das Skalarprodukt benutzen, um Verwechslungen mit dem Matrixprodukt zu vermeiden. Die Rechenregeln sind ähnlich wie im Reellen. Es gelten weiterhin die Beziehung

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

sowie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Man beachte lediglich, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ und daher

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \text{aber} \quad \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

Definition 11.14 Eine Basis e_1, \dots, e_n von \mathbb{C}^n heißt Orthonormalbasis, wenn

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Wir lernen nun das *Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* kennen, das aus jeder Basis von \mathbb{C}^n (oder \mathbb{R}^n) eine Orthonormalbasis erzeugt. Sei v_1, v_2, \dots, v_n eine Basis von \mathbb{C}^n . Wir wählen $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Dann ist natürlich $\langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\| = 1$.

Wir wählen den Ansatz $e'_2 = \alpha_{21} e_1 + v_2$ und bestimmen α_{21} so, dass $\langle e'_2, e_1 \rangle = 0$. Wegen

$$0 = \langle e'_2, e_1 \rangle = \langle \alpha_{21} e_1 + v_2, e_1 \rangle = \alpha_{21} \langle e_1, e_1 \rangle + \langle v_2, e_1 \rangle = \alpha_{21} + \langle v_2, e_1 \rangle$$

muss $\alpha_{21} = -\langle v_2, e_1 \rangle$ sein. Also ist

$$e'_2 = -\langle v_2, e_1 \rangle e_1 + v_2,$$

und wir normieren noch: $e_2 := e'_2 / \|e'_2\|$. Dann ist $\|e_2\| = 1$ und $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$. Für das nächste Element setzen wir an $e'_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + v_3$ und bestimmen α_{31} und α_{32} aus $\langle e'_3, e_1 \rangle = \langle e'_3, e_2 \rangle = 0$. Wegen

$$0 = \langle e'_3, e_1 \rangle = \langle \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + v_3, e_1 \rangle = \alpha_{31} + \langle v_3, e_1 \rangle$$

ist $\alpha_{31} = -\langle v_3, e_1 \rangle$, und analog erhält man $\alpha_{32} = -\langle v_3, e_2 \rangle$. Also ist

$$e'_3 = -\langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 + v_3,$$

und wir setzen noch $e_3 := e'_3 / \|e'_3\|$. Wir fahren so fort und erhalten im k -ten Schritt

$$e'_k = -\langle v_k, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_k, e_{k-1} \rangle e_{k-1} + v_k \quad (11.18)$$

und

$$e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}. \quad (11.19)$$

Dabei gilt $\langle e_k, e_1 \rangle = \dots = \langle e_k, e_{k-1} \rangle = 0$ und $\|e_k\| = 1$. Wir müssen uns lediglich noch überlegen, dass die e'_k niemals die Nullvektoren sind. Nehmen wir an, es sei $e'_k = 0$. Aus (11.18) folgt dann

$$v_k = \langle v_k, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v_k, e_{k-1} \rangle e_{k-1}. \quad (11.20)$$

Nach Konstruktion ist aber jeder der Vektoren e_1, \dots, e_{k-1} eine Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_{k-1} . In (11.20) wird also der Vektor v_k als eine Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_{k-1} dargestellt. Das ist aber unmöglich, da wir die Vektoren v_1, \dots, v_n als linear unabhängig vorausgesetzt hatten.

Nach n Schritten erhält man aus den Vektoren v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von \mathbb{C}^n . Allgemein kann man das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren benutzen, um aus einem linear unabhängigen System v_1, \dots, v_k von Vektoren ein Orthonormalsystem e_1, \dots, e_k mit

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$$

zu erzeugen.

Beispiel 4 Seien

$$v_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad v_2 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad v_3 = (0, 0, 1, 1)^T.$$

Dann erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
 e_1 &= v_1 / \|v_1\| = v_1/2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T, \\
 e'_2 &= -\langle v_2, e_1 \rangle e_1 + v_2 \\
 &= -1 \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T + (1, 0, 1, 0)^T = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T, \\
 e_2 &= e'_2 / \|e'_2\| = e'_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T, \\
 e'_3 &= -\langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 + v_3 \\
 &= -\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T - 0 \cdot e_2 + (0, 0, 1, 1)^T = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)^T, \\
 e_3 &= e'_3 / \|e_3\| = e'_3 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)^T.
 \end{aligned}$$

Die Vektoren e_1, e_2, e_3 spannen den gleichen Raum auf wie v_1, v_2, v_3 , und sie bilden ein Orthonormalsystem. ■

11.5 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{C}^{m,n}$ setzt man

$$\bar{A} := (\bar{a}_{ij})_{m,n} \quad \text{und} \quad A^* := \bar{A}^T.$$

Die Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{n,m}$ heißt die zu A adjungierte Matrix.

Definition 11.15 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt

symmetrisch, wenn $A^T = A$, und
 orthogonal, wenn A invertierbar ist und $A^T = A^{-1}$.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt

hermitesch (oder selbstadjungiert), wenn $A^* = A$, und
 unitär, wenn A invertierbar ist und $A^* = A^{-1}$.

Beispiel 5 Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & e^{i/2} \end{pmatrix}$$

sind entsprechend symmetrisch, selbstadjungiert, orthogonal bzw. unitär. ■

Für den Rest dieses Kapitels beschäftigen wir uns nur mit dem reellen Fall, d.h. mit orthogonalen bzw. symmetrischen Matrizen. Alle Überlegungen bleiben aber auch im komplexen Fall richtig, wenn man transponierte Matrizen durch adjungierte ersetzt und die Begriffe orthogonal und symmetrisch durch unitär und selbstadjungiert.

Eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist charakterisiert durch die Gleichungen

$$AA^T = A^T A = I. \quad (11.21)$$

Das bedeutet, dass die Spaltenvektoren von A (ebenso wie die Zeilenvektoren) eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n bilden. Man rechnet auch leicht nach, dass Produkte und Inverse orthogonaler Matrizen wieder orthogonale Matrizen sind und dass die Determinante einer orthogonalen Matrix gleich 1 oder -1 ist. Für eine weitere Eigenschaft benötigen wir

Lemma 11.16 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle. \quad (11.22)$$

Beweis Sei $A = (a_{ij})_{n,n}$. $A^T = B = (b_{ij})_{n,n}$ und $x = (x_i)_n$, $y = (y_i)_n$. Dann ist $b_{ij} = a_{ji}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \sum_{i=1}^n (Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n b_{ji} y_i \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (By)_j = \langle x, By \rangle = \langle x, A^T y \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ist A eine orthogonale Matrix, so ist wegen (11.21) für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \langle A^T Ax, y \rangle = \langle Ax, (A^T)^T y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle, \quad (11.23)$$

d.h. die Multiplikation mit A ändert weder die Länge eines Vektors noch den Winkel zwischen zwei Vektoren. Die orthogonalen 2×2 und 3×3 -Matrizen stammen gerade von den Drehungen und Spiegelungen des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 her (vgl. Abschnitt 4.2 zu den Drehungen des \mathbb{R}^2).

Wir kommen nun zur Eigenwerttheorie symmetrischer Matrizen.

Satz 11.17 *Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reell.*

Beweis Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix, $\lambda = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $A - \alpha I$ wieder symmetrisch, und deshalb ist

$$\begin{aligned} 0 &= \|(A - \lambda I)x\|^2 = \langle Ax - \lambda x, Ax - \lambda x \rangle \\ &= \langle Ax - \alpha x - \beta ix, Ax - \alpha x - \beta ix \rangle \\ &= \langle Ax - \alpha x, Ax - \alpha x \rangle - \beta i \langle x, Ax - \alpha x \rangle - \overline{\beta i} \langle Ax - \alpha x, x \rangle + \beta i \overline{\beta i} \langle x, x \rangle \\ &= \|Ax - \alpha x\|^2 - \beta i \langle x, (A - \alpha I)x \rangle + \beta i \langle (A - \alpha I)x, x \rangle + \beta^2 \|x\|^2 \\ &= \|Ax - \alpha x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\beta^2\|x\|^2 = 0$, also $\beta\|x\| = 0$, und da $\|x\| \neq 0$, muss $\beta = 0$ sein. ■

Satz 11.18 *Eigenvektoren symmetrischer Matrizen, die zu unterschiedlichen Eigenwerten gehören, stehen senkrecht aufeinander.*

Beweis Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A und v, w zugehörige Eigenvektoren. Dann ist

$$\lambda\langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu\langle v, w \rangle,$$

also

$$(\lambda - \mu)\langle v, w \rangle = 0.$$

Da $\lambda \neq \mu$ ist, muss $\langle v, w \rangle = 0$ sein. ■

Satz 11.19 *Zu jeder symmetrischen $n \times n$ -Matrix A gibt es eine aus Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .*

Beweisidee Sei λ_1 ein Eigenwert von A und x_1 ein zugehöriger Eigenvektor. Wir betrachten die Menge aller zu x_1 senkrechten Vektoren

$$V_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x_1 \rangle = 0\}.$$

Diese Menge ist ein linearer Teilraum von \mathbb{R}^n . Wir zeigen, dass V_1 invariant ist für A , d.h. für jeden Vektor $x \in V_1$ liegt auch Ax wieder in V_1 . Sei also $x \in V_1$. Dann ist nach Lemma 11.16

$$\langle Ax, x_1 \rangle = \langle x, Ax_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, x_1 \rangle = 0,$$

also tatsächlich $Ax \in V_1$.

Die Matrix A definiert daher eine lineare Abbildung von V_1 nach V_1 , die wir mit einer $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix identifizieren können. Diese Matrix ist wieder symmetrisch, und sie besitzt einen Eigenwert λ_2 und einen zugehörigen Eigenvektor $x_2 \in V_1$, die zugleich natürlich auch Eigenwert bzw. Eigenvektor von A sind.

Wir fahren so fort, d.h. wir betrachten die Menge V_2 aller Vektoren, die auf x_1 und x_2 senkrecht stehen, finden einen weiteren Eigenvektor x_3 , u.s.w. Nach n Schritten haben wir n Eigenvektoren von A gefunden, die nach Konstruktion paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wir normieren diese Vektoren und erhalten eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , die ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht. ■

Folgerung 11.20 *Jede symmetrische $n \times n$ -Matrix ist diagonalähnlich. Genauer: ist A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so gibt es eine orthogonale Matrix mit*

$$C^T A C = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Beweis Aus Abschnitt 11.3 wissen wir, dass die Spalten von T die Eigenvektoren von A sind. Wählen wir diese Eigenvektoren als Orthonormalsystem (was nach Satz 11.19 möglich ist), so wird T eine orthogonale Matrix. ■

Praktisch kann man bei der Bestimmung einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix A wie folgt vorgehen:

1. Man bestimmt die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ von A sowie ihre Vielfachheiten n_1, \dots, n_d . Es ist also $n_1 + \dots + n_d = n$.
2. Zu jedem Eigenwert λ_k der Vielfachheit n_k bestimmt man n_k linear unabhängige Eigenvektoren.
3. Im Fall $n_k > 1$ werden diese Eigenvektoren mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (Abschnitt 11.4) orthogonalisiert.
4. Alle Eigenvektoren werden normiert.

Abschließend führen wir noch einige Begriffe ein, die wir bei der Behandlung der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher benötigen werden.

Definition 11.21 Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt positiv definit (positiv semidefinit), wenn

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \quad (\text{bzw. } \langle Ax, x \rangle \geq 0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Die Matrix A heißt negativ definit (negativ semidefinit), wenn $-A$ positiv definit (positiv semidefinit) ist. Schließlich heißt A indefinit, wenn $\langle Ax, x \rangle$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

Satz 11.22 Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) A ist positiv definit.
- b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.
- c) Alle Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

sind positiv.

Die Äquivalenz von (a) und (b) erhält man leicht aus Folgerung 11.20. Die Äquivalenz von (a) und (c) ist auch bekannt als *Hurwitz-Kriterium*.

Beispiel 6 Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, da ihre Unterdeterminanten

$$\det(4) = 4 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 8$$

positiv sind (Hurwitz-Kriterium). Zu diesem Ergebnis wären wir auch durch die Berechnung der Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

von A gelangt, die beide positiv sind. Dagegen ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

indefinit, was man wie folgt schnell einsehen kann. Die Spur von A ist 16. Da die Spur gleich der Summe der Eigenwerte ist, ist mindestens ein Eigenwert von A positiv. Die Determinante von A ist -4 , also negativ. Da die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte von A ist, ist mindestens einer der Eigenwerte von A negativ. ■

11.6 Quadratische Gleichungen und Hauptachsentransformation

Wir sehen uns nun quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten an und wollen im nächsten Abschnitt ihre Lösungsmenge beschreiben. Aus der Schule kennen wir quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten x

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

und wir wissen, dass eine solche Gleichung keine, eine oder zwei reelle Lösungen besitzen kann. Die allgemeine quadratische Gleichung in zwei Unbekannten x_1 und x_2 lautet

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0 \quad (11.24)$$

mit reellen Koeffizienten a_{ij}, b_i und c . Die Gleichung (11.24) läßt sich mit Hilfe von Matrizen kompakter schreiben. Dazu seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann kann man (11.24) schreiben als

$$\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0.$$

(Nachrechnen!) Allgemein lässt sich die quadratische Gleichung in n Unbekannten x_1, \dots, x_n

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0$$

mit der *symmetrischen* Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ und den Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

schreiben als

$$\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0. \quad (11.25)$$

Die Abbildung $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ heißt auch eine *quadratische Form*.

In zwei Schritten transformieren wir die Gleichung (11.25) in eine Gestalt, aus der wir die Lösungsmenge unmittelbar ablesen können.

1. Schritt Wir beseitigen die gemischten Terme 2. Ordnung wie $2a_{ij}x_i x_j$. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A und ein dazu gehörendes System v_1, \dots, v_n orthonormierter Eigenvektoren. Weiter sei C die orthogonale Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren v_1, \dots, v_n sind. Nach Folgerung 11.20 ist dann

$$C^T A C = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Wir führen nun statt x_1, \dots, x_n neue Variable y_1, \dots, y_n mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C y$$

ein. Dann wird aus (11.25)

$$\langle ACy, Cy \rangle + \langle b, Cy \rangle + c = 0$$

bzw.

$$\langle C^T A C y, y \rangle + \langle C^T b, y \rangle + c = 0,$$

d.h.

$$\langle \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y, y \rangle + \langle d, y \rangle + c = 0 \quad (11.26)$$

mit $d = (d_1, \dots, d_n)^T := C^T b$. Damit haben wir unser Ziel im ersten Schritt erreicht, denn ausgeschrieben lautet (11.26)

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + c = 0. \quad (11.27)$$

Die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix mit Determinante 1 entspricht geometrisch einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt. Da man gegebenenfalls durch Vertauschen zweier Spalten von D erreichen kann, dass $\det D = 1$ ist, lässt sich durch eine solche Drehung stets das Verschwinden der gemischten Glieder erreichen.

2. Schritt Falls $\lambda_k \neq 0$, beseitigen wir das Linearglied $d_k y_k$ in (11.27). Dazu schreiben wir $\lambda_k y_k^2 + d_k y_k$ als

$$\begin{aligned}\lambda_k \left(y_k^2 + \frac{d_k}{\lambda_k} y_k \right) &= \lambda_k \left(y_k^2 + \frac{d_k}{\lambda_k} y_k + \frac{d_k^2}{4\lambda_k^2} \right) - \frac{d_k^2}{4\lambda_k} \\ &= \lambda_k \left(y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k} \right)^2 - \frac{d_k^2}{4\lambda_k}\end{aligned}$$

(quadratische Ergänzung). Den Summanden $-\frac{d_k^2}{4\lambda_k}$ nehmen wir in das Absolutglied auf, und wir führen eine neue Variable

$$z_k := y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k}$$

ein. Ist $\lambda_k = 0$, so ersetzen wir einfach y_k durch z_k . Geometrisch gesehen haben wir damit das Koordinatensystem verschoben.

Das Resultat dieser beiden Schritte sieht wie folgt aus. Sind alle Eigenwerte von A ungleich Null, so wird aus (11.25) eine Gleichung der Gestalt

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + l = 0$$

mit einem Absolutglied l .

Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ungleich Null und die Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ gleich Null, und sind auch die Koeffizienten d_{s+1}, \dots, d_n in (11.27) gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_s z_s^2 + l = 0 \quad \text{mit } s < n.$$

Seien schließlich die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ungleich Null, die Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n$ gleich Null, und wenigstens einer der Koeffizienten d_{s+1}, \dots, d_n ungleich Null. Der Bestimmtheit halber sei etwa $d_n \neq 0$. Dann behalten wir die Variablen z_1, \dots, z_{n-1} und ersetzen z_n durch die neue Variable z'_n mit

$$-2z'_n := d_{s+1} z_{s+1} + \dots + d_n z_n + l.$$

Wir erhalten dann die Gleichung

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_s z_s^2 - 2z'_n = 0 \quad \text{mit } s < n,$$

wobei wir die Variable z'_n wieder mit z_n bezeichnet haben.

Satz 11.23 *Durch die oben beschriebenen Koordinatentransformationen lässt sich jede quadratische Gleichung in n Variablen*

$$\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0$$

in eine der folgenden Formen bringen:

Typ 1: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 + l = 0$ mit $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_n \neq 0,$

Typ 2: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_s z_s^2 + l = 0$ mit $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_s \neq 0, s < n, \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0,$

Typ 3: $\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_s z_s^2 - 2z_n = 0$ mit $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_s \neq 0, s < n, \lambda_{s+1} = \dots = \lambda_n = 0.$

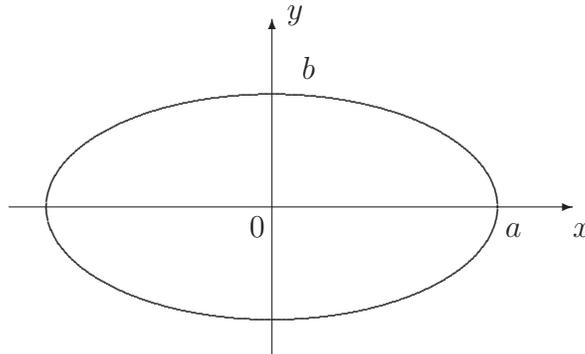
Wir sehen uns nun die Gleichungen in zwei Veränderlichen z_1, z_2 genauer an. Diese Veränderlichen bezeichnen wir wie üblich mit x und y . Im Fall $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ und $l < 0$ (Typ 1) erhalten wir

$$\frac{\lambda_1}{-l} x^2 + \frac{\lambda_2}{-l} y^2 = 1.$$

Mit den neuen Parametern $\frac{1}{a^2} := \frac{\lambda_1}{-l} > 0$ und $\frac{1}{b^2} := \frac{\lambda_2}{-l} > 0$ wird hieraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung beschreibt eine *Ellipse mit den Halbachsen a und b :*



Ganz analog erhält man die folgende Übersicht, in der die Kurven zweiter Ord-

nung klassifiziert sind.

Typ	λ_1	λ_2	l	Gleichung	Kurventyp
1	> 0	> 0	< 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse
1	> 0	> 0	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Punkt $(0, 0)$
1	> 0	> 0	> 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	leere Menge
1	> 0	< 0	< 0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel
1	> 0	< 0	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Paar sich schneidender Geraden $y = \pm \frac{b}{a}x$
2	> 0	$= 0$	< 0	$x^2 = a^2$	Paar paralleler Geraden $x = \pm a$
2	> 0	$= 0$	$= 0$	$x^2 = 0$	y -Achse
2	> 0	$= 0$	> 0	$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
3	$\neq 0$	$= 0$		$x^2 = 2py$	Parabel

Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln entstehen beim Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene. Diese Kurven heißen daher *Kegelschnitte*.

Wir verschaffen uns nun noch eine Übersicht über die Flächen zweiter Ordnung. Dazu bezeichnen wir die Veränderlichen z_1, z_2, z_3 mit x, y, z .

Typ	λ_1	λ_2	λ_3	l	Gleichung	Flächentyp
1	> 0	> 0	> 0	< 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoid
1	> 0	> 0	> 0	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt $(0, 0, 0)$
1	> 0	> 0	> 0	> 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	leere Menge
1	> 0	> 0	< 0	< 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	einschaliges Hyperboloid
1	> 0	> 0	< 0	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	elliptischer Doppelkegel
1	> 0	> 0	< 0	> 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	zweischaliges Hyperboloid
2	> 0	> 0	$= 0$	< 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elliptischer Zylinder
2	> 0	> 0	$= 0$	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	z -Achse
2	> 0	> 0	$= 0$	> 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	leere Menge
2	> 0	< 0	$= 0$	< 0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbolischer Zylinder
2	> 0	< 0	$= 0$	$= 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Paar sich schneidender Ebenen $y = \pm \frac{b}{a}x$
2	> 0	$= 0$	$= 0$	< 0	$x^2 = a^2$	Paar paralleler Ebenen $x = \pm a$
2	> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$x^2 = 0$	yz -Ebene
2	> 0	$= 0$	$= 0$	> 0	$x^2 = -a^2$	leere Menge
3	> 0	> 0	$= 0$		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	elliptisches Paraboloid
3	> 0	< 0	$= 0$		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	hyperbolisches Paraboloid
3	> 0	$= 0$	$= 0$		$x^2 = 2pz$	parabolischer Zylinder.

