Vorlesung

Mehrfachintegration

Steffen Roch

SS 2007

Die Hauptsätze der Differential– und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen setzen das (bestimmte) Integral einer Funktion in Beziehung zu ihrer Stammfunktion und stellen die Integration als eine „Umkehrung“ der Differentiation dar. Sie geben uns damit ein Werkzeug in die Hand, konkrete Integrale effektiv zu berechnen.

In dieser Vorlesung befassen wir uns mit der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher, wo die Verhältnisse leider nicht mehr so einfach sind. Das hat sich bereits bei der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ angedeutet, bei der Methoden der linearen Algebra eine wesentliche Rolle spielen. Bei der mehrdimensionalen Integralrechnung sehen wir uns dem Problem gegenüber, dass es zur Berechnung von Integralen kein Werkzeug gibt, das ähnlich griffig wie die Hauptsätze der Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ sind. Wir werden zwar gegen Ende der Vorlesung den Gaußschen Integralsatz kennenlernen, der sich im Eindimensionalen auf den Hauptsatz reduziert, der aber doch in einem anderen Rahmen steht. Klar ist auch, dass nun die Geometrie eine wesentlich stärkere Rolle spielen muss: haben wir im Eindimensionalen ausschließlich über Intervallen integriert, so wollen wir nun auch Integrale über komplizierten geometrischen Objekten (Körper, Oberflächen, Mannigfaltigkeiten, ...) definieren und berechnen. Ein erster Schritt in diese Richtung war die Betrachtung von Kurvenintegralen in Abschnitt 11 der Analysis II–Vorlesung.

Zur mehrdimensionalen Integralrechnung gibt es im wesentlichen zwei Zugänge. Der Zugang über das Riemann–Integral hat den Vorteil, dass man sehr direkt Integrale als interierte Integrale ausrechnen kann. In der Theorie kommt man jedoch nicht so weit, wie es die Anwendungen der Analysis erfordern. Wir wählen daher den zweiten Zugang, der uns über die Maßtheorie zum Lebesgueschen Integral führen wird. Die Vorteile des Lebesgue–Integrals gegenüber dem Riemann–Integral werden dabei schnell deutlich werden.

Im ersten Kapitel sehen wir uns einige Grundbegriffe der Maßtheorie an, die für das Weitere unentbehrlich sind, und im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit abstrakter Integrationstheorie. Im dritten Kapitel erarbeiten wir den Satz von Fubini und die Transformationsformel für Lebesgue–Integrale auf dem $\mathbb{R}^n$. Damit stehen uns Wege zur Berechnung zahlreicher konkreter Integrale offen. In den beiden letzten Kapiteln wenden wir uns der Integration über Untermannigfaltigkeiten und den Integralsätzen von Gauß, Green und Stokes zu.

Ich werde mich stark am Skript von Herrn Prof. Neeb orientieren. Als ergänzende Literatur kann dienen:

Barner/Flohr: *Analysis II*

Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*

Bröcker: *Analysis II*, *Analysis III*

Floret: *Maß– und Integrationstheorie*

Forster: *Analysis 3*

Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*

Rudin: *Principles of Mathematical Analysis* sowie *Real and Complex Analysis*.

Besonders empfehlen möchte ich auch das ausführliche Skript von Herrn Glöckner.

1 Grundbegriffe der Maßtheorie

Der abstrakte Rahmen der Maßtheorie sieht folgendermaßen aus: Gegeben ist eine Menge X, ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von X sowie eine Funktion $\mu : \mathfrak{S} \to [0, \infty]$. Wir stellen uns vor, dass die Elemente von $\mathfrak{S}$ gerade diejenigen Teilmengen von X sind, die man *messen* kann (denen man ein „Volumen“ zuordnen kann) und dass das *Maß* (oder „Volumen“) von $E \in \mathfrak{S}$ gleich $\mu(E)$ ist. Welche Eigenschaften sollte dieser Messprozess aufweisen? Es sollte sicher $\mu(\emptyset) = 0$ sein, und wenn $E_1, E_2 \in \mathfrak{S}$ disjunkt sind, so sollte

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) \tag{1.1}$$

sein. Um Approximationsargumente zu ermöglichen (z.B. das Ausschöpfen einer Menge durch eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen), werden wir eine Version von (1.1) mit abzählbar vielen Mengen benötigen. Schließlich brauchen wir auch, dass mit einer Menge $E \in \mathfrak{S}$ ihr Komplement $X \setminus E$ ebenfalls zu $\mathfrak{S}$ gehört.

1.1 Messbare Mengen

Die Überlegungen aus der Einleitung führen auf folgende Definition.

Definition 1.1 *Sei X eine Menge. Ein System $\mathfrak{S}$ von Teilmengen von X heißt* σ–Algebra *, wenn*

(a) $\emptyset \in \mathfrak{S}$.

(b) *für jede Menge $E \in \mathfrak{S}$ ist $X \setminus E \in \mathfrak{S}$, d.h. $\mathfrak{S}$ ist abgeschlossen bzgl. der Komplementbildung.*

(c) *für jede Folge $(E_n)_{n\geq 1}$ von Mengen $E_n \in \mathfrak{S}$ ist $\cup_{n\geq 1} E_n \in \mathfrak{S}$, d.h. $\mathfrak{S}$ ist abgeschlossen bzgl. abzählbaren Vereinigungen.*

Definition 1.2 *Ist X eine Menge und $\mathfrak{S}$ eine σ–Algebra von Teilmengen von X, so heißt $(X, \mathfrak{S})$ ein* messbarer Raum*, und die Elemente von $\mathfrak{S}$ heißen* messbare Mengen *.*

Man beachte, dass wegen $(b), (c)$ und der de Morganschen Identität

$$X \setminus (\bigcap_{n\geq 1} E_n) = \bigcup_{n\geq 1} (X \setminus E_n)$$

σ-Algebren auch abgeschlossen bezüglich abzählbarer Durchschnitte sind.

Beispiele $\mathfrak{S} = \{\emptyset, X\}$ ist die kleinste σ–Algebra über X, und die *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(X) := \{E : E \subseteq X\}$ ist die größte σ–Algebra über X.

Lemma 1.3 *Sei X eine Menge.*

(a) *Ist $\mathcal{A}$ eine Familie von σ–Algebren über X, so ist ihr* Durchschnitt

$$\cap\mathcal{A} := \{E \in \mathfrak{P}(X) : E \in \mathfrak{S} \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{S} \in \mathcal{A}\}$$

wieder eine σ–Algebra über X.

(b) *Ist $\mathfrak{S}$ eine σ–Algebra über X und Y eine Teilmenge von X, so ist*

$$\mathfrak{S}_Y := \{E \cap Y : E \in \mathfrak{S}\}$$

eine σ–Algebra über Y.

Beweis Übung. ∎

Als Folgerung erhalten wir, dass es für jede Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ genau eine kleinste σ–Algebra über X gibt, die $\mathcal{E}$ umfasst. Um das einzusehen, betrachten wir die Menge $\mathcal{A}$ aller σ–Algebren über X, die $\mathcal{E}$ umfassen. Da $\mathcal{E}$ in der σ–Algebra $\mathfrak{P}(X)$

enthalten ist, ist $\mathcal{A}$ sicher nicht leer. Der Durchschnitt aller σ–Algebren aus $\mathcal{A}$ ist nach Lemma 1.3 (a) wieder eine σ–Algebra. Diese enthält offenbar $\mathcal{E}$, und es ist die kleinste σ–Algebra über X, die $\mathcal{E}$ enthält. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$.

Ist insbesondere (X,d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ das System der offenen Teilmengen von X, so heißt die durch $\mathcal{O}$ erzeugte σ–Algebra $\mathfrak{B}(X) := \mathfrak{S}(\mathcal{O})$ die *σ–Algebra der Borelmengen auf X*, und die Elemente von $\mathfrak{B}(X)$ heißen *Borelmengen*. Es ist klar, dass alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen Borelmengen sind, ebenso abzählbare Durchschnitte offener Mengen (sogenannte *G_δ–Mengen*) und abzählbare Vereinigungen abgeschlossener Mengen (sogenannte *F_σ–Mengen*).

Versehen wir den $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidschen Metrik, so erhalten wir die σ–Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen auf dem $\mathbb{R}^n$. Das werden später im wesentlichen die Mengen sein, die wir messen und über die wir integrieren wollen. Wir überlegen uns daher äquivalente Beschreibungen von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 1.4 *Jedes der folgenden Mengensysteme $\mathcal{E}_j$ erzeugt die σ–Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen auf $\mathbb{R}$ (es ist also $\mathfrak{S}(\mathcal{E}_j) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$) :*

(a) $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$,

(b) $\mathcal{E}_2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\mathcal{E}_3 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\mathcal{E}_4 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\mathcal{E}_5 = \{(-\infty,b] : b \in \mathbb{R}\}$.

Beweis Für $j = 1,\dots,5$ sei $\mathfrak{S}_j := \mathfrak{S}(\mathcal{E}_j)$. Wegen $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ ist $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Aus

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a + \frac{1}{n}\,, b\Big)$$

folgt $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3$ und damit $\mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3$. Analog folgt aus

$$[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[a, b - \frac{1}{n}\Big],$$

dass $\mathcal{E}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4$, und aus

$$[a,b] = (-\infty,b] \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(-\infty, a - \frac{1}{n}\Big]\Big),$$

dass $\mathcal{E}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5$ und $\mathfrak{S}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5$. Wir haben damit $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_3 \subseteq \mathfrak{S}_4 \subseteq \mathfrak{S}_5 \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ erhalten und müssen noch $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{S}_1$ zeigen. Da $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ von den offenen

Mengen erzeugt wird, müssen wir zeigen, dass $\mathfrak{S}_1$ jede offene Menge enthält. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Wir wählen $a \in (x-\varepsilon, x) \cap \mathbb{Q}$ und $b \in (x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist $x \in (a,b) \subseteq U$ und folglich

$$U = \bigcup_{(a,b) \subseteq U,\ a,\ b \in \mathbb{Q}} (a,b).$$

Da die rechte Seite eine abzählbare Vereinigung ist, folgt $U \in \mathfrak{S}_1$. ■

Ein analoges Resultat gilt auch im $\mathbb{R}^n$. Erklären wir beispielsweise für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $a_j \leq b_j$ den *halboffenen Quader* $[a,b)$ durch

$$[a,b) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j < b_j \quad \text{für alle } j\},$$

so erhalten wir wie in Lemma 1.4:

Lemma 1.5 *Das System $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}^n\}$ der halboffenen Quader erzeugt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Auch die offenen und abgeschlossenen Quader erzeugen $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.*

1.2 Messbare Funktionen

Wir wenden uns nun den Funktionen zu, die wir später integrieren wollen.

Definition 1.6 *Seien $(X_1, \mathfrak{S}_1), (X_2, \mathfrak{S}_2)$ messbare Räume. Eine Funktion $f : X_1 \to X_2$ heißt* messbar*, wenn das Urbild jeder messbaren Menge messbar ist, d.h., wenn $f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1$ für jede Menge $E \in \mathfrak{S}_2$.*

Man beachte die Ähnlichkeit zur Charakterisierung stetiger Funktionen durch die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind (Analysis I, Satz 6.5).

Satz 1.7 *Verknüpfungen messbarer Funktionen sind messbar. Genauer: sind $(X_1, \mathfrak{S}_1)$, $(X_2, \mathfrak{S}_2)$, $(X_3, \mathfrak{S}_3)$ messbare Räume und $f : X_1 \to X_2$ und $g : X_2 \to X_3$ messbare Funktionen, so ist auch $g \circ f : X_1 \to X_3$ messbar.*

Beweis Für $E \in \mathfrak{S}_3$ ist

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\Big(g^{-1}(E)\Big) \in f^{-1}(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{S}_1,$$

also ist $g \circ f$ messbar. ■

Der folgende Satz zeigt, dass es für das Überprüfen der Messbarkeit einer Funktion nicht erforderlich ist, die Urbilder *aller* messbaren Mengen zu betrachten.

Satz 1.8 *Seien $(X_1, \mathfrak{S}_1), (X_2, \mathfrak{S}_2)$ messbare Räume, wobei $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}(\mathcal{E}_2)$ für eine Teilmenge $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathfrak{P}(X_2)$ ist, und sei $f : X_1 \to X_2$. Ist $f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1$ für jede Menge $E \in \mathcal{E}_2$, so ist f bereits messbar.*

Beweis Nach Voraussetzung ist

$$\mathcal{E}_2 \subseteq \{E \in \mathfrak{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die rechte Seite ein σ–Algebra ist. Dann muss aber auch

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}(\mathcal{E}_2) \subseteq \{E \in \mathfrak{P}(X_2) : f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}_1\}$$

sein, d.h. f ist messbar. ∎

Ist also (X_2, d) ein metrischer Raum, so ist $f : (X_1, \mathfrak{S}_1) \to (X_2, \mathfrak{B}(X_2))$ genau dann messbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge messbar ist.

Folgerung 1.9 *Sind X, Y metrische Räume, so ist jede stetige Funktion $f : X \to Y$ messbar (bzgl. der σ–Algebren $\mathfrak{B}(X)$ und $\mathfrak{B}(Y)$ der Borelmengen).*

Beweis Wie wir soeben bemerkt haben, genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(E)$ für jede offene Menge $E \subseteq Y$ eine Borelmenge ist. Dies ist aber klar: da f stetig ist, ist $f^{-1}(E)$ offen, also erst recht eine Borelmenge. ∎

Folgerung 1.10 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $f : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *f ist messbar.*
- (b) *die Urbilder aller offenen Intervalle sind messbar.*
- (c) *die Urbilder aller halboffenen Intervalle sind messbar.*
- (d) *die Urbilder aller abgeschlossenen Intervalle sind messbar.*
- (e) *für alle $b \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}((-\infty, b])$ messbar.*

Dies folgt sofort aus Satz 1.8 und Lemma 1.4. Mit Lemma 1.5 bekommt man eine analoge Aussage für den $\mathbb{R}^n$. Darüberhinaus gilt:

Satz 1.11 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $f := (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) *$f : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ ist messbar.*
- (b) *jede der Koordinatenfunktionen $f_j : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ist messbar.*

Beweis $(a) \Rightarrow (b)$ Die Projektionen $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ sind stetig und damit messbar (Folgerung 1.9). Nach Satz 1.7 sind dann auch die Funktionen $f_j = p_j \circ f$ messbar.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seien $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Sind alle Koordinatenfunktionen messbar, so sind alle Urbilder

$$f^{-1}\Big([a,b)\Big) = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}\Big([a_j, b_j)\Big)$$

messbar. Das Analogon von Folgerung 1.10 für $\mathbb{R}^n$–wertige Funktionen liefert die Messbarkeit von f. ■

Es ist oft praktisch, statt mit reellwertigen Funktionen mit Funktionen zu arbeiten, deren Werte in der *erweiterten Zahlengeraden* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ liegen. Man kann leicht zeigen, dass die Menge

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \{A \in \mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}) : A \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

eine σ–Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist und dass man $\overline{\mathbb{R}}$ mit einer Metrik versehen kann, so dass die Elemente von $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gerade die Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind ($\nearrow$ Tutorium). Wir nennen daher $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ die *σ–Algebra der Borelmengen auf* $\overline{\mathbb{R}}$. Weiter definieren wir die Ordnungsrelation $<$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch

$$-\infty < r < \infty \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.12 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$f : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(b) *$-f : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ist messbar.*

(c) *für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) \leq b\}$ messbar.*

(d) *für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) > a\}$ messbar.*

(e) *für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ messbar.*

(f) *für jedes $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ist $\{x \in X : f(x) < b\}$ messbar.*

Beweis $(a) \Leftrightarrow (b)$ Das folgt sofort aus $-\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.
$(a) \Rightarrow (c)$ Das folgt aus der Inklusion $[-\infty, b] \in B(\overline{\mathbb{R}})$.
$(c) \Rightarrow (d)$ Das folgt durch Komplementbildung

$$\{x \in X : f(x) > a\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \leq a\}.$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Nach Satz 1.8 genügt es zu zeigen, dass die Intervalle $(a, \infty]$ die σ–Algebra $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erzeugen. Sei $\mathfrak{S}$ die kleinste σ–Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$, die alle Intervalle $(a, \infty]$ mit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ enthält. Offenbar ist $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann liegt $(a, b] = (a, \infty] \setminus (b, \infty]$ in $\mathfrak{S}$, und nach Lemma 1.4 ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{S}$. Aus

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, \infty] = (-\infty, \infty] \in \mathfrak{S}$$

und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\overline{\mathbb{R}} \setminus (n, \infty]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\infty, n] = [-\infty, \infty) \in \mathfrak{S}$$

folgt, dass

$$\{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus (-\infty, \infty] \in \mathfrak{S} \text{ und } \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}} \setminus [-\infty, \infty) \in \mathfrak{S}.$$

Da *jede* Borelmenge auf $\overline{\mathbb{R}}$ die Vereinigung einer Menge aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ mit einer der Mengen $\emptyset, \{-\infty\}, \{\infty\}, \{-\infty, \infty\}$ ist, folgt $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathfrak{S}$ und damit $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{S}$. Die Implikationen $(a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$ zeigt man analog. ■

Satz 1.13 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum und $f, g : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ messbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $|f|$, $f + g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g) : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

Beweis Die Messbarkeit von $|f|$ folgt aus der Stetigkeit (und damit Messbarkeit) der Betragsfunktion mit Satz 1.7. Weiter wissen wir aus Satz 1.11, dass die Funktion $F = (f, g) : (X, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$ messbar ist. Aus der Stetigkeit der Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y,\ xy,\ \max(x, y),\ \min(x, y)$$

und aus Satz 1.7 folgen die übrigen Behauptungen. ■

Da konstante Funktionen messbar sind (warum?), bildet nach Satz 1.13 die Menge aller messbaren Funktionen von X in $\mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum. Die folgenden Resultate zeigen, dass die Messbarkeit bemerkenswert stabil gegenüber Grenzprozessen ist.

Satz 1.14 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine messbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n,\ \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n,\ \limsup_{n \to \infty} f_n,\ \liminf_{n \to \infty} f_n$$

messbar.

Beweis Sei $g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Für alle $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist dann

$$\{x \in X : g(x) > a\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > a\}.$$

Nach Voraussetzung und Lemma 1.12 ist die rechte Seite messbar. Also ist für jedes $a \in \overline{\mathbb{R}}$ die linke Seite messbar, und g ist messbar nach Lemma 1.12. Genauso folgt die Messbarkeit von $\inf f_n$. Aus

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} f_j$$

folgt nun die Messbarkeit von $\limsup f_n$, und die von $\liminf f_n$ zeigt man analog. ■

Satz 1.15 *Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar. Genauer, existiert für eine Folge messbarer Funktionen $f_n : (X, \mathfrak{S}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ der Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in X$, so ist $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

Dies folgt wegen $f = \limsup f_n$ sofort aus Satz 1.14. ■

1.3 Maße

Wir wenden uns nun dem Messen messbarer Mengen eines messbaren Raumes zu und beginnen mit einer Axiomatisierung des Maßbegriffes.