Beispiel 7 Wir suchen die durch die Gleichung

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0 \quad (11.28)$$

festgelegte Kurve. Dazu schreiben wir diese Gleichung als $\langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -32 \\ -56 \end{pmatrix}, \quad c = 80.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 9$, und $w_1 = (2, -1)^T$ sowie $w_2 = (1, 2)^T$ sind zugehörige Eigenvektoren. Wir normieren w_1 und w_2 und erhalten

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 , und sie erzeugen die orthogonale Matrix

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir transformieren die Ausgangsgleichung, wobei A in $C^T A C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ und b in $C^T b = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -8 \\ -144 \end{pmatrix}$ übergeht:

$$4y_1^2 + 9y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}}y_2 + 80 = 0.$$

Nun bestimmen wir die quadratischen Ergänzungen und erhalten

$$\begin{aligned} 4y_1^2 + 9y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}}y_2 + 80 &= \\ &= 4\left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 9\left(y_2^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y_2\right) + 80 \\ &= 4\left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{5}\right) + 9\left(y_2^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y_2 + \frac{64}{5}\right) + 80 - \frac{4}{5} - \frac{576}{5} \\ &= 4\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9\left(y_2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Mit $z_1 := y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $z_2 := y_2 - \frac{8}{\sqrt{5}}$ erhalten wir schließlich

$$4z_1^2 + 9z_2^2 - 36 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (11.28) ist also eine Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2. Im $z_1 z_2$ -Koordinatensystem liegen diese Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen, und der Mittelpunkt der Ellipse ist der Nullpunkt $(0, 0)$. Im $y_1 y_2$ -Koordinatensystem erscheint diese Ellipse parallelverschoben, so dass nun $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}})$ ihr Mittelpunkt ist. Schließlich entsteht hieraus das Bild der Ellipse im $x_1 x_2$ -Koordinatensystem durch Drehung um den Winkel φ mit dem Nullpunkt als Drehzentrum, wobei sich φ aus

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ergibt (vgl. Abschnitt 4.2). ■

12 Folgen und Reihen von Funktionen

Wir wechseln nun das Thema und kehren zur Analysis zurück. Bisher haben wir Folgen und Reihen reeller Zahlen betrachtet. Wir dehnen unsere Untersuchungen nun auf Folgen und Reihen von Funktionen aus.

12.1 Punktweise Konvergenz

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R} , und für jede natürliche Zahl n sei eine Funktion $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Man beachte, dass alle Funktionen f_n auf der gleichen Menge D definiert sind. Dann heißt $(f_n)_{n \geq 1}$ eine *Funktionenfolge* auf D . Ist $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Funktionenfolge, so heißt die Folge $(s_n)_{n \geq 1}$ der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), \quad x \in D,$$

eine *Funktionenreihe* auf D . Für diese Reihe schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Natürlich können Funktionenfolgen und Funktionenreihen auch mit einem anderen Index als 1 beginnen.

Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf D . Für jedes feste $x \in D$ ist dann $(f_n(x))_{n \geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Diese Zahlenfolgen kann man auf Konvergenz untersuchen und wird dabei im Allgemeinen feststellen, dass für manche $x \in D$ Konvergenz vorliegt und für andere nicht.

Definition 12.1 a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt *punktweise konvergent* auf D , wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \geq 1}$ konvergiert. Ist die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ *punktweise konvergent* auf D , so heißt die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

die *Grenzfunktion der Funktionenfolge*.

b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt *punktweise konvergent* auf D , wenn für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *punktweise konvergent* auf D , so heißt die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

die *Summe der Funktionenreihe*.

Wenn eine Funktionenfolge punktweise konvergiert, so ist die Grenzfunktion eindeutig bestimmt.

Beispiel 1 Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$ für $n \geq 1$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ ist punktweise konvergent auf $[0, 1]$, und für die Grenzfunktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Beispiel 2 Sei $D = [0, 1)$ und $f_n(x) = x^n$ für $n \geq 0$. Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist punktweise konvergent auf $[0, 1)$, und für ihre Summe $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(geometrische Reihe). ■

Man beachte, dass in Beispiel 1 alle Funktionen f_n stetig sind, die Grenzfunktion aber an der Stelle $x = 1$ unstetig ist. Das zeigt, dass sich Eigenschaften wie die Stetigkeit der Funktionen f_n im Allgemeinen nicht auf die Grenzfunktion übertragen oder vererben lassen. Dieses Ergebnis ist verständlich, wenn man beachtet, dass bei punktweiser Konvergenz jedes $x \in D$ für sich betrachtet wird, während bei der Stetigkeit das Verhalten der Funktion in einer Umgebung von x eine Rolle spielt. Wir lernen nun einen stärkeren Konvergenzbegriff kennen, der (u.a.) das Vererben der Stetigkeit von den Funktionen f_n auf die Grenzfunktion f garantiert.

12.2 Gleichmäßige Konvergenz

Noch einmal: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion f , wenn für jedes $x \in D$ zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon, x)$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, x).$$

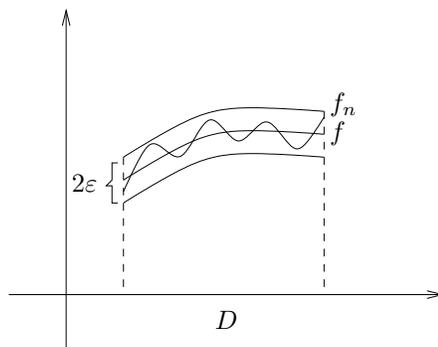
Die Zahl $N(\varepsilon, x)$ darf also von x abhängen. Bei der gleichmäßigen Konvergenz fordert man im Unterschied dazu, dass man die Zahl $N = N(\varepsilon)$ *unabhängig* von x wählen kann.

Definition 12.2 a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ heißt auf D gleichmäßig konvergent mit der Grenzfunktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \quad \text{und für alle } x \in D. \quad (12.1)$$

b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D gleichmäßig konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen auf D gleichmäßig konvergiert.

Anschaulich bedeutet die Forderung (12.1), dass für $n \geq N(\varepsilon)$ der Graph der Funktion f_n in einem Streifen der Breite 2ε um dem Graphen von f liegt.



Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Konvergenz, während die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel 3 Wir zeigen, dass die Funktionenfolge aus Beispiel 1 nicht gleichmäßig konvergiert. Sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und $x \in (0, 1)$. Dann ist $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^n < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \end{aligned}$$

kann es kein $N = N(\varepsilon)$ so geben, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in [0, 1)$.

Beispiel 4 Betrachten wir die Funktionen $f_n(x) = x^n$ dagegen nur auf einem Intervall $[0, a]$ mit $a < 1$, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig. Das sehen wir ein wie in Beispiel 3. Wir müssen nämlich $N = N(\varepsilon)$ so wählen, dass

$$N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a} \quad \text{für alle } x \in (0, a]. \quad (12.2)$$

Nun ist für $x \in (0, a]$ und $\varepsilon < 1$ wegen

$$\ln x \leq \ln a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln a}$$

klar, dass

$$\frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \leq \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}.$$

Es genügt also, $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ zu wählen, um (12.2) und damit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in (0, a]$ zu garantieren. (Für $x = 0$ ist ohnehin $f(x) = 0 = f_n(x)$ für alle n .) ■

Die beiden folgenden Sätze geben Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz an.

Satz 12.3 Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (12.3)$$

Dies ist im Wesentlichen eine Umformulierung der Definition. Für das nächste Kriterium führen wir einen neuen Begriff ein.

Definition 12.4 Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so heißt die Zahl

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm von f .

Mit diesem Begriff hätten wir Satz 12.3 auch wie folgt formulieren können:

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Satz 12.5 Sei (f_n) eine Funktionenfolge. Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D .

Dies ist das Analogon zur absoluten Konvergenz von Zahlenreihen, die wir in Abschnitt 6.4 kennen gelernt haben: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 12.5 ist extrem nützlich, da man nur eine Reihe aus nichtnegativen Zahlen auf Konvergenz untersuchen muss und aus dieser Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe erhält. Dabei ist es nicht unbedingt erforderlich, die Normen $\|f_n\|_\infty$ zu berechnen, um die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ zu überprüfen. Nach dem Majorantenkriterium genügt es, Zahlen $c_n \geq 0$ zu finden, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \text{für alle } x$$

und dass die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert.

Beispiel 5 Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ ist auf \mathbb{R} gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. ■

Die folgenden Sätze zeigen, dass bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen Eigenschaften wie die Stetigkeit, die Integrierbarkeit und – mit Einschränkungen – die Differenzierbarkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion vererbt werden.

Satz 12.6 Die Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$ (bzw. auf ganz D). Dann gilt:

- a) Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf D mit der Grenzfunktion f , so ist auch f in x_0 (bzw. auf ganz D) stetig.
- b) Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf D mit der Summe g , so ist auch g in x_0 (bzw. auf ganz D) stetig.

Satz 12.7 Die Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

- a) Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$ mit der Grenzfunktion f , so ist auch f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \quad (12.4)$$

- b) Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf $[a, b]$ mit der Summe g , so ist g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad (12.5)$$

Diese Sätze treffen Aussagen über das Vertauschen von Grenzprozessen wie etwa der Grenzwertbildung oder der Summation mit der Integration. Ohne die Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz ist das Vertauschen von Grenzwertbildung und Integration im Allgemeinen nicht erlaubt. Das zeigen die Funktionen

$$f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \quad \text{auf } [0, 1].$$

Die Folge (f_n) konvergiert nämlich punktweise auf $[0, 1]$ gegen die Funktion $f = 0$. Demnach ist

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2nxe^{-nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n}) = 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 6 Für $0 < a < 1$ konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $[0, a]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g(x) = \frac{1}{1-x}$, da sie nach Beispiel 2 punktweise gegen diese Funktion konvergiert und da $|x^n| \leq a^n$ für alle $x \in [0, a]$, wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergiert.

Nun ist

$$\int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \int_0^a \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) \Big|_0^a = -\ln(1-a)$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}.$$

Nach Satz 12.7 ist daher

$$\ln(1-a) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \quad \text{für } 0 \leq a < 1.$$

Dies gilt sogar für alle a mit $|a| < 1$. ■

Etwas verwickelter ist die Situation beim Vertauschen von Differentiation und Grenzwertbildung. Hier benötigt man neben der Konvergenz der Folge (f_n) die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f'_n) der Ableitungen.

Satz 12.8 Die Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt:

- a) Ist die Folge (f_n) punktweise konvergent auf I mit der Grenzfunktion f und ist die Folge (f'_n) der Ableitungen gleichmäßig konvergent auf I , so ist f auf I differenzierbar, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = f'(x). \quad (12.6)$$

- b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise konvergent auf I mit der Summe g , und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ der Ableitungen gleichmäßig auf I , so ist g auf I differenzierbar, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = g'(x). \quad (12.7)$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) allein reicht jedoch nicht aus, um Grenzübergang und Differentiation vertauschen zu können, wie folgendes Beispiel zeigt. Die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ der durch

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$$

definierten Funktionen f_n konvergiert auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f = 0$ (denn es ist ja $\|f_n - 0\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n}$). Demnach ist

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Andererseits ist

$$f'_n(x) = n \cos(n^2 x),$$

und die Folge (f'_n) divergiert z.B. an der Stelle $x = 0$. ■

12.3 Potenzreihen

Wir kommen nun zu einer wichtigen Klasse von Funktionenreihen, die wegen ihrer speziellen Gestalt Potenzreihen genannt werden.

Definition 12.9 Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 , und die a_n heißen die Koeffizienten der Potenzreihe. (Wir vereinbaren hier: $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe um x_0 , so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $z = x - x_0$ eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0. Wir werden daher im Weiteren meist $x_0 = 0$ wählen.

Uns interessiert zunächst das Konvergenzverhalten von Potenzreihen. Wir wissen bereits, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Exponentialreihe) für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Ihre Summe haben wir e^x genannt. Dagegen konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (geometrische Reihe) für $|x| < 1$, während sie für $|x| \geq 1$ divergiert.

Satz 12.10 a) Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein $\bar{x} \neq 0$, so konvergiert sie für alle x mit $|x| < |\bar{x}|$ absolut.

b) Divergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein \bar{x} , so divergiert sie für alle x mit $|x| > |\bar{x}|$.

Beweis (a) Aus der Konvergenz an der Stelle \bar{x} und dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt die Beschränktheit der Folge $(a_n \bar{x}^n)$. Es gibt also ein $M \geq 0$ so, dass $|a_n \bar{x}^n| \leq M$ für alle $n \geq 0$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |\bar{x}|$. Wir schreiben x als $\lambda \bar{x}$ mit $|\lambda| < 1$. Wegen

$$|a_n x^n| = |a_n \lambda^n \bar{x}^n| = |\lambda^n| |a_n \bar{x}^n| \leq M |\lambda|^n$$

ist die Reihe $M \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Vergleichskriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut.

(b) Wir beweisen diese Aussage indirekt. Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein x mit $|x| > |\bar{x}|$ konvergieren, so würde nach Teil (a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an der Stelle \bar{x} konvergieren. Widerspruch. ■

Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trifft daher genau eine der folgenden Aussagen zu:

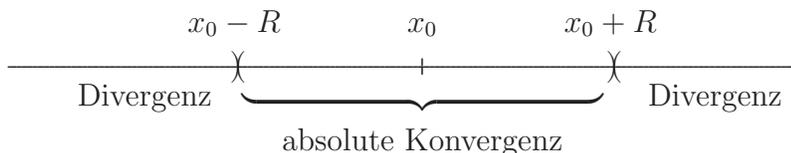
(A1) Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

(A2) Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A3) Es gibt eine Zahl $R > 0$ so, dass die Reihe für $|x| < R$ konvergiert und für $|x| > R$ divergiert.

Die Zahl R aus (A3) ist eindeutig bestimmt und heißt der *Konvergenzradius* der Reihe. Im Fall (A1) setzt man auch $R := 0$ und im Fall (A2) schreibt man formal $R = \infty$. Im Fall (A3) kann man für $x = R$ und $x = -R$ i.Allg. keine Aussage treffen. Fassen wir zusammen.

Satz 12.11 Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gibt es ein Intervall $I_R = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq R\}$ mit folgender Eigenschaft: Liegt x im Inneren von I_R , d.h. ist $|x - x_0| < R$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolut. Insbesondere konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ auf jedem abgeschlossenen Intervall I_r mit $0 < r < R$ gleichmäßig. Liegt x außerhalb von I_R , d.h. ist $|x - x_0| > R$, so liegt Divergenz vor.



Dieser Satz bleibt auch für komplexe Potenzreihen richtig, wenn man die Intervalle I_R bzw. I_r durch Kreisscheiben um x_0 mit den Radien R bzw. r ersetzt.

Der Konvergenzradius kann wie folgt aus den Koeffizienten der Potenzreihen bestimmt werden.

Satz 12.12 (Formel von Cauchy-Hadamard, Wurzelkriterium) Wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, so ist

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \quad (12.8)$$

mit der Vereinbarung, dass $R = \infty$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, und dass $R = 0$, falls $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \infty$.

Dieser Satz gilt ohne die Voraussetzung der Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, wenn man in (12.8) den Limes durch den Limes superior ersetzt. Der *Limes superior* $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ einer Zahlenfolge (b_n) ist der größte Grenzwert, den eine Teilfolge von (b_n) haben kann.

Beweis Sei $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

liefert das Wurzelkriterium, dass für $|x| < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergiert und für $|x| > \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$ divergiert. Also

stimmen in diesem Fall $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ und der Konvergenzradius der Reihe überein. Die Fälle $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \{0, \infty\}$ behandelt man ähnlich. ■

Satz 12.13 (Quotientenkriterium) *Gilt $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n und existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (12.9)$$

mit der Vereinbarung, dass $R = \infty$ falls $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \rightarrow \infty$.

Beispiel 7

a) In der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ist $a_n = \frac{1}{n} > 0$, und der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

existiert. Also ist $R = 1$.

b) In der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot 2^n x^n$ ist $a_n = n^2 \cdot 2^n$, und der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot 2 = 2$$

existiert. Also ist $R = 1/2$.

c) Für die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ ist $a_n = \frac{1}{n!}$ bzw. $a_n = n!$.

Im ersten Fall ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

und im zweiten Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, während die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ nur für $x = 0$ konvergiert. ■

Wir kommen zum Rechnen mit Potenzreihen.

Satz 12.14 *Haben die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ die Konvergenzradien $R_a, R_b > 0$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \min(R_a, R_b)$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \quad (12.10)$$

sowie

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (12.11)$$

mit $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$.

Potenzreihen können also auf einem gemeinsamen Konvergenzintervall gliedweise addiert und subtrahiert werden, und die Multiplikation erfolgt nach dem Cauchyprodukt. Der Konvergenzradius der entstehenden Reihen ist mindestens gleich $\min(R_a, R_b)$.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, so wird durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Funktion f auf $(-R, R)$ festgelegt. Einige Eigenschaften von f werden im folgenden Satz beschrieben.

Satz 12.15 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$. Dann gilt

- a) Die Funktion f ist stetig auf $(-R, R)$.
- b) Die Funktion f ist differenzierbar auf $(-R, R)$, und es ist

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hat wieder den Konvergenzradius R .

- c) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq (-R, R)$, und es ist

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{für } x \in (-R, R).$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ hat wieder den Konvergenzradius R .

Aussage (a) bedeutet, dass für jedes $\bar{x} \in (-R, R)$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\lim_{x \rightarrow \bar{x}} x \right)^n.$$

Man darf unter den Voraussetzungen des Satzes also die Grenzprozesse $\lim_{x \rightarrow \bar{x}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ miteinander vertauschen.

Die Aussagen (b) und (c) besagen, dass man Potenzreihen gliedweise differenzieren und integrieren kann. Insbesondere ist

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$.

Die Tatsache, dass der Konvergenzradius der gliedweise abgeleiteten bzw. integrierten Reihen gleich dem der Ausgangsreihe ist, folgt leicht aus der Formel von Cauchy/Hadamard und aus dem Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Eine bemerkenswerte Konsequenz dieser Tatsache ist, dass *Potenzreihen unendlich oft differenziert werden können*. Dabei ist für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \quad (12.12)$$

für $x \in (-R, R)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 8

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius 1, und ihre Summe ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Differenzieren wir diese Identität k -mal, so folgt

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

also

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad (12.13)$$

b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ hat den Konvergenzradius 1 und die Summe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{auf } (-1, 1).$$

Gliedweise Integration liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x,$$

also

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad (12.14)$$

c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ hat den Konvergenzradius 1 und die Summe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{auf } (-1, 1).$$

Gliedweises Integrieren ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x),$$

also

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad (12.15)$$

■

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit $R > 0$ und f ihre Summe auf dem Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$. Dann ist f unendlich oft differenzierbar, und aus (12.12) folgt für $x = x_0$

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1) \dots 1 \cdot a_k$$

bzw.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, \quad (12.16)$$

wobei wir vereinbaren, dass $f^{(0)} = f$. Es ist also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{auf } (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dies legt es nahe, jeder auf einem Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ unendlich oft differenzierbaren Funktion f ihre *Taylorreihe um den Entwicklungspunkt* x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (12.17)$$

zuzuordnen. Wir starten hier also nicht mit einer konvergenten Potenzreihe, der wir ihre (unendlich oft differenzierbare) Summe zuordnen, sondern ordnen einer unendlich oft differenzierbaren Funktion formal die Reihe (12.17) zu. Dabei ist zunächst unklar, ob diese Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt konvergiert und ob im Falle der Konvergenz ihre Summe an der Stelle x mit $f(x)$ zusammenfällt. Ein warnendes Beispiel liefert die auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass alle Ableitungen dieser Funktion an der Stelle 0 gleich 0 sind. Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt konvergiert also gegen die Nullfunktion auf \mathbb{R} , während $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Da die n -te Partialsumme der Taylorreihe (12.17) gerade das Taylorpolynom $T_n(x, x_0)$ von f ist, ist klar, dass die Taylorreihe von f genau dann gegen die

Funktion f konvergiert, wenn das Restglied $R_n(x, x_0)$ aus dem Taylorschen Satz (Satz 8.14) gegen 0 konvergiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Zur Erinnerung: Ist f beliebig oft differenzierbar, so ist

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

und

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit } \xi \in (x_0, x)$$

ist das *Restglied nach Lagrange*. Für das Restglied gibt es zahlreiche weitere Darstellungsmöglichkeiten. So heißt

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

das *Restglied in Integralform*.

Beispiel 9 Die Sinusfunktion ist auf \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar. Ihre Taylorreihe um den Entwicklungspunkt 0 lautet

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (12.18)$$

Das Restglied $R_n(x, 0)$ haben wir bereits in Abschnitt 8.4.4 abgeschätzt:

$$|R_n(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Also konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe (12.18) der Sinusfunktion gegen $\sin x$. Man sagt auch, dass die Reihe (12.18) die Sinusfunktion darstellt. ■

In der folgenden Übersicht sind die Taylorreihen einiger Funktionen zusammengestellt:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n && \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n && \text{für } x \in (-1, 1], \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} && \text{für } x \in (-1, 1), \\
\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} && \text{für } x \in (-1, 1), \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n && \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-1, 1).
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Identitäten ist

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ bricht im letzten Beispiel die Summation an der Stelle $n = \alpha$ ab, d.h. man erhält ein (endliches) Polynom statt einer Potenzreihe. Dies ist gerade die Aussage des Binomischen Satzes, der natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Potenzreihendarstellung für $\ln(1+x)$ liefert für $x = 1$ beispielsweise

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Wie beenden diesen Abschnitt mit einem weiteren nützlichen Resultat über Potenzreihen.

Satz 12.16 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ zwei Potenzreihendarstellungen, die beide auf (x_0-R, x_0+R) mit $R > 0$ konvergieren und deren Summen auf (x_0-R, x_0+R) übereinstimmen, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dies ist eine Verallgemeinerung des Identitätssatzes für Polynome. Der Beweis folgt leicht aus Formel (12.16). Dieser Identitätssatz ist Grundlage der Methode des *Koeffizientenvergleichs*. Wir sehen uns diese Methode an am Beispiel des unbestimmten Ansatzes für den Quotienten zweier Potenzreihen. Grundlage dafür ist der folgende Satz.