Definition 1.16 *Sei $(X, \mathfrak{S})$ ein messbarer Raum. Ein* Maß *auf $(X, \mathfrak{S})$ ist eine Funktion $\mu : \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(*a*) $\mu(\emptyset) = 0$.

(*b*) *μ ist σ–*additiv*, d.h. für jede Folge $(E_n)_{n\geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen $E_n \in \mathfrak{S}$ gilt*

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{1.2}$$

Ist μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$, so heißt das Tripel $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum.

Im weiteren haben wir hin und wieder (wie z.B. in (1.2)) mit $\pm\infty$ zu rechnen, was wir nach folgenden Regeln tun:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \infty &= \infty \cdot 0 &&= 0, \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x &&= \infty \text{ falls } x > 0 \text{ und } x \cdot \infty = \infty \cdot x = -\infty \text{ falls } x < 0, \\ x + \infty &= \infty + x &&= \infty \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und für } x = \infty. \end{aligned}$$

Beispiele für Maße

(*a*) Ist $\mathfrak{S} = \{\emptyset, X\}$, so kann $\mu(X) \in [0, \infty]$ beliebig gewählt werden, und man erhält mit $\mu(\emptyset) = 0$ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$.

(b) Für jedes $x \in X$ wird durch

$$\mu(E) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \ x \in E \\ 0 & \text{wenn } \ x \notin E \end{cases}$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$ festgelegt, das sogenannte *Punkt–* oder *Diracmaß in* x. Man schreibt $\mu =: \delta_x$.

(c) Durch

$$\mu : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad E \mapsto \text{ Anzahl der Elemente von } \ E$$

wird das *Zählmaß* auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ festgesetzt.

(d) Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathfrak{S}$, so ist auch $(E, \mathfrak{S}_E, \mu\big|_{\mathfrak{S}_E})$ ein Maßraum (vgl. Lemma 1.3b)). ■

Lemma 1.17 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt*

(a) *μ ist* additiv *, d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ falls $A, B \in \mathfrak{S}$ und $A \cap B = \emptyset$.*

(b) *μ ist* monoton *, d.h. $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A, B \in \mathfrak{S}$ und $A \subseteq B$.*

(c) *ist $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ monoton wachsend (d.h. $E_j \subseteq E_{j+1}$, für alle j), dann ist*

$$\mu(\bigcup_{j \geq 1} E_j) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j).$$

(d) *ist $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ monoton fallend (d.h. $E_j \supseteq E_{j+1}$ für alle j) und $\mu(E_1) < \infty$, dann ist*

$$\mu(\bigcap_{j \geq 1} E_j) = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j).$$

(e) *für beliebige Folgen $(E_j)_{j \geq 1} \subseteq \mathfrak{S}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{j \geq 1} E_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Beweis (a) Man wende die σ–Additivität auf die Folge $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$ an.
(b) Aus (a) folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.
(c) Sei $E := \cup_{j \geq 1} E_j, E_0 := \emptyset$ und $A_j := E_j \setminus E_{j-1}$ für $j \geq 1$. Dann ist $E = \cup_{j \geq 1} A_j$, und die A_j sind paarweise disjunkt. Aus der σ–Additivität von μ folgt

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Außerdem ist $E_n = \cup_{j=1}^n A_j$ und damit $\mu(E_n) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$ für jedes n. Hieraus folgt $\mu(E_n) \to \mu(E)$ für $n \to \infty$.
(d) Sei $E := \cap_{j\geq 1} E_j$ und $C_j := E_1 \setminus E_j$ für $j \geq 1$. Die Folge $(C_j)_{j\geq 1}$ ist monoton wachsend, und aus (c) und den de Morganschen Identitäten folgt

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_j) = \mu(\bigcup_{j\geq 1} C_j) = \mu\Big(\bigcup_{j\geq 1}(E_1 \setminus E_j)\Big) = \mu(E_1 \setminus \bigcap_{j\geq 1} E_j) = \mu(E_1 \setminus E).$$

Aus $\mu(E_1) = \mu(E_j) + \mu(C_j)$ und $\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1 \setminus E)$ sowie $\mu(E_1) < \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu(E_1) - \mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(C_j) \\ &= \mu(E_1) - \lim_{j\to\infty} \Big(\mu(E_1) - \mu(E_j)\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j). \end{aligned}$$

(e) Sei $A_1 := E_1$ und $A_n := E_n \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1})$ für $n > 1$. Dann sind die Mengen A_n paarweise disjunkt, und es ist $\cup_{n\geq 1} A_n = \cup_{n\geq 1} E_n$ sowie $\mu(A_n) \leq \mu(E_n)$ für alle n wegen (b). Aus der σ–Additivität folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \qquad \blacksquare$$

Der folgende wichtige Satz behauptet, dass es genau ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ gibt, das allen Quadern ihr (gewöhnliches) Volumen zuordnet. Der Beweis erfordert einen tieferen Einstieg in die Maßtheorie, den wir uns aus Zeitgründen nicht leisten wollen. Sie finden einen Beweis z.B. in Bröcker, Analysis II, S. 66 – 73.

Satz 1.18 (Existenz und Eindeutigkeit des Lebesguemaßes) (a) *Es gibt genau ein Maß λ auf der σ–Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$ so, dass $\lambda([a,b)) = (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ für alle $a = (a_1,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j$ für alle j.*

(b) *Ist μ ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, das auf allen halboffenen Quadern endliche Werte annimmt, dann ist für jede Borelmenge B*

$$\mu(B) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) : B_j \text{ halboffene Quader mit } B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big\}.$$

Das Maß μ ist also bereits durch seine Werte auf den halboffenen Quadern eindeutig bestimmt.

Beweisskizze Sei $\mathcal{Q}$ die Menge aller endlichen Vereinigungen von beschränkten halboffenen Quadern. $\mathcal{Q}$ ist eine *Mengenalgebra* in folgendem Sinn: $\emptyset \in \mathcal{Q}$, und mit A und B liegen auch $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{Q}$. Außerdem wird $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ als σ–Algebra von $\mathcal{Q}$ erzeugt (Lemma 1.5).

Für $[a, b) \in \mathcal{Q}$ setzen wir $\lambda([a, b)) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$, und für paarweise disjunkte Quader $Q_1, \ldots, Q_r$ definieren wir $\lambda(\emptyset) = 0$ und

$$\lambda(Q_1 \cup \ldots \cup Q_r) = \sum_{j=1}^{r} \mu(Q_r).$$

Da jedes $A \in \mathcal{Q}$ als endliche Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader geschrieben werden kann, haben wir damit eine Mengenfunktion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty)$ definiert. Man zeigt nun, dass diese Funktion sogar σ–additiv ist (das ist nicht trivial; man benutzt die Kompaktheit der abgeschlossenen Quader $[a, b]$), und schließlich beweist und benutzt man der *Hahnschen Fortsetzungssatz*, der die eindeutige Fortsetzbarkeit von λ zu einer σ–additiven Mengenfunktion auf der σ–Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{S}(\mathcal{Q})$ liefert. ∎

Definition 1.19 *Das Maß* $\lambda_n := \lambda : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *aus Satz 1.18 heißt das* n–dimensionale Lebesguemaß *.*

Wir denken uns $\lambda_n(B)$ als n–dimensionales Volumen der Borelmenge B. Dieses Volumen ist dadurch normiert, dass wir jedem Quader sein „natürliches“ Volumen zuordnen. Bei komplizierten Borelmengen B ist zunächst unklar, wie man $\lambda(B)$ praktisch bestimmt. Satz 1.18 sagt dazu lediglich, dass man $\lambda(B)$ von oben beliebig genau approximieren kann, wenn man Überdeckungen von B durch höchstens abzählbar viele Quader betrachtet. Man erwartet, dass man umso mehr und umso kleinere Quader zur Überdeckung benutzen muss, je „komplizierter“ B ist. Später lernen wir mit dem *Prinzip von Cavalieri* ein Werkzeug kennen, das solche Berechnungen auf die Berechnung eindimensionaler Integrale reduziert. Zunächst noch zwei Folgerungen aus Satz 1.18.

Folgerung 1.20 *Seien* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *und* $a \le b$ *(komponentenweise). Dann ist*

$$\lambda\Big([a, b]\Big) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Beweis Für $j = 1, \ldots, n$ und $m \ge 1$ sei $b_j^{(m)} := b_j + 1/m$ und $b^{(m)} := (b_1^{(m)}, \ldots, b_n^{(m)})$. Dann ist

$$[a, b] = \bigcap_{m \ge 1} [a, b^{(m)}) \quad \text{sowie} \quad [a, b^{(m)}) \supseteq [a, b^{(m+1)})$$

für alle m. Aus Lemma 1.17 (d) folgt die Behauptung. ∎

Folgerung 1.21 *Ist* $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ *und* $t > 0$*, so ist auch* $tE \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$*, und es gilt*

$$\lambda_n(tE) = t^n \lambda_n(E).$$

Beweis Man überprüft leicht, dass $t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \{tB : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\}$ eine σ–Algebra über $\mathbb{R}^n$ ist, die alle offenen Mengen enthält. Folglich ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ in $t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ enthalten. Eine Wiederholung dieser Überlegung liefert

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \frac{1}{t}\, t\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere ist also $tE \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ für $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, und wir definieren

$$\mu(E) := \frac{1}{t^n}\, \lambda_n(tE).$$

Man bestätigt leicht, dass μ ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ist und dass für $E = [a, b)$

$$\mu(E) = \frac{1}{t^n}\, \lambda_n(tE) = \frac{1}{t^n} \prod_{j=1}^{n} (tb_j - ta_j) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \lambda_n(E).$$

Mit Satz 1.18 (b) folgt $\mu = \lambda_n$ auf ganz $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. ■

1.4 Nullmengen und Vollständigkeit von Maßräumen

Viele Begriffe und Aussagen der Maß– und Integrationstheorie werden einfacher und natürlicher, wenn der Maßraum vollständig in folgendem Sinn ist.

Definition 1.22 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Teilmenge N von X heißt eine μ–*Nullmenge*, wenn sie Teilmenge einer Menge $E \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(E) = 0$ ist. Gehört jede μ–Nullmenge von X zu $\mathfrak{S}$, so heißt $(X, \mathfrak{S}, \mu)$* vollständig*.*

Liegt eine μ–Nullmenge N in $\mathfrak{S}$, so ist nach Lemma 1.17 (b) $\mu(N) = 0$. In vollständigen Maßräumen stimmen also die Begriffe *μ–Nullmenge* und *Menge vom Maß* 0 überein.

Die Nullmengen des Maßraumes $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ kann man mit Satz 1.18 leicht charakterisieren: $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ–Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(Q_m)_{m\geq 1}$ halboffener Quader Q_m so gibt, dass

$$N \subseteq \bigcup_{m\geq 1} Q_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(Q_m) < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Für $n = 1$ stimmt dies exakt mit dem Begriff einer Nullmenge überein, den wir in der Analysis II, Abschnitt 8.4, eingeführt haben. Man kann diese Beschreibung noch etwas verfeinern. Dazu nennen wir einen abgeschlossenen Quader $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ einen *Würfel*, wenn $b_1 - a_1 = \ldots = b_n - a_n$.

Lemma 1.23 *$N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine λ–Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(W_m)_{m\geq 1}$ von Würfeln gibt mit*

$$N \subseteq \bigcup_{m\geq 1} W_m \quad \textit{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(W_m) < \varepsilon.$$

Beweis N ist genau dann λ–Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ halboffene Quader $Q_m = [a^{(m)}, b^{(m)})$ gibt, so dass (1.3) gilt. Sei für jedes m $c^{(m)} = (c_1^{(m)}, \ldots, c_n^{(m)})$ so, dass $c_j^{(m)} > b_j^{(m)}$ für alle j, $c^{(m)} - a^{(m)} \in \mathbb{Q}^n$ und dass

$$\lambda\Big([a^{(m)}, c^{(m)})\Big) < \lambda\Big([a^{(m)}, b^{(m)})\Big) + \frac{\varepsilon}{2^m}\,.$$

Da alle Seitenlängen von $[a^{(m)}, c^{(m)})$ rational sind, gibt es endlich viele Würfel $W_1^{(m)}, \ldots, W_{k_m}^{(m)}$ mit

$$\bigcup_{j=1}^{k_m} W_j^{(m)} = [a^{(m)}, c^{(m)}] \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k_m} \lambda(W_j^{(m)}) = \lambda\Big([a^{(m)}, c^{(m)}]\Big).$$

Dann ist $N \subset \cup_{j,m} W_j^{(m)}$, und mit Folgerung 1.20 erhalten wir

$$\sum_{m,j} \lambda(W_j^{(m)}) = \sum_m \lambda\Big([a^{(m)}, c^{(m)})\Big) \le \sum_m \Big(\lambda(Q_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}\Big) < 2\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Wir sehen uns nun zwei einfache Aussagen an, wo die Vollständigkeit eine Rolle spielt. Dazu vereinbaren wir: Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, und gilt eine Eigenschaft P für alle Punkte von X mit Ausnahme von Punkten in einer μ–Nullmenge, so sagen wir, dass P *fast überall* (oder *μ–fast überall*) gilt.

Lemma 1.24 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $(X', \mathfrak{S}')$ ein messbarer Raum und seien $f, g : X \to X'$ Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Ist f messbar, dann ist auch g messbar.*

Beweis Sei $N \subseteq X$ eine μ–Nullmenge so, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und sei $E \in \mathfrak{S}'$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{-1}(E) &= \Big(g^{-1}(E) \cap (X \setminus N)\Big) \cup \Big(g^{-1}(E) \cap N\Big) \\ &= \Big(f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)\Big) \cup \Big(g^{-1}(E) \cap N\Big). \end{aligned}$$

Die Menge $f^{-1}(E) \cap (X \setminus N)$ ist messbar nach Voraussetzung, und $g^{-1}(E) \cap N$ ist Teilmenge der μ–Nullmenge N, also selbst eine μ–Nullmenge und damit messbar. Also ist $g^{-1}(E)$ für jedes $E \in \mathfrak{S}'$ messbar, d.h. g ist messbar. ■

Lemma 1.25 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, und die Funktionen $f_n : (X, \mathfrak{S}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ seien messbar und sollen fast überall gegen eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergieren. Dann ist f messbar.*

Beweis Sei $N \subseteq X$ eine μ–Nullmenge so, dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Aus Satz 1.15 folgt die Messbarkeit von $f\big|_{X\setminus N}$. Aus der Vollständigkeit folgt weiter, dass auch $f\big|_N$ messbar ist. Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ist ja $(f\big|_N)^{-1}(A) = f^{-1}(A) \cap N$ Teilmenge einer μ–Nullmenge, also messbar. Für beliebiges $B \in \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ erhalten wir somit die Messbarkeit von

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \Big(f^{-1}(B) \cap (X \setminus N)\Big) \cup \Big(f^{-1}(B) \cap N\Big) \\ &= (f\big|_{X\setminus N})^{-1}(B) \cup (f\big|_N)^{-1}(B). \end{aligned}$$

Also ist f messbar. ■

Nichtvollständige Maßräume lassen sich auf natürliche Weise zu vollständigen Maßräumen erweitern. Sei dazu $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum. Die Menge $\tilde{\mathfrak{S}}$ bestehe aus allen Teilmengen von X, die Vereinigung einer Menge aus $\mathfrak{S}$ und einer μ–Nullmenge sind. Ist $E \in \mathfrak{S}$ und N eine μ–Nullmenge, so setzen wir $\tilde{\mu}(E \cup N) := \mu(E)$. Diese Definition von $\tilde{\mu}$ ist korrekt. Sind nämlich $E, F \in \mathfrak{S}$ und $M \subseteq \tilde{M} \in \mathfrak{S}$, $N \subseteq \tilde{N} \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(\tilde{M}) = \mu(\tilde{N}) = 0$ und $E \cup M = F \cup N$, so ist $F \subseteq F \cup N = E \cup M \subseteq E \cup \tilde{M}$ und folglich

$$\mu(F) \leq \mu(E \cup \tilde{M}) = \mu(E) + \mu(\tilde{M} \setminus E) = \mu(E).$$

Analog zeigt man, dass $\mu(E) \leq \mu(F)$ und somit $\mu(E) = \mu(F)$ ist. Der folgende Satz soll in der Übung bewiesen werden.

Satz 1.26 $(X, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mu})$ *ist ein vollständiger Maßraum.*

Der in Satz 1.18 konstruierte Lebesgue–Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ ist *nicht* vollständig. Es ist daher zweckmäßig, ihn zum Maßraum $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n), \tilde{\lambda})$ zu vervollständigen, wobei $\tilde{B}(\mathbb{R}^n)$ die wie oben erweiterte σ–Algebra der Borelmengen und $\tilde{\lambda}$ das wie oben fortgesetzte Lebesguemaß ist. Es ist üblich, λ statt $\tilde{\lambda}$ zu schreiben und $\tilde{\lambda}$ das *Lebesguemaß auf* $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n)$ zu nennen.

2 Allgemeine Integrationstheorie

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, und wir betrachten $\overline{\mathbb{R}}$ immer mit der σ–Algebra $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Ziel ist es, messbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren. Das Maß μ wird uns vorgegeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann für nichtnegative messbare Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv– und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben. Wir werden sehen, dass das so erklärte Lebesgue–Integral wesentlich allgemeiner und flexibler als das Riemann–Integral ist.

2.1 Stufenfunktionen

Eine messbare Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion*, wenn $s(X)$ endlich ist. Jede konstante Funktion ist eine Stufenfunktion. Wie sieht es mit Funktionen aus, die zwei Werte annehmen? Dazu betrachten wir für jede Menge $E \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion*

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in E \\ 0 & \text{wenn} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar (und damit eine Stufenfunktion), wenn $E \in \mathfrak{S}$. Insbesondere ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ eine Stufenfunktion für $(X, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Lemma 2.1 *Eine Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{S}$ so gibt, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$.*

Beweis Sind $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathfrak{S}$ für $j = 1, \ldots, k$, so ist $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ messbar nach Satz 1.13 und damit Stufenfunktion. Sei umgekehrt s eine Stufenfunktion und $s(X) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ (mit paarweise verschiedenen Zahlen α_j). Dann sind die Mengen $A_j := s^{-1}(\{\alpha_j\})$ messbar und paarweise disjunkt, und es ist $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$. ■

Die folgenden Sätze zeigen, dass nichtnegative messbare Funktionen durch Stufenfunktionen approximiert werden können.