Satz 12.17 *Sind $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen, die beide für $|x| < R$ mit $R > 0$ konvergieren, und ist $g(0) = b_0 \neq 0$, so läßt sich der Quotient f/g in eine Potenzreihe um 0 mit positivem Konvergenzradius entwickeln.*

Der Beweis folgt am einfachsten mit Mitteln der komplexen Funktionentheorie, die wir im dritten Semester kennen lernen. Nach Satz 12.17 ist also

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

wobei alle Reihen für $|x| < r$ mit einem $r > 0$ konvergieren. Unter Verwendung des Cauchy-Produkts erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) =: \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

mit

$$d_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\begin{aligned} \text{bei } x^0 : \quad a_0 &= b_0 c_0, \\ \text{bei } x^1 : \quad a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ \text{bei } x^2 : \quad a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

und hieraus lassen sich wegen $b_0 \neq 0$ die c_0, c_1, c_2, \dots , sukzessive berechnen. Als Beispiel bestimmen wir die ersten Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung von $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Aus den bekannten Taylorentwicklungen der Sinus- und Kosinusfunktion folgt

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots),$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \text{bei } x^0 : \quad 0 &= 1 \cdot c_0 && \Rightarrow c_0 = 0 \\ \text{bei } x^1 : \quad 1 &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow c_1 = 1 \\ \text{bei } x^2 : \quad 0 &= 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 - \frac{1}{2} \cdot c_0 && \Rightarrow c_2 = 0 \\ \text{bei } x^3 : \quad -\frac{1}{6} &= 1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 - \frac{1}{2} \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

usw. Fortsetzung dieses Vorgehens liefert

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

12.4 Fourierreihen

Nach den Potenzreihen betrachten wir nun eine weitere Klasse spezieller Funktionenreihen, die von zentraler Bedeutung für die Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik ist: die Fourierreihen. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar sind. Es können daher nur „wenige“ sehr glatte Funktionen durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Demgegenüber lassen sich durch

Fourierreihen z.B. auch periodische Funktionen darstellen, die nur stückweise differenzierbar sind und deren Ableitungen Sprünge aufweisen.

Eine auf \mathbb{R} definierte Funktion f heißt *periodisch mit der Periode* $T > 0$, wenn

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispielsweise sind $\sin x$ und $\cos x$ periodische Funktionen mit den Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, und 2π ist die kleinste Periode dieser Funktionen. Dagegen ist für die konstante Funktion $f(x) = 1$ jede positive Zahl eine Periode, so dass es für diese Funktion keine kleinste Periode gibt.

Durch eine Variablensubstitution kann man jede Funktion mit der Periode T auf eine Funktion mit der Periode 2π zurückführen. Hat etwa f die Periode T , so hat die Funktion $F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ die Periode 2π :

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = F(x).$$

Wir betrachten daher meist nur 2π -periodische Funktionen.

Eine *trigonometrische Reihe* ist eine Reihe der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (12.19)$$

mit reellen Koeffizienten a_n ($n \geq 0$) und b_n ($n \geq 1$). Es wird sich später zeigen, dass es praktisch ist, nicht a_0 sondern $\frac{a_0}{2}$ also Koeffizienten von $\cos(0x) = 1$ zu wählen.

Satz 12.18 *Wenn jede der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert, so konvergiert die trigonometrische Reihe (12.19) auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig.*

Für das Weitere stellen wir zunächst einige Integralidentitäten für trigonometrische Funktionen zusammen.

Orthogonalitätsbeziehungen Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt &= 0 \quad \text{für } m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt &= 0 \quad \text{für } m \neq n, \\ \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt &= 0. \end{aligned}$$

Normierungsbeziehungen Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$$

Die Bezeichnungen „Orthogonalitäts-“ bzw. „Normierungsbedingungen“ rühren daher, dass man in völliger Analogie zum Skalarprodukt bzw. zur Norm von Vektoren

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \text{bzw.} \quad \|a\| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

auch ein Skalarprodukt bzw. eine Norm für Riemann-integrierbare Funktionen f, g auf $[0, 2\pi]$ einführen kann:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \|f\| := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Die angegebenen Beziehungen lassen sich leicht nachrechnen mit Formeln wie

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Mit den Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen läßt sich leicht ein Zusammenhang herstellen zwischen den Werten einer trigonometrischen Reihe und ihren Koeffizienten a_n und b_n .

Satz 12.19 (Euler/Fourier) Die Reihe aus (12.19) sei auf \mathbb{R} gleichmäßig konvergent und f bezeichne ihre Summe. Dann gilt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \quad (12.20)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \quad (12.21)$$

Beweis Wir multiplizieren (12.19) mit $\cos(nx)$:

$$f(x) \cos(nx) = \frac{a_0}{2} \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) \cos(nx) + b_m \sin(mx) \cos(nx))$$

und integrieren über $[0, 2\pi]$. Da die Reihe (12.19) gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch die Reihe $f(x) \cos(nx)$ gleichmäßig, und wir dürfen Summation und

Integration vertauschen:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \right).$$

Mit den Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen erhält man hieraus sofort (12.20), und (12.21) erhält man analog durch Multiplikation von (12.19) mit $\sin(nx)$. ■

Die Zahlen a_n und b_n aus (12.20) und (12.21) kann man für jede 2π -periodische und auf $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion f berechnen. Sie heißen die *Fourierkoeffizienten* von f . Mit diesen Koeffizienten kann man der Funktion f formal die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

zuordnen, die die *Fourierreihe* von f heißt (ganz ähnlich haben wir im vorigen Abschnitt jeder unendlich oft differenzierbaren Funktion formal eine Potenzreihe – die Taylorreihe der Funktion – zugeordnet). Unklar ist im Moment, ob die einer Funktion f zugeordnete Fourierreihe überhaupt konvergiert und ob ihre Summe im Falle der Konvergenz gleich f ist.

Bevor wir uns Beispiele ansehen, vermerken wir noch drei einfache Regeln, die das Berechnen der Fourierkoeffizienten mitunter vereinfachen.

- (A) Ist f 2π -periodisch und auf einem Intervall der Länge 2π Riemann-integrierbar, so ist f auf jedem Intervall der Länge 2π Riemann-integrierbar, und es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx.$$

- (B) Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

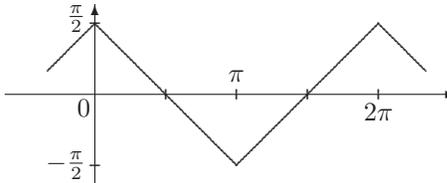
sowie $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (C) Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

sowie $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 10 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{\pi}{2} & \text{für } x \in [0, \pi) \\ x - \frac{3}{2}\pi & \text{für } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$


(„Sägezahnfunktion“). Da f gerade ist, ist $b_n = 0$ für alle n . Für die a_n erhält man

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist $a_0 = 0$, und mit partieller Integration folgt für $n \geq 1$

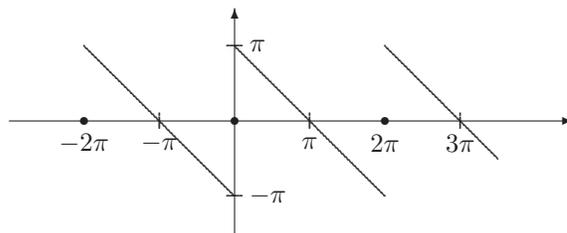
$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die durch die Sägezahnfunktion f definierte Fourierreihe ist also

$$\frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Diese Fourierreihe ist gleichmäßig konvergent. Unklar ist im Moment noch, ob ihre Summe gleich f ist. ■

Beispiel 11 Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit $g(0) = 0$ und $g(x) = \pi - x$ für $0 < x < 2\pi$.



Da f ungerade ist, sind alle a_n gleich 0, während für $n \geq 1$ gilt

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{2}{n}.$$

Die durch g definierte Fourierreihe ist also

$$2 \left(\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Hier ist selbst die Konvergenz der Reihe auf den ersten Blick unklar. ■

Wir wenden uns nun den z.T. recht schwierigen Konvergenzfragen zu. Einfache Überlegungen zeigen, dass in der Regel nicht einmal punktweise Konvergenz vorliegen kann: Zwei Funktionen, die sich nur in endlich vielen Punkten unterscheiden, besitzen die gleiche Fourierreihe. Es gibt sogar Beispiele stetiger Funktionen, deren Fourierreihe nicht in jedem Punkt konvergiert.

Um Konvergenzbedingungen formulieren zu können, führen wir die folgenden Begriffe ein. Für eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in (a, b)$ eine *Sprungstelle*, wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert

$$f(x_0-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_0+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

existieren und wenn $f(x_0-) \neq f(x_0+)$. Die Zahl $f(x_0+) - f(x_0-)$ heißt auch der *Sprung* von f an der Stelle x_0 . Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig* auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ von $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ so gibt, dass f auf allen offenen Intervallen (x_{i-1}, x_i) mit $i = 1, \dots, m$ stetig ist und dass die linksseitigen Grenzwerte $f(x_i-)$ für alle $i = 1, \dots, m$ und die rechtsseitigen Grenzwerte $f(x_i+)$ für alle $i = 0, \dots, m - 1$ existieren. Die Funktionswerte $f(x_i)$ sind dabei offenbar irrelevant. Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt auf $[a, b]$ *stückweise glatt* oder *stückweise stetig differenzierbar*, wenn ihre Ableitung stückweise stetig ist, d.h. man verlangt, dass es eine solche Zerlegung $\{x_0, \dots, x_m\}$ gibt, so dass f auf jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) stetig differenzierbar ist und dass alle links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte $f'(x_i-)$ und $f'(x_i+)$ existieren. An den Punkten x_i braucht die Ableitung von f nicht zu existieren. Eine stückweise glatte Funktion hat höchstens endlich viele Sprungstellen.

Satz 12.20 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch und stückweise glatt auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f für jedes $x \in \mathbb{R}$, und es gilt*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f stückweise glatt auf $[0, 2\pi]$ und stetig in x , so ist sogar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ist schließlich f in einer Umgebung eines abgeschlossenen Intervalls I stetig und stückweise glatt, so konvergiert die Fourierreihe von f auf I gleichmäßig gegen f .

In Beispiel 10 ist f stückweise glatt und stetig auf \mathbb{R} . Daher ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Für $x = 0$ erhalten wir insbesondere $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, d.h.

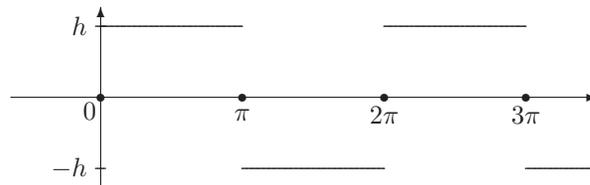
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (12.22)$$

Für Beispiel 11 liefert Satz 12.20 ebenfalls punktweise Konvergenz der Fourierreihe von g gegen g auf ganz \mathbb{R} . Man beachte, dass $g(0) = \frac{g(0-) + g(0+)}{2}$.

Beispiel 12 Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = \pi \\ h & \text{für } x \in (0, \pi) \\ -h & \text{für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

mit einem $h > 0$.



Da f ungerade ist, ist $a_n = 0$ für alle n , und man rechnet leicht nach, dass

$$b_n = \begin{cases} \frac{4h}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da f stückweise glatt ist, konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) = f(x)$. Man kann beobachten, dass für jedes m die Partialsummen

$$s_{2m+1}(x) := \frac{4h}{\pi} \sum_{n=0}^m \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

dieser Fourierreihe über die halbe Sprunghöhe hinausschießen (vgl. die Skizze im Arbeitsbuch S. 302). Diese Erscheinung heißt *Gibbs'sches Phänomen*. ■

Anmerkung 12.21 Ist f periodisch mit der Periode $T > 0$, so lautet die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

Anmerkung 12.22 Unter Benutzung der Eulerschen Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$ für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir für $n \in \mathbb{Z}$ das komplexe Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx + i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Die Fourierreihe einer stückweise glatten 2π -periodischen Funktion f auf \mathbb{R} läßt sich dann in der *komplexen Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12.23)$$

mit den *komplexen Fourierkoeffizienten*

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

schreiben. Dabei versteht man unter der Summe der Reihe (12.23) den Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

■

13 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

13.1 Mengen im \mathbb{R}^n

Wir bezeichnen wieder mit \mathbb{R}^n den linearen Raum aller Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit reellen Einträgen und den früher eingeführten Operationen. Die Vektoren im \mathbb{R}^n schreiben wir meist zeilenweise. Je zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ ist ihr Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

zugeordnet und jedem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ seine Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dabei ist $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn x der Nullvektor $0 = (0, \dots, 0)$ ist. Weiter ist $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und es gilt die *Dreiecksungleichung*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Schließlich erinnern wir noch an die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir führen nun einige Begriffe ein, die die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n beschreiben.

Definition 13.1 Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von x_0 . Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, die für ein $\varepsilon > 0$ eine komplette ε -Umgebung von x_0 enthält, heißt eine Umgebung von x_0 .

Im \mathbb{R}^1 ist $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, im \mathbb{R}^2 die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε ohne ihren Rand, und im \mathbb{R}^3 die Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε , ebenfalls ohne ihren Rand.

Definition 13.2 a) Ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt innerer Punkt der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine ε -Umgebung von x_0 gibt, die ganz in M liegt. Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das Innere von M . Bezeichnung: $\text{int } M$ oder \underline{M} .

- b) Ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es in jeder ε -Umgebung von x_0 mindestens einen Punkt aus M und mindestens einen Punkt, der nicht zu M gehört, gibt. Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M . Bezeichnung: ∂M .
- c) Für jede Menge M heißt $M \cup \partial M$ die Abschließung oder abgeschlossene Hülle von M . Bezeichnung: \overline{M} oder $\text{clos } M$.

Definition 13.3 Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- a) offen, wenn jeder Punkt von M ein innerer Punkt ist.
 b) abgeschlossen, wenn jeder Randpunkt von M zu M gehört.
 c) beschränkt, wenn es ein $R > 0$ gibt mit $M \subseteq U_R(0)$.
 d) kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Eine Menge M ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $M = \text{int } M$ ($M = \text{clos } M$). Der Rand ∂M und die Abschließung $M \cup \partial M$ einer Menge M sind stets abgeschlossen, und ihr Inneres $\text{int } M$ ist stets offen. Weiter ist $\text{int } M \cap \partial M = \emptyset$. Die Mengen \mathbb{R}^n und \emptyset sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Schließlich ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus M$ abgeschlossen (offen) ist. Man kann auch leicht zeigen, dass der Durchschnitt und die Vereinigung jeweils endlich vieler offener (abgeschlossener) Mengen wieder offen (abgeschlossen) ist.

Beispiele Die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ ist abgeschlossen, jedoch nicht beschränkt, und somit nicht kompakt. Die Menge $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 < \varepsilon^2\} = U_\varepsilon(0)$ ist offen und beschränkt. Ihr Rand ist die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = \varepsilon^2\}$. Also ist M nicht abgeschlossen. Die Abschließung von M ist

$$\text{clos } M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq \varepsilon^2\},$$

und diese Menge ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Schließlich ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b, c \leq x_2 \leq d\}$ eine Menge, die weder offen noch abgeschlossen ist. ■

13.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Ordnet man jeder Zahl $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ zu, so entsteht eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n . Völlig analog zu reellen Folgen trifft man die folgende Definition.

Definition 13.4 Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n heißt konvergent, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so,

dass $\|x_k - x\| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. In diesem Fall ist x eindeutig bestimmt und heißt Grenzwert der Folge (x_k) . Bezeichnung:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \quad \text{oder} \quad x_k \rightarrow x \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

Satz 13.5 Eine Folge (x_k) im \mathbb{R}^n mit $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ ist genau dann konvergent und hat den Grenzwert $x = (x_1, \dots, x_n)$, wenn für jedes $i = 1, \dots, n$ die Folge $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ der i -ten Komponenten konvergiert und ihr Grenzwert gleich x_i ist.

Um die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren auf Konvergenz zu untersuchen, muss man also jede der n Zahlenfolgen $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, n$, auf Konvergenz untersuchen. Dazu lassen sich die in Abschnitt 2 festgehaltenen Konvergenzaussagen für Zahlenfolgen heranziehen. Beispielsweise ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}, \sqrt[n]{n}, \frac{\sin n}{n} \right) = (1, 1, 0),$$

da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \quad \blacksquare$$

Sei D eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^n . Eine Vorschrift f , die jedem $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ genau eine reelle Zahl $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ zuordnet, heißt eine *reelle Funktion der n reellen Veränderlichen* x_1, \dots, x_n . Zumindest für $n = 2$ läßt sich der Graph von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Menge

$$\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D, y = f(x_1, x_2)\},$$

noch gut im x_1, x_2, y -Koordinatensystem veranschaulichen („Gebirge“ über D). Hilfreich ist oft auch die Betrachtung der Niveaumengen („Höhenlinien“)

$$\{(x_1, x_2) \in D : f(x_1, x_2) = c\},$$

auf denen f den konstanten Wert c annimmt.

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn jede Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte aus M enthält. Der Punkt x_0 selbst muss nicht zu M gehören. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von M , so gibt es eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten aus $M \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Ist $x_0 \in M$ kein Häufungspunkt von M , so heißt x_0 ein *isolierter Punkt* von M . So ist jeder Punkt aus $[a, b]$ ein Häufungspunkt von $M = (a, b)$, und 1 ist ein isolierter Punkt von $M = \mathbb{N}$.

Definition 13.6 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, und x_0 sei ein Häufungspunkt von D . Wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$ existiert und gleich c ist, so nennen wir c den Grenzwert von f an der Stelle x_0 und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow c \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0.$$

Man beachte, dass x_0 nicht zu D gehören muss und dass f an der Stelle x_0 nicht definiert sein muss.

Beispiel 1 Sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

(wobei wir wie üblich (x, y) statt (x_1, x_2) schreiben). Dann ist $(0, 0)$ ein Häufungspunkt von D und $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Für jede Folge (x_k, y_k) mit $(x_k, y_k) \neq (0, 0)$ und Grenzwert $(0, 0)$ ist nämlich

$$|f(x_k, y_k) - 0| = \left| \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| = |y_k^2| \left| \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| \leq |y_k^2| \rightarrow 0$$

für $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$. ■

Beispiel 2 Sei D wie in Beispiel 1 und

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Dann hat f an der Stelle $(0, 0)$ keinen Grenzwert. Für die Folge $((\frac{1}{k}, 0))_{k \in \mathbb{N}}$ ist nämlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1/k)^2 - 0}{(1/k)^2 + 0} = 1,$$

während für die Folge $((\frac{1}{k}, \frac{1}{k}))_{k \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1/k)^2 - (1/k)^2}{(1/k)^2 + (1/k)^2} = 0.$$

Beide Grenzwerte existieren, sind aber voneinander verschieden. ■

Definition 13.7 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert x_0 gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$. Die Funktion f heißt stetig auf D , wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Ist x_0 ein isolierter Punkt von D , so ist dort jede Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D , so ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig in x_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

Beispiele Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist stetig in $x_0 = (0, 0)$ nach Beispiel 1, während nach Beispiel 2 die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

unstetig an der Stelle $(0, 0)$ ist. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sind beide Funktionen stetig. ■

Die uns bekannten Aussagen über stetige Funktionen von einer Veränderlichen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen übertragen.

Satz 13.8 *Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, so sind auch die Funktionen cf mit $c \in \mathbb{R}$, $f + g$, fg und $-$ falls $g(x_0) \neq 0$ $- f/g$ stetig an der Stelle x_0 . Auch die Verkettung (Hintereinanderausführung) stetiger Funktionen ist wieder stetig.*

Satz 13.9 *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und D kompakt. Dann ist die Funktion f beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es gibt Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{für alle } x \in D.$$

13.3 Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, so schreiben wir statt $f(x)$ auch $f(x_1, \dots, x_n)$. Die Definition der Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

läßt sich nicht unmittelbar auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen, da eine Division durch $x - x_0$ nicht erklärt ist. Man kann aber analog eine *partielle Differentiation* erklären, wenn man alle Variablen bis auf eine konstant hält und die resultierende Funktion nach eben dieser Variablen ableitet.

Definition 13.10 *Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ partiell differenzierbar nach x_k , $k = 1, \dots, n$, falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die partielle Ableitung von f nach x_k an der Stelle x^0 und wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ oder $f_{x_k}(x^0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt partiell differenzierbar in x^0 (auf D), wenn in x^0 (in jedem Punkt von D) alle partiellen Ableitungen existieren. Ist außerdem jede dieser partiellen Ableitungen stetig in x^0 (auf D), so heißt f stetig partiell differenzierbar in x^0 (auf D).

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar an der Stelle $x^0 \in D$, so heißt

$$(\text{grad } f)(x^0) := (f_{x_1}(x^0), \dots, f_{x_n}(x^0))$$

der Gradient von f an der Stelle x^0 . Statt $\text{grad } f$ schreibt man auch ∇f (lies: Nabla).

Beispiel 3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Beim partiellen Differenzieren nach x betrachten wir y als Konstante. Wir können dann die bekannten Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlichen anwenden und erhalten

$$f_x(x, y) = 4x \quad \text{sowie} \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Analog erhält man für die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|,$$

dass sie auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ partiell differenzierbar ist und dass dort

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_{x_i}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}.$$

Insbesondere ist $(\text{grad } f)(x) = x/\|x\|$ für $x \neq 0$. ■

Beispiel 4 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{falls } (x, y) \neq (0, 0).$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ finden wir die partiellen Ableitungen sofort:

$$f_x(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^3}, \quad f_y(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} - 4 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

An der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ arbeiten wir mit Definition [13.10](#):

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Also ist f auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar. Wegen

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n^2)}{(2/n^2)^2} = \frac{n^2}{4} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist f aber nicht stetig in $(0, 0)$. Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt also *nicht* die Stetigkeit. ■

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ wieder eine Funktion von D nach \mathbb{R} . Ist diese partiell differenzierbar nach x_ℓ , ergeben sich *partielle Ableitungen zweiter Ordnung*, die wir mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(x) \quad \text{oder} \quad f_{x_k x_\ell}(x)$$

bezeichnen. Analog werden partielle Ableitungen höherer Ordnung erklärt und bezeichnet.