Satz 2.2 *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen $s_n : X \to [0, \infty)$ so, dass*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X$$

und dass die Konvergenz auf jeder Menge $\{x \in X : f(x) \le c\}$ mit $c \in [0, \infty)$ gleichmäßig ist.

Beweis Für $n \geq 1$ sei

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{falls} \quad f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \quad \text{mit } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{falls} \quad f(x) \in [n, \infty]. \end{cases}$$

Dann ist $(s_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, und ist $c \in [0, \infty)$ und $n > c$, so ist

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \leq c.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ sowie die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) < \infty\}$. Die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ ist offensichtlich. ■

Folgerung 2.3 *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn sie punktweiser Grenzwert einer Folge von Stufenfunktionen ist.*

Beweis Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar (Satz 1.15). Ist umgekehrt f messbar, so sind nach Satz 1.13 $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := \max(0, -f)$ messbar und nichtnegativ. Nach Satz 2.2 sind beide Funktionen punktweise Grenzwerte von Stufenfunktionen, und damit auch $f = f_+ - f_-$.
■

2.2 Das Lebesgue–Integral

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Wir definieren das Integral von f über E bzgl. des Maßes μ in mehreren Schritten.

Schritt A Sei $f = \chi_A$ mit $A \in \mathfrak{S}$. Dann setzen wir $I_E(f) := \mu(A \cap E)$.

Schritt B Sei f nichtnegative Stufenfunktion. Wir schreiben f als $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \in [0, \infty)$ und mit paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathfrak{S}$ (vgl. Lemma 2.1), und wir definieren

$$I_E(f) := \sum_{j=1}^k \alpha_j I_E(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j \cap E).$$

Schritt C Ist f messbar und nicht negativ, so definieren wir

$$\int_E f d\mu := \sup \{I_E(s) : s \ \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nach Satz 2.2 nicht leer. Man beachte, dass $\int_E f d\mu$ den Wert $+\infty$ annehmen kann. Ist f selbst eine nichtnegative Stufenfunktion, so ist $\int_E f d\mu = I_E(f)$. Für alle Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f$ ist nämlich

$I_E(s) \le I_E(f)$.

Schritt D Nun sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Nach Satz 1.13 sind die Funktionen $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := \max(0, -f)$ messbar, und die Integrale

$$\int_E f_+ d\mu, \quad \int_E f_- d\mu \tag{2.1}$$

sind wie in Schritt C erklärt.

Definition 2.4 *Ist eines der Integrale* (2.1) *endlich, so definieren wir*

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.2}$$

Sind beide Integrale in (2.1) *endlich, so heißt f* Lebesgue–integrierbar*, und wir schreiben $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ bzw. $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ falls $E = X$.*

Man beachte, dass wir das Integral von f auch dann definiert haben, wenn f nicht Lebesgue–integrierbar ist, aber eine der Funktionen f_+, f_- diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem.
Wir sehen uns einige elementare Eigenschaften des Lebesgue–Integrals an.

Lemma 2.5 (*a*) *Ist f messbar und beschränkt auf E und $\mu(E) < \infty$, so ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.*
(*b*) *Sind $f, g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und ist $f \le g$ auf E, so ist*

$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

(*c*) *Ist f messbar und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le f \le b$ auf E und $\mu(E) < \infty$, so ist*

$$a \cdot \mu(E) \le \int_E f\, d\mu \le b\, \mu(E).$$

(*d*) *Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist $cf \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und*

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(*e*) *Ist f messbar und $\mu(E) = 0$, so ist $\int_E f d\mu = 0$.*
(*f*) *Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und $A \in \mathfrak{S}$ Teilmenge von E, so ist $f|_A \in \mathfrak{L}^1(\mu, A)$.*

Beweis (*a*) Sei $|f| \le M < \infty$ auf E. Dann ist auch $f_\pm \le M$ auf E, und hieraus folgt sofort $\int_E f_\pm d\mu \le M\mu(E)$, denn diese Relation überträgt sich offenbar auf die entsprechenden Stufenfunktionen.
(*b*) Aus $f \le g$ folgt $f_+ \le g_+$ und $g_- \le f_-$ auf E. Hieraus folgt

$$\int_E f_+ d\mu \le \int_E g_+ d\mu \quad \text{und} \quad \int_E g_- d\mu \le \int_E f_- d\mu$$

(jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f_+$ erfüllt ja erst recht $0 \leq s \leq g_+$) und daher

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \int_E g_+ d\mu - \int_E g_- d\mu = \int_E g d\mu.$$

(c) Dies folgt sofort aus (b), wenn wir f mit den Konstanten a, b vergleichen.
(d) Für nichtnegative Stufenfunktionen s ist trivialerweise $I_E(cs) = cI_E(s)$. Ist nun etwa $c > 0$ und $f \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_E cf d\mu &= \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq cf\} &&= \sup\left\{I_E(s) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{cI_E\Big(\frac{1}{c}s\Big) : 0 \leq \frac{1}{c}s \leq f\right\} &&= c\sup\left\{I_E(t) : 0 \leq t \leq f\right\} \\
& &&= c\int_E f d\mu.
\end{aligned}$$

Die übrigen Fälle behandelt man analog.
(e) Für *alle* Stufenfunktionen s ist $I_E(s) = 0$. Also ist $\int_E f_\pm d\mu = 0$ und $\int_E f d\mu = 0$.
(f) Für alle Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f_+$ ist $I_A(s) \leq I_E(s)$ und daher

$$\int_A f_+ d\mu = \sup\{I_A(s) : 0 \leq s \leq f_+\} \leq \sup\{I_E(s) : 0 \leq s \leq f_+\} = \int_E f_+ d\mu < \infty.$$

Für f_- argumentiert man analog. ■

Satz 2.6 (a) *Sei $f \geq 0$ messbar auf X. Für $A \in \mathfrak{S}$ definieren wir*

$$\varphi(A) := \int_A f d\mu. \tag{2.3}$$

Dann ist φ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$.
(b) *Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$, so wird durch* (2.3) *eine σ–additive Funktion definiert.*

Beweis Aussage (b) folgt sofort, wenn wir (a) auf die Funktionen $f_\pm$ anwenden und $f = f_+ - f_-$ benutzen.
Wir zeigen (a). Da $\varphi(\emptyset) = 0$ nach Lemma 2.5 (e) und $\varphi(A) \geq 0$ nach Lemma 2.5 (c) ist, müssen wir noch die σ–Additivität zeigen. Sei also $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_n. Wir haben zu zeigen, dass $\varphi(A) = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n)$.
Ist $f = \chi_C$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge C, so ist $\int_A f d\mu = \mu(A \cap C)$, und die Behauptung folgt aus der σ–Additivität von μ. Ist $f = \sum_{j=1}^k c_i \chi_{C_i}$ eine nichtnegative Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $C_i \in \mathfrak{S}$, so ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap C_j),$$

und die Behauptung folgt aus der σ–Additivität der einzelnen Summanden. Sei nun $f \geq 0$ messbar. Aus dem bereits Bewiesenen folgt für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$, dass

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} s\,d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n).$$

Bilden wir links das Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$, so folgt

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n).$$

Wir haben noch $\sum_{n\geq 1} \varphi(A_n) \leq \varphi(A)$ zu zeigen. Für $\varphi(A) = \infty$ ist dies klar. Sei also $\varphi(A) < \infty$ und damit auch $\varphi(A_n) < \infty$ für alle n. Mit der Definition des Integrals finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geq \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \int_{A_2} s\,d\mu \geq \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$. Induktiv erhalten wir

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) \text{ für alle } n \geq 1,$$

und wegen $\cup_{j=1}^n A_j \subseteq A$ führt dies auf

$$\varphi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Folgerung 2.7 *Sind $A \subseteq B$ messbare Mengen mit $\mu(B \setminus A) = 0$ und ist f Lebesgue–integrierbar, so ist*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Beweis Die Funktion $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$ ist additiv nach Satz 2.6. Folglich ist $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A)$, und nach Lemma 2.5 (e) ist $\varphi(B \setminus A) = 0$. ■

Folgerung 2.8 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, die Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien fast überall gleich, und sei $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ für $E \in \mathfrak{S}$. Dann ist auch $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu.$$

Beweis Die Funktion g ist messbar nach Lemma 1.24. Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Dann ist auch $f_\pm(x) = g_\pm(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E f_\pm d\mu &= \int_{E\setminus N} f_\pm\, d\mu && \text{nach Folgerung 2.7} \\
&= \int_{E\setminus N} g_\pm\, d\mu && \text{nach Voraussetzung} \\
&= \int_{E\setminus N} g_\pm\, d\mu + \int_N g_\pm\, d\mu && \text{nach Lemma 2.5 } (e) \\
&= \int_E g_\pm\, d\mu.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2.9 *Mit $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ ist auch $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\Big| \int_E f d\mu \Big| \le \int_E |f| d\mu.$$

Beweis Sei $A = \{x \in E : f(x) \ge 0\}$ und $B = E \setminus A$. Nach Satz 2.6 (a) ist

$$\int_E |f|\, d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f_+ d\mu + \int_B f_- d\mu < \infty$$

und somit $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. Wegen $f \le |f|$ und $-f \le |f|$ ist nach Lemma 2.5 (b), (d)

$$\int_E f d\mu \le \int_E |f| d\mu \quad \text{und} \quad -\int_E f d\mu \le \int_E |f| d\mu.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2.10 (a) *Ist f messbar, $|f| \le g$ und $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so ist auch $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.*
(b) *Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, f messbar, $|f| \le g$ fast überall und $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.*

Beweis (a) Dies folgt sofort aus $f_+ \le g$ und $f_- \le g$.
(b) Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und sei

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \in X \setminus N \\ g(x) & \text{falls} \quad x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.24 ist $\tilde{f}$ messbar, und es gilt $|\tilde{f}| \le g$. Nach Teil (a) ist $\tilde{f} \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und mit Folgerung 2.8 finden wir $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. ■

2.3 Konvergenzsätze

Wir behandeln in diesem Abschnitt die Lebesgue'schen Konvergenzsätze. Diese Sätze sind unentbehrliche Werkzeuge der Analysis.

Satz 2.11 (Satz über monotone Konvergenz) *Sei* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *vollständig,* $E \in \mathfrak{S}$, *und* $(f_n)_{n\geq 1}$ *sei eine Folge messbarer Funktionen mit*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty \quad \textit{für fast alle } x \in X. \tag{2.4}$$

Dann konvergiert (f_n) *fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion* f, *und* $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$.

Ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit gilt die Aussage immer noch, wenn man (2.4) für *alle* $x \in X$ fordert.

Beweis Sei N eine μ–Nullmenge so, dass (2.4) für alle $x \in X \setminus N$ erfüllt ist. Für alle $x \in X \setminus N$ konvergiert dann die Folge $(f_n(x))$ gegen $\tilde{f}(x) \in [0, \infty]$, und wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus N \\ \infty & \text{für} \quad x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.25 ist f messbar. Sei $\alpha_n := \int_E f_n d\mu$. Nach Lemma 2.5 (b) und Folgerung 2.7 ist die Folge (α_n) monoton wachsend. Sei

$$\alpha := \sup \{\alpha_n : n \geq 1\} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \in [0, \infty].$$

Für jede Stufenfunktion s mit $s \leq f_n$ gilt auch $s \leq f$ und somit $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$. Folglich ist $\alpha \leq \int_E f d\mu$.

Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung $\alpha \geq \int_E f d\mu$. Dazu nehmen wir $\alpha < \infty$ an (sonst ist nichts zu beweisen). Sei s eine Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$, $c \in (0, 1)$ und $E_n := \{x \in E \setminus N : f_n(x) \geq cs(x)\}$ für $n \geq 1$. Dann ist $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n (Monotonie der Folge (f_n) außerhalb von N) und $\cup_{n\geq 1} E_n = E \setminus N$ (wegen $f_n(x) \to f(x)$ und $cs(x) < f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ mit $f(x) > 0$).

Mit Satz 2.6 (a) und Lemma 2.5 (b) erhalten wir außerdem, dass

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu. \tag{2.5}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich daher wieder mit Satz 2.6 (a), (2.5) und Lemma 1.17 (c)

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_{E\setminus N} s d\mu = c \int_E s d\mu.$$

Da $c \in (0,1)$ beliebig war, folgt $\alpha \geq \int_E s d\mu$ für alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$. Dann ist aber $\alpha \geq \int_E f d\mu$. ∎

Der folgende Satz zeigt zusammen mit Lemma 2.5 (d), dass die reellwertigen Funktionen aus $\mathfrak{L}^1(\mu, E)$ einen reellen Vektorraum bilden.

Satz 2.12 *Ist $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und ist $f_1 + f_2$ erklärt, so ist auch $f_1 + f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und es gilt*

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu. \tag{2.6}$$

Beweis Zuerst zeigen wir (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen. Ist $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ eine nichtnegative Stufenfunktion (mit *nicht notwendig* paarweise disjunkten Mengen E_i), so kann man s schreiben als $\sum_k d_k \chi_{F_k}$ mit paarweise disjunkten Mengen F_k und mit $d_k := \sum_{j:F_k \subseteq E_j} c_j$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_E s d\mu &= \sum_k d_k \mu(F_k \cap E) = \sum_k \sum_{j:F_k \subseteq E_j} c_j \mu(F_k \cap E) \\ &= \sum_j c_j \sum_{k:F_k \subseteq E_j} \mu(F_k \cap E) = \sum_j c_j \mu(E_j \cap E) = \sum_j c_j \int_E \chi_{E_j} d\mu. \end{aligned}$$

Da man zwei Stufenfunktionen s_1, s_2 immer als $s_1 = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ und $s_2 = \sum_j d_j \chi_{E_j}$ (mit *gleichen* Mengen E_j) schreiben kann, folgt hieraus (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen.

Seien nun $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ nichtnegativ. Nach Satz 2.2 gibt es monoton wachsende Folgen (s_n) bzw. (t_n) von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Dann ist $(s_n + t_n)$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen $f_1 + f_2$ konvergiert. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int_E s_n d\mu \to \int_E f_1 d\mu, \quad \int_E t_n d\mu \to \int_E f_2 d\mu, \quad \int_E (s_n + t_n) d\mu \to \int_E (f_1 + f_2) d\mu.$$

Aus $\int_E s_n d\mu + \int_E t_n d\mu = \int_E (s_n + t_n) d\mu$ folgt (2.6) auch in diesem Fall. Im allgemeinen Fall zerlegt man E in vier paarweise disjunkte messbare Mengen, auf denen f_1 und f_2 ihr Vorzeichen nicht wechseln, und benutzt (2.6) für nichtnegative Funktionen sowie die Beziehung $\int_E (-f) d\mu = -\int_E f d\mu$ aus Lemma 2.5 (d). ∎

Wir haben hier nur die schwächere Form von Satz 2.11 benutzt. Satz 2.12 gilt also ohne Vollständigkeitsvoraussetzung. Für Reihen liefert Satz 2.11:

Folgerung 2.13 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, $f_n : X \to [0, \infty]$ und $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ fast überall. Damit ist f messbar, und für $E \in \mathfrak{S}$ ist*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Beweis Sei $g_n := \sum_{j=1}^n f_n$. Die Folge (g_n) ist monoton wachsend und konvergiert fast überall gegen f. Nach Lemma 1.25 ist f messbar, und die Sätze 2.11 und 2.12 liefern

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &\overset{2.11}{=} \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{j=1}^n f_j d\mu \\ &\overset{2.12}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_E f_j d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_E f_j d\mu. \end{aligned}$$ ■

Unser nächstes Ziel ist der Satz von der majorisierten Konvergenz, das vermutlich wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Vorbereitend überlegen wir uns ein Lemma.

Lemma 2.14 (Fatou) *Sind $f_n : X \to [0,\infty]$ messbare Funktionen und ist $E \in \mathfrak{S}$, so ist*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Beweis Für $k \ge 1$ sei $g_k := \inf_{j\ge k} f_j$. Dann ist $g_k \le f_k$ und somit $\int_E g_k d\mu \le \int_E f_k d\mu$. Weiter ist die Folge (g_k) monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Der Satz über montone Konvergenz (schwache Fassung) liefert

$$\int_E f_k d\mu \ge \int_E g_k d\mu \to \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

und damit

$$\liminf_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu \ge \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$ ■

Satz 2.15 (Lebesgues Satz über majorisierte Konvergenz) *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$, und (f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergieren. Weiter sei $g : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $|f_n| \le g$ für alle n fast überall. Ist $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so gehören auch f und f_n zu $\mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Beweis Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle n und alle $x \in X \setminus N$. Dann ist f messbar nach Lemma 1.25, und es ist $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Nach Satz 2.10 (*b*) sind $f, f_n \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. Weiter ist $|f - f_n| \le 2g$ auf $X \setminus N$. Wir wenden das Fatousche Lemma auf die

Folge der Funktionen $(2g - |f - f_n|)\big|_{X\setminus N}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E 2g d\mu &= \int_{E\setminus N} 2g d\mu = \int_{E\setminus N} \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} (2g - |f_n - f|) d\mu \\
&= \int_{E\setminus N} 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} -|f_n - f| d\mu \\
&= \int_E 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu \le \int_E 2g d\mu.
\end{aligned}$$

Da $\int_E 2g d\mu = 2\int_E g d\mu < \infty$ ist, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$. Dies hat

$$\Big|\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu\Big| \le \int_E |f_n - f| d\mu \to 0$$

zur Folge (Satz 2.12 und Satz 2.9). ■

Ohne Vollständigkeitsvoraussetzung gilt der Satz 2.15 noch, wenn alle "fast" in seiner Formulierung gestrichen werden.