Beispiel 5 Für die erste Funktion aus Beispiel 3 ist

$$f_{xx}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0, \quad f_{yy}(x, y) = 2.$$

Interessanter ist die durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) := xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

auf ganz \mathbb{R}^2 erklärte Funktion. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$f_x(x, y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

und für $(x, y) = (0, 0)$ findet man

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Für die gemischten zweiten Ableitungen in $(0, 0)$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h - 0}{h} = -1, \\ f_{yx}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

■

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen darf i.Allg. also nicht vertauscht werden. Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen dieses Vertauschen erlaubt ist.

Satz 13.11 (H.A. Schwarz) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^0 \in D$. Alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sollen auf D existieren. Außerdem existiere die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}$ auf D , und diese sei in x^0 stetig. Dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}$ in x^0 , und es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(x^0).$$

13.4 Differenzierbarkeit

Bei der partiellen Differenzierbarkeit wird das Verhalten einer Funktion nur in Richtung der Koordinatenachsen untersucht. Das führt u.a. dazu, dass der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit sehr schwach ist und nicht einmal die Stetigkeit der Funktion garantiert (Beispiel 4). Wir sehen uns nun einen stärkeren und für viele Zwecke geeigneten Differentiationsbegriff an. Dazu wiederholen wir die Definition der Ableitung einer Funktion von einer reellen Veränderlichen:

$$f'(x^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h}.$$

Wir schreiben $\alpha := f'(x^0)$ und setzen

$$r(h) := \begin{cases} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h} - \alpha & \text{für } h \neq 0 \\ 0 & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Dann ist r eine in einer Umgebung von 0 stetige Funktion mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0, \tag{13.1}$$

und es gilt

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \alpha h + hr(h). \tag{13.2}$$

Gilt umgekehrt die Identität (13.2) mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und mit einer in einer Umgebung von 0 definierten Funktion r mit der Eigenschaft (13.1), so ist f differenzierbar an der Stelle x^0 , und $f'(x^0) = \alpha$. Die Identität (13.2) läßt sich ohne Schwierigkeiten auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen und liefert dann einen geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff. Dazu interpretieren wir (13.2) wie folgt: Lokal (d.h. mit $x^0 = 0$, $f(x^0) = 0$) geht (13.2) über in

$$f(h) = \alpha h + hr(h), \tag{13.3}$$

wobei $hr(h)$ schneller als h gegen 0 strebt, wenn $h \rightarrow 0$. Dies kann man verstehen als eine Approximation von f durch die *lineare* Funktion $h \mapsto \alpha h$. Dies kann man offenbar auf Funktionen von mehreren Veränderlichen und sogar auf Funktionen übertragen, deren Werte Vektoren sind, die also von einer Teilmenge D des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m abbilden. Solche Funktionen heißen auch *Vektorfelder*. Als Beispiel stellen wir uns eine durch ein Rohr strömende Flüssigkeit vor. Ordnet man jedem Punkt x im Inneren des Rohres den Geschwindigkeitsvektor des an dieser Stelle befindlichen Flüssigkeitsteilchens zu, so erhält man ein Vektorfeld. Auch das elektrische Feld ist ein Vektorfeld. Ist schließlich $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist die Funktion $F(x) := (\text{grad } f)(x)$ ein Vektorfeld von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n . Ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ schreiben wir oft als

$$F = (F_1, \dots, F_m)^T$$

mit Funktionen $F_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen Satz 13.15 ist ein Vektorfeld $F = (F_1, \dots, F_m)^T$ genau dann stetig, wenn jede Funktion F_i stetig ist.

Definition 13.12 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x^0 \in D$. Die Funktion F heißt differenzierbar an der Stelle x^0 , wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (eine $m \times n$ -Matrix) sowie eine in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ so gibt, dass

$$F(x^0 + h) = F(x^0) + Ah + \|h\| r(h) \quad (13.4)$$

für alle $h \in U$ und

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0. \quad (13.5)$$

Die Ableitung einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann die lineare Abbildung A von \mathbb{R}^n auf \mathbb{R}^m , die durch eine $m \times n$ -Matrix beschrieben werden kann. Wir bezeichnen die Ableitung von $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x^0 \in D$ mit $F'(x^0)$ oder $(DF)(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x^0 \in D$ differenzierbar, so heißt F differenzierbar auf D .

Zwischen den eingeführten Differenzierbarkeitsbegriffen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccc} F \text{ stetig partiell} & \Rightarrow & F \text{ differenzierbar} & \Rightarrow & F \text{ partiell} \\ \text{differenzierbar} & & & & \text{differenzierbar} \\ & & \Downarrow & & \\ & & F \text{ stetig} & & \end{array}$$

Die Aussage, die sich hinter dem rechten dieser Implikationspfeile verbirgt, wird im folgenden Satz präziser beschrieben.

Satz 13.13 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F = (F_1, \dots, F_m)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x^0 \in D$ differenzierbar. Dann ist jede Funktion $F_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x^0 partiell differenzierbar, und die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $A = F'(x^0)$ aus (13.4) bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m ist

$$J_F(x^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}. \quad (13.6)$$

Die Matrix $J_F(x^0)$ heißt auch die *Jacobimatrix* oder *Funktionalmatrix* von F an der Stelle x^0 . Um die Differenzierbarkeit einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu überprüfen und ihre Ableitung zu berechnen, bietet sich der folgende Weg an: Man bestimmt die partiellen Ableitungen aller Komponenten F_i von F . Sind diese stetig, so ist F differenzierbar, und die Ableitung $F'(x_0)$ wird durch die Matrix $J_F(x^0)$ aus (13.6) beschrieben.

Beweis von Satz 13.13 Sei (13.4) mit $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r = (r_1, \dots, r_m)^T$ sowie $h = (h_1, \dots, h_n)^T$ erfüllt. Die i -te Zeile der Vektorgleichung (13.4) lautet dann

$$F_i(x^0 + h) = F_i(x^0) + \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j + \|h\| r_i(h), \quad \forall h \in U, \quad (13.7)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} r_i(h) = 0$ wegen $|r_i| \leq \|r\|$. Wir fixieren ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und wählen $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)^T = h_j \vec{e}_j$. Für kleine h_j liegen diese Vektoren in U , und (13.7) reduziert sich auf

$$F_i(x^0 + h_j \vec{e}_j) = F_i(x^0) + a_{ij} h_j + \|h\| r_i(h)$$

und für $h_j \neq 0$ auf

$$\frac{F_i(x^0 + h_j \vec{e}_j) - F_i(x^0)}{h_j} = a_{ij} + \frac{\|h\|}{h_j} r_i(h).$$

Wegen $|h_j| = \|h\|$ und $\lim_{h \rightarrow 0} r_i(h) = 0$ ist auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\|}{h_j} r_i(h) = 0,$$

und wir erhalten die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{F_i(x^0 + h_j \vec{e}_j) - F_i(x^0)}{h_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^0) = a_{ij}. \quad \blacksquare$$

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige differenzierbare Funktion, so ist

$$J_f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) = (\text{grad } f)(x^0).$$

Vernachlässigen wir für kleine h den Term $\|h\| r(h)$ in (13.4) (der ja schneller als h gegen 0 strebt), so erhalten wir eine lineare Approximation

$$f(\vec{x}) \approx f(x^0) + (\text{grad } f)(x^0) (\vec{x} - x^0) \quad (13.8)$$

mit $\vec{x} = x^0 + h$ und $h = \vec{x} - x^0$. Im Fall $n = 2$ schreiben wir \vec{x} als (x, y) und x^0 als (x_0, y_0) und erhalten speziell

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (13.9)$$

für alle (x, y) , die nahe bei (x_0, y_0) liegen. Durch die rechte Seite von (13.9) wird die Ebene

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

im \mathbb{R}^3 festgelegt. Dies ist die *Tangentialebene* an den Graphen der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (den man sich als Fläche über der xy -Ebene vorstellt) im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Mit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ und $dx_k := x_k - x_k^0$ schreibt man den zweiten Summanden in (13.8) oft auch in symbolischer Form als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Dieser Ausdruck heißt das *vollständige Differential* von f und kann wie folgt interpretiert werden: Ändert man die x_k um dx_k , so ändert sich bei linearer Approximation unter Vernachlässigung von Fehlern höherer Ordnung f um df . Die wird oft zur Fehlerabschätzung bei Messprozessen ausgenutzt. Werden statt der wahren Werte x_1, \dots, x_n mit Fehlern behaftete Werte $\hat{x}_k = x_k + \Delta x_k$, $k = 1, \dots, n$, gemessen, so lässt sich der Fehler

$$\Delta f = f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

im Funktionswert abschätzen durch

$$|\Delta f| \approx \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| |\Delta x_k|,$$

wobei Fehler höherer Ordnung ignoriert werden. Sind Schranken $|\Delta x_k| \leq s_k$ für die Meßfehler bekannt, erhalten wir

$$|\Delta f| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| s_k.$$

Beispiel 6 In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathedenlängen x und y ist die Länge der Hypothenuse gleich $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wegen

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

wird die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ beschrieben durch die Gleichung

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (x - x_0) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} (y - y_0),$$

und das vollständige Differential von f lautet

$$df = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

Messen wir statt der wahren Kathedenlängen x_0, y_0 die Werte $x_0 + \Delta x$ und $y_0 + \Delta y$, so ist der resultierende Fehler bei linearer Approximation gleich

$$\Delta f \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y = \frac{x_0 \Delta x + y_0 \Delta y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \quad \blacksquare$$

Wir kommen nun zu Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 13.14 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in D$ differenzierbar. Dann ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in x differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Produkt- und Quotientenregel vermerken wir nur für skalarwertige Funktionen.

Satz 13.15 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar. Dann sind auch $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ und, falls $g(x) \neq 0$, f/g in x differenzierbar, und es ist

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x), \\ (f/g)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Satz 13.16 (Kettenregel) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ seien Funktionen mit $g(U) \subseteq V$. Ist g in $x \in U$ und f in $g(x)$ differenzierbar, so ist die verkettete Funktion $f \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ in x differenzierbar, und es gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x) \quad \text{bzw.} \quad J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x)) J_g(x).$$

Die Ableitung einer verketteten Funktion ist also gleich der Verkettung (Hintereinanderausführung) der Ableitungen. Für die Jacobimatrizen ist somit das Matrixprodukt zu bilden.

Beispiel 7 Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = e^{xy}$ und $G : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $G = (G_1, G_2)^T$ mit $G_1(x, y) = x \cos y$ und $G_2(x, y) = x \sin y$. Sei $H : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gleich $F \circ G$ (d.h. $H(x, y) = F(G(x, y))$). Dann sind die Funktionalmatrizen von F und G gleich

$$J_F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

und

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\begin{aligned}J_F(G(x, y)) &= (x \sin y e^{x^2 \sin y \cos y}, x \cos y e^{x^2 \sin y \cos y}) \\ &= x e^{x^2 \sin y \cos y} (\sin y, \cos y)\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}J_H(x, y) &= J_F(G(x, y)) J_G(x, y) \\ &= x e^{x^2 \sin y \cos y} (\sin y, \cos y) \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \\ &= x e^{x^2 \sin y \cos y} (2 \sin y \cos y, -x(\sin^2 y - \cos^2 y)).\end{aligned}$$

■

13.5 Richtungsableitungen

Definition 13.17 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $\|v\| = 1$. Man sagt, dass f im Punkt x eine Ableitung in Richtung des Vektors v besitzt, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

existiert. Dieser heißt dann die Richtungsableitung von f in Richtung v und wird mit $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ (manchmal auch mit $f'(x, v)$) bezeichnet.

Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist also eine spezielle Richtungsableitung in Richtung des Koordinateneinheitsvektors \vec{e}_i .

Satz 13.18 Seien D, f, x wie in Definition 13.17, und sei f in x differenzierbar. Dann existiert für jeden Einheitsvektor $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in Richtung v im Punkt x , und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n. \quad (13.10)$$

Beweis Für hinreichend kleines t ist in den Bezeichnungen von Definition 13.12 von $f'(x)$

$$\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} = \frac{f'(x) \cdot tv + \|tv\| r(tv)}{t} = f'(x) \cdot v + \frac{|t|}{t} r(tv).$$

Aus $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} r(tv) = 0$ folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe des Gradienten $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ und des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ können wir (13.10) auch schreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle (\text{grad } f)(x), v \rangle. \quad (13.11)$$

Führt man wie im \mathbb{R}^2 den Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi$ ein, so folgt für $(\text{grad } f)(x) \neq 0$ für den Winkel φ zwischen $(\text{grad } f)(x)$ und v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \|(\text{grad } f)(x)\| \cdot \cos \varphi.$$

Folgerung 13.19 Seien D, f, x wie in Definition 13.17 und sei $(\text{grad } f)(x) \neq 0$. Dann nimmt die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ihren größten Wert für $\cos \varphi = 1$ bzw. $\varphi = 0$ an, d.h. wenn $(\text{grad } f)(x)$ und v in die gleiche Richtung zeigen. Der Gradient von f zeigt also in Richtung des steilsten Anstiegs von f in x .

13.6 Mittelwertsatz und Satz von Taylor

Der Mittelwertsatz für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sagt, dass man für zwei Punkte $a < b$ einen Punkt $\xi \in (a, b)$ findet, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a). \quad (13.12)$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass für vektorwertige Funktionen der Mittelwertsatz in dieser Form *nicht* gelten kann.

Beispiel 8 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = (\cos x, \sin x)^T$. Dann ist $f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$ und nach Pythagoras

$$\|f'(x)\| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

für alle x . Es gibt deshalb *kein* $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot 2\pi. \quad \blacksquare$$

Für *reellwertige* Funktionen auf \mathbb{R}^n gilt der Mittelwertsatz jedoch in der gewohnten Form.

Satz 13.20 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf D . Weiter sei $x + th \in D$ für alle $t \in [0, 1]$ (d.h. die Verbindungsstrecke von x nach $x + h$ liege komplett in D). Dann gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ mit

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \tau h)h.$$

Zum Beweis schränkt man die Funktion f auf die Strecke $[x, x + h] = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + th \text{ mit } t \in [0, 1]\}$ ein, betrachtet die Funktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + th) \quad (13.13)$$

und wendet auf diese den Mittelwertsatz (13.12) und die Kettenregel an. \blacksquare

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ ist die folgende Version des Mittelwertsatzes die nächstbeste.

Satz 13.21 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf D und $x + th \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + \tau h)h \, d\tau. \quad (13.14)$$

Dabei ist das Integral über die vektorwertige Funktion $\tau \mapsto f'(x + \tau h)h$ komponentenweise zu berechnen. Der Mittelwertsatz in der Form (13.14) ist oft nützlich,

wenn man $\|f(x+h) - f(x)\|$ abschätzen möchte. Der Beweis ist wieder ganz einfach. Mit der Funktion g aus (13.13) ist

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\tau) d\tau,$$

und nach der Kettenregel ist $g'(\tau) = f'(x + \tau h) \cdot h$. ■

Wir lernen nun den Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher kennen. Dabei beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen. Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein, die uns helfen, die Übersicht über die zahlreichen Summanden in der Taylorentwicklung zu behalten.

Ein *Multiindex* ist ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ seine *Ordnung* und $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$ seine *Fakultät*. Für jede $|\alpha|$ -mal partiell differenzierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kürzen wir die partiellen Ableitungen mit

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ab, und für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Satz 13.22 (Satz von Taylor) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar, und sei $x + th \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ so, dass

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(x) h^\alpha}_{\text{Taylorpolynom der Ordnung } k} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{(D^\alpha f)(x + \tau h)}{\alpha!} h^\alpha}_{\text{Restglied}}.$$

Beispiel 9 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \sin(x + 2y)$. Dann ist

$$f_x(x, y) = \cos(x + 2y), \quad f_y(x, y) = 2 \cos(x + 2y)$$

$$f_{xx}(x, y) = -\sin(x + 2y), \quad f_{xy}(x, y) = -2 \sin(x + 2y), \quad f_{yy} = -4 \sin(x + 2y),$$

und der Satz von Taylor für die Ordnung 1 liefert mit $h = (h_1, h_2)$

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + f_x(x, y)h_1 + f_y(x, y)h_2 + R$$

bzw.

$$\sin(x + h_1 + 2(y + h_2)) = \sin(x + 2y) + \cos(x + 2y)h_1 + 2\cos(x + 2y)h_2 + R$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}(h_1^2 f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) + 2h_1 h_2 f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) + h_2^2 f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= -\frac{\sin(\bar{x} + 2\bar{y})}{2}(h_1^2 + 4h_1 h_2 + 4h_2^2) \end{aligned}$$

mit $\bar{x} = x + \tau h_1$, $\bar{y} = y + \tau h_2$ mit einem $\tau \in (0, 1)$. ■

Beispiel 10 Wir bestimmen das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{x^2 + \cos y}$$

im Punkt $(0, 0)$. Dieses ist gleich (mit $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ und $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$)

$$\begin{aligned} f(0, 0) + (D_1 f)(0, 0)h_1 + (D_2 f)(0, 0)h_2 + \frac{1}{2}(D_1^2 f)(0, 0) \cdot h_1^2 \\ + \frac{1}{2}(D_2^2 f)(0, 0)h_2^2 + (D_1 D_2 f)(0, 0)h_1 h_2. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f bis zur 2. Ordnung sind

$$\begin{aligned} (D_1 f)(x, y) &= 2x e^{x^2 + \cos y} && \Rightarrow && (D_1 f)(0, 0) &= 0, \\ (D_2 f)(x, y) &= -\sin y e^{x^2 + \cos y} && \Rightarrow && (D_2 f)(0, 0) &= 0, \\ (D_1^2 f)(x, y) &= (2 + 4x^2)e^{x^2 + \cos y} && \Rightarrow && (D_1^2 f)(0, 0) &= 2e, \\ (D_2^2 f)(x, y) &= (-\cos y + \sin^2 y)e^{x^2 + \cos y} && \Rightarrow && (D_2^2 f)(0, 0) &= -e, \\ (D_1 D_2 f)(x, y) &= -2x \sin y e^{x^2 + \cos y} && \Rightarrow && (D_1 D_2 f)(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$(h_1, h_2) \mapsto e + eh_1^2 - \frac{e}{2} h_2^2. \quad \blacksquare$$

Wir sehen uns die Bestandteile $P_m(h) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha$ des Taylorpolynoms für $m = 0, 1, 2$ genauer an.

$m = 0$: Dann ist $\alpha = (0, \dots, 0)$ und $P_0(h) = f(x)$ (konstantes Polynom).

$m = 1$: Die einzigen n -Tupel $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 1$ sind genau die Tupel $\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mit der 1 an der i -ten Stelle. Wegen $D^{\alpha_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\alpha_i! = 1$ und $h^{\alpha_i} = h_i$ ist

$$P_1(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle (\text{grad } f)(x), h \rangle.$$

$m = 2$: Man rechnet leicht nach, dass

$$P_2(h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f \right)(x) h_i h_j.$$

Um dies kürzer zu schreiben, bezeichnen wir für jede zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ die $n \times n$ -Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right)_{i,j=1}^n$$

mit $(\text{Hess } f)(x)$ und nennen sie die *Hesse-Matrix* oder den *Hessian* von f .

Sind die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig, so ist $(\text{Hess } f)(x)$ eine symmetrische Matrix (Satz von Schwarz). Mit dieser Matrix ist

$$P_2(h) = \frac{1}{2} \langle (\text{Hess } f)(x) h, h \rangle.$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 13.22 mit $k = 2$ können wir das Taylorpolynom 2. Ordnung von f also schreiben als

$$h = (h_1, \dots, h_n) \mapsto c + \langle a, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$$

mit $c = f(x)$, $a = (\text{grad } f)(x)$ und $A = (\text{Hess } f)(x)$. ■

13.7 Lokale Extrema

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x^{(0)} \in D$ ein *globales* (oder *absolutes*) *Maximum*, wenn $f(x^{(0)}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$. Die Funktion f hat in $x^{(0)}$ ein *lokales* (oder *relatives*) *Maximum*, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von $x^{(0)}$ gibt, so dass $f(x^{(0)}) \geq f(x)$ für alle x aus U . Analog definiert man globale und lokale Minima. Das Wort „lokal“ weist darauf hin, dass an dieser Stelle ein Extremum nur bezüglich einer (nicht näher bestimmten) Umgebung von $x^{(0)}$ vorliegt. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen besitzen stets ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir sehen uns nun lokale Extrema differenzierbarer Funktionen an.

Satz 13.23 (Notwendige Bedingung) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Besitzt f in $x^{(0)} \in D$ ein lokales Extremum, so ist

$$(\text{grad } f)(x^{(0)}) = 0, \tag{13.15}$$

d.h. alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ sind gleich Null.

Ist (13.15) erfüllt, heißt $x^{(0)}$ auch ein *stationärer Punkt*. Stationäre Punkte, die keine Extrema sind, sind z. B. *Sattelpunkte*. Um zu prüfen, ob ein stationärer Punkt tatsächlich ein lokales Extremum ist, zieht man wieder die zweiten Ableitungen zu Rate.

Satz 13.24 (Hinreichende Bedingung) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen, und sei $x^{(0)} \in D$ ein stationärer Punkt von f , d.h. $(\text{grad } f)(x^{(0)}) = 0$. Dann gilt:

- a) ist $(\text{Hess } f)(x^{(0)})$ positiv definit, so hat f in $x^{(0)}$ ein lokales Minimum.
- b) ist $(\text{Hess } f)(x^{(0)})$ negativ definit, so hat f in $x^{(0)}$ ein lokales Maximum.
- c) ist $(\text{Hess } f)(x^{(0)})$ indefinit, so hat f in $x^{(0)}$ kein lokales Extremum.

Ist $(\text{Hess } f)(x^{(0)})$ nur (positiv oder negativ) semidefinit, so ist keine Entscheidung möglich an Hand der ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Für Funktionen von zwei reellen Veränderlichen kann Satz 13.24 auch wie folgt formuliert werden.