Beispiel Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz von der majorisierten Konvergenz *nicht* anwenden lässt („der gleitende Buckel"). Dazu sei $(X, \mathfrak{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}), \lambda)$ und $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_n konvergieren punktweise gegen $f \equiv 0$, aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda \ne \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1. \qquad ■$$

2.4 Lebesgue– und Riemann–Integral

Wir vergleichen in diesem Abschnitt das Riemann–Integral über Intervallen in $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue–Integral. Die Resultate hängen davon ab, ob die Intervalle beschränkt oder unbeschränkt sind. *Wir vereinbaren*: wenn wir über Lebesgue–Integration auf $\mathbb{R}^n$ sprechen, legen wir stets den *vervollständigten* Maßraum $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ zu Grunde, betrachten also messbare Funktionen

$$f : \Big(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n), \lambda\Big) \to \Big(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})\Big).$$

Satz 2.16 *Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist jede auf $[a,b]$ Riemann–integrierbare Funktion f auch Lebesgue–integrierbar, und*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis Ist f auf $[a,b]$ Riemann–integrierbar, so gibt es für jedes $n \geq 1$ Treppenfunktionen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ mit $\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx < \frac{1}{n}$ (Ana II, Folgerung 8.9). O.E.d.A. können wir die Folgen (φ_n) bzw. (ψ_n) als monoton wachsend bzw. fallend voraussetzen (andernfalls ersetzen wir φ_n durch $\max(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und ψ_n durch $\min(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). Nach den Integraldefinitionen stimmen Riemann– und Lebesgue–Integral für Treppenfunktionen überein. Es ist also auch

$$\int_{[a,b]} (\psi_n - \varphi_n)d\lambda < 1/n. \tag{2.7}$$

Die monotonen Funktionenfolgen (φ_n) bzw. (ψ_n) konvergieren punktweise auf $[a,b]$ gegen messbare Funktionen φ bzw ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Aus $\varphi_1 \leq \varphi_n \leq \psi_n \leq \psi_1$ und der Lebesgue–Integrierbarkeit von φ_1 und ψ_1 folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}^1(\lambda, [a,b])$ und dass

$$\int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda \to \int_{[a,b]} \varphi d\lambda \quad \text{sowie} \quad \int_{[a,b]} \psi_n d\lambda \to \int_{[a,b]} \psi d\lambda.$$

Der gleiche Satz liefert mit (2.7), dass $\int_{[a,b]}(\psi - \varphi)d\lambda = 0$. Aus der Übung wissen wir, dass dann $\varphi = \psi$ fast überall, und wegen $\varphi \leq f \leq \psi$ ist auch $\varphi = f$ fast überall. Folglich ist auch $f \in \mathfrak{L}^1(\lambda, [a,b])$, und

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir an das *Lebesguesche Integrabilitätskriterium* (Ana II, Abschnitt 8.4).

Satz 2.17 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann–integrierbar, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine λ–Nullmenge bilden.*

Die Klasse der Lebensgue–integrierbaren Funktionen ist aber wesentlich größer als die der Riemann–integrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der Menge der rationalen Zahlen, die nicht Riemann– aber Lebesgue–integrierbar ist (beachte: Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind Borelmengen vom Maß 0, und $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen). Es folgt ein Beispiel einer Lebesgue–integrierbaren Funktion, die sich (im Gegensatz zu $\chi_{\mathbb{Q}}$) nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann–integrierbaren Funktion machen lässt.

Beispiel Sei $Q = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Diese Menge ist abzählbar: $Q = \{q_n : n \geq 1\}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $U_n \subseteq (0,1)$ ein offenes Intervall einer Länge $\leq \varepsilon/2^n$, das q_n enthält. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n\geq 1} U_n \subseteq (0,1) \quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Sei $f = \chi_U$ und $f_n := \chi_{U_1 \cup \ldots \cup U_n}$. Die Funktionen f_n sind Riemann–integrierbar,

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_0^1 f_n(x)dx \leq \varepsilon,$$

und die Folge (f_n) ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist f Lebesgue–integrierbar und

$$\int_{[0,1]} f d\lambda \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie als Übung, dass f die behauptete Eigenschaft hat. ■

Bei uneigentlichen Riemann–Integralen, die nicht absolut konvergieren, ist die Situation subtiler. Da die Lebesgue–Integrabilität die absolute Konvergenz des Integrals voraussetzt, können uneigentliche Riemann–Integrale existieren, die man nicht als Lebesgue–Integrale interpretieren kann. Bevor wir ein Beispiel geben, fassen wir diesen Zusammenhang präziser. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 2.18 (Ausschöpfungssatz) *Sei (M_n) eine wachsende Folge messbarer Teilmengen von $X, M := \cup_{n\geq 1} M_n$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann in $\mathfrak{L}^1(\mu, M)$, wenn $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M_n)$ für jedes n und wenn die Folge der $\int_{M_n} |f| d\mu$ konvergiert (gegen eine* endliche *Zahl). Ist dies der Fall, so ist*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f d\mu.$$

Beweis Aus $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ folgt $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ (Satz 2.9) und damit $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M_n)$, und es gilt $\int_{M_n} |f| d\mu \leq \int_M |f| d\mu$.

Der interessante Teil des Beweises betrifft die Umkehrung dieser Aussage. Zunächst konvergiert die monoton wachsende Folge $(\chi_{M_n}|f|)$ punktweise gegen $\chi_M |f|$, so dass

$$\int_X \chi_{M_n} |f| \, d\mu \to \int_X \chi_M |f| \, d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_{M_n} |f| \, d\mu \to \int_M |f| \, d\mu$$

nach dem Satz über monotone Konvergenz. Nach Voraussetzung ist $\int_M |f| \, d\mu$ also endlich, d. h. $\chi_M |f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$. Weiter ist $|\chi_{M_n} f| \leq \chi_M |f|$, und die Funktionen $\chi_{M_n} f$ konvergieren punktweise wegen $\chi_M f$, so dass wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{M_n} f d\mu = \int_X \chi_M f d\mu = \int_M f d\mu$$

erhalten. ■

Folgerung 2.19 *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $a < b$. Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b), so ist f genau dann Lebesgue–integrierbar auf (a,b), wenn das uneigentliche Riemann–Integral $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.*

Beweis Wir wählen eine monoton fallende Folge (x_n) mit $a < x_n < b$ und $x_n \to a$ und eine monoton wachsende Folge (y_n) mit $x_n < y_n < b$ und $y_n \to b$, und wir setzen $M_n := [x_n, y_n]$. Dann ist $M = \cup_{n\geq 1} M_n = (a,b)$, und nach dem Ausschöpfungssatz ist f genau dann Lebesgue–integrierbar auf M, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f| d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f(x)|dx$$

endlich ist. ∎

Beispiel Auf $[1,\infty)$ sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Wir wissen aus Ana II, Abschnitt 8.10.1, dass das uneigentliche Riemann–Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert. Dieses Integral konvergiert aber nicht absolut, denn für $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ und folglich

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(k+1)\pi}.\end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert $\int_1^\infty |f(x)|dx$ nicht, und nach Folgerung 2.19 ist f *nicht* Lebesgue–integrierbar auf $[1,\infty)$. ∎

Ergänzend gehen wir noch kurz auf zwei Resultate ein. Das erste betrifft parameterabhängige Integrale, wo wir nun wesentlich stärkere Aussagen als früher zeigen können.

Satz 2.20 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f : X \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $u \in U$ die Funktion*

$$\hat{f}_u : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x,u)$$

zu $\mathfrak{L}^1(\mu, X)$ gehört, und sei

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_X \hat{f}_u d\mu = \int_X f(x,u) d\mu(x).$$

(a) Sind alle Funktionen $f_x : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(x,u)$ stetig in $p \in U$ und existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$ mit $|f(x,u)| \leq h(x)$ für alle $(x,u) \in X \times U$, so ist g in p stetig.

(b) Sei $1 \leq j \leq n$. Haben alle Funktionen f_x eine stetige partielle Ableitung $D_j f_x = \frac{\partial f_x}{\partial u_j}$ und gibt es eine Funktion $h \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$ mit

$$|D_j f_x(u)| \leq h(x) \quad \text{für alle} \quad (x, u) \in X \times U,$$

so existiert auch $D_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in U$ ist

$$(D_j g)(p) = \int_X D_j f(x, p) d\mu(x).$$

Beweis Aussage (a) folgt direkt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, da man Stetigkeit durch konvergente Folgen testen kann. Zu (b): Mit dem Mittelwertsatz finden wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $u + \mu t e_j \in U$ für alle $\mu \in [0, 1]$ ein $\theta \in [0, 1]$ so, dass

$$\frac{1}{t} |f(x, u + te_j) - f(x, u)| = |(D_j f)(x, u + \theta t e_j)| \leq h(x).$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir für jede Folge (t_n) mit $t_n \to 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{g(p + t_n e_j) - g(p)}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f(x, p + t_n e_j) - f(x, p)}{t_n} d\mu \\ &= \int_X D_j f(x, p) d\mu. \end{aligned}$$

■

Die zweite Ergänzung betrifft Funktionenräume, die man mit dem Lebensgue–Integral sehr bequem definieren kann. Für einen vollständigen Maßraum $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ sei $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ die Menge aller messbaren Funktionen f mit $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$. Man kann zeigen, dass $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ ein linearer Raum ist und dass die Abbildung

$$\mathfrak{L}^p(\mu, X) \to [0, \infty), \quad f \mapsto \|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}$$

alle Eigenschaften einer Norm mit Ausnahme von $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ hat. Um diese Eigenschaft zu erzwingen, setzt man $\mathcal{N}_p := \{f \in \mathfrak{L}^p(\mu, X) : \|f\|_p = 0\}$ und faktorisiert $\mathcal{N}_p$ weg. Auf den Räumen $L^p(\mu, X) := \mathfrak{L}^p(\mu, X)/\mathcal{N}_p$ wird durch $\|\cdot\|_p$ eine Norm induziert, die man wieder mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnet. Die dominierende Rolle dieser Räume in der Analysis liegt an folgendem Satz:

Satz 2.21 *Die Räume $(L^p(\mu, X), \|\cdot\|_p)$ sind vollständig, also Banachräume.*

Literatur: Forster, Analysis 3, §10. ■

3 Volumenintegrale und Transformationsformel

Nachdem wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Lebesgue–Integrale zu. Als erstes lernen wir den Satz von Fubini kennen, der es erlaubt, Integrale über $\mathbb{R}^n$ auf Integrale über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Dann sehen wir uns das mehrdimensionale Analogon der Substitutionsregel – die Transformationsformel – an. In der Praxis ist die Transformationsformel oft nicht unmittelbar benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Andererseits liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren daher im dritten Abschnitt einige Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Schließlich ist der vierte Abschnitt einigen konkreten Beispielen gewidmet.

3.1 Der Satz von Fubini und seine Anwendungen

Die Berechnung mehrdimensionaler Integrale oder der Volumina mehrdimensionaler Körper ist oft nicht leicht. Man versucht daher, die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf die Berechnung mehrerer Integrale in niedrigeren Dimensionen zu reduzieren. Das wichtigste Werkzeug dazu ist der folgende Satz, den wir aus Zeitgründen nicht beweisen werden. Sie finden einen Beweis z.B. in Bröcker, Analysis II, und in Bauer.

Satz 3.1 (Satz von Fubini) *(a) Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ messbar. Dann sind für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktionen*

$$f_y := f(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] \;\; \textit{und} \;\; f_x := f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$$

messbar. Weiter sind die Funktionen

$$F : \mathbb{R}^m \to [0, \infty],\;\; y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y d\lambda_n \;\; \textit{und} \;\; G : \mathbb{R}^n \to [0, \infty],\;\; x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\lambda_m$$

messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(x) \Big) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_m(y) \Big) d\lambda_n(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

(b) Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$, so sind die Funktionen f_y bzw. f_x für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ bzw. $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue–integrierbar. Weiter sind die fast überall definierten Funktionen F und G Lebesgue–integrierbar, und es gilt wieder (3.1).

In Zukunft schreiben wir nur noch *integrierbar* statt *Lebesgue–integrierbar*. Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist das folgende Prinzip von Cavalieri, das besagt, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ berechnen kann, indem man M in unendlich dünnen Schichten niedrigerer Dimension zerschneidet und die Volumina der Schichten aufintegriert.

Satz 3.2 (Prinzip von Cavalieri) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, und für $y \in \mathbb{R}^m$ sei*

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\}.$$

Dann ist M_y messbar, die Funktion $y \mapsto \lambda_n(M_y)$ ist messbar, und es ist

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) d\lambda_m(y).$$

Beweis Wir wenden Satz 3.1 (a) auf die Funktion χ_M an und erhalten

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+m}(M) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_M d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x, y) d\lambda_n(x) \Big) d\lambda_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{M_y} d\lambda_n \Big) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) d\lambda_m(y).
\end{aligned}$$

■

Mit diesem Prinzip können wir testen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis I, dass das Integral einer nichtnegativen Funktion die Fläche unter dem Graphen der Funktion beschreibt, gerechtfertigt war.

Folgerung 3.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Dann ist die Menge*

$$M^f := \Big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \le t < f(x)\Big\}$$

messbar, und ihr Maß ist

$$\lambda_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n.$$

Beweis Mit f sind auch die Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x)$ und $(x, t) \mapsto t$ messbar (HA). Daher ist auch $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x) - t$ messbar, und folglich ist die Menge

$$\begin{aligned}
M^f &= \Big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \ge 0 \text{ und } f(x) - t > 0\Big\} \\
&= \Big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \ge 0\Big\} \cap \Big\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : H(x, t) > 0\Big\}
\end{aligned}$$

messbar. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(M^f)_x = \Big\{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in M^f\Big\} = \Big[0, f(x)\Big)$$

und daher $\lambda_1((M^f)_x) = f(x)$. Mit Satz 3.2 ergibt sich also

$$\lambda_{n+1}(M_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\Big((M^f)_x\Big) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x). \qquad \blacksquare$$

Als eine Anwendung wollen wir das Volumen $c_n := \lambda_n(B_n)$ der n–dimensionalen Einheitskugel $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ berechnen. Offenbar ist $c_1 = \lambda_1([-1,1])$ $= 2$, und aus der Schule wissen wir, dass wir $c_2 = \pi$ erwarten sollten. Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden für $n > 1$ die Kugel B_n in die Scheiben

$$\begin{aligned} B_{n,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', s) \in B_n\} \\ &= \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\|_2 \leq \sqrt{1-s^2}\Big\} = \sqrt{1-s^2}\, B_{n-1} \end{aligned}$$

für $s \in [-1,1]$ und $B_{n,s} = \emptyset$ sonst. Mit Folgerung 1.21 und Satz 3.2 erhalten wir

$$c_n = \int_{-1}^{1} \lambda_{n-1}(B_{n,s}) ds = \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1} ds = c_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds.$$

Damit ist die rekursive Berechnung von c_n auf die Berechnung der Riemann–Integrale

$$I_n := \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds$$

zurückgeführt. Mit der Substitution $s(t) = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}\, \frac{\pi}{2}]$, folgt

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

Diese Integrale berechnen wir rekursiv mit partieller Integration. Für $n > 1$ ist

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cdot \cos t\, dt \\ &= (\sin t)(\cos t)^{n-1}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t)(n-1)(\cos t)^{n-2}(-\sin t) dt \\ &= (n-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2} dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $n > 1$ die Rekursionsformel $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, und mit den bekannten Werten $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ finden wir

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}\pi = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}\pi = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}\pi$$

und

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}\cdot 2\\
&= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdot\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}\cdot 2 = \binom{n+\frac{1}{2}}{n}^{-1}\cdot 2.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2\pi}{2n+1} \quad \text{und} \quad I_{2n}I_{2n-1} = \frac{\pi}{n}\,,$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= I_{2n}c_{2n-1} = I_{2n}I_{2n-1}c_{2n-2} = \frac{\pi}{n}\,c_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}c_2\\
&= \frac{\pi^{n-1}}{n!}\,I_2c_1 = \frac{\pi^{n-1}}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi^n}{n!}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= I_{2n+1}I_{2n}c_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n+1}\,c_{2n-1}\\
&= \frac{(2\pi)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\,c_1 = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n+1)\cdot\ldots\cdot 3}
\end{aligned}$$

erhalten. Insbesondere ist also tatsächlich $c_2 = \pi$ und $c_3 = \frac{4}{3}\,\pi$.

Mit Hilfe der Gammafunktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

kann man die Formel für die Volumina c_n einheitlich als

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{3.2}$$

schreiben. Dazu erinnern wir an die Rekursionsformel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ und an die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (vgl. Tutorium Analysis II). Mit diesen Hinweisen sollten Sie (3.2) leicht bestätigen können.

3.2 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt lernen wir das Analogon der eindimensionalen Substitutionsregel kennen, die wir uns zunächst noch einmal anschauen. Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

eine stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion und ist $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

bzw., als Lebesgue–Integral geschrieben,

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi([a,b])} f(x)dx.$$

Ist dagegen φ monoton fallend, d.h. orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx = -\int_{\varphi([a,b])} f(x)dx.$$

Diese beiden Identitäten lassen sich zu

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|dt = \int_{\varphi([a,b])} f(x)dx \tag{3.3}$$

zusammenfassen, und das ist die Transformationsformel, die wir auf höhendimensionale Situationen verallgemeinern wollen. Wir werden dazu auch die Schreibweise $\int_B f(x)dx$ statt $\int_B f d\lambda$ verwenden. Außerdem erinnern wir daran, dass eine bijektive Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen U und V im $\mathbb{R}^n$ ein *Diffeomorphismus* heißt, wenn φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 3.4 (Transformationsformel) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| : U \to \mathbb{R}$ über U integrierbar ist. In diesem Fall ist*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx. \tag{3.4}$$

Insbesondere gilt für jede messbare Teilmenge $A \subseteq U$

$$\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) = \int_A |\det \varphi'(x)|dx. \tag{3.5}$$

Hier steht $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für die Ableitung von $\varphi : U \to V$ in $x \in U$. Vor dem Beweis von Satz 3.4 machen wir uns klar, was die Transformationsformel bedeutet. Der wesentliche Teil ist Formel (3.5), die angibt, wie sich das Volumen des Bildes einer messbaren Menge A unter φ berechnet. Ist insbesondere $|\det \varphi'(x)|$ eine von x unabhängige Konstante c, so reduziert sich (3.5) auf $\lambda_n(\varphi(A)) = c\lambda_n(A)$. Die Konstante c ist also ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge bei Anwendung von φ ändert. Ist beispielsweise $\varphi = T\big|_U$ mit einer linearen Abbildung T, so ist $\varphi'(x) = T$ und somit $\lambda_n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_n(A)$. Für $U = \mathbb{R}^n$ und $A = [0,1]^n$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$) ergibt sich mit

$$\lambda_n\Big(T([0,1]^n)\Big) = |\det T|$$

eine anschauliche Bedeutung der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt $T([0,1]^n)$ heißt auch *Spat* oder *Parallelotop*. Man kann sie schreiben als $\{\sum_{j=1}^n x_j a_j : x_j \in [0,1]$ für alle $j\}$, wobei die a_j die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter T sind.

Beweis der Transformationsformel *1. Schritt: Es genügt,* (3.5) *zu beweisen.* Aus (3.5) erhält man unmittelbar (3.4) für die Funktion $f = \chi_{\varphi(A)}$, denn es ist ja $\chi_{\varphi(A)} \circ \varphi = \chi_A$. Aus der Linearität des Integrals folgt damit (3.4) für den Fall, dass f eine nichtnegative Stufenfunktion ist. Für den allgemeinen Fall reicht es aus, nichtnegative Funktionen zu betrachten. Sei also $f \geq 0$ messbar. Nach Satz 2.2 gibt es eine monoton wachsende Folge (f_k) von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Aus dem Satz über monotone Kovergenz (Satz 2.11) folgt dann

$$\begin{aligned}\int_V f(y)dy &= \lim_{k\to\infty} \int_V f_k(y)dy = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx \\ &= \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx,\end{aligned}$$

da auch die Folge $(f_k \circ \varphi)|\det \varphi'|$ monoton wachsend ist und punktweise gegen $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ konvergiert. Insbesondere sehen wir, dass $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ genau dann auf U integrierbar ist, wenn f auf V integrierbar ist. Es verbleibt, (3.5) zu zeigen.

2. Schritt: Es genügt, die Aussage für den Fall zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $W_p \subseteq U$ hat, so dass (3.5) *für W_p anstelle von U und für $\varphi\big|_{W_p}$ anstelle von φ gilt.* Für jeden Punkt $p \in U$ gibt es einen Punkt $q \in \mathbb{Q}^n$ und eine Kugel $U_r(q)$ mit rationalem Radius so, dass $p \in U_r(q) \subseteq W_p$. Die Behauptung (3.5) gilt für jede der abzählbar vielen Mengen $U_r(q)$, und diese Mengen überdecken U. Wir haben also abzählbar viele Mengen $(M_k)_{k\geq 1}$ gefunden, für die (3.5) gilt und die U überdecken. Ist nun $A \subseteq U$ messbar, so schreiben wir A als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_1 := A \cap M_1 \quad \text{und} \quad A_k := (A \cap M_k) \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 2.$$

Aus der σ–Additivität von λ_n und aus Satz 2.6 folgt nun

$$\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_n\Big(\varphi(A_k)\Big) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} |\det \varphi'(x)|dx = \int_A |\det \varphi'(x)|dx.$$

3. Schritt: (3.5) *gilt, wenn* φ *eine Permutation der Koordinaten ist, d.h. wenn* $\varphi(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ *mit einer Bijektion* $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. In diesem Fall ist $|\det \varphi'(x)| = 1$, und (3.5) gilt offenbar für alle achsenparallelen Quader in $\mathbb{R}^n$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Lebesgue–Maß (Satz 1.18) folgt die Formel (3.5) für beliebiges messbares A.

4. Schritt: (3.5) *gilt, falls* $n = 1$ *und* U *ein Intervall ist.* Wir benutzen wieder den Eindeutigkeitssatz (Satz 1.18). Ist $B \subseteq V$ ein Intervall, so ist auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ ein Intervall (da φ^{-1} stetig ist), und es ist

$$\lambda(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)| dx$$

(Anwendung der Substitutionsregel (3.3) auf die Funktion $f \equiv 1$). Da

$$B \mapsto \lambda(B \cap V) \quad \text{und} \quad B \mapsto \int_{\varphi^{-1}(B \cap V)} |\varphi'(x)| dx$$

nach Satz 2.6 Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren und diese auf allen beschränkten Intervallen übereinstimmen, stimmen sie nach Satz 1.18 überein.

5. Schritt: Gilt (3.5) *für die Diffeomorphismen* $\varphi_1 : U_1 \to U_2$ *und* $\varphi_2 : U_2 \to U_3$, *so gilt* (3.5) *auch für den Diffeomorphismus* $\varphi_2 \circ \varphi_1 : U_1 \to U_3$. Aus Schritt 1 wissen wir, dass (3.5) die Formel (3.4) nach sich zieht. Nach der Kettenregel ist nun

$$\det\Big((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\Big) = \det\Big(\varphi_2'(\varphi_1(x))\Big) \cdot \det \varphi_1'(x). \tag{3.6}$$

Wenden wir (3.5) auf φ_2 und (3.4) auf φ_1 an, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_n\Big((\varphi_2 \circ \varphi_1)(A)\Big) &= \int_{\varphi_1(A)} |\det \varphi_2'(y)| dy && \text{(nach (3.5))} \\ &= \int_A \Big|\det \varphi_2'\Big(\varphi_1(x)\Big)\Big| \cdot \Big|\det \varphi_1'(x)\Big| dx && \text{(nach (3.4))} \\ &= \int_A |\det(\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)| dx. && \text{(nach (3.6))} \end{aligned}$$

6. Schritt Nun wird es ernst: *Wir zeigen die lokale Aussage aus Schritt 2 durch vollständige Induktion nach* n.
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist in Schritt 4 abgehandelt. Für den Induktionsschritt betrachten wir φ in einer Umgebung von $p \in U$. Wegen $\det \varphi'(p) \neq 0$ gibt es ein j mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Indem wir φ mit einer Koordinatenpermutation verknüpfen, dürfen wir nach Schritt 3 und 5 o.B.d.A. annehmen, dass $j = 1$, d.h. dass

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : U \to \mathbb{R}^n, \;\; x \mapsto \Big(\varphi_1(x), x_2, \ldots, x_n\Big).$$

Die Jabocimatrix von ψ in x (d.h. die Matrix von $\psi'(x)$ bzgl. der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$) hat die Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

ist also insbesondere in $x = p$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II, Satz 12.5) dürfen wir nach einer gegebenenfalls erforderlichen Verkleinerung von U annehmen, dass $\psi : U \to \psi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir haben damit eine Zerlegung

$$\varphi = \rho \circ \psi : U \to V \quad \text{mit} \quad \rho = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to V.$$

Die erste Komponente von ρ ist dann gegeben durch

$$\rho_1(y) = (\varphi_1 \circ \psi^{-1})(y) = (\psi_1 \circ \psi^{-1})(y) = y_1.$$

Nach Schritt 5 genügt es, die Behauptung für die Abbildungen ψ und ρ zu zeigen. Wir dürfen also annehmen, dass φ eine der Funktionen ψ oder ρ ist. Beiden Funktionen gemeinsam ist, dass es ein j gibt mit $\varphi_j(x) = x_j$ für alle $x \in U$. Indem wir wieder geeignet permutieren, können wir nach Schritt 3 sogar $\varphi_1(x) = x_1$ für alle $x \in U$ annehmen. Wir können φ daher wie folgt schreiben:

$$\varphi(t, x') = \Big(t, \varphi_t(x')\Big) \quad \text{mit} \quad (t, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1},$$

wobei

$$\varphi_t : U_t := \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in U\Big\} \to V_t := \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in V\Big\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Die Jacobi–Matrix $J_x(\varphi)$ von φ in $x = (t, x')$ hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{x'}(\varphi_t) \end{pmatrix},$$

so dass gilt

$$\det \varphi'(x) = \det(\varphi_t)'(x'). \tag{3.7}$$

Für eine messbare Teilmenge A von U erhalten wir nun schrittweise

$$\begin{aligned}
\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\Big(\varphi(A)_t\Big)dt && \text{(Cavalieri)}\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\Big(\varphi_t(A_t)\Big)dt && \text{(Definition von } \varphi_t\text{)}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{A_t} |\det(\varphi_t)'(x')|dx'dt && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t}(x')|\det(\varphi_t)'(x')|dx'dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)|\det\varphi'(x)|dx && \text{(Fubini und (3.7))}\\
&= \textstyle\int_A |\det\varphi'(x)|dx.
\end{aligned}$$

■

Wir halten noch eine wichtige Folgerung fest. Ist $T \in L(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie (d.h. wird T durch eine orthogonale Matrix dargestellt), so heißt die Abbildung $x \mapsto Tx$ eine *Drehung* des $\mathbb{R}^n$.

Folgerung 3.5 (Drehungsinvarianz des Lebesgue-Maßes) *Für jede Drehung des $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(A)$.*

Beweis Aus $TT^T = I$ folgt $(\det T)^2 = 1$. Also ist $|\det T| = 1$, und die Behauptung folgt sofort aus (3.5). ■

Diese Drehungsinvarianz ist nicht von vorherein klar, da wir ja das Lebesgue–Maß basisabhängig konstruiert haben (nämlich zunächst auf Quadern, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen). Weiter sei daran erinnert, dass wir die Translationsinvarianz des Lebesgue–Maßes bereits in der Übung gezeigt haben. Zusammenfassend können wir feststellen, dass das Lebesgue–Maß unter Abbildungen der Gestalt $\varphi(x) = Tx + v$ mit einer linearen Isometrie $T \in L(\mathbb{R}^n)$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ invariant ist.

3.3 Nullmengen

Wir haben Nullmengen als Teilmengen von Borelmengen vom Lebesguemaß 0 definiert. Wir wollen nun einige Kriterien kennenlernen, die es uns erlauben, gewisse Nullmengen schnell als solche zu erkennen. Dies ist z.B. bei Anwendungen der Transformationsformel nützlich, bei denen man aus dem Definitionsgebiet gewisse Nullmengen herausschneiden muss, um die Transformation zu einem Diffeomorphismus zu machen. In diesem Zusammenhang sei an Lemma 1.23 erinnert, das wir im Beweis des folgenden Satzes benutzen werden.

Satz 3.6 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ und $(W_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Würfeln mit $A \subseteq \cup_{k\geq 1} W_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) < \varepsilon$. Wir dürfen annehmen, dass jeder Würfel W_k einen Punkt $a_k \in A$ enthält. Ist s_k die Kantenlänge von W_k, so ist $\lambda_n(W_k) = s_k^n$ und $\|x - a_k\| \leq \sqrt{n} \cdot s_k$ für alle $x \in W_k$ (warum?).
Da f Lipschitzstetig ist, gibt es ein $L > 0$ so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

Insbesondere ist für alle $x \in A \cap W_k$

$$\|f(x) - f(a_k)\| \leq L\|x - a_k\| \leq L\sqrt{n}\, s_k.$$

Also liegt $f(A \cap W_k)$ in einer Kugel vom Radius $L\sqrt{n}\, s_k$ und damit auch in einem Würfel $\tilde{W}_k$ mit der Kantenlänge $2L\sqrt{n}\, s_k$. Es ist also

$$f(A) = \bigcup_{k\geq 1} f(A \cap W_k) \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \tilde{W}_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\tilde{W}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{n}\, s_k)^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \leq (2L\sqrt{n}\,)^n \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $f(A)$ eine Nullmenge. ■

Folgerung 3.7 *Ist A Nullmenge in $\mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $f(A)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis Da U offen ist, ist U eine abzählbare Vereinigung von Quadern der Gestalt $Q_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^n$ (vgl. Beweis von Lemma 1.4). Als stetige Funktion ist $f' : U \to L(\mathbb{R}^n)$ auf jedem der kompakten Quader Q_k beschränkt, d.h. es gibt ein $L_k > 0$ mit $\|f'(x)\| \leq L_k$ für alle $x \in Q_k$. Nach Satz 10.19 aus Analysis II folgt

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L_k\|y - z\| \quad \text{für alle } \; y, z \in Q_k.$$

Also ist $f\big|_{Q_k}$ Lipschitzstetig, und nach Satz 3.6 ist $f(A \cap Q_k)$ Nullmenge. Dann ist auch $f(A) = \cup_{k=1}^{\infty} f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge (Lemma 8.13 aus Ana II). ■

Satz 3.6 und Folgerung 3.7 lassen sich *nicht* auf beliebige stetige Funktionen f verallgemeinern. Es gibt beispielsweise Kurven (sogenannte *Peano–Kurven*), die ein ganzes Quadrat im $\mathbb{R}^2$ ausfüllen.

Lemma 3.8 *Jeder echte affine Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.*

Beweis Wir verschieben A so, dass $0 \in A$, und drehen dann A so, dass $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Nach Folgerung 3.5 und der Anmerkung danach dürfen wir also o.E.d.A. $A = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ annehmen. Wir können A dann schreiben als

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big([-k, k]^{n-1} \times \{0\} \Big),$$

und aus $\lambda_n([-k, k]^{n-1} \times \{0\}) = 0$ und der σ–Additivität folgt mit Lemma 1.17 (e), dass $\lambda_n(A) = 0$. ■

Folgerung 3.9 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ messbar, so ist der Graph*

$$\Gamma(f) = \Big\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A \Big\} \tag{3.8}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis Wir setzen f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Diese Fortsetzung ist messbar (warum?), und ihr Graph enthält den Graphen (3.8) als Teilmenge. Wir können daher $A = \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann ist der Graph $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y - f(x) = 0\}$ als Nullstellenmenge einer messbaren Funktion messbar, und aus dem Cavalierischen Prinzip erhalten wir

$$\lambda_{n+1}\Big(\Gamma(f)\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\Big(\{f(x)\}\Big) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\lambda_n = 0.$$ ■

3.4 Koordinatentransformationen

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch eine geeignete Parametrisierung) in Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Aus der Fülle der möglichen Koordinatensysteme sehen wir uns hier nur sphärische Polarkoordinaten an und behandeln die Zylinderkoordinaten in der Übung.

Polarkoordinaten in der Ebene. Der Übergang von Polar– zu kartesischen Koordinaten in der Ebene wird beschrieben durch

$$P : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \tag{3.9}$$

Die Jacobimatrix von P in (r, φ) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich r. Man beachte, dass nur die Einschränkung von P auf die offene Menge $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ einen Diffeomorphismus auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus$

$([0,\infty)\times\{0\})$ liefert (warum?). Um einen Diffeomorphismus zu erhalten, mussten wir also sowohl aus $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ als auch aus $\mathbb{R}^2$ eine Nullmenge herausnehmen. Daher ist eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ nach der Transformationsformel (Satz 3.4) genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r,\varphi)\mapsto f\Big(P(r,\varphi)\Big)|\det P'(r,\varphi)| = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r$$

auf $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ integrierbar ist (Nullmengen dürfen wir unberücksichtigt lassen), und es gilt in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\rho dr. \tag{3.10}$$

Wichtig ist, vor Anwendung der Transformationsformel zu prüfen, ob die "Ausnahmemengen" auf beiden Seiten Nullmengen sind.

Beispiel 1 Als Anwendung von (3.10) berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}.$$

Diese ist rotationssymmetrisch, und mit Polarkoordinaten, (3.10) und der Substitution $s=r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rd\varphi dr = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \pi\int_0^\infty e^{-s}ds\\ &= \pi\lim_{t\to\infty} -e^{-s}\Big|_0^t = \pi\lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = \pi.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also f integrierbar. Mit Fubini erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\Big)e^{-y^2}dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\Big)^2,\end{aligned}$$

so dass schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{3.11}$$

folgt. Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle. ■

Beispiel 2: Die Beta–Funktion. Die Identität (3.11) eröffnet uns einen weiteren Weg, um $\Gamma(1/2)$ zu berechnen. Mit der Substitution $x=\sqrt{t}$ erhalten wir

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}2xdx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir schauen uns noch an, was dieser Trick für allgemeinere Werte der Γ–Funktion liefert. Mit der Substitution $t = x^2/2$ bekommen wir

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt = 2^{1-u}\int_0^\infty x^{2(u-1)}e^{-x^2/2}x\,dx = 2^{1-u}\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2/2}dx,$$

und hiermit finden wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2/2}y^{2v-1}e^{-y^2/2}dx\,dy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}y^{2v-1}e^{-(x^2+y^2)/2}dx\,dy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r^{2u+2v-2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}e^{-r^2/2}r\,d\varphi dr \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty r^{2u+2v-1}e^{-r^2/2}dr\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi \\
&= \Gamma(u+v)\cdot 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi.
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad (u,v)\mapsto 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi$$

heißt *Eulersche Betafunktion*; wir haben also gerade gesehen, dass

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{3.12}$$

Für $u = v = \frac{1}{2}$ erhalten wir insbesondere $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\pi/2}d\varphi = \pi$. Für die Berechnung des Volumens c_n der n–dimensionalen Einheitskugel hatten wir mit dem Cavalierischen Prinzip die Rekursionsformel $c_n = c_{n-1}I_n$ mit

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t)^n dt = 2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt = B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big)$$

gefunden. Mit (3.12) ergibt sich nun direkt.

$$I_n = B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

und damit

$$\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1}I_n = c_{n-2}I_nI_{n-1} = \ldots = c_1I_nI_{n-1}\ldots I_2 \\
&= 2\sqrt{\pi}^{n-1}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdots\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = 2\sqrt{\pi}^{n-1}\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,.
\end{aligned}$$

∎

Sphärische Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$. Diese definieren wir rekursiv als

$$P_n : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \to \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$P_n(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}) = \Big(\sin\theta_{n-2} P_{n-1}(r,\varphi,\theta_1,\ldots,\theta_{n-3}), r\cos\theta_{n-2}\Big)$$

für $n \geq 3$ und P_2 wie in (3.9) festgelegt ist. Insbesondere haben wir für die Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$P_3 : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$P_3(r,\varphi,\theta) = \Big(\sin\theta P_2(r,\varphi), r\cos\theta\Big) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Dabei misst r den Abstand zum Ursprung, φ den Längengrad und θ den Breitengrad. Mit $\theta := (\theta_1,\ldots,\theta_{n-2})$ und $\theta' := (\theta_1,\ldots,\theta_{n-3})$ können wir die Jacobimatrix von P_n schreiben als

$$J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n) = \begin{pmatrix} \sin\theta_{n-2} & \cdot & J_{(r,\varphi,\theta')}(P_{n-1}) & \cos\theta_{n-2} P_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ \cos\theta_{n-2} & & 0\ldots0 & -r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Um davon die Determinante berechnen zu können, beachten wir, dass

$$P_{n-1}(r,\varphi,\theta') = rP_{n-1}(1,\varphi,\theta')$$

(was man leicht durch Induktion bestätigt). Damit ist

$$\frac{\partial P_{n-1}}{\partial r}(r,\varphi,\theta') = P_{n-1}(1,\varphi,\theta') = r^{-1}P_{n-1}(r,\varphi,\theta'),$$

und folglich stimmt die erste Spalte der Jacobimatrix von P_{n-1} mit $r^{-1}P_{n-1}$ überein. Also ist die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrix, die man aus $J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n)$ durch Streichen der ersten Spalte und letzten Zeile erhält, gleich

$$r(\cos\theta_{n-2})(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2}\det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta').$$

Damit erhalten wir durch Entwicklung von $\det P'_n(r,\varphi,\theta)$ nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned} \det P'_m(r,\varphi,\theta) &= -r(\sin\theta_{n-2})^n \det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ &\quad +(-1)^{n-1}r(\cos\theta_{n-2})^2(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2}\det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ &= -r(\sin\theta_{n-2})^{n-2}\det P_{n-1}(r,\varphi,\theta'). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun

$$\det P'_n(r,\varphi,\theta) = (-1)^n r^{n-1}(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(\sin\theta_{n-3})^{n-3}\cdot\ldots\cdot(\sin\theta_1),$$

wenn man $\det P_3'(r,\varphi,\theta_1) = -r^2 \sin\theta_1$ berücksichtigt.