Satz 13.25 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, und in $(x_0, y_0) \in D$ sei $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Ist

$$(f_{xy}(x_0, y_0))^2 < f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0), \quad (13.16)$$

so hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, und ein lokales Maximum, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

Gilt in (13.16) das Zeichen $>$, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Beispiel 11

- a) Sei $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ auf \mathbb{R}^2 . Dann ist

$$f_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad f_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Also ist $x^{(0)} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ein stationärer Punkt und sogar ein lokales Maximum, da $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1 < 0$ und

$$(f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))^2 = \cos^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0 < 1 = f_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) f_{yy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- b) Wir suchen alle lokalen Extrema von $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ auf \mathbb{R}^2 . Wegen $f_x(x, y) = 3x^2 - 12y$ und $f_y(x, y) = 24y^2 - 12x$ ergeben sich alle stationären (also extremwertverdächtigen) Punkte von f aus

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \text{und} \quad 24y^2 - 12x = 0.$$

Einsetzen von $y = \frac{1}{4}x^2$ (aus der ersten Gleichung) in die zweite Gleichung ergibt $\frac{1}{8}x^4 = x$. Diese Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$x_0 = 0$ und $x_1 = 2$. Hieraus erhält man mit der ersten Gleichung $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$. Demnach sind $(0, 0)$ und $(2, 1)$ die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen. Nun ist

$$(f_{xy}(0, 0))^2 = (-12)^2 = 144 > 0 = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0)$$

so dass $(0, 0)$ kein lokales Extremum von f ist. Dagegen ist

$$(f_{xy}(2, 1))^2 = (-12)^2 = 144 < 576 = 12 \cdot 48 = f_{xx}(2, 1)f_{yy}(2, 1)$$

und $f_{xx}(2, 1) = 12 > 0$, so dass in $(2, 1)$ ein lokales Minimum vorliegt.

c) Für die auf \mathbb{R}^3 durch

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + 2$$

definierte Funktion ist an der Stelle $x^{(0)} = (0, 0, 0)$

$$(\text{grad } f)(0, 0, 0) = (2x + y - z, 2y + x, 2z - x) |_{(0,0,0)} = (0, 0, 0).$$

Also ist $(0, 0, 0)$ ein stationärer Punkt. Weiter ist

$$(\text{Hess } f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, und diese Matrix ist positiv definit, wie man mit dem Hurwitzkriterium (Satz 11.22) leicht überprüft:

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0.$$

Also liegt in $(0, 0, 0)$ ein lokales Minimum von f vor. ■

Um globale Extrema von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zu bestimmen, sucht man zunächst die lokalen Extrema im Inneren von D und untersucht dann noch das Verhalten von f in der Nähe des Randes von D .

13.8 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten nun Integrale, deren Integrand f neben der Integrationsvariablen x noch von einem Parameter y abhängt. Das Resultat der Integration ist dann ebenfalls von y abhängig, so dass durch

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

eine Funktion g definiert wird. Wir untersuchen die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von g und lernen dabei weitere Aussagen über das Vertauschen von Grenzprozessen kennen.

Satz 13.26 Die Funktion $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, und sei

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{für } y \in [c, d].$$

Dann gilt

- a) Die Funktion g ist stetig auf $[c, d]$.
 b) Die Funktion g ist Riemann-integrierbar auf $[c, d]$, und

$$\int_c^d g(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

- c) Ist f auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $[a, b] \times [c, d] \subseteq U$ definiert und stetig, und besitzt f auf U eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, so ist g auf $[c, d]$ differenzierbar, und

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

In (b) darf man also die Integrationsreihenfolge vertauschen, und in (c) Differentiation und Integration.

Wir geben noch eine Verallgemeinerung der letzten Aussage dieses Satzes an, bei der auch die Integrationsgrenzen vom Parameter y abhängen dürfen.

Satz 13.27 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge mit $[a, b] \times [c, d] \subseteq U$, und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach y auf U . Weiter seien $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, $\psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(y) \leq \psi(y)$ für alle $y \in [c, d]$. Schließlich sei

$$g(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad \text{für } y \in [c, d].$$

Dann ist g differenzierbar auf $[c, d]$, und es ist

$$\frac{dg}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y).$$

Beispiel 12 Sei $f(x, y) = e^{xy}$ für $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$. Da f stetig ist, ist auch die Funktion

$$g(y) = \int_0^1 e^{xy} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } y = 0 \\ \frac{e^y - 1}{y} & \text{für } y \in [-1, 1] \setminus \{0\} \end{cases}$$

stetig. Da außerdem $\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$ auf \mathbb{R}^2 stetig ist, ist g differenzierbar auf $[-1, 1]$ mit

$$\frac{dg}{dy} = \int_0^1 x e^{xy} dx = \begin{cases} 1/2 & \text{für } y = 0 \\ \frac{(y-1)e^y + 1}{y^2} & \text{für } y \in [-1, 1] \setminus \{0\}. \end{cases}$$

■

Beispiel 13 Für $|t| < 1$ berechnen wir das Integral

$$F(t) := \int_0^\pi \ln(1 - 2t \cos x + t^2) dx. \quad (13.17)$$

Um Satz 13.26 benutzen zu können, wählen wir ein $a \in (0, 1)$ mit $t \in [-a, a]$. Die Funktion

$$f(x, t) = \ln(1 - 2t \cos x + t^2)$$

ist nach t stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{2t - 2 \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} \quad \text{auf } [0, \pi] \times [-a, a].$$

Aus Satz 13.26 (c) folgt

$$F'(t) = \int_0^\pi \frac{2t - 2 \cos x}{1 - 2t \cos x + t^2} dx.$$

Zur Berechnung dieses Integrals substituieren wir

$$s := \tan \frac{x}{2} \quad \text{bzw.} \quad x = 2 \arctan s.$$

Dann ist $\frac{dx}{ds} = \frac{2}{1+s^2}$ bzw. (formal) $dx = \frac{2ds}{1+s^2}$ sowie

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}.$$

Das gesuchte Integral geht über in

$$\int_0^\pi \frac{2t - 2 \frac{1-s^2}{1+s^2}}{1 - 2t \frac{1-s^2}{1+s^2} + t^2} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds = 4 \int_0^\infty \frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2 s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2} ds.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$4 \frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t^2)s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2} = \frac{2}{t} \left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{t^2 - 1}{(1+t)^2 s^2 + (1-t)^2} \right),$$

und mit dem Grundintegral

$$\int \frac{1}{ax^2 + c} dx = \frac{1}{\sqrt{ac}} \arctan \sqrt{\frac{a}{c}} x \quad \text{für } ac > 0$$

erhalten wir

$$F'(t) = \frac{2}{t} \left(\arctan s - \arctan \left(\frac{1+t}{1-t} s \right) \right) \Big|_0^\infty = 0$$

(man beachte, dass $\arctan 0 = 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} \arctan s = \frac{\pi}{2}$). Also ist F eine *konstante Funktion*, und wir bestimmen ihren (einzigen) Wert, indem wir in (13.17) $t = 0$ setzen:

$$F(t) = F(0) = \int_0^\pi \ln 1 \, dx = 0. \quad \blacksquare$$

13.9 Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen

Eine der typischen Aufgaben der Mathematik ist das Lösen von Gleichungen. Sind X, Y geeignete Mengen und ist $F : X \rightarrow Y$ eine entsprechende Abbildung, so sind in Verbindung mit der Gleichung $F(x) = y$ mit $y \in Y$ folgende Fragen von Interesse:

- Für welche $y \in Y$ hat die Gleichung $F(x) = y$ eine Lösung $x \in X$?
- Wenn die Gleichung $F(x) = y$ für ein $y \in Y$ lösbar ist, wieviele Lösungen hat sie dann?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ für alle $y \in Y$ eindeutig lösbar ist, wie hängen dann die Lösungen x von der rechten Seite y ab? Ist diese Abhängigkeit stetig oder sogar differenzierbar?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ mehrere Lösungen besitzt, wie kann man die Lösungsmenge geeignet darstellen?
- Wie findet man Lösungen?

Die erste Frage ist eng mit der Surjektivität von F verknüpft, und die zweite mit der Injektivität. Ist F surjektiv und injektiv (also bijektiv), so besitzt F eine Umkehrabbildung F^{-1} , und der dritte Punkt fragt nach der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von F^{-1} . Die vierte Frage führt auf den Begriff der *Mannigfaltigkeit*, den wir hier nicht besprechen.

Wir werden nun sehen, wie die uns zugänglichen Mittel der Analysis bei der Beantwortung der Fragen 1 – 3 helfen.

Zunächst betrachten wir Abbildungen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt $F(x) = y$ können wir natürlich auch $F(x) - y = 0$ schreiben, so dass die Gleichung $F(x) = y$ ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Aufgabenstellung wird. Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei reellen Veränderlichen. Wir betrachten das Problem, die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y aufzulösen. (Diese Bezeichnungen haben sich so eingebürgert. Natürlich möchten wir $F(x) = y$ nach x auflösen, so dass man die Variablen umbenennen müsste.)

Wir suchen also eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Intervall I , so dass für alle $x \in I$ gilt $g(x, f(x)) = 0$. Im Falle der Existenz einer solchen Funktion f haben wir durch $y = f(x), x \in I$, eine Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ gegeben. Man sagt auch, dass die Funktion f durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ *implizit* festgelegt wird.

Satz 13.28 Sei $g : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion. Weiter sei $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $U \subseteq (a, b)$ um x_0 , ein Intervall $V \subseteq (c, d)$ um y_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow V$ mit $f(x_0) = y_0$ und $g(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Wählt man U so klein, dass $g_y(x, f(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$, so gilt weiter

$$f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))} \quad \text{für } x \in U. \quad (13.18)$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist die Gleichung $g(x, y) = 0$ um (x_0, y_0) *lokal* nach y auflösbar. Es ist dabei bemerkenswert, dass $f'(x_0)$ bestimmt werden kann, ohne f explizit zu kennen:

$$f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

Die Identität (13.18) folgt leicht durch Anwendung der Kettenregel auf die Gleichung $g(x, f(x)) = 0$:

$$g_x(x, f(x)) \cdot 1 + g_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

Beispiel 14 Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Gleichung $g(x, y) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn (x, y) auf der Einheitskreislinie um $(0, 0)$ liegt. Für $x \notin [-1, 1]$ hat $g(x, y) = 0$ daher keine Lösung. Für $x = \pm 1$ gibt es natürlich die eindeutig bestimmte Lösung $y = 0$, man kann aber die Lösungen in einer Umgebung von $x = +1$ bzw. $x = -1$ nicht als eine *Funktion* von x darstellen (Warum?).

Schließlich gibt es für jeden Punkt $x \in (-1, 1)$ zwei Lösungen von $g(x, y) = 0$, nämlich $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ und $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Betrachten wir dagegen die Gleichung $g(x, y) = 0$ nur für solche (x, y) , die in einer $\frac{1}{2}$ -Umgebung von $(0, 1)$ liegen so existiert in dieser Umgebung genau eine Lösung, nämlich $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Man beachte, dass $g_y(0, 1) = 2 \neq 0$ aber $g_y(1, 0) = 0$. Aus (13.18) erhalten wir

$$f'(x) = -\frac{2x}{2f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für } x \in (-1/2, 1/2)$$

was man natürlich auch leicht direkt nachrechnet. Man beachte, dass es für dieses Beispiel einfach war, eine Umgebung von $x_0 = 0$ anzugeben, auf der y durch

x eindeutig bestimmt ist (während Satz 13.28 nur die Existenz einer solchen Umgebung behauptet). ■

Für vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher kann man Satz 13.28 wie folgt verallgemeinern.

Satz 13.29 (Satz über implizite Funktionen) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und für $k = 1, \dots, m$ sei $g_k : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $(x_0, y_0) \in U \times V$ ein Punkt mit

$$g_k(x_0, y_0) = 0 \quad \text{für jedes } k$$

und mit

$$\det \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

so gibt es eine Umgebung $U' \subseteq U$ von x_0 , eine Umgebung $V' \subseteq V$ von y_0 , sowie m stetig differenzierbare Funktionen $f_j : U' \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = (f_1, \dots, f_m)^T : U' \rightarrow V'$ und

$$f(x_0) = (f_1(x_0), \dots, f_m(x_0))^T = y_0$$

sowie

$$g_k(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

für alle $k = 1, \dots, m$ und alle $(x_1, \dots, x_n) \in U'$.

Beispiel 15 Bei der Transformation kartesischer Koordinaten (x_1, x_2) in Polarkoordinaten (r, φ) ist $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$. Mit $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2) = (r, \varphi)$ haben wir

$$g_1(x, y) = x_1 - r \cos \varphi, \quad g_2(x, y) = x_2 - r \sin \varphi.$$

Für die Funktionaldeterminante gilt

$$\det \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} -\cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

Für $r \neq 0$ ist demnach (lokal) eine eindeutige Auflösung nach r und φ möglich. ■

Eine wichtige Folgerung aus Satz 13.29 ist der folgende Satz.

Satz 13.30 (Satz über die Umkehrfunktion) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar. Ist $f'(x_0)$ invertierbar für ein $x_0 \in U$, so ist f um x_0 lokal umkehrbar, d.h. es gibt Umgebungen $U' \subseteq U$ von x_0 und $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ von $f(x_0)$, so dass $f|_{U'} : U' \rightarrow V'$ eine Bijektion ist, und die lokale Umkehrfunktion ist ebenfalls einmal stetig partiell differenzierbar.

Für den Beweis wendet man Satz 13.29 auf die Funktion

$$g(x, y) = x - f(y)$$

an. ■

13.10 Extrema unter Nebenbedingungen

Im Abschnitt 13.7 haben wir lokale Extrema von Funktionen studiert, die auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert sind. Wir betrachten nun Situationen, die in praktischen Problemen viel häufiger auftreten: Wir untersuchen Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen.

Beispiel. Unter allen Rechtecken mit der Fläche 1 suchen wir das mit dem kleinsten Umfang. Bezeichnen wir die Seiten des Rechtecks mit x und y , so wollen wir die Funktion $f(x, y) = 2x + 2y$ unter der Nebenbedingung $xy = 1$ bzw. $g(x, y) := xy - 1 = 0$ minimieren. ■

Dabei wollen wir *vermeiden*, die Nebenbedingungen nach einer der Variablen umzuformen und in die zu minimierende Funktion einzusetzen, da dies in der Regel Schwierigkeiten bereitet. Wir lernen nun die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren* kennen, mit der die Schwierigkeiten des Umformens nach einer Variablen vermieden werden können.

Zunächst einige Begriffe. Wir suchen Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wobei die Menge der zulässigen Punkte $x = (x_1, \dots, x_n)$ durch eine Nebenbedingung der Form $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ eingeschränkt wird. Man nennt $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ eine *relative Maximalstelle (Minimalstelle) von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$* , wenn $g(x^{(0)}) = 0$ und wenn es eine Umgebung U von $x^{(0)}$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x^{(0)})$ (bzw. $f(x) \geq f(x^{(0)})$) für alle $x \in U$ mit $g(x) = 0$.

Zum Auffinden von Extremstellen unter Nebenbedingungen ist folgender Satz hilfreich.

Satz 13.31 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien einmal stetig partiell differenzierbar auf U . Hat die Funktion f an der Stelle $x^{(0)} \in U$ ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$, und sind nicht alle partiellen Ableitungen von g an der Stelle $x^{(0)}$ gleich 0, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$f_{x_i}(x^{(0)}) + \lambda g_{x_i}(x^{(0)}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (13.19)$$

Die Gleichungen (13.19) lassen sich zusammenfassen zu

$$(\text{grad } f)(x^{(0)}) + \lambda(\text{grad } g)(x^{(0)}) = 0.$$

Zur praktischen Bestimmung relativer Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ kann man wie folgt vorgehen. Man bildet eine Hilfsfunktion $L : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die neben x_1, \dots, x_n von einer reellen Variablen λ abhängt:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n).$$

Diese Funktion L heißt auch *Lagrange-Funktion*, und λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Nun betrachtet man das System der $n + 1$ Gleichungen.

$$\begin{aligned} L_{x_1}(x, \lambda) &= f_{x_1}(x) + \lambda g_{x_1}(x) = 0 \\ L_{x_2}(x, \lambda) &= f_{x_2}(x) + \lambda g_{x_2}(x) = 0 \\ &\vdots \\ L_{x_n}(x, \lambda) &= f_{x_n}(x) + \lambda g_{x_n}(x) = 0 \\ L_\lambda(x, \lambda) &= g(x) = 0. \end{aligned} \tag{13.20}$$

Auf dieses System wären wir auch gestoßen, wenn wir auf die übliche Weise die lokale Extrema der Lagrange-Funktion L bestimmen wollten. Jede Lösung $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda^{(0)})$ von (13.20) liefert nun einen *Kandidaten* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ für eine relative Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Ob ein solcher Kandidat tatsächlich eine relative Extremstelle unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ist, muss jeweils gesondert untersucht werden. Der Wert $\lambda^{(0)}$ ist dabei irrelevant.

Man kann die Methode der Lagrange-Multiplikatoren auch benutzen, wenn mehrere Nebenbedingungen $g_1(x) = 0, \dots, g_r(x) = 0$ zu erfüllen sind. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_r g_r(x).$$

■

Beispiel 16 In unserem Beispiel von oben ist $U = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $f(x, y) = 2x + 2y$ und $g(x, y) = xy - 1$ und $(\text{grad } g)(x, y) = (y, x) \neq 0$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 2y + \lambda(xy - 1),$$

und partielles Ableiten nach x, y und λ sowie Nullsetzen liefert

$$\begin{aligned} 2 + \lambda y &= 0 \\ 2 + \lambda x &= 0 \\ xy &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x = -\frac{2}{\lambda} = y$, und aus der dritten Gleichung erhalten wir $x = y = 1$. Die einzige extremwertverdächtige Stelle ist

also $(x, y) = (1, 1)$. Nun muß man sich noch klarmachen, dass an dieser Stelle tatsächlich ein (sogar globales) Minimum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ vorliegt (z.B. durch die Überlegung, dass die Funktion f auf der Hyperbel $\{(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) : xy = 1\}$ für $x \rightarrow \infty$ oder $y \rightarrow \infty$ beliebig große Werte annimmt. ■

Beispiel 17 Gesucht sind Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, d.h. auf der Einheitskreislinie mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$. Der Gradient

$$(\text{grad } g)(x, y) = (2x, 2y)$$

ist offenbar in jedem Punkt der Einheitskreislinie ungleich Null, so dass Satz 13.31 anwendbar ist. Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und setzen ihre partiellen Ableitungen Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\quad \Rightarrow \quad y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste erhaltene Gleichung mit x , die zweite mit y und finden, dass $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$ sein muss. Da $\lambda \neq 0$ sein muss, ist $x^2 = y^2$, weshalb zusammen mit der dritten Gleichung für (x, y) die Paare

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

in Frage kommen. Diese lösen tatsächlich das Gleichungssystem (die beiden ersten Paare für $\lambda = -1/2$, die beiden anderen mit $\lambda = 1/2$). Als Funktionswert ergibt sich für die ersten beiden Paare $+1/2$, für die anderen jeweils $-1/2$. Da f als stetige Funktion auf einer kompakten Menge Maximum und Minimum annehmen muss, ist $1/2$ das Maximum und $-1/2$ das Minimum von f . ■

Beispiel 18 Gesucht wird ein Dreieck, das bei gegebenem Umfang u maximalen Flächeninhalt besitzt. Sind $x, y, z > 0$ die Seitenlängen des Dreiecks, so ist $u = x + y + z$, und der Flächeninhalt ist

$$F = \sqrt{\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - x\right) \left(\frac{u}{2} - y\right) \left(\frac{u}{2} - z\right)}$$

(Heronsche Formel). Da F genau dann maximal wird, wenn F^2 maximal wird, haben wir die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - x\right) \left(\frac{u}{2} - y\right) \left(\frac{u}{2} - z\right),$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - u = 0$$

zu maximieren. Hier ist $(\text{grad } g)(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq 0$. Die Lagrange-Funktion L lautet

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - x \right) \left(\frac{u}{2} - y \right) \left(\frac{u}{2} - z \right) + \lambda(x + y + z - u) = 0,$$

und Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergibt

$$\begin{aligned} L_x(x, y, z, \lambda) &= -\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - y \right) \left(\frac{u}{2} - z \right) + \lambda = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) &= -\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - x \right) \left(\frac{u}{2} - z \right) + \lambda = 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda) &= -\frac{u}{2} \left(\frac{u}{2} - x \right) \left(\frac{u}{2} - y \right) + \lambda = 0 \\ L_\lambda(x, y, z, \lambda) &= x + y + z - u = 0. \end{aligned}$$

Subtraktion der 2. von der ersten Gleichung liefert

$$-\frac{u}{2}(x - y) \left(\frac{u}{2} - z \right) = 0.$$

Also ist $\frac{u}{2} - z = 0$ oder $x = y$. Für $\frac{u}{2} - z = 0$ ist $f(x, y, z) = 0$, also mit Sicherheit kein Maximum. Also bleibt nur $x = y$. Aus der zweiten und dritten Gleichung findet man analog $y = z$, und zusammen mit der vierten Gleichung ergibt sich $x_0 = y_0 = z_0 = u/3$ als Kandidat für das Maximum. Diese Lösung entspricht einem gleichseitigen Dreieck, und $f(x_0, y_0, z_0) = f(u/3, u/3, u/3) = u^4/432$. ■

Beispiel 19 Wir suchen die extremwertverdächtigen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle Ax, x \rangle,$$

wobei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix ist, unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$, die wir als $g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$ schreiben.