Diskutieren Sie als Übung zunächst im Fall $n = 3$ und dann im allgemeinen Fall, welche Nullmenge man aus $[0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2}$ bzw. aus dem $\mathbb{R}^n$ herausschneiden muss, damit die Einschränkung von P_n ein Diffeomophismus wird.

Als eine Anwendung wollen wir Integrale über rotationssymmetrischen Funktionen auf Kugelschalen berechnen.

Satz 3.10 *Sei $I \subseteq [0,\infty)$ ein Intervall, $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}$ die zugehörige Kugelschale und $h : I \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist die Funktion $H : K(I) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(\|x\|_2)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $I \to \mathbb{R}$, $r \mapsto r^{n-1}h(r)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{K(I)} H d\lambda_n = nc_n \int_I h(r)r^{n-1}dr, \tag{3.13}$$

wobei c_n das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel ist.

Beweis Wir benutzen sphärische Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ und beachten, dass $K(I) = P_n(I \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2})$ ist. Da die Transformation P_n außerhalb gewisser Nullmengen ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
&\int_{K(I)} H d\lambda_n \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} H\Big(P_n(r,\varphi,\theta)\Big) \,|\det P_n'(r,\varphi,\theta)|\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} h(r)r^{n-1}(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(\sin\theta_{n-3})^{n-3} \\
&\qquad \ldots (\sin\theta_1) d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&= 2\pi \int_I h(r)r^{n-1}dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Um die Integrale über die θ_j nicht explizit berechnen zu müssen, erinnern wir daran, dass das Integral $\int_{K(I)} H d\lambda_n$ für $I = [0,1]$ und $H \equiv 1$ gerade das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel liefert. Es ist also

$$\begin{aligned}
c_n &= 2\pi \int_0^1 r^{n-1}dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1 \\
&= \frac{2\pi}{n} \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ein Vergleich von (3.14) und (3.15) liefert (3.13), wobei die Aussage über die Existenz der Integrale ebenfalls aus Satz 3.4 folgt. ∎

4 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit der Berechnung von Integralen über meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ befasst, wobei das zugrundeliegende Maß stets das n–dimensionale Lebensgue–Maß war. Betrachtet man nun Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ oder Kurven in der Ebene, so verschwinden diese Integrale über solchen Mengen, da die Integrationsbereiche Nullmengen sind. Andererseits ist es für viele Zwecke erforderlich, solchen Integralen über niedriger dimensionalen Gebilden einen Sinn zu geben. Beispielsweise haben wir bereits einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ eine Länge zugeordnet (also ein "eindimensionales" Volumen), und wir haben Funktionen über Kurven integriert. Im gleichen Sinn würden wir gern die Größe von Oberflächen von Körpern im $\mathbb{R}^3$ (wie der Oberfläche der Einheitskugel) berechnen oder Integrale über Funktionen auf solchen Flächen betrachten.

4.1 Untermannigfaltigkeiten

Wir haben Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bereits in der Analysis II kennengelernt, wobei der Schwerpunkt auf der Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen von Funktionen lag. In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt auf der Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten liegen. Beide Sichtweisen sind uns aus der linearen Algebra vertraut, wo man Untervektorräume zum einen als Lösungsmengen linearer homogener Gleichungssysteme und zum anderen durch eine Parameterdarstellung mittels einer Basis beschreibt.

Rufen wir uns zunächst in Erinnerung, was wir aus der Analysis II wissen. Wir betrachten einen stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist γ in t differenzierbar (was in allen bis auf endlich vielen Punkten der Fall ist), so deuten wir die Ableitung $\dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$ von γ in t als den Geschwindigkeitsvektor und seine Länge

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2}$$

als die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt den Weg γ zum Zeitpunkt t durchläuft. Für die Länge des Weges γ haben wir die Beziehung

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt \tag{4.1}$$

gefunden. (Wir hatten die Länge für beliebige rektifizierbare Wege erklärt und (4.1) als Spezialfall erhalten. Man kann aber (4.1) auch als Definition der Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Wegs γ benutzen.) Schließlich haben wir für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Kurvenintegral (1. Art) über γ definiert durch

$$\int_\gamma f := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \;\; \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, dt. \tag{4.2}$$

Wir haben uns auch überlegt (Analysis II, Satz 11.6), dass das Integral in (4.1) nur von der durch γ definierten Kurve $\Gamma = \gamma([a,b])$ abhängt, dass es sich also nicht ändert, wenn man die Kurve Γ umparametrisiert, indem man γ durch $\gamma \circ \varphi$ ersetzt, wobei $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$ ist. Gleiches gilt für das Integral (4.2). Wir wollen diese Konzepte nun verallgemeinern auf höherdimensionale Flächenstücke. Diese denken wir uns als gegeben durch differenzierbare Abbildungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen ist. Für $k = 1$ erhalten wir gerade Kurven.

Definition 4.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt* Immersion*, wenn die lineare Abbildung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in U$ injektiv ist, d.h. wenn $\operatorname{rang} \varphi'(x) = k$ für alle $x \in U$ ist.*

Ist $\varphi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so muss insbesondere $k \leq n$ sein.
Wir betrachten wieder φ als eine Parametrisierung der Menge $\varphi(U)$. Mit solchen Parametrisierungen werden wir später Integrale über $\varphi(U)$ definieren, indem wir sie auf "gewöhnliche" Lebesgue–Integrale über $U \subseteq \mathbb{R}^k$ zurückführen. Im Fall $k = 1$ ist $\varphi(U)$ eine Kurve, und φ ist genau dann eine Immersion, wenn $\varphi'(x)$ für kein x die Nullabbildung ist.

Beispiel 1 Die Neilsche Parabel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist wegen $\varphi'(0) = (0,0)$ *keine* Immersion. Die Singularität im Nullpunkt verhindert die Injektivität. ■

Beispiel 2 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad x \mapsto \Big(x, f(x)\Big)$$

eine Immersion. Tatsächlich erhalten wir für die Jacobimatrix $J_x(\varphi)$ der Ableitung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k+1})$

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{k \times k} \\ J_x(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat offenbar für jedes $x \in U$ den Rang k. ■

Beispiel 3 Für die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \\ r^2 \sin \varphi \\ r^3 \end{pmatrix}$$

ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\varphi'(r,\varphi)$ gleich

$$J_{(r,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -r^2\sin\varphi \\ 2r\sin\varphi & r^2\cos\varphi \\ 3r^2 & 0 \end{pmatrix},$$

und man macht sich leicht klar, dass der Rang dieser Matrix genau dann gleich 2 ist, wenn $r \neq 0$. Die Einschränkung von Φ auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ ist also eine Immersion. (Die Abbildung Φ selbst ist aber offenbar nicht injektiv.) Die Menge $\Phi(\mathbb{R}^2)$ entsteht durch Rotation der Kurve $\{(r^2, 0, r^3) : r \in \mathbb{R}\}$ (die man sich als Neilsche Parabel in der xz–Ebene vorstellen kann) um die z–Achse (vgl. auch das folgende Beispiel). Die "obere Schale" dieser Fläche berührt die untere (ihr Spiegelbild an der xy–Ebene) in der 0. Derartige Singularitäten werden durch die Forderung der Injektivität von $\varphi'(x)$ in jedem Punkt vermieden. ■

Beispiel 4 Wir sehen uns nun allgemein Rotationsflächen wie in Beispiel 3 an. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Funktion (deren Bild in der xz–Ebene liegt). Wir nehmen weiter an, dass $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ (so dass das Bild von γ in der rechten Halbebene der xz–Ebene liegt). Nun betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$\Phi(I \times \mathbb{R}) = \Big\{(x, y, z(t)) : x^2 + y^2 = r(t)^2, t \in I\Big\}.$$

Das Bild von Φ entsteht also durch Rotation des Bildes von γ um die z–Achse. Die Jacobi–Matrix von Φ in (t,φ) ist

$$J_{(t,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ angenommen haben, hat diese Matrix genau dann den Rang 2, wenn $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$, d.h. wenn $\gamma'(t) \neq 0$. Ist also γ eine

Immersion, so ist auch Φ eine Immersion. ■

Beispiel 5 Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre an. Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobimatrix

$$J_{(\varphi,\theta)}(P) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn $\cos\theta \neq 0$. Die Einschränkung von P auf die offene Menge $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ ist also eine Immersion, und

$$P\Big(\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\Big) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ |z| \neq 1\Big\}$$

ist die Einheitsphäre ohne Nord– und Südpol. ■

Wir diskutieren nun, wie der Begriff der Immersion zum Begriff der k–dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ steht. Hier ist noch einmal die Definition.

Definition 4.2 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k–*dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so existieren, dass*

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

(wobei wir $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben).

Die Menge M sieht also lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Weiter benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 4.3 *Seien X und Y metrische Räume. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt* Einbettung*, wenn sie injektiv ist und wenn die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ (bzgl. der von Y auf $\varphi(X)$ induzierten Metrik) ebenfalls stetig ist.*

Beispiel 6 Die Abbildung $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist stetig und injektiv, und ihr Bild ist die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$. Die Umkehrabbildung $\eta : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi)$, $\gamma(t) \mapsto t$ ist jedoch nicht stetig, denn es gilt $\gamma(2\pi - \frac{1}{n}) \to \gamma(0)$, aber $2\pi - \frac{1}{n} = \eta(\gamma(2\pi - \frac{1}{n}))$ konvergiert nicht gegen $0 = \eta(\gamma(0))$. Die Abbildung γ ist also keine Einbettung. ■

Satz 4.4 (Parametrisierungssatz) *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$ gibt, die eine Einbettung ist.*

Beweis Sei zunächst M eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es offene Mengen $V, W \in \mathbb{R}^n$ mit $p \in V$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so, dass

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in W\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \Phi^{-1}(\eta(x))$, wobei $\eta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist. Dann ist U offen, $\varphi(U) = V \cap M$, und

$$\varphi'(x) = (\Phi^{-1})'\Big(\eta(x)\Big) \circ \eta.$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $\varphi'(x)$ für jedes $x \in U$ injektiv, d.h. φ ist eine Immersion. Schließlich ist die inverse Abbildung zu $\varphi : U \to \varphi(U)$ durch $\varphi^{-1} = \pi \circ \Phi\big|_{\varphi(U)}$ gegeben, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion $(x, y) \mapsto x$ ist. Aus der Stetigkeit von Φ und π folgt, dass φ eine Einbettung ist.

Wir zeigen die umgekehrte Richtung. Sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$, die eine Einbettung ist. Sei $w := \varphi^{-1}(p)$. Wir schreiben $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Wegen rang $\varphi'(w) = k$ können wir nach Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(w)\right)_{i,j=1}^{k}$$

invertierbar ist (das ist gerade der obere $k \times k$–Block der Jacobimatrix von φ in w). Sei $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : U \to \mathbb{R}^k$. Dann ist also $\tilde{\varphi}'(w)$ invertierbar, und mit dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von w so, dass $\tilde{\varphi}\big|_W$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$\Phi : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad (u, x) = (u_1, \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \mapsto$$
$$\mapsto \varphi(u) + (0, x) = \Big(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_k(u),\ \varphi_{k+1}(u) + x_{k+1}, \ldots, \varphi_n(u) + x_n\Big).$$

Dann ist Φ ein Diffeomorphismus von $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k}$, denn

$$\Phi^{-1}(v, y) = \Big(\tilde{\varphi}^{-1}(v), y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(v)), \ldots, y_n - \varphi_n(\tilde{\varphi}^{-1}(v))\Big)$$

ist stetig differenzierbar. Weiter ist

$$\Phi^{-1}\Big(\varphi(u)\Big) = (u, 0) \quad \text{für } u \in W$$

und somit

$$\Phi^{-1}\big(\varphi(W)\big) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$

Da φ eine Einbettung ist, ist $\varphi(W)$ offen in $M \cap V$. Es gibt also eine offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $\varphi(W) = M \cap V_p$. Wir haben somit für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus Φ^{-1} von V_p in $\mathbb{R}^n$ gefunden, so dass

$$\Phi^{-1}(M \cap V_p) = \Phi^{-1}\Big(\varphi(W)\Big) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Also ist M eine k–dimensionale Mannigfaltigkeit. ∎

Die Immersionen $\varphi : U \to M$, deren Existenz wir soeben gezeigt haben, nennen wir *Parametrisierungen* oder *Karten* der Menge $\varphi(U) \subseteq M$. Oft schreibt man auch (φ, U) für eine Karte $\varphi : U \to M$. Die Funktionen $(\varphi^{-1})_j : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, stellt man sich als *Koordinaten* eines Punktes $p \in \varphi(U)$ vor. Für $p = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ sind also $x_1, \dots, x_k$ die Koordinaten bezüglich der Karte (φ, U). Offenbar kann ein Punkt für verschiedene Karten verschiedene Koordinaten besitzen. Man hat sich daher zu überlegen, was beim Wechsel von Koordinatensystemen passiert.

Satz 4.5 (Parameter–Transformation) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit, und*

$$\varphi_j : U_j \to V_j := \varphi_j(U_j) \subseteq M, \quad j = 1, 2,$$

seien Karten mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offene Teilmengen von U_j, und

$$\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\big|_{W_1} : W_1 \to W_2$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis Da V eine offene Teilmenge von V_j und φ_j stetig ist, ist W_j als Urbild einer offenen Teilmenge von V_j offen. Aus den Definitionen ist auch klar, dass ψ bijektiv und stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Wir zeigen, dass ψ stetig differenzierbar ist. Sei $x \in W_1$. Nach Definition einer k–dimensionalen Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\varphi_1(x)$ mit $M \cap U \subseteq V$ (das dürfen wir zusätzlich annehmen) und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap \Big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\Big).$$

Dann ist

$$\Phi \circ \varphi_1 = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \Phi \circ \varphi_2 = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$$

mit gewissen stetig differenzierbaren Funktionen $g_i : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$ und $h_j : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$. Folglich sind auch die Funktionen

$$G := (g_1, \ldots, g_k) : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k, \quad H := (h_1, \ldots, h_k) : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k$$

stetig differenzierbar. Bezeichnet π wieder die im Beweis von Satz 4.4 eingeführte Projektion, so ist mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1)'(x) = \pi'\Big(\Phi(\varphi_1(x))\Big) \circ \Phi'\Big(\varphi_1(x)\Big) \circ \varphi_1'(x) \\ &= \pi \circ \Phi'\Big(\varphi_1(x)\Big) \circ \varphi_1'(x). \end{aligned}$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $G'(x)$ injektiv und folglich invertierbar (beachte: $G'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$). Nach Folgerung 12.6 aus Ana II ist $G : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \Phi(M \cap U)$ ein Diffeomorphismus, und ebenso ist $H : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \Phi(M \cap U)$ ein Diffeomorphismus. Auf der Umgebung $\varphi_1^{-1}(M \cap U)$ von x haben wir nun

$$\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1}\Phi^{-1}\eta\, \pi\, \Phi\varphi_1 = (\pi\Phi\varphi_2)^{-1}(\pi\Phi\varphi_1) = H^{-1} \circ G,$$

d.h. ψ ist auf dieser Umgebung stetig differenzierbar. Da $x \in W_1$ beliebig war, ist ψ auf W_1 stetig differenzierbar. Entsprechend erhält man die stetige Differenzierbarkeit von $\psi^{-1} : W_2 \to W_1$. ■

4.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 1

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über k–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ definieren und beginnen mit dem einfachsten Fall, wenn M durch eine einzige injektive Immersion beschrieben werden kann. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version. Sei $k < n$, $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linear und $W := [0,1]^k$ der k–dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das n–dimensionale Volumen von AW gleich Null nach Folgerung 3.9 (und wenig interessant). Wir wollen ein "k–dimensionales Volumen" von AW definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Abbildung (=Drehung) B auf AW angewendet wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann B so gewählt werden, dass $\operatorname{Im} BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$, so ist es weiter vernünftig anzunehmen, dass BAW und $PBAW$ gleiche k–dimensionale Volumina besitzen. Nun ist aber PBA eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^k$ und daher

$$\lambda_k(PBAW) = |\det(PBA)|$$

(vgl. Abschnitt 3.2). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die Matrix B enthält (die wir irgendwie wählen mussten). Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\det(PBA)|^2 &= \det(A^T B^T P^T) \det(PBA) = \det(A^T B^T P^T PBA) \\ &= \det(A^T B^T BA) = \det(A^T A) \end{aligned}$$

(beachte: P^TP ist der Orthoprojektor von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, und wegen $\mathrm{Im}BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist $P^TPBA = BA$). Damit haben wir eine brauchbare Formel für das k–dimensionale Volumen von AW gefunden:

$$\mathrm{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^TA)}.$$

(Die Matrix A^TA ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.) Damit ist der Weg zur Definition des k–dimensionalen Volumens von parametrisierten Untermannigfaltigkeiten vorgezeichnet.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $J_x(\varphi)$ ihre Jacobimatrix im Punkt $x \in U$. Die $k \times k$–Matrix

$$G(x) := J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)$$

heißt der *Maßtensor oder die Gramsche Matrix von* φ, und die durch $g(x) := \det G(x)$ definierte Funktion heißt die *Gramsche Determinante* von φ. Diese Bezeichnung rührt daher, dass

$$G(x) = \Big(g_{ij}(x)\Big)_{i,j=1}^k \quad \text{mit} \quad g_{ij}(x) = \Big\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \Big\rangle$$

ist, wobei $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i})$. Die Matrix $G(x)$ ist also die *Gramsche Matrix* der Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$, d.h. der Spalten von $J_x(\varphi)$. Wegen rang $J_x(\varphi) = k$ sind diese Spalten linear unabhängig, d.h. $G(x)$ ist positiv definit. Insbesondere ist $g(x) > 0$ für alle $x \in U$.

Definition 4.6 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und (φ, U) eine Karte von M mit $\varphi(U) = M$. Eine Teilmenge $E \subseteq M$ heißt* messbar *(bzgl. φ), wenn ihr Urbild $\varphi^{-1}(E)$ messbar ist. Ist $E \subseteq M$ messbar, so heißt*

$$S_M(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{4.3}$$

das k–dimensionale Volumen von *E (bzgl. φ). Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* integrierbar *(bzgl. φ), wenn die Funktion*

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g(x)}$$

Lebesgue–integrierbar auf U ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f dS_M := \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{4.4}$$

das Integral von f über M *(bzgl. φ).*

Wir haben also das Integral $\int_M f dS_M$ einfach durch (4.4) erklärt. Man kann aber auch anders zu diesem Integral gelangen. Nach Satz 2.6 ist nämlich

$$\mu : A \mapsto \int_A \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x)$$

ein Maß auf der σ–Algebra $\tilde{B}(\mathbb{R}^k)$ der erweiterten Borelmengen. Hiermit kann man zeigen, dass die Menge der messbaren Teilmengen von M ebenfalls eine σ–Algebra bildet und dass S_M ein vollständiges Maß auf dieser σ–Algebra ist, das sogenannte *Oberflächenmaß von* M. Das bezüglich dieses Maßes erklärte Integral stimmt mit (4.4) überein.

Man beachte, dass aus Folgerung 1.9 und der Stetigkeit von φ folgt, dass jede Borelmenge des metrischen Raumes M messbar ist. Weiter nennen wir eine messbare Menge $E \subseteq M$ eine *Nullmenge*, wenn $S_M(E) = 0$ ist. Wie in Abschnitt 2.2 zeigt man: wird eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer Nullmenge abgeändert, so bleibt sie integrierbar mit dem gleichen Integral. Wir zeigen nun, dass die in Definition 4.6 erklärten Volumina bzw. Integrale nicht von der Parametrisierung φ abhängen. Die Bemerkungen (*bzgl.* φ) dürfen also weggelassen werden.

Lemma 4.7 *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\tau : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Weiter seien*

$$g_\varphi(x) := \det\Big(J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)\Big) \quad \textit{bzw.} \quad g_{\varphi\circ\tau}(y) := \det\Big(J_y(\varphi\circ\tau)^T J_y(\varphi\circ\tau)\Big)$$

die Gramschen Determinanten von φ bzw. $\varphi \circ \tau$. Ist eine der Funktionen

$$x \mapsto f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)} \quad \textit{bzw.} \quad y \mapsto f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}$$

auf U bzw. V Lebesgue–integrierbar, so ist es auch die andere, und es gilt

$$\int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)}\, d\lambda_k(x) = \int_V f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\, d\lambda_k(y).$$

Beweis Mit der Kettenregel $(\varphi\circ\tau)'(y) = \varphi'(\tau(y)) \circ \tau'(y)$ folgt

$$J_y(\varphi\circ\tau)^T J_y(\varphi\circ\tau) = J_y(\tau)^T J_{\tau(y)}(\varphi)^T J_{\tau(y)}(\varphi) J_y(\tau)$$

und damit $g_{\varphi\circ\tau}(y) = (\det \tau'(y))^2 g_\varphi(\tau(y))$. Mit der Transformationsformel erhalten wir nun

$$\begin{aligned} &\int_V f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\, d\lambda_k(y) \\ &= \int_V f\Big(\varphi(\tau(y))\Big)\sqrt{g_\varphi(\tau(y))}\, |\det \tau'(y)|\, d\lambda_k(y) \\ &= \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)}\, d\lambda_k(x). \end{aligned}$$

Der Transformationssatz liefert auch die Aussage über die Integrierbarkeit. ■

Beispiel Wir betrachten den Fall $k = 1$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Immersion. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$. Aus

$$G(x) = J_x(\varphi)^T J_x(\varphi) = \langle \varphi'(x), \varphi'(x) \rangle = \|\varphi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir $g(x) = \|\varphi'(x)\|_2$ und damit

$$S_M(M) = \int_U \|\varphi'(t)\|_2 \, d\lambda_1(t).$$

Das ist exakt die Formel, die wir in Satz 11.5 (Ana II) für die Länge der Kurve M gefunden haben. Das Integral von $f : M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_M f dS_M = \int_U f\Big(\varphi(t)\Big) \|\varphi'(t)\|_2 \, d\lambda_1(t),$$

und das ist genau die Definition des Kurvenintegrals (1. Art) aus Abschnitt 11.2 der Ana II–Vorlesung. ■

4.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 2.

Wir schauen uns nun Untermannigfaltigkeiten an, die nicht mehr durch eine einzige Karte beschrieben werden können.
Zuerst überlegen wir uns, dass man für jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Familie $(\varphi_j, U_j)_{j\geq 1}$ von Karten so findet, dass

$$M = \bigcup_{j\geq 1} \varphi_j(U_j). \tag{4.5}$$

Nach dem Parametrisierungssatz gibt es nämlich zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $V_p \cap M = \varphi_p(U_p)$ für eine Karte (φ_p, U_p) von M. Durch Verkleinern von V_p können wir annehmen, dass

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - q\|_2 < r_q\}$$

mit $q \in \mathbb{Q}^n$ und $r_q \in \mathbb{Q}$. Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt $p \in M$ in einer solchen Menge liegt, erhalten wir (4.5). In praktischen Anwendungen genügen meist endlich viele Karten, um M zu überdecken.

Lemma 4.8 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, und seien $(\varphi_j, U_j)_{j\geq 1}$ und $(\tilde{\varphi}_i, \tilde{U}_i)_{i\geq 1}$ abzählbare Familien von Karten von M mit*

$$M = \bigcup_{j\geq 1} \varphi_j(U_j) = \bigcup_{i\geq 1} \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i).$$

Wir setzen $M_j := \varphi_j(U_j), \tilde{M}_i = \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i)$, $N_1 := M_1, \tilde{N}_1 := \tilde{M}_1$, *und für* $i, j > 1$

$$N_j := M_j \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}), \quad \tilde{N}_i := \tilde{M}_i \setminus (\tilde{M}_1 \cup \ldots \cup \tilde{M}_{i-1}),$$

und wir erhalten zwei jeweils paarweise disjunkte und abzählbare Familien $(N_j)_{j\geq 1}$, $(\tilde{N}_i)_{i\geq 1}$ *von Borelmengen, die* M *überdecken. Ist* $E \subseteq M$ *eine Menge, für die jeder Durchschnitt* $E \cap N_j$ *(bzgl.* φ_j*) messbar ist, so ist auch jeder Durchschnitt* $E \cap \tilde{N}_i$ *(bzgl.* $\tilde{\varphi}_i$*) messbar, und es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i).$$

Beweis Wir schreiben

$$E \cap N_j = \bigcup_{i\geq 1} (E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Die Menge $E \cap N_j$ ist bzgl. S_{M_j} messbar, und da $\tilde{N}_i$ Borelmenge ist, ist auch $E \cap N_j \cap \tilde{N}_i$ bzgl. S_{M_j} messbar. Genauso sieht man die Messbarkeit von $E \cap N_j \cap \tilde{N}_i$ bzgl. $S_{\tilde{M}_i}$. Nach Satz 4.5 über Parameter–Transformation, den wir auf die offene Menge $M_j \cap \tilde{M}_i$ anwenden, erhalten wir mit Lemma 4.7

$$S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Schließlich erhalten wir mit dem Doppelreihensatz (Satz 9.19, Ana II), den wir hier nur in einer einfachen Version benötigen, da alle Summanden nichtnegativ sind,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Eine Teilmenge $E \subseteq M$ mit den im Lemma genannten Eigenschaften nennen wir *messbar auf* M. Messbarkeit hängt nach diesem Lemma nicht von den gewählten Karten ab.

Definition 4.9 *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *Untermannigfaltigkeit und* $(\varphi_j, U_j)_{\geq 1}$ *eine Familie von Karten von* M *mit* $M = \cup_{j\geq 1}\varphi_j(U_j)$. *Weiter seien* M_j *und* N_j *wie in Lemma 4.8 erklärt. Für jede messbare Menge* $E \subseteq M$ *definieren wir*

$$S_M(E) := \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j). \tag{4.6}$$

Lemma 4.8 garantiert, dass diese Definition nicht von den gewählten Karten abhängt. Man kann zeigen, dass durch (4.6) *ein Maß S_M auf der σ–Algebra der messbaren Teilmengen von M definiert wird und dass das zugehörige Integral einer integrierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch*

$$\int_M f dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j^{-1}(N_j)} f\Big(\varphi_j(x)\Big)\sqrt{g_{\varphi_j}(x)}\, d\lambda_k(x). \tag{4.7}$$

Das Maß S_M heißt das Oberflächenmaß *auf M.*

Einige der in dieser Definition formulierten Aussagen (S_M ist Maß, ...) werden Sie sich im Tutorium ansehen.

Mit der Definition des Oberflächenmaßes haben wir Integralen über Untermannigfaltigkeiten einen präzisen Sinn gegeben. Wir wenden uns einigen Beispielen zu.

Beispiel 1 Hier betrachten wir die allgemeinen Rotationsflächen aus Beispiel 4 in Abschnitt 4.1. Die Parametrisierung $\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall) und ihre Jacobimatrix in (t, φ) sind also gegeben durch

$$\Phi(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{(t,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

und für den Maßtensor und die Gramsche Determinante findet man

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t,\varphi) = r(t)\,\|\gamma'(t)\|_2$$

mit $\gamma(t) = (r(t), 0, z(t))$ (wir hatten $r(t) > 0$ in Beispiel 4 vorausgesetzt). Für $M := \Phi(I \times (0, 2\pi))$ erhält das Oberflächenintegral daher die Form

$$\int_M f dS_M = \int_I \int_0^{2\pi} f\Big(\Phi(t,\varphi)\Big) r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt.$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich insbesondere für das 2–dimensionale Volumen von M

$$S_M(M) = \int_I \int_0^{2\pi} r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt = 2\pi \int_I r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, dt.$$

Für die zweidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $r(t) = \cos t$, $z(t) = \sin t$ und damit $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ und

$$S_M(\mathbb{S}^2) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 4\pi. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 2 Hier sehen wir uns Funktionsgraphen an (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 4.1). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}$, $x \mapsto (x, f(x))$ eine injektive Immersion, und die Umkehrfunktion $\varphi(U) \to U$, $(x, f(x)) \mapsto x$ ist offenbar stetig (Projektion auf die erste Komponente). Also ist $M := \varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+1}$. Weiter haben wir

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix}$$

und

$$G(x) = \begin{pmatrix} I \, J_x(f)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix} = I + J_x(f)^T J_x(f),$$

wobei I die $k \times k$–Einheitsmatrix ist. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $G(x)$. Ist $v \in \ker J_x(f)$, so ist $J_x(f)v = 0$ und somit $G(x)v = v$. Alle Vektoren $\neq 0$ aus dem (mindestens $k-1$–dimensionalen) Kern von $J_x(f) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ sind also Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Außerdem ist für den Vektor $(\operatorname{grad} f)(x) \in \mathbb{R}^k$, den wir uns als Zeilenvektor denken,

$$\begin{aligned} G(x)(\operatorname{grad} f)(x)^T &= (\operatorname{grad} f)(x)^T + (\operatorname{grad} f)(x)^T (\operatorname{grad} f)(x)(\operatorname{grad} f)(x)^T \\ &= \Big(1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2\Big)(\operatorname{grad} f)^T(x), \end{aligned}$$

so dass (falls $f'(x) \neq 0$) $(\operatorname{grad} f)^T(x)$ Eigenvektor zum Eigenwert $1+\|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2$ ist. Da die Determinante von $G(x)$ das Produkt der Eigenwerte dieser Matrix ist, folgt:

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2. \tag{4.8}$$

Für $M := \varphi(U)$ ist also das k–dimensionale Volumen gleich

$$S_M(M) = \int_U \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2} \, d\lambda_k(x).$$

Insbesondere ist für $n > 1$ die obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$,

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r, \ x_n > 0\}$$

der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} F : U &:= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\|_2 < r\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} \\ &= \sqrt{r^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\,. \end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{F(x)}$ folgt mit (4.8)

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} F)(x)\|_2^2 = 1 + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{F(x)^2 + \|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|x\|_2^2}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_M f dS_M &= \int_{\|x\|_2<r} f\Big(x, \sqrt{r^2-\|x\|_2^2}\Big)\frac{r}{\sqrt{r^2-\|x\|_2^2}}\,d\lambda_{n-1}(x)\\ &= \int_{\|y\|_2<1} f\Big(ry, r\sqrt{1-\|y\|_2^2}\Big)\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|y\|_2^2}}\,d\lambda_{n-1}(y), \qquad (4.9)\end{aligned}$$

wobei wir $x = ry$ substituiert haben. ∎

Beispiel 3 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $r > 0$. Ist $\varphi : U \to M$ eine Karte von M, so ist $r\varphi : U \to rM$ eine Karte von rM. Hieraus folgt, dass rM ebenfalls eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter folgt aus $(r\varphi)'(x) = r\varphi'(x)$ für die Gramschen Determinanten von φ bzw. $r\varphi$, dass $g_{r\varphi}(x) = r^{2k} g_\varphi(x)$, d.h. $\sqrt{g_{r\varphi}(x)} = r^k\sqrt{g_\varphi(x)}$. Folglich gilt

$$S_{rM}(rE) = r^k S_M(E)$$

für jede messbare Teilmenge $E \subseteq M$ und

$$\int_{rM} f(x)dS_{rM}(x) = r^k \int_M f(rx)dS_M(x) \qquad (4.10)$$

für jede integrierbare Funktion $f : rM \to \mathbb{R}$. ∎

Satz 4.10 *Sei $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar. Dann ist für fast jedes $r > 0$ die Funktion f über der Sphäre $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_0^\infty \int_{S_r} f(x)dS_{S_r}(x)dr = \int_0^\infty \int_{S_1} f(ry)dS_{S_1}(y)r^{n-1}dr. \qquad (4.11)$$

Beweis Sei $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$. Dann ist $f = f\chi_{H_+} + f\chi_{H_-}$ fast überall, denn $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ist eine Nullmenge. Da $S_r \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ eine $(n-1)$–dimensionale Nullmenge ist, genügt es, die Behauptung für jede der Funktionen $f\chi_{H_\pm}$ zu zeigen. Wir tun dies für $f\chi_{H_+}$ und nehmen gleich an, dass f außerhalb von H_+ verschwindet.

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| < 1\}$. Die Abbildung

$$\Phi : U \times (0,\infty) \to H_+ \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, \;\; (x,r) \mapsto \Big(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2}\Big)$$

ist bijektiv und hat die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(y) = \Big(\frac{y_1}{\|y\|_2}, \dots, \frac{y_{n-1}}{\|y\|_2}, \|y\|_2\Big)$$

(Nachrechnen!). Offenbar ist also Φ ein Diffeomorphismus.

Sei $F(x) := \sqrt{1-\|x\|_2^2}$. Dann ist $(\operatorname{grad} F)(x) = -\frac{x}{F(x)}$ (als Zeilenvektor) sowie $\Phi(x,r) = (rx, rF(x)) = r(x, F(x))$. Folglich ist

$$J_{(x,r)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & r & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{r(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix}.$$

Ausklammern von r und Subtraktion des x_j–fachen der j. Spalte von der letzten Spalte liefern

$$\begin{aligned} \det J_{(x,r)}(\Phi) &= r^{n-1}\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix} \\ &= r^{n-1}\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) - \langle (\operatorname{grad} F)(x), x\rangle \end{pmatrix} \\ &= r^{n-1}\Big(F(x) - \Big\langle (\operatorname{grad} F)(x), x\Big\rangle\Big) = r^{n-1}\Big(F(x) + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)}\Big) \\ &= \frac{r^{n-1}}{F(x)}\Big(F(x)^2 + \|x\|_2^2\Big) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}. \end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \int_{H_+} f d\lambda_n &= \int_{U\times(0,\infty)} f(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2})\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(x)dr \\ &= \int_0^\infty \int_U \frac{f(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2})}{\sqrt{1-\|x\|_2^2}}\, r^{n-1} d\lambda_{n-1}(x)dr. \end{aligned}$$

Nach (4.9) ist das innere Integral gleich $\int_{S_r} f dS_{S_r}$. Hieraus folgt die erste Gleichheit in (4.11), und die zweite bekommt man mit (4.10). ■

Beispiel 4 Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le 1\}$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_n$. Wir wollen das $(n-1)$–dimensionale Volumen $w_n := \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ der $(n-1)$–dimensionalen Einheitsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ berechnen. Wir erinnern daran, dass das ("gewöhnliche") n–dimensionale Volumen von B_n durch $c_n = \operatorname{vol}_n(B_n) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ gegeben ist. Wir wenden nun Satz 4.10 auf die charakteristische Funktion von B_n an und finden

$$c_n = \int_{\|x\|_2 \le 1} d\lambda_n(x) = \int_0^1 \int_{\|x\|=1} dS_{\mathbb{S}^{n-1}}(y) r^{n-1} dr = w_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{w_n}{n} \,.$$

Somit ist

$$w_n = nc_n = n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Insbesondere erhalten wir

- $w_2 = 2\pi$ (Länge des Einheitskreisbogens)
- $w_3 = 4\pi$ (Oberfläche der zweidimensionalen Einheitssphäre)
- $w_4 = 2\pi^2$ (dreidimensionales Volumen von $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$).

5 Integralsätze

Das zentrale Resultat der Differential– und Integralrechnung für Funktionen von einer Veränderlichen ist der Hauptsatz, der besagt, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von F auf dem Rand $\partial[a, b] = \{a, b\}$ von $[a, b]$ und den Werten von F' im Inneren von $[a, b]$. Thema dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieser Beziehung. Die allgemeine Stokessche Formel

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw,$$

die wir hier nicht behandeln, liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes. Wir betrachten lediglich Spezialfälle dieser Formel: den Gaußschen Integralsatz, den Stokesschen Integralsatz im Raum und die Greensche Formel in der Ebene.

5.1 Kompakta mit glattem Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist wohl das wichtigste Resultat der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit glattem Rand*.

Definition 5.1 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge (ein* Kompaktum*). Das Kompaktum A hat einen* glatten Rand*, wenn es zu jedem Randpunkt $p \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass*

(a) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$,

(b) $\psi'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in U$.

Lemma 5.2 *In der Situation von Definition 5.1 gilt*

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Beweis Sei zunächst $x \in \partial A \cap U$. Da A kompakt ist, ist A abgeschlossen. Damit ist $x \in A$ und $\psi(x) \leq 0$. Wäre $\psi(x) < 0$, so wäre $\{y \in U : \psi(y) < 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die in A liegt und x enthält. Das steht im Widerspruch zu $x \in \partial A$. Also ist $\psi(x) = 0$.

Sei nun $x \in U$ und $\psi(x) = 0$. Dann ist $x \in A$, und wir zeigen, dass x Randpunkt von A ist. Wegen $\psi'(x) \neq 0$ ist $\psi'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv. Es gibt also ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi'(x)v > 0$. Nun ist

$$0 < \psi'(x)v = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv) - \psi(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv)}{t}.$$

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\psi(x + tv) > 0$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$. Folglich liegen für hinreichend großes n die Punkte $x + \frac{1}{n} v$ nicht in A. Es ist aber $x + \frac{1}{n} v \to x$ und daher $x \in \partial A$. ■

Folgerung 5.3 *Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine* $(n-1)$*–dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$.