Der Gradient von f ist

$$(\text{grad } f)(x) = 2x^T A,$$

und der von g ist

$$(\text{grad } g)(x) = 2x^T$$

(mit der Definition der Ableitung nachrechnen!). Offenbar ist $(\text{grad } g)(x) \neq 0$. Das zu lösende Gleichungssystem ist also

$$\begin{aligned} (\text{grad } f)(x) - \mu(\text{grad } g)(x) &= 2x^T A - \mu 2x^T \stackrel{!}{=} 0, \\ g(x) &= \|x\|^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

mit dem Lagrange-Parameter $\mu = -\lambda$. Transponieren der ersten Gleichung liefert das System

$$Ax = \mu x \quad \text{mit} \quad \|x\|^2 = 1.$$

Ein Vektor der Länge 1 ist also genau dann extremwertverdächtig, wenn er ein Eigenvektor zum Eigenwert μ ist. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \mu x, x \rangle = \mu \langle x, x \rangle = \mu.$$

Folglich wird f in x unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ genau dann maximal (minimal), wenn x ein Eigenvektor von A zum größten (kleinsten) Eigenwert von A ist. Man beachte, dass die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ihr Maximum und Minimum annehmen muß. Es ist also

$$\begin{aligned} \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{größter Eigenwert von } A, \\ \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} &= \text{kleinster Eigenwert von } A. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

14 Wegintegrale

Bisher haben wir ausschließlich Integrale über Intervallen betrachtet. Ziel dieses Abschnittes ist es, Integrale über Kurven zu erklären und zu berechnen. Besonders interessiert uns dabei die Frage, wann ein solches Integral nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt.

14.1 Wege im \mathbb{R}^n

Schon im \mathbb{R}^2 lassen sich Kurven nicht immer als Graph einer reellen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen. So müssen beispielsweise für die Einheitskreislinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ der obere bzw. untere Kreisbogen jeweils durch $y = f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ bzw. $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ gesondert beschrieben werden. Eine ganz andere Möglichkeit der Beschreibung von Kurven bieten Parameterdarstellungen wie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = \sin t \text{ mit } t \in [0, 2\pi]\}$ für die Einheitskreislinie. Hier beschreiben wir die Kreislinie als Bild des Intervalls $[0, 2\pi]$ unter der Abbildung

$$X : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

Definition 14.1 Jede stetige Abbildung $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt ein Weg in \mathbb{R}^n . Dabei heißen $X(a)$ Anfangs- und $X(b)$ Endpunkt des Weges. Das Bild von $[a, b]$ unter X , also die Menge $\{X(t) : t \in [a, b]\}$, heißt die zu X gehörende Kurve in \mathbb{R}^n .

Man beachte: ein Weg ist eine *Abbildung*, die zugehörige Kurve eine *Punktmenge*. Man kann sich vorstellen, dass durch einen Weg eine *Parametrisierung* der zugehörigen Kurve gegeben ist. Mit den Begriffen „Anfangs- und Endpunkt“ verbindet man die Vorstellung, dass die Kurve von $X(a)$ nach $X(b)$ im Sinne wachsender Parameter $t \in [a, b]$ durchlaufen wird. Man beachte auch, dass zu verschiedenen Wegen gleiche Kurven gehören können. So liefern die Wege

$$\begin{aligned} X_1 & : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, & t & \mapsto (\cos t, \sin t), \\ X_2 & : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, & t & \mapsto (\cos t, \sin t), \\ X_3 & : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, & t & \mapsto (\cos(3t), \sin(3t)), \end{aligned}$$

jeweils die gleiche Kurve, nämlich die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 .

Beispiel 1 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t))$$

ein Weg, und die zugehörige Kurve ist der Graph von f . ■

Beispiel 2 Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto tA + (1 - t)B$$

ein Weg, und die zugehörige Kurve ist die Verbindungsstrecke von A nach B . ■

Beispiel 3 Der für $r > 0$, $h > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ durch

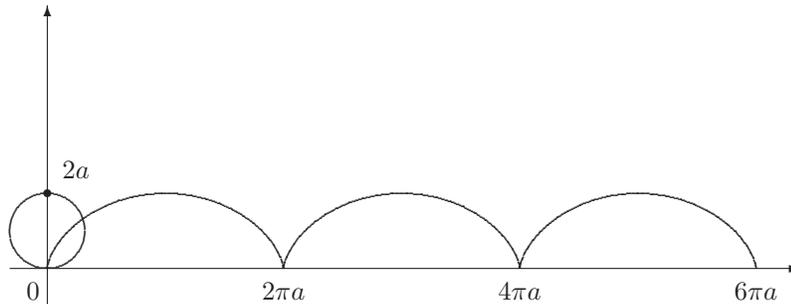
$$X : [0, 2k\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t, \frac{h}{2\pi}t)$$

definierte Weg liefert als Kurve eine Schraubenlinie vom Radius r mit der Ganghöhe h und mit k Windungen. ■

Beispiel 4 Auf einer Kreisscheibe vom Radius a ist auf dem Rand ein Punkt P markiert. Die Kreisscheibe wird nun auf der Ebene abgerollt. Dabei durchläuft P den Weg

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto a(t - \sin t, 1 - \cos t),$$

und die zugehörige Kurve heißt *Rollkurve* oder *Zykloide*.



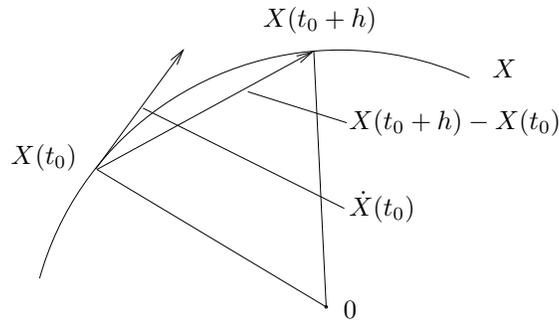
Der Begriff des Weges ist aber weitaus komplexer, als diese einfachen Beispiele vermuten lassen. Er lässt Beispiele zu, die unserer Anschauung völlig widersprechen. So gibt es einen Weg $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dessen zugehörige Kurve das gesamte Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ ausfüllt (eine sogenannte Peano-Kurve)! Unserer Anschauung am nächsten kommen die stetig differenzierbaren und die stückweise stetig differenzierbaren Wege. Ein Weg $X = (X_1, \dots, X_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn jede seiner Komponenten $X_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist. Der Weg $X = (X_1, \dots, X_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

des Intervalles $[a, b]$ gibt, so dass jede Komponente X_j auf jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ für sich stetig differenzierbar ist.

Ist $X = (X_1, \dots, X_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und ist $\dot{X}(t_0) = (\dot{X}_1(t_0), \dots, \dot{X}_n(t_0)) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a, b)$, so heißt $\dot{X}(t_0)$ ein *Tangentialvektor* von X im Punkt $X(t_0)$, und die Tangente an die zugehörige Kurve im Punkt $X(t_0)$ wird beschrieben durch

$$T(\lambda) = X(t_0) + \lambda \dot{X}(t_0).$$



Mitunter ist es nützlich, dass man Wege addieren kann. Sind $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $Y : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $X(b) = Y(b)$, so definiert man ihre *Summe* $Z = X \oplus Y$ durch

$$Z : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Z(t) = \begin{cases} X(t) & \text{falls } t \in [a, b] \\ Y(t) & \text{falls } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Entsprechend definiert man die Summe endlich vieler Wege. Der zu einem Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ *entgegengesetzte Weg* ist durch

$$X^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad X^-(t) = X(a + b - t)$$

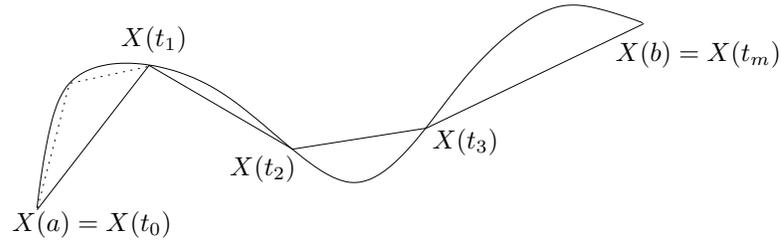
gegeben. Er liefert die gleiche Kurve wie der Ausgangsweg, die jedoch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg ist eine Summe endlich vieler stetig differenzierbarer Wege. Eine Summe von Wegen wie in Beispiel 2 („Strecken“) heißt auch ein **Polygonzug**.

Zur Definition der *Länge* eines Weges $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ wählen wir eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ des Intervalls $[a, b]$ und betrachten den Polygonzug durch die Punkte $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_m)$. Er hat die Länge

$$L(X, Z) := \sum_{i=1}^m \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|,$$

und für jede Verfeinerung Z' von Z gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$L(X, Z) \leq L(X, Z').$$



Definition 14.2 Der Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt rektifizierbar, wenn es eine Zahl M gibt mit der Eigenschaft, dass $L(X, Z) \leq M$ für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$. Die kleinste Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt die Länge $L(X)$ des Weges X .

Es ist also

$$L(X) = \sup_Z L(X, Z),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ zu nehmen ist.

Satz 14.3 Jeder stetig differenzierbare Weg $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar, und es gilt

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{X}_1(t)^2 + \dots + \dot{X}_n(t)^2} dt.$$

Der folgende Satz führt die Weglängenberechnung für stückweise stetig differenzierbare Wege auf die für stetig differenzierbare Wege zurück.

Satz 14.4 Ist der Weg Z die Summe $X^{(1)} \oplus \dots \oplus X^{(m)}$ der stetig differenzierbaren Wege $X^{(j)}$, so ist Z rektifizierbar, und

$$L(Z) = L(X^{(1)}) + \dots + L(X^{(m)}).$$

Beispiel 5 Der durch die stetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ t \cos \frac{\pi}{t} & \text{für } t \in (0, 1] \end{cases}$$

festgelegte Weg $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ ist *nicht* rektifizierbar. Für die Punkte $t_n = 1/n$ mit $n \geq 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|X(t_{n+1}) - X(t_n)\| &\geq |f(t_{n+1}) - f(t_n)| = \left| \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{\cos n\pi}{n} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert bekanntlich. Man kann also nicht jedem Weg eine Länge zuschreiben. ■

Beispiel 6 Die Länge des Weges

$$X : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t) \quad \text{mit } r > 0$$

ergibt sich aus

$$L(X) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{X}_1(t)^2 + \dot{X}_2(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = 2\pi r. \quad (14.1)$$

Das Ergebnis ist natürlich (?) gleich dem Kreisumfang eines Kreises vom Radius r . Doch haben wir in (14.1) tatsächlich die Länge des Kreisumfangs, d.h. einer Kurve, berechnet? Der Weg

$$Y : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$$

führt auf die gleiche Kurve wie der Weg X , hat jedoch die doppelte Länge wie X , was natürlich daran liegt, dass Y die Kreislinie zweimal durchläuft. Will man also *Kurvenlängen* berechnen, muß man einen rektifizierbaren Weg wählen, der jeden Punkt der Kurve nur einmal durchläuft. Nur Anfangs- und Endpunkt dürfen gegebenenfalls (wie bei der Kreislinie und anderen geschlossenen Kurven) zusammenfallen. ■

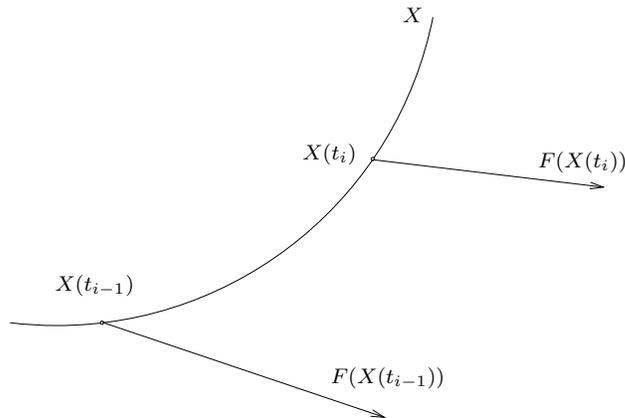
Beispiel 7 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$, so ist

$$L(X) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (14.2)$$

14.2 Wegintegrale

Zur Motivation: In einem Kraftfeld F (d.h. ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) bewegt sich ein Massepunkt P entlang eines Weges $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Gesucht ist die Arbeit, die bei Bewegung von P entlang des Weges X im Kraftfeld F verrichtet wird. Sei $Z = \{t_0, \dots, t_m\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Im Punkt $X(t_{i-1})$ des Weges greift der Kraftvektor $F(X(t_{i-1}))$ an. Die zu verrichtende Arbeit ist jedoch nur von der Komponente von $F(X(t_{i-1}))$ in Wegrichtung abhängig. Nehmen wir weiter an, dass $X(t_{i-1})$ und $X(t_i)$ nahe beieinander liegen, so dass $F(X(t_{i-1})) \approx F(X(t_i))$, so ist die zu verrichtende Arbeit beim Bewegen von $X(t_{i-1})$ nach $X(t_i)$ ungefähr gleich

$$F(X(t_{i-1})) \cdot (X(t_i) - X(t_{i-1})) = \langle F(X(t_{i-1})), X(t_i) - X(t_{i-1}) \rangle.$$



Ist weiter X stetig differenzierbar und liegen t_{i-1} und t_i nahe beieinander, so ist dieser Ausdruck ungefähr gleich

$$F(X(t_{i-1})) \cdot \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \langle F(X(t_{i-1})), \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \rangle.$$

Die gesamte Arbeit beträgt also näherungsweise

$$\sum_{i=1}^m F(X(t_{i-1})) \cdot \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Das ist eine Riemann-Summe! Verfeinerung und Grenzübergang liefern schließlich für die Arbeit

$$\int_a^b F(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt.$$

Definition 14.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $X : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann heißt

$$\int_a^b F(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt \tag{14.3}$$

das Wegintegral von F entlang X .

Statt (14.3) findet man oft auch die Schreibweise

$$\int_X F \cdot dX \quad \text{oder} \quad \int_X F_1 dX_1 + \dots + F_n dX_n,$$

wobei F_i bzw. X_i die Komponenten von F bzw. X sind.

Beispiel 8 Der Weg X sei gegeben durch

$$X : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi} t \right),$$

und P bewege sich entlang X von $(a, 0, 0)$ nach $(a, 0, h)$. Dabei wirke eine Kraft $F(\vec{x}) = -\alpha\vec{x}$ mit einer Konstanten $\alpha > 0$, d.h. P wird mit der Kraft $\|F(\vec{x})\| = \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ in Richtung des Koordinatenursprungs gezogen. Für die zu leistende Arbeit W finden wir

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} F(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\alpha(a \cos t, a \sin t, \frac{h}{2\pi}t) \cdot (-a \sin t, a \cos t, \frac{h}{2\pi}) dt \\ &= \alpha \int_0^{2\pi} (a^2 \sin t \cos t - a^2 \sin t \cos t - (\frac{h}{2\pi})^2 t) dt \\ &= -\alpha(\frac{h}{2\pi})^2 \int_0^{2\pi} t dt = -\alpha(\frac{h}{2\pi})^2 \frac{(2\pi)^2}{2} = -\frac{\alpha h^2}{2}. \end{aligned}$$

Wir betrachten bei gleicher Kraft noch einmal die Bewegung von P von $(a, 0, 0)$ nach $(a, 0, h)$, nun aber entlang des Weges

$$X : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a, 0, t).$$

Dann ist

$$W = \int_0^h -\alpha(a, 0, t) \cdot (0, 0, 1) dt = -\alpha \int_0^h t dt = -\frac{\alpha h^2}{2},$$

d.h. wir gelangen zum gleichen Resultat. ■

Beispiel 9 Sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, xy)$ und $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$ (die zugehörige Kurve ist die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$). Dann ist

$$\int_0^1 F(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt = \int_0^1 (2t^2, t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Bei gleichem F finden wir dagegen für das Wegintegral entlang des Weges

$$X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, t^2)$$

(der entlang einer Parabel von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ führt)

$$\int_X F \cdot dX = \int_0^1 (t^2 + t^4, t^3) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4) dt = \frac{14}{15},$$

also ein vom Weg abhängiges Ergebnis. ■

Hier sind einige Regeln für den Umgang mit Wegintegralen.

(a) Ist X^- der zu X entgegengesetzte Weg, so gilt

$$\int_{X^-} F \cdot dX = - \int_X F \cdot dX. \tag{14.4}$$

(b) Mit der Weglänge $L(X)$ gilt die Abschätzung

$$\left| \int_X F \cdot dX \right| \leq \max_{t \in [a,b]} \|F(X(t))\| L(X). \quad (14.5)$$

(c) Ist $Z = X \oplus Y$ die Summe der Wege X und Y , so ist

$$\int_{X \oplus Y} F \cdot dZ = \int_X F \cdot dX + \int_Y F \cdot dY. \quad (14.6)$$

Man benutzt (14.6) auch, um das Wegintegral entlang eines nur *stückweise* stetig differenzierbaren Weges zu definieren.

Wir greifen nun die Beobachtung aus Beispiel 8 und 9 auf und fragen, wann ein Wegintegral *wegunabhängig* ist, d.h. nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt (vgl. Beispiel 8). Hierfür benötigen wir, dass die Wege in Mengen mit speziellen Eigenschaften verlaufen, die wir nun definieren.

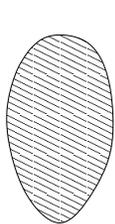
Definition 14.6 (a) *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte aus M durch einen Weg verbinden lassen, der komplett durch M verläuft.*

(b) *M heißt konvex, wenn sich je zwei Punkte aus M durch eine Strecke verbinden lassen, die ganz in M liegt.*

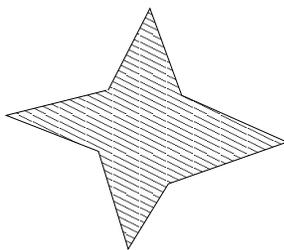
(c) *M heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $z \in M$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in M$ die Verbindungsstrecke von z nach x ganz in M liegt.*

(d) *M heißt ein Gebiet, wenn M offen und wegzusammenhängend ist.*

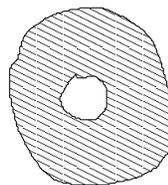
Konvexe Mengen sind sternförmig, und sternförmige Mengen sind wegzusammenhängend.



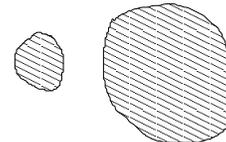
konvex



sternförmig



wegzusammenhängend



nicht wegzusammenhängend

Definition 14.7 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Existiert eine stetig partiell differenzierbare Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = (\text{grad } \varphi)(x) \quad \text{für } x \in D,$$

so heißt φ ein Potential (oder eine Stammfunktion) von F .

In Beispiel 8 ist $\varphi(x_1, x_2, x_3) := -\frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ein Potential von $F(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1, x_2, x_3)$. Physikalisch interessanter ist folgendes Beispiel.

Beispiel 10 Eine Masse m im Koordinatenursprung übt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz auf einen Massepunkt der Masse 1 in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ eine Kraft F der Stärke

$$\|F(x, y, z)\| = \frac{Gm}{\|(x, y, z)\|^2} = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

aus. Diese Kraft weist zum Nullpunkt, hat also die Richtung $-\frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}$. Demnach ist

$$F(x, y, z) = -\frac{Gm}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z) = -\frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Gm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ein Potential für F auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist (Newtonsches Gravitationspotential). ■

Satz 14.8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit einem Potential $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$. Sind A und E zwei beliebige Punkte in D und ist $X : [a, b] \rightarrow D$ ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer Weg in D mit Anfangspunkt A und Endpunkt E , so gilt für das Wegintegral

$$\int_X F \cdot dX = \varphi(E) - \varphi(A). \quad (14.7)$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist das Wegintegral also wegunabhängig. Man vergleiche (14.7) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Insbesondere ist (wieder unter den Voraussetzungen von Satz 14.8) jedes Wegintegral entlang eines *geschlossenen* Weges (d.h. eines Weges mit $A = E$) gleich Null.

Der folgende Satz hilft bei der Entscheidung, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Potential besitzt.

Satz 14.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Gilt für die Komponenten des Vektorfeldes $F = (F_1, \dots, F_n)$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n \quad (14.8)$$

auf D , so besitzt F ein Potential auf D .

Die Bedingungen des Satzes 14.9 garantieren also die Existenz eines Potentials und damit die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals. Es gilt auch die Umkehrung: besitzt das auf der offenen Menge D stetig differenzierbare Vektorfeld ein Potential, so gilt (14.8) (Satz von Schwarz). Man beachte, dass wir in Satz 14.9 die Sternförmigkeit von D fordern müssen. Ein Potential kann aber auch existieren, wenn diese Eigenschaft nicht vorliegt (Beispiel 10: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig!). Wir sehen uns die Bedingungen (14.8) für $n = 2$ und $n = 3$ genauer an und zeigen, wie man bei Erfülltsein dieser Bedingung ein Potential finden kann.

Fall $n = 2$ Sei $F = (F_1, F_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf der offenen und sternförmigen Menge D . Dann reduziert sich (14.8) auf die eine Bedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \quad \text{auf } D. \quad (14.9)$$

Ist dies erfüllt, so versuchen wir, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem *Ansatz*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = F_2 \quad \text{auf } D$$

zu bestimmen. Integration der ersten Gleichung bzgl. x_1 liefert

$$\varphi(x_1, x_2) = \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + g(x_2) \quad (14.10)$$

mit einer nicht von x_1 , aber von x_2 abhängigen „Integrationskonstanten“ g . Wir leiten (14.10) formal nach x_2 ab und erhalten mit (14.9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + g'(x_2) \stackrel{!}{=} F_2(x_1, x_2).$$

Hieraus folgt

$$g'(x_2) = F_2(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2) dx_1,$$

und durch unbestimmte Integration bzgl. x_2 gewinnt man g und damit φ . Eine Probe zeigt, ob tatsächlich eine Stammfunktion gefunden wurde.

Beispiel 11 Für $x \neq 0$ und $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$F_1(x, y) = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \quad F_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Dann ist (14.9) erfüllt, und wir wählen den Ansatz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Integration der ersten Beziehung nach x liefert

$$\varphi(x, y) = \int \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \right) dx = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Wir leiten dies nach y ab und setzen das Ergebnis gleich F_2 :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + g'(y) \stackrel{!}{=} \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Also ist $g'(y) = y^2$ und damit $g(y) = \frac{y^3}{3} + C$ sowie

$$\varphi(x, y) = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Sucht man nur *ein* Potential, kann man z.B. $C = 0$ wählen. Die Probe durch Ableiten zeigt, dass tatsächlich ein Potential von F gefunden wurde. ■

Fall $n = 3$ Dann ergibt (14.8) die drei Bedingungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}. \quad (14.11)$$

Sind diese erfüllt, machen wir den Ansatz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = F_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = F_3$$

für das gesuchte Potential φ . Wir integrieren die erste Gleichung nach x_1

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + g(x_2, x_3) \quad (14.12)$$

und leiten nach x_2 ab:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \stackrel{!}{=} F_2(x_1, x_2, x_3).$$

Es ist also

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = F_2(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1.$$

Die rechte Seite hängt wegen (14.11) nicht von x_1 ab; wir bezeichnen sie mit $h(x_2, x_3)$ und erhalten durch Integration nach x_2

$$g(x_2, x_3) = \int h(x_2, x_3) dx_2 + \ell(x_3).$$

Einsetzen in (14.12) liefert

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int h(x_2, x_3) dx_2 + \ell(x_3).$$

Nun leiten wir noch nach x_3 ab und setzen das Ergebnis gleich F_3 :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int h(x_2, x_3) dx_2 + \ell'(x_3) \stackrel{!}{=} F_3(x_1, x_2, x_3),$$

also

$$\ell'(x_3) = F_3(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \int h(x_2, x_3) dx_2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nur von x_3 ab, und Integration dieser Gleichung bzgl. x_3 liefert ℓ und damit φ .

Beispiel 12 Sei $F(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$. Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ erfüllt die Bedingungen (14.8) auf der sternförmigen Menge \mathbb{R}^3 , so dass mit Sicherheit ein Potential existiert. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dieses Potential. Aus $\varphi_x = F_1$ folgt durch Integration bzgl. x

$$\varphi(x, y, z) = \int (x + z) dx + g(y, z) = \frac{x^2}{2} + xz + g(y, z).$$

Ableiten nach y ergibt

$$\varphi_y = \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) \stackrel{!}{=} -y - z,$$

woraus folgt

$$g(y, z) = -\frac{y^2}{2} - yz + \ell(z).$$

Also ist

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xz - \frac{y^2}{2} - yz + \ell(z),$$

und nach Ableiten nach z wird

$$\varphi_z = x - y + \ell'(z) \stackrel{!}{=} x - y,$$

d.h. $\ell'(z) = 0$. Es ist also ℓ eine konstante Funktion, d.h.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xz - \frac{y^2}{2} - yz + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

■

15 Integration im \mathbb{R}^n

In diesem Kapitel kommen wir zur Definition und den wesentlichen Eigenschaften des Riemann-Integrals einer Funktion von mehreren Veränderlichen. Als Motivation wird uns das Problem der Volumendefinition und -berechnung dienen (genau wie das Problem der Flächenberechnung bei Funktionen einer Veränderlichen).

15.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im \mathbb{R}^n

Wir beginnen mit der Integration über den „einfachsten“ Teilmengen des \mathbb{R}^n , nämlich über Intervallen, Rechtecken, Quadern usw., die wir unter dem Namen „Intervall im \mathbb{R}^n “ zusammenfassen. Während wir im \mathbb{R}^1 ausschließlich über Intervalle integriert haben, gibt es beispielsweise im \mathbb{R}^3 wesentlich mehr Mengen, über die man integrieren möchte (Kugeln, Pyramiden, ...). Wir werden daher die in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen später auf allgemeinere Mengen übertragen.

Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Punkte des \mathbb{R}^n mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Das *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ im \mathbb{R}^n ist die Menge

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i\},$$

und (falls $a_i < b_i$ für alle $i = 1, \dots, n$) die Menge

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \text{ für alle } i\}$$

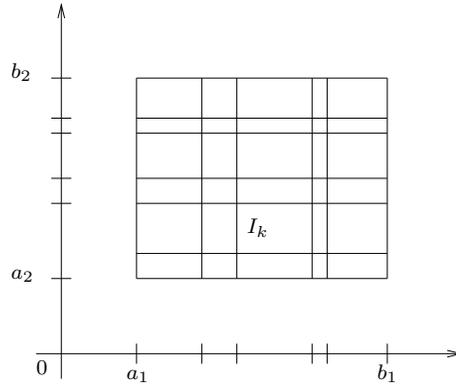
heißt ein *offenes Intervall* im \mathbb{R}^n . Ist $I = [a, b]$ oder $I = (a, b)$ ein abgeschlossenes oder offenes Intervall, so erklären wir sein *Maß* $\mu(I)$ durch

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Wir erhalten also für

- $n = 1$ gewöhnliche Intervalle, und $\mu(I)$ ist die Länge des Intervalls,
- $n = 2$ Rechtecke, und $\mu(I)$ ist der Flächeninhalt,
- $n = 3$ Quader, und $\mu(I)$ ist das Volumen.

Eine *Zerlegung* Z eines abgeschlossenen Intervalls $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt $Z_1 \times \dots \times Z_n$ von Zerlegungen Z_i der Intervalle $[a_i, b_i]$. Die *Teilintervalle* der Zerlegung Z erhält man, indem man im Produkt $T_1 \times \dots \times T_n$ die T_i alle Teilintervalle der Zerlegung Z_i von $[a_i, b_i]$ durchlaufen läßt.



Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall, und Z sei eine Zerlegung von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_m . Für jede beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ erklären wir

$$m_k := \inf\{f(x) : x \in I_k\} \quad \text{sowie} \quad M_k := \sup\{f(x) : x \in I_k\},$$

und wir nennen

$$U(Z, f) := \sum_{k=1}^m m_k \mu(I_k)$$

bzw.

$$O(Z, f) := \sum_{k=1}^m M_k \mu(I_k)$$

die *Unter-* bzw. *Obersumme* von f bzgl. der Zerlegung Z . Schließlich sei noch

$$U(f, I) := \sup_Z U(Z, f)$$

und

$$O(f, I) := \inf_Z O(Z, f),$$

wobei das Supremum bzw. das Infimum über alle Zerlegungen Z von I zu bilden ist.

Definition 15.1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist

$$U(f, I) = O(f, I) =: r,$$

so heißt f Riemann-integrierbar auf I , und der gemeinsame Wert r von $U(f, I)$ und $O(f, I)$ heißt Riemann-Integral von f auf I . Als Bezeichnung wählen wir

$$r = \int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \quad \text{oder kurz} \quad \int_I f(x) dx.$$

In \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 schreibt man auch

$$\int_I f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_I f(x, y) d(x, y)$$

bzw.

$$\int_I f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_I f(x, y, z) d(x, y, z).$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir die konstante Funktion $f(x) = c$ auf $I \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dann ist

$$U(Z, f) = \sum_{k=1}^m c\mu(I_k) = c \sum_{k=1}^m \mu(I_k) = c\mu(I)$$

und analog $O(Z, f) = c\mu(I)$, und wir erhalten

$$O(f, I) = U(f, I) = \int_I cd(x_1, \dots, x_n) = c\mu(I).$$

Mit der Wahl $c = 1$ wird insbesondere

$$\mu(I) = \int_I d(x_1, \dots, x_n),$$

d.h. man kann das Maß von I als Integral über die Funktion $f(x) = 1$ darstellen. Wir kommen hierauf noch zurück.

Genau wie im Fall $n = 1$ kann man das Riemann-Integral einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auch als Grenzwert Riemanscher Summen darstellen. Dazu wählt man für jede Zerlegung Z von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_m einen *Zwischenvektor* $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ mit $\xi_k \in I_k$ und betrachtet die *Riemannsumme*

$$R(Z, \xi, f) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k)\mu(I_k).$$

Die folgenden einfachen Eigenschaften des Riemann-Integrals im \mathbb{R}^n beweist man wie im Fall $n = 1$.

Satz 15.2 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall, und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar.*

a) *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar, und*

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_I f(x) dx + \beta \int_I g(x) dx.$$

b) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist*

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx.$$

c) *Es ist*

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| \mu(I).$$

Der folgende Satz ist der Schlüssel zur Berechnung von Riemann-Integralen im \mathbb{R}^n . Durch ihn wird die Berechnung eines Integrales auf die Berechnung von zwei Integralen in Räumen von niedrigerer Dimension als n zurückgeführt. Durch mehrfache Anwendung dieses Satzes führt man schließlich die Berechnung eines Integrals über einem Intervall im \mathbb{R}^n auf die Berechnung von „gewöhnlichen“ Riemann-Integralen über „gewöhnlichen“ Intervallen in \mathbb{R}^1 zurück.

Satz 15.3 (Satz von Fubini) *Seien $I_x \subseteq \mathbb{R}^k$ und $I_y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ abgeschlossene Intervalle und sei $I = I_x \times I_y \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^{k+\ell}$. Weiter sei die Funktion $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf I .*

a) *Existiert für jedes feste $y \in I_y$ das Riemann-Integral*

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx,$$

so ist die Funktion g Riemann-integrierbar, d.h. es existiert das iterierte Integral

$$\int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy,$$

und es ist

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy.$$

b) *Existiert für jedes feste $x \in I_x$ das Riemann-Integral*

$$h(x) := \int_{I_y} f(x, y) dy,$$

so ist h Riemann-integrierbar, das iterierte Integral

$$\int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx$$

existiert, und

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx.$$

Man beachte, dass aus der Existenz der beiden iterierten Integrale

$$\int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx$$

noch nicht die Existenz des Integrals

$$\int_I f(x, y) d(x, y) \tag{15.1}$$

folgt. Ein einfaches Kriterium für die Existenz dieses Integrals liefert der folgende Satz.

Satz 15.4 *Ist $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I , so ist f Riemann-integrierbar auf I , d.h. das Integral (15.1) existiert.*

Unter den Voraussetzungen von Satz 15.4 existieren auch alle iterierten Integrale aus dem Satz von Fubini, und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx.$$

Beispiel 1 Sei $f(x, y) = \cos(2x + 3y)$ auf $I = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{12}]$. Die Funktion f ist auf I stetig, so dass wir $\int_I f(x, y) d(x, y)$ mit Hilfe iterierter Integrale bestimmen können. Es ist

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/12} \cos(2x + 3y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \sin(2x + 3y) \Big|_0^{\pi/12} dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2x \right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{6} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Das gleiche Resultat hätte natürlich auch die Berechnung von

$$\int_0^{\pi/12} \left(\int_0^{\pi/4} \cos(2x + 3y) dx \right) dy$$

gebracht. ■

Beispiel 2 Sei $f(x, y, z) = x + y + z + xz$ auf $I = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$. Dann ist f stetig auf I , und die zweifache Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$\begin{aligned}
\int_I f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\int_{[1,2] \times [2,3]} f(x, y, z) d(y, z) \right) dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 (x + y + z + xz) dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} + x \frac{z^2}{2} \right) \Big|_2^3 dy dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \left(x + y + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x \right) dy dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{7}{2}xy + \frac{y^2}{2} + \frac{5}{2}y \right) \Big|_1^2 dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{7}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) dx \\
&= \frac{7}{4}x^2 + 4x \Big|_0^1 = \frac{7}{4} + 4 = \frac{23}{4}.
\end{aligned}$$

Das gleiche Resultat hätten wir beispielsweise auch aus dem iterierten Integral

$$\int_2^3 \int_0^1 \int_1^2 (x + y + z + xz) dy dx dz$$

gewonnen. ■

15.2 Integration über messbaren Mengen

In diesem Abschnitt geht es um die Integration auf komplizierteren Mengen als auf n -dimensionalen Intervallen. Für jede nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die *Fortsetzung* (oder *Erweiterung*) f_B von f durch

$$f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. f_B setzt f durch 0 auf ganz \mathbb{R}^n fort.

Definition 15.5 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und $I \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$. Die Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar auf B , wenn ihre Fortsetzung f_B Riemann-integrierbar auf I ist. In diesem Fall heißt

$$\int_B f(x) dx := \int_I f_B(x) dx$$

das Riemann-Integral von f auf B .

Man kann (und muss) zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Intervalles I ist. Man kann für I also z.B. das kleinste abgeschlossene Intervall wählen, das B enthält. Man beachte auch, dass Definition 15.5 selbst für $n = 1$ etwas Neues bietet, da B kein Intervall sein muss.

Ob eine Funktion f auf einer Menge B integrierbar ist, hängt sowohl von f als auch von B ab. Insbesondere erwartet man von B , dass wenigstens so einfache Funktionen wie $\chi : B \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi(x) = 1$, auf B Riemann-integrierbar sind. Die entsprechende Fortsetzung

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{wenn } x \notin B \end{cases}$$

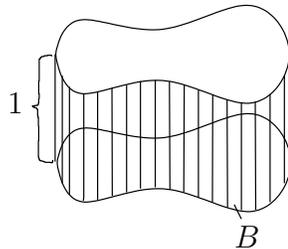
heißt die *charakteristische Funktion* von B .

Definition 15.6 Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion χ_B Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\mu(B) := \int_I \chi_B(x) dx = \int_B 1 dx = \int_B dx$$

der (*n*-dimensionale) *Jordan-Inhalt* von B .

Anschauliche Deutung:



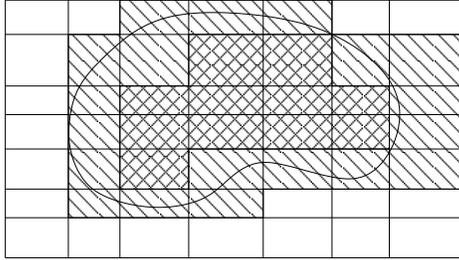
$\int_B dx$ beschreibt das Volumen eines Zylinders über B mit der Höhe 1. Dieses ist Grundfläche \times Höhe, also gleich $\mu(B)$. ■

Deutung über Ober- und Untersummen Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$ und mit einer Zerlegung Z von I in Teilintervalle I_1, \dots, I_m . Dann ist

$$\inf_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \text{ ganz in } B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\sup_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



\square $O(Z, \chi_B)$ \square $U(Z, \chi_B)$

Für die zugehörigen Ober- und Untersummen gilt also

$$\begin{aligned}
 U(Z, \chi_B) &= \sum'_k \mu(I_k) \\
 O(Z, \chi_B) &= \sum''_k \mu(I_k),
 \end{aligned}$$

wobei die Summationen

\sum'_k bzw. \sum''_k über alle Teilintervalle I_k mit $I_k \subseteq B$ bzw. mit $I_k \cap B \neq \emptyset$ erstreckt werden. Die Zahlen

$$U(\chi_B, I) = \sup_Z U(Z, \chi_B) \quad \text{und} \quad O(\chi_B, I) = \inf_Z O(Z, \chi_B)$$

nennt man auch den *inneren* bzw. *äußeren Jordan-Inhalt* von B , und B ist genau dann Jordan-messbar, wenn der äußere und der innere Jordan-Inhalt von B gleich sind. ■

Beispiel 3 Sei $B = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \text{ rational}\}$, und für I wählen wir das Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Da \mathbb{Q} in \mathbb{R} dicht liegt, ist für jede Zerlegung Z von I

$$U(Z, \chi_B) = 0, \quad O(Z, \chi_B) = 1.$$

Also ist B *nicht* Jordan-messbar, und wir können B keinen Flächeninhalt zuordnen. ■

Satz 15.7 Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt $\mu(\partial B) = 0$ hat.

Nun haben wir schon einiges über Jordan-messbare Mengen erfahren, wissen aber noch immer nicht, ob so einfache Mengen wie ein Kreis im \mathbb{R}^2 oder eine Kugel im \mathbb{R}^3 Jordan-messbar sind. Wegen Satz 15.7 benötigen wir Kriterien dafür, dass eine beschränkte Menge Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt 0 hat. Solche Mengen heißen *Jordansche Nullmengen*. Hier sind zwei solcher Kriterien.

Satz 15.8 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f , d.h. die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, y = f(x)\}$$

eine Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^{n+1} .

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitzstetig* auf B , wenn es eine Konstante L so gibt, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in B.$$

Lipschitzstetige Funktionen sind offenbar stetig; die Umkehrung gilt nicht. Alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind Lipschitzstetig.

Satz 15.9 *Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$ Lipschitzstetig. Dann ist $f(N)$ eine Jordansche Nullmenge im \mathbb{R}^m .*

Schließlich vermerken wir noch ein Resultat über die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.

Satz 15.10 *Stetige Funktionen auf kompakten Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.*

Als nächstes geben wir einige Resultate über das Rechnen mit Riemann-Integralen auf Jordan-messbaren Mengen an. Das Analogon zu Satz 15.2 lautet wie folgt.

Satz 15.11 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar.*

a) *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar auf B , und*

$$\int_B (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_B f(x) dx + \beta \int_B g(x) dx.$$

b) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$, so ist auch*

$$\int_B f(x) dx \leq \int_B g(x) dx.$$

c) *Es ist*

$$\left| \int_B f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \mu(B).$$

Nun sehen wir uns noch an, wie das Integral bei fester Funktion f vom Integrationsbereich abhängt. Dazu vereinbaren wir, dass $\int_{\emptyset} f dx = 0$.

Satz 15.12 a) *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ Jordan-messbar.*

b) *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und ist f auf A und auf B Riemann-integrierbar, so ist f auch auf $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{A \cup B} f(x) dx + \int_{A \cap B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

Setzt man insbesondere $f = \chi_{A \cup B}$, so folgt aus Aussage (b)

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \quad (15.2)$$

Man sagt, dass sich zwei Jordan-messbare Mengen A, B *nicht überlappen*, wenn sie nur Randpunkte gemeinsam haben, d.h. wenn $A \cap B \subseteq \partial A \cap \partial B$. Da der Rand einer Jordan-messbaren Menge nach Satz 15.7 das Maß 0 hat, gilt:

Satz 15.13 *Seien A, B, f wie in Satz 15.12, und A und B seien nicht überlappend. Dann gilt*

$$\int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

Insbesondere gilt unter den Voraussetzungen dieses Satzes

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \quad (15.3)$$

Nun können wir auch begründen, dass Mengen wie Kreise und Kugeln Jordan-messbar sind. Zunächst ist $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ als Intervall Jordan-messbar. Auf $[-1, 1]$ sind die Funktionen $f^+(x) := \sqrt{1-x^2}$ und $f^-(x) := -\sqrt{1-x^2}$ stetig und daher Riemann-integrierbar (Satz 15.10). Nach Satz 15.8 sind die Graphen

$$G(f^\pm) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y = f^\pm(x)\}$$

Jordansche Nullmengen. Wegen $G(f^+) \cup G(f^-) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ und (15.2) ist die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 eine Jordansche Nullmenge. Satz 15.7 zeigt nun, dass die Einheitskreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ Jordan-messbar ist. Analog betrachten wir auf der (nun als Jordan-messbar erkannten) Einheitskreisscheibe $B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ die Funktionen

$$g^\pm : B_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g^\pm(x, y) = \pm \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Diese sind stetig, und wir erhalten wie oben die Jordan-Messbarkeit der Einheitskugel $B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Durch vollständige Induktion überträgt man dieses Resultat auf Kugeln im \mathbb{R}^n .

Nachdem wir nun wissen, dass Kreisscheiben im \mathbb{R}^2 Jordan-messbar sind, möchten wir auch den Jordan-Inhalt von Kreisscheiben berechnen. Allgemeiner geht es darum, den Jordan-Inhalt so genannter Ordinatenmengen zu bestimmen. Die *Ordinatenmenge* $M(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow [0, \infty)$ ist die Menge

$$M(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

d.h. die Menge aller Punkte "zwischen der x -Achse und dem Graphen der Funktion". Im Fall $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ haben wir früher bereits als Flächeninhalt definiert:

$$\text{Inhalt von } M(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (15.4)$$

Dieser Inhaltsbegriff stimmt mit dem Jordan-Inhalt überein. Genauer gilt folgender Satz.

Satz 15.14 Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f \geq 0$. Dann ist $M(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar, und es gilt

$$\mu(M(f)) = \int_B f(x) dx.$$

Dieser Satz rechtfertigt im Nachhinein die Definition (15.4) des Flächeninhalts. Ist allgemeiner $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sind $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in B$, so ist die Menge

$$M(f_1, f_2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in B, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

Jordan-messbar, und es gilt

$$\mu(M(f_1, f_2)) = \int_B (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (15.5)$$

Beispiel 4 Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ und $B = [x_0 - r, x_0 + r]$. Für

$$f_1(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \quad f_2(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

ist $M(f_1, f_2)$ gerade die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius r , und für ihren Jordan-Inhalt finden wir

$$\begin{aligned} \mu(M(f_1, f_2)) &= 2 \int_{x_0-r}^{x_0+r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2} dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} t \sqrt{r^2 - t^2} + \frac{1}{2} r^2 \arcsin \frac{t}{r} \right]_{-r}^r = \pi r^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

15.3 Integration über Normalbereiche

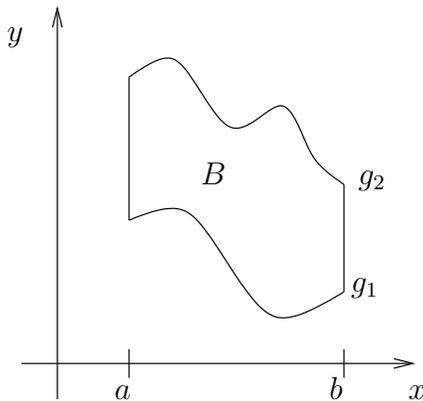
Wir kommen nun zur praktischen Bestimmung von Riemann-Integralen. Besonders einfach wird diese für Integrale über so genannte *Normalbereiche*. Unter einem *Normalbereich bzgl. der x-Achse* versteht man eine Menge B der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

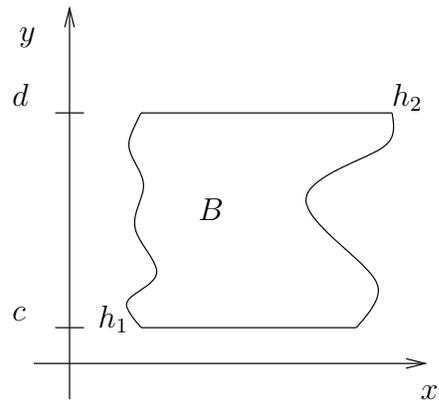
mit stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Eine solche Menge heißt auch *y-projizierbar*. Ein *Normalbereich bzgl. der y-Achse* (oder eine *x-projizierbare Menge*) ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

mit stetigen Funktionen $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $h_1(y) \leq h_2(y)$ für alle $y \in [c, d]$.



Normalbereich bzgl. x -Achse



Normalbereich bzgl. y -Achse

Normalbereiche sind nach Satz 15.8 Jordan-messbar, und der Satz von Fubini liefert:

Satz 15.15 Sei B ein Normalbereich und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. In den obigen Bezeichnungen gilt

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

falls B ein Normalbereich bzgl. der x -Achse ist und

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

falls B ein Normalbereich bzgl. der y -Achse ist.

Ist B kein Normalbereich, so versucht man, ihn in endlich viele nicht überlappende Normalbereiche zu zerlegen.

Normalbereiche betrachtet man auch in Räumen \mathbb{R}^n mit $n > 2$. Sei z.B. $B_1 := [a, b]$. Auf B_1 seien g_1, g_2 stetige Funktionen mit $g_1 \leq g_2$, und sei

$$B_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in B_1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Auf B_2 seien h_1, h_2 stetige Funktionen mit $h_1 \leq h_2$, und sei

$$B_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_2, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}.$$

Dann ist B_3 Jordan-messbar, und für jede auf B_3 stetige Funktion f ist

$$\int_{B_3} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Beispiel 5 Das Volumen V des Tetraeders mit den Ecken $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ und $(0, 0, c)$ lässt sich bestimmen als Volumen der Punktmenge zwischen dem Dreieck in der (x, y) -Ebene mit den Ecken $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$ und $(0, b, 0)$ und der durch $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, also $z = f(x, y) = c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})$, beschriebenen Ebene. Daher ist

$$\begin{aligned} V &= \int_B f(x, y) d(x, y) = \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) dy dx \\ &= \int_0^a c(y - \frac{xy}{a} - \frac{y^2}{2b}) \Big|_0^{b-\frac{b}{a}x} dx = \int_0^a \frac{bc}{2} (1 - \frac{x}{a})^2 dx = \frac{abc}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 6 Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, y \geq 0\}$ mit fest gewähltem $r > 0$, und sei $f(x, y) = x^2 y$ auf B . Der Halbkreis B ist ein Normalbereich sowohl bzgl. der x -Achse als auch bzgl. der y -Achse. Wir beschreiben ihn z.B. als

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r, r], 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_B x^2 y d(x, y) &= \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 y dy dx \\ &= \int_{-r}^r \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-r}^r x^2 (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} (r^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}) \Big|_{-r}^r = \frac{2}{15} r^5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 7 Wir berechnen das Volumen eines geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe h . Dazu legen wir den Kegel derart in ein Koordinatensystem, dass die Grundfläche in der xy -Ebene liegt, der Mittelpunkt des Grundkreises der Koordinatenursprung ist, und die Kegelspitze auf der positiven z -Achse liegt. Der Kegel ist dann ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 . Wir haben nämlich $B_1 = [-R, R]$,

$$\begin{aligned} B_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in B_1, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \\ &(\text{= Grundfläche des Kegels}), \end{aligned}$$

$$B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Für das Volumen V des Kegels finden wir daher

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{B_3} d(x, y, z) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^{h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx \\
 &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2+y^2} \right) dy dx \\
 &= h \int_{-R}^R \left(y - \frac{1}{R} \left(\frac{y}{2} \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2} \ln(y + \sqrt{x^2+y^2}) \right) \right) \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\
 &= 2h \int_0^R \left(\sqrt{R^2-x^2} - \frac{x^2}{2R} \ln \frac{R + \sqrt{R^2-x^2}}{R - \sqrt{R^2-x^2}} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Wir substituieren $x = R \sin t$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 V &= 2h \int_0^{\pi/2} \left(R \cos t - \frac{R}{2} \sin^2 t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) R \cos t dt \\
 &= 2hR^2 \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 t - \frac{1}{2} \sin^2 t \cos t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Das Integral $\int \sin^2 t \cos t \ln \frac{1+\cos t}{1-\cos t} dt$ kann durch partielle Integration bestimmt werden: der Faktor $\sin^2 t \cos t$ wird integriert und hat $\frac{1}{3} \sin^3 t$ als eine Stammfunktion, und $\ln \frac{1+\cos t}{1-\cos t}$ wird differenziert und ergibt $\frac{-2}{\sin t}$. Eingesetzt erhält man schließlich

$$V = 2hR^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \sin^3 t \ln \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{6} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt \right),$$

also

$$V = \frac{1}{3} \pi h R^2. \quad \blacksquare$$

15.4 Die Substitutionsregel

Nach diesen mühsamen Berechnungen für ein einfaches und wohlbekanntes Resultat fragen wir uns, ob wir nicht von vornherein die Rechnung durch eine andere Beschreibung des Kegels hätten vereinfachen können. Stellen wir z.B. die Grundfläche des Kegels in Polarkoordinaten dar, so wird der Kegel beschrieben durch

$$\left\{ (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi], z \in \left[0, h - \frac{h}{R} r\right] \right\},$$

was eine wesentlich einfachere Integration erwarten läßt. Genau wie bei der Substitutionsregel im \mathbb{R}^1 entsteht dabei das folgende Problem: Wie hat man in $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ den Ausdruck $d(x, y, z)$ zu transformieren, wenn man von

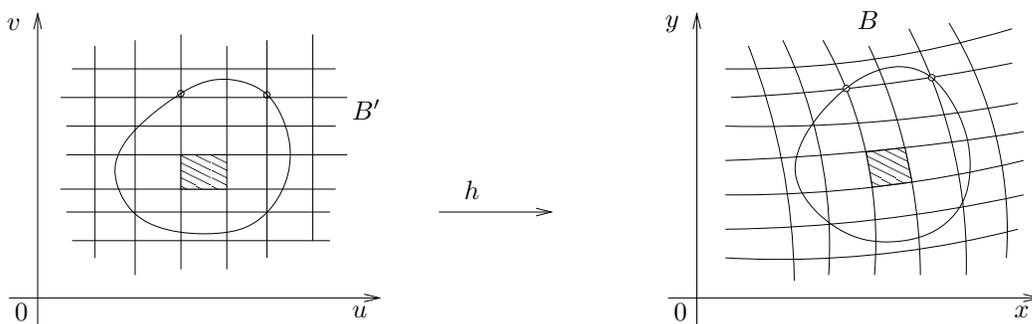
(x, y, z) zu neuen Koordinaten (r, φ, z) übergehen möchte? Zur Motivation betrachten wir das Integral

$$\int_B f(x, y) d(x, y)$$

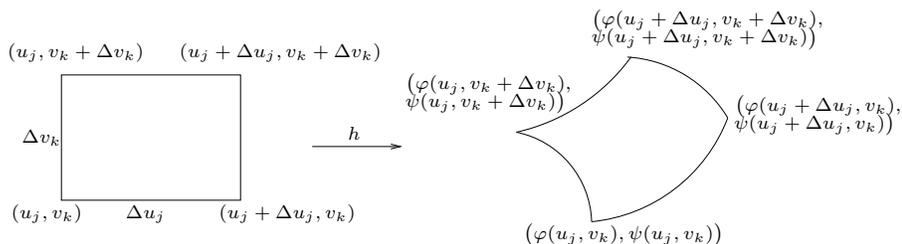
über einer Jordan-messbaren Menge B im \mathbb{R}^2 , versehen mit x, y -Koordinaten. Wir führen neue Veränderliche u, v durch die Substitution $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ ein, die einen Bereich B' des \mathbb{R}^2 (mit den Koordinaten u, v ; man spricht auch von der uv -Ebene) injektiv auf B abbildet, d.h. die Abbildung

$$h : B' \rightarrow B, \quad h(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

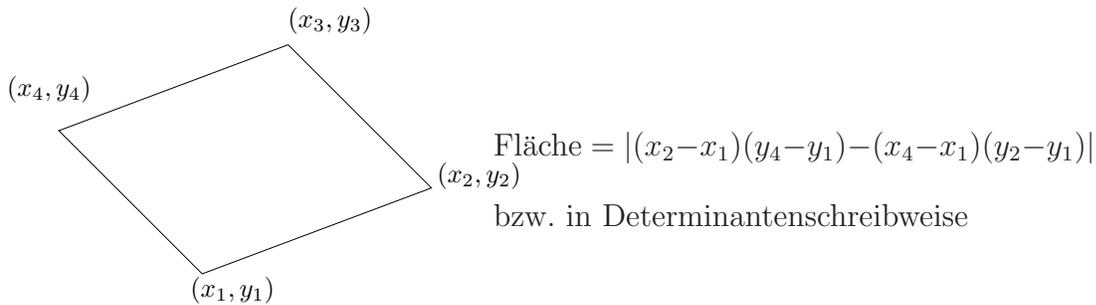
ist eine Bijektion. Durch die Abbildung h wird ein Rechteck-Netz über B' in ein „krummliniges“ Netz über B übersetzt:



Sehen wir uns genauer an, wie das schraffierte Rechteck in der uv -Ebene abgebildet wird:



Der Flächeninhalt des Rechteckes (wie er in der Definition des Riemann-Integrals über B' vorkommt) ist $\Delta u_j \Delta v_r$. Für die Berechnung der Fläche des „krummlinigen Parallelogramms“ nehmen wir an, dass Δu_j und Δv_r so klein sind, dass dieses Parallelogramm fast ein gewöhnliches Parallelogramm ist. Für den Flächeninhalt eines gewöhnlichen Parallelogramms mit den Ecken $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ gilt bekanntlich



$$\text{Fläche} = \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \right|$$

(vgl. Abschnitt 10.1). Der Flächeninhalt des „krummlinigen Parallelogramms“ ist also ungefähr gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) & \varphi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \varphi(u_j, v_k) \\ \psi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \psi(u_j, v_k) & \psi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \psi(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right|.$$

Ist φ stetig partiell differenzierbar und Δu_j sehr klein, so ist weiter

$$\varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(u_j, v_k) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) \cdot \Delta u_j.$$

Mit analogen Voraussetzungen für ψ erhalten wir also, dass der Flächeninhalt des „krummlinigen Parallelogramms“ etwa gleich

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_j, v_k) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_j, v_k) \end{pmatrix} \right| \Delta u_j \Delta v_k$$

ist. Die in diesem Ausdruck stehende Matrix ist gerade die Jacobi-Matrix von h an der Stelle (u_j, v_k) , d.h. unser „krummliniges Parallelogramm“ hat etwa den Flächeninhalt

$$|\det h'(u_j, v_k)| \Delta u_j \Delta v_k.$$

Näherungsweise sollte also gelten

$$\int_B f(x, y) d(x, y) \approx \sum_{j,k} f(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) |\det h'(u_j, v_k)| \Delta u_j \Delta v_k,$$

und wir erwarten die Substitutionsregel

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{B'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det h'(u, v)| d(u, v).$$

Es zeigt sich, dass die hier „abgeleitete“ Substitutionsregel tatsächlich gilt und dass sie auch auf Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen verallgemeinert werden kann.

Satz 15.16 Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $h : H \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig partiell differenzierbar. Die Determinante $\det h'(t)$ sei auf H entweder überall positiv oder überall negativ. Weiter sei T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von H , und f sei eine auf $h(T)$ stetige reellwertige Funktion. Dann ist $h(T)$ Jordan-messbar, f ist auf $h(T)$ Riemann-integrierbar, und es ist

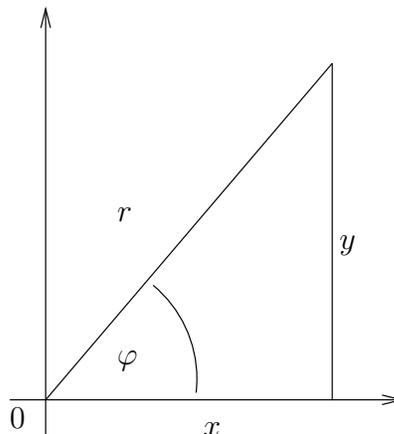
$$\int_{h(T)} f(x) dx = \int_T f(h(t)) |\det h'(t)| dt. \quad (15.6)$$

Diese Formel gilt auch dann noch, wenn – entgegen den obigen Voraussetzungen – die Determinante $\det h'(t)$ auf einer Teilmenge N von T gleich 0 ist oder wenn $h|_N$ auf einer Teilmenge N von T nicht injektiv ist, sofern nur N den Jordan-Inhalt 0 hat.

Der Beweis der Substitutionsregel (15.6) kann z.B. mit vollständiger Induktion nach n erfolgen und ist recht aufwändig. Wir sehen uns nun einige spezielle und häufig benutzte Transformationen genauer an.

Polarkoordinaten Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



Ein Integral auf Polarkoordinaten zu transformieren, heißt also, die Substitution

$$(x, y) = h(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

vorzunehmen. Es ist

$$h'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

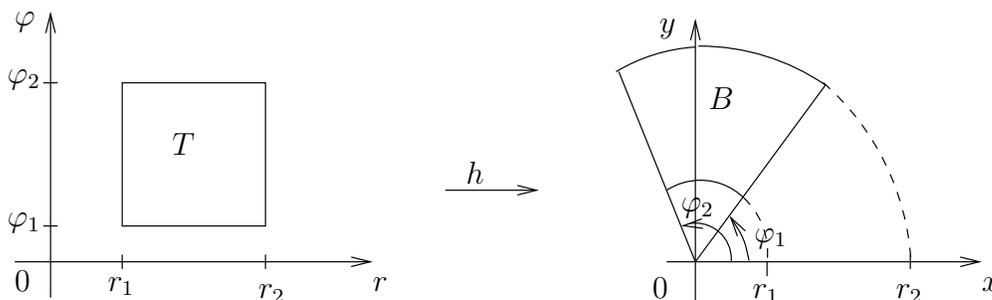
und daher $\det h'(r, \varphi) = r$. Für $r > 0$ ist also $\det h'(r, \varphi)$ stets positiv. Weiter ist klar, dass h den Bereich $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ injektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ abbildet und dass h insbesondere auf dem Gebiet $H := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ injektiv ist. Auf diesem Gebiet kann man also die Substitutionsregel anwenden, und es folgt

Folgerung 15.17 Ist $B = h(T)$, wobei $T \subseteq H$ kompakt und Jordan-messbar ist, so ist für jede auf B stetige Funktion f

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi). \quad (15.7)$$

Ist beispielsweise $T = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ ein Rechteck in H , so ist $B = h(T)$ ein Teil eines Kreisringes, und mit dem Satz von Fubini wird

$$\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (15.8)$$



In der Praxis ist T häufig ein Rechteck, welches im Streifen

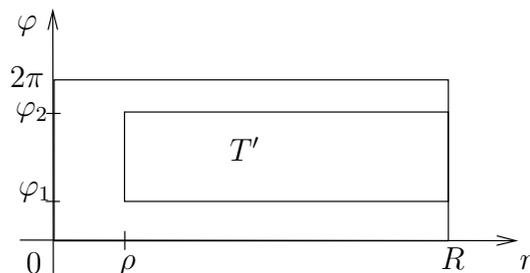
$$\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

liegt und Teile des Randes dieses Streifens enthält, so dass die Voraussetzungen des Satzes 15.16 nicht erfüllt sind. Dennoch gilt auch in diesem Fall die Formel (15.8), was man sich wie folgt klar macht. Sei etwa

$$T = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

und

$$T' = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho \leq r \leq R, 0 < \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < 2\pi\}.$$



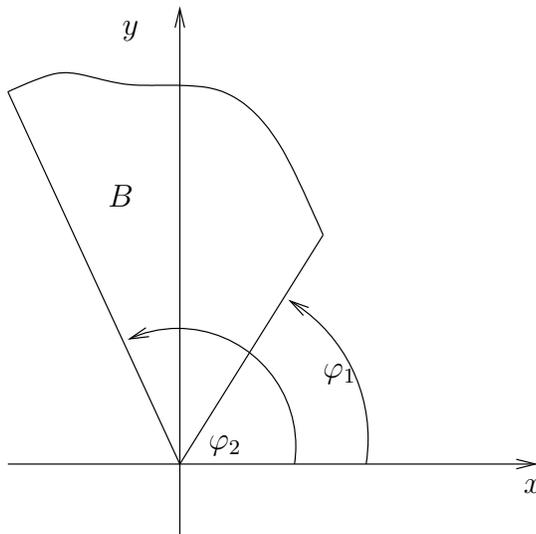
Auf T' gilt (15.7), d.h. es ist

$$\int_{h(T')} f(x, y) d(x, y) = \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi),$$

und aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) - \int_{T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &= \left| \int_{T \setminus T'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \right| \\ &\leq \sup_{(r, \varphi) \in T} |f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r| \cdot \mu(T \setminus T') \end{aligned}$$

folgt, dass das Integral über T' für $\rho \rightarrow 0$, $\varphi_1 \rightarrow 0$ und $\varphi_2 \rightarrow 2\pi$ gegen das entsprechende Integral über T strebt.



Beispiel 8 Sei $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, und die Funktion $\rho : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow (0, \infty)$ sei stetig. Dann ist der Flächeninhalt von $B = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, 0 \leq r \leq \rho(\varphi)\}$ gleich

$$\mu(B) = \int_B d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho^2(\varphi)}{2} d\varphi. \quad \blacksquare$$

Beispiel 9 Häufig benutzt man auch *verallgemeinerte Polarkoordinaten*

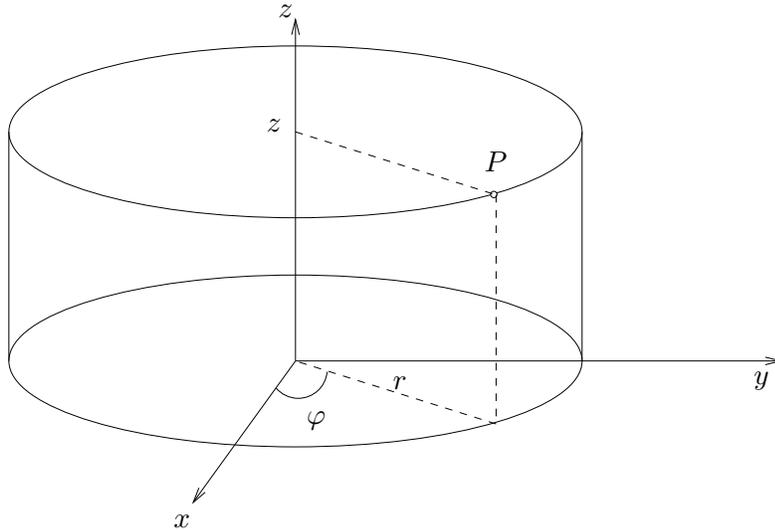
$$(x, y) = h(r, \varphi) = (ar \cos \varphi, br \sin \varphi) \quad \text{mit } a, b > 0.$$

Dann ist $\det h'(r, \varphi) = abr$ (Nachrechnen!), und man findet z.B. für den Flächeninhalt der Ellipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, dass

$$\mu(E) = \int_E d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2} d\varphi = ab\pi. \quad \blacksquare$$

Zylinderkoordinaten Die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z) sind gegeben durch

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$



Für die Transformationsfunktion

$$(x, y, z) = h(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

gilt

$$\det h'(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Folgerung 15.18 Ist T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von

$$H := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty\},$$

so ist für jede auf $h(T)$ stetige Funktion f

$$\int_{h(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z). \quad (15.9)$$

Die Formel (15.9) gilt auch dann noch, wenn T ein Quader

$$T = [r_1, r_2] \times [\varphi_1, \varphi_2] \times [z_1, z_2] \quad \text{mit } 0 \leq r_1 < r_2, 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$$

ist. In diesem Fall geht (15.9) über in

$$\int_{h(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Berechnen Sie als Übungsaufgabe nochmals das Kegelvolumen, nun aber unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

Kugelkoordinaten Die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) sind mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) verknüpft durch

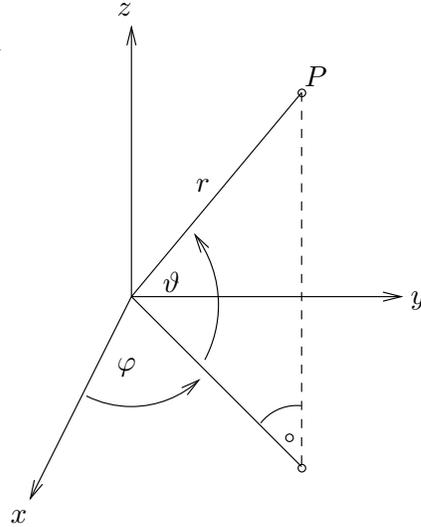
$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi, y = r \cos \vartheta \sin \varphi, z = r \sin \vartheta,$$

wobei $r \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Für die Transformationsfunktion

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= h(r, \vartheta, \varphi) \\ &= (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) \end{aligned}$$

gilt

$$\det h'(r, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix} = -r^2 \cos \vartheta.$$



Folgerung 15.19 Ist T eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge von

$$H := \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

so ist für jede auf $h(T)$ stetige Funktion f

$$\begin{aligned} &\int_{h(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_T f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn $T = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 \leq r_1 < r_2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ ist. Mit Fubini kann man dann schreiben

$$\begin{aligned} &\int_{h(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel 10 Die Kugel B mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius $R > 0$ ist das Bild des Quaders $T = [0, R] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ unter der oben beschriebenen

Transformation. Für das Kugelvolumen finden wir daher

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_B d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos \vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin \vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Erholung Semesterferien und eine erfolgreiche Mathe-Prüfung wünscht das Mathe-für-ET Team.