Beweis Nach Lemma 5.2 ist ∂A lokal die Nullstellenmenge der Funktion ψ, und 0 ist ein regulärer Wert von ψ. Die Behauptung folgt also aus dem Rangsatz (Satz 12.10 aus Analysis II). ■

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das *Normalenfeld* von ∂A. Dazu definieren wir zunächst allgemein Tangential– und Normalvektoren.

Definition 5.4 *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine* k*–dimensionale Untermannigfaltigkeit und* $p \in M$.

(a) *Ein Vektor* $v \in \mathbb{R}^n$ *heißt* Tangentialvektor an M in p, *wenn ein* $\varepsilon > 0$ *und ein stetig differenzierbarer Weg* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ *mit* $\gamma(0) = p$ *und* $\gamma'(0) = v$ *existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an* M *in* p *bezeichnen wir mit* $T_p(M)$.

(b) *Ein Vektor* $v \in \mathbb{R}^n$ *heißt* Normalenvektor an M in p, *wenn er auf* $T_p(M)$ *senkrecht steht (d.h. wenn* $\langle v, w \rangle = 0$ *für alle* $w \in T_p(M)$*). Die Menge aller Normalenvektoren an* M *in* p *bezeichnen wir mit* $N_p(M)$.

Für den Tangentialraum $T_p(M)$ hat man die folgende Beschreibung.

Lemma 5.5 *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^k$ *offen und* $\varphi : U \to M$ *eine Karte von* M. *Dann ist*

$$T_{\varphi(x)}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(x) \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $x + tv \in U$ für alle t aus $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir betrachten den Weg

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad t \mapsto \varphi(x + tv).$$

Für diesen ist $\gamma(0) = \varphi(x)$ und $\gamma'(0) = \varphi'(x)v$. Also ist $\operatorname{Im} \varphi'(x) \subseteq T_{\varphi(x)}(M)$. Für die umgekehrte Inklusion wählen wir wie im Beweis von Satz 4.4 eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x und einen Diffeomorphismus Φ auf $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ so, dass

$\Phi^{-1}(\varphi(w)) = (w, 0)$ für alle $w \in W$. Mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$, haben wir dann $\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w))) = w$ und $\varphi(\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w)))) = \varphi(w)$ für alle $w \in W$. Sei nun $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \varphi(x)$. Ist ε hinreichend klein, so ist $\gamma(t) \in \varphi(W)$ für alle $t \in (\varepsilon, \varepsilon)$ und folglich

$$\varphi\Big(\pi\big(\Phi^{-1}(\gamma(t))\big)\Big) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\varphi'(x)w = \gamma'(0)$ mit einem Vektor $w \in \mathbb{R}^k$. Also ist $\gamma'(0) \in \operatorname{Im} \varphi'(x)$ und damit $T_{\varphi(x)}(M) \subseteq \operatorname{Im} \varphi'(x)$. ∎

Insbesondere stellen wir fest, dass $T_p(M)$ ein k–dimensionaler und $N_p(M)$ ein $(n-k)$–dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) = \mathbb{R}^n.$$

Ist $M = \partial A$ der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand, so ist $N_p(\partial A)$ für jeden Punkt $p \in M$ ein eindimensionaler reeller Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der "nach außen zeigt".

Satz 5.6 *Sei A ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A.*

(a) *Für jedes $p \in \partial A$ gibt es genau einen Vektor $\nu(p) \in N_p(\partial A)$ der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $p + t\nu(p) \notin A$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.*

(b) *Die Abbildung $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Der Vektor $\nu(p)$ heißt *der äußere Normalenvektor an* ∂A in p, und ν heißt das *äußere Normalenfeld von* A.

Beweis *Existenz eines äußeren Normalenvektors*: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi'(p) \neq 0$ und $U \cap A = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$. Wir zeigen, dass

$$\nu(p) := \frac{1}{\|(\operatorname{grad} \psi)(p)\|_2} (\operatorname{grad} \psi)(p) \tag{5.1}$$

ein äußerer Normalenvektor ist. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial A$ ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und ist ε so klein, das $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist nach Lemma 5.2

$$\psi\Big(\gamma(t)\Big) = 0 \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\psi'(p)\gamma'(0) = 0$. Folglich steht der Vektor $(\operatorname{grad} \psi)(p)$ und damit auch $\nu(p)$ senkrecht auf $T_p(\partial A)$. Klar ist auch $\|\nu(p)\|_2 = 1$. Die außerdem geforderte Eigenschaft folgt wegen

$$\psi'(p)\Big(\nu(p)\Big) = \frac{\langle (\operatorname{grad} \psi)(p), (\operatorname{grad} \psi)(p) \rangle}{\|(\operatorname{grad} \psi)(p)\|_2} = \|(\operatorname{grad} \psi)(p)\|_2$$

wie im Beweis von Lemma 5.2.

Eindeutigkeit des äußeren Normalenvektors: Wir haben bereits bemerkt, dass es genau zwei Normalenvektoren der Länge 1 gibt und dass einer davon der Vektor $\nu(p)$ aus (5.1) ist. Wie im Beweis von Lemma 5.2 sieht man nun, dass $\psi(a - t\nu(p)) < 0$ für $t > 0$ hinreichend nahe bei Null. Also ist $a - t\nu(p) \in A$ für solche t, d.h. der Vektor $-\nu(p)$ erfüllt nicht die zusätzliche Bedingung aus (a).

Stetigkeit von ν: Diese folgt sofort aus Darstellung (5.1). ■

Beispiel 1 Sei $r > 0$. Die Kugel $A := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \le r\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2 - r^2$, hat die gewünschten Eigenschaften. Für $p \in \partial A$ ist $(\operatorname{grad}\psi)(p) = 2p$, und damit ist wegen (5.1) der Vektor $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}\, p = \frac{1}{r}\, p$ der zugehörige Normalenvektor. ■

Beispiel 2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche $\psi(U)$. Für $x \in U$ haben wir $T_{\varphi(x)}(\varphi(U)) = \operatorname{Im}\varphi'(x)$, und da φ eine Immersion ist, ist dies ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es gibt im Punkt $\varphi(x)$ also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor $\nu(\varphi(x))$ dadurch fest, dass wir

$$\det\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x), \nu(\varphi(x))\Big) > 0$$

verlangen, d.h. die Vektoren

$$X_1(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \quad X_2(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x) \quad \text{und } \nu\Big(\varphi(x)\Big)$$

sollen ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir $\nu(\varphi(x))$ direkt berechnen:

$$\nu\Big(\varphi(x)\Big) = \frac{X_1(p) \times X_2(p)}{\|X_1(p) \times X_2(p)\|},$$

wobei $v \times w$ das *Vektorprodukt* der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist, d.h.

$$v \times w = \det\begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 & - & v_3w_2 \\ v_3w_1 & - & v_1w_3 \\ v_1w_2 & - & v_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Ist speziell φ gegeben durch eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, d.h. ist $\varphi(x) = (x, f(x))$, so ist

$$X_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \qquad X_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

also

$$X_1(p) \times X_2(p) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daher

$$\nu(p) = \nu\Big(\varphi(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x))^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2}(x))^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $\nu(\varphi(x))$ der obere Normalenvektor an den Graphen von f. ∎

Beispiel 3 In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graphen einer Funktion g darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von g zu beschreiben. Die Details sollen Sie sich im Tutorium anschauen.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in \partial A$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ und $\psi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Nach Lemma 5.2 ist dann

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Wegen $\psi'(p) \neq 0$ dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) \neq 0$ ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, eine stetig differenzierbare Funktion $g : U_1 \to \mathbb{R}$ und ein Intervall (b, c) mit $V := U_1 \times (b, c) \subseteq U$ so, dass

$$\partial A \cap \Big(U_1 \times (b, c)\Big) = \Big\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in U_1\Big\},$$

d.h. $\partial A \cap V$ ist der Graph von g. Ist $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) > 0$, so ist

$$A \cap \Big(U_1 \times (b, c)\Big) = \Big\{x \in V : x_n \leq g(x')\Big\},$$

wobei wir $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ geschrieben haben, und es ist weiter

$$\nu(p) = \frac{(-(\operatorname{grad} g)(p'), 1)}{\sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(p')\|_2^2}} \tag{5.2}$$

mit $p = (p', p_n)$. ∎

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Wir erinnern daran, dass der *Durchmesser* einer Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) durch

$$\operatorname{diam} M := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$$

definiert ist.

Satz 5.7 (Lebesguesches Überdeckungslemma) *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine sogenannte* Lebesguesche Zahl der Überdeckung*) so, dass jede Teilmenge M von X mit* $\operatorname{diam} M \leq \lambda$ *und $M \cap K \neq \emptyset$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis Zu jedem Punkt $k \in K$ gibt es ein $i \in I$ mit $k \in U_i$. Da U_i offen ist, findet man ein $\varepsilon(k) > 0$ mit $U_{2\varepsilon(k)}(k) \subseteq U_i$. Nun bildet die Familie $(U_{\varepsilon(k)}(k))_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, lässt sich daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte $k_1, \ldots, k_m \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\varepsilon(k_j)}(k_j).$$

Wir setzen $\lambda := \min(\varepsilon(k_1), \ldots, \varepsilon(k_m))$. Sei nun $M \subseteq X$ eine Teilmenge mit $M \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} M \leq \lambda$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $x \in M \cap K$, und es gibt ein j mit $d(x, k_j) < \varepsilon(k_j)$. Für jedes $y \in M$ ist dann

$$d(y, k_j) \leq d(y, x) + d(x, k_j) < \lambda + \varepsilon(k_j) \leq 2\varepsilon(k_j),$$

d.h. $M \subseteq U_{2\varepsilon(k_j)}(k_j)$. Nach Konstruktion ist aber jede der Kugeln $U_{2\varepsilon(k)}(k)$ (und damit auch die Menge M) in einer der Mengen U_i enthalten. ■

5.2 Der Gaußsche Integralsatz

Zur Erinnerung: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt

$$\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz desVektorfeldes F.*

Satz 5.8 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die A umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x). \tag{5.3}$$

Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Rand niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweist. Auch die Voraussetzung, dass F auf einer ganzen Umgebung von A definiert ist, lässt sich abschwächen.

Da $\nu(x)$ ein Einheitsvektor ist, haben wir $\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|F(x)\| \cdot \cos\alpha(x)$, wobei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $F(x)$ und $\nu(x)$ ist. Es ist also $\langle F(x), \nu(x)\rangle$ die Länge der orthogonalen Projektion von $F(x)$ auf $\nu(x)$. Ein Physiker stellt sich $\langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$ als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von A interpretiert. Ist das Vektorfeld F *divergenzfrei* (oder auch *quellenfrei*), d.h. ist $\operatorname{div} F = 0$, so ergibt sich

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x) = 0,$$

d.h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet. Diese Situation tritt z.B. auf, wenn F den Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreibt. Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung $\operatorname{div} F = 0$. Das Verschwinden des Gesamtflusses durch ∂A kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass ja die Flüssigkeitsmenge, die sich innerhalb von A befindet, wegen der Inkompressibilät dem Volumen von A entspricht, also konstant ist. Daher ist die Flüssigkeitsbilanz in A ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel rein wie raus.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir einige weitere Werkzeuge bereitstellen und zwei Lemmas beweisen, die Spezialfälle behandeln und die Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

Zunächst einige Begriffe. Sei M ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Die Menge

$$\operatorname{supp} f := \operatorname{clos}\Big\{x \in M : f(x) \neq 0\Big\}$$

heißt der *Träger* von f. Wir schreiben $C(M)$ für den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $C_0(M)$ für den Raum der Funktionen aus $C(M)$, deren Träger kompakt ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichne $C_0^k(U)$ den Raum der k–mal stetig diffenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U. Beachten Sie: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ liegt genau dann in $C_0(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist (da Träger per Definition abgeschlossen sind), und $f \in C((a, b))$ liegt genau dann in $C_0((a, b))$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $\operatorname{supp} f \subseteq (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_0^k(U)$, so liegt die durch

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \neq U \end{cases}$$

definierte *Fortsetzung von f durch* 0 in $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Ist nämlich $x \in U$, so stimmen f und F in einer Umgebung von x überein. Ist dagegen $x \neq U$, so ist $x \neq \operatorname{supp} f$, und da $\operatorname{supp} f$ abgeschlossen ist, ist das Komplement dieser Menge offen, und F verschwindet auf einer Umgebung von x.

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-t^2}\Big) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (Nachweis), und ihr Träger ist $[-1, 1]$ (so dass $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$). Da g einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

wohldefiniert (für jedes t hat die Reihe nur endlich viele Summanden ungleich Null). Nun ist klar, dass G positiv, 1–periodisch und beliebig oft differenzierbar ist. Also wird auch durch $h(t) := g(t)/G(t)$ eine Funktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Für diese ist $\operatorname{supp} h = [-1, 1]$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = \frac{G(t)}{G(t)} = 1.$$

Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir nun $a_{p,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^n h(x_j/\varepsilon - p_j).$$

Dann ist $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\}$, und man hat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Familie $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ heißt eine *glatte Zerlegung der Eins*. Nun zu den angekündigten Lemmas.

Lemma 5.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt*

(a) $\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\lambda_n = 0$ *für alle $\varphi \in C_0^1(U)$.*

(b) $\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\psi d\lambda_n = -\int_U \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,d\lambda_n$ *für alle* $\varphi \in C_0^1(U)$ *und* $\psi \in C^1(U)$.

Beweis Wir dürfen o.E.d.A. $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, da wir ψ durch 0 zu einer Funktion in $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können.

Da $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R, R]^n$. Insbesondere verschwindet φ auf dem Rand des Würfels $[-R, R]^n$. Sei nun z.B. $j = 1$ (für die übrigen j verläuft der Beweis analog). Für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ist dann

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,(x)dx_1 = \varphi(R, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(-R, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,(x)d\lambda_n(x) &= \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,(x)d\lambda_n(x)\\ &= \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,(x)dx_1\,d\lambda_{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = 0.\end{aligned}$$

Das liefert Aussage (a), und für (b) wenden wir (a) auf die Funktion $\varphi\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ an. Die Behauptung folgt dann aus der Produktregel

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\psi + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,.$$

■

Lemma 5.10 *Sei* $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *offen,* $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ *und* $g : U' \to I$ *stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$A := \Big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \leq g(x')\Big\} \text{ und } M := \Big\{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\Big\}.$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C_0^1(U' \times I)$ *und jedes* $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}\,(x)d\lambda_n(x) = \int_M f(x)\nu_j(x)dS_M(x),$$

wobei $\nu_j(x)$ *die* j*. Komponente des Normalenvektors*

$$\nu(x) := \frac{(-(\operatorname{grad} g)(x'), 1)}{\sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}} \quad \text{mit } x = (x', x_n) \tag{5.4}$$

ist (beachte Beispiel 2 in Abschnitt 5.1).

Beweis Wir erinnern zunächst daran, dass das Oberflächenmaß von M bezüglich der Parametrisierung $x' \mapsto (x', g(x'))$ gegeben ist durch

$$dS_M(x') = \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}\; d\lambda_{n-1}(x') \tag{5.5}$$

(vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 4.3). Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: *Sei* $1 \leq j < n$. Für die Funktion

$$F : U' \times I \to \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_\alpha^z f(x', x_n) dx_n$$

gilt nach Satz 2.20

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_j} F\Big(x', g(x')\Big) \\
&= \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial F}{\partial x_j}\Big(x', g(x')\Big) \\
&= f\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n.
\end{aligned}$$

Da die Funktion $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n$ einen kompakten Träger hat (warum?), folgt aus Lemma 5.9 (*a*)

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d\lambda_n(x) = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') \\
&= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') - \int_{U'} f\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda_{n-1}(x') \\
&= \int_M f(x) \nu_j(x) dS_M(x)
\end{aligned}$$

wegen (5.4), (5.5) und der Definition des Oberflächenintegrals.

Fall 2: *Sei* $j = n$. Da für jedes $x' \in U'$ die Funktion $x_n \mapsto f(x', x_n)$ einen kompakten Träger hat, folgt aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n = f\Big(x', g(x')\Big),$$

also wieder

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)d\lambda_n(x) &= \int_{U'}\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)dx_n d\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f\Big(x',g(x')\Big)d\lambda_{n-1}(x') = \int_M f(x)\nu_n(x)dS_M(x).\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. ■

Beweis des Gaußschen Integralsatzes Wir haben in Beispiel 3 aus Abschnitt 5.1 gesehen, dass jeder Punkt $a \in \partial A$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, in der sich ∂A als Graph einer Funktion darstellen lässt und $A \cap U$ als die Menge der Punkte, die unter diesem Graphen liegen. Es existiert deshalb eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq \cup_{j\in J} U_j$, so dass jedes U_j *eine* der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $U_j \subseteq A \setminus \partial A = \operatorname{int} A$.

(ii) Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten hat U_j die Gestalt $U_j = U' \times (a,b)$, wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$U_j \cap A = \Big\{(x',x_n) \in U' \times (a,b) : x_n \leq g(x')\Big\}.$$

Sei λ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ des Kompaktums A (vgl. Satz 5.7) und $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Zu diesem ε betrachten wir die oben konstruierte glatte Zerlegung der Eins $(a_{p,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}}$. Der Träger jeder Funktion $a_{p,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε und hat somit den Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda$. Jeder Träger $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon}$ ist also in einer der Mengen U_j enthalten (Satz 5.7). Sei

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Da A beschränkt ist, ist P eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um dem Gaußschen Integralsatz auf die Fälle zurückzuführen, wo sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Nun ist

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_A \operatorname{div}\Big(\sum_{p\in P} a_{p,\varepsilon}F\Big)d\lambda_n = \sum_{p\in P}\int_A \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F)d\lambda_n$$

und analog

$$\int_{\partial A} \big\langle F(x),\nu(x)\big\rangle dS_{\partial A}(x) = \sum_{p\in P}\int_{\partial A}\big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x),\nu\big\rangle dS_{\partial A}(x).$$

Wir müssen daher den Satz für jede der Funktionen $a_{p,\varepsilon}F$ zeigen. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $p \in \mathbb{Z}^n$ der Träger von $a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Ist $U_j \subseteq \operatorname{int} A$, so ist

$$\int_{\partial A} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x) = 0,$$

da $a_{p,\varepsilon}$ auf ∂A verschwindet. Die Behauptung folgt in diesem Fall aus

$$\int_A \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F) d\lambda_n = \int_{U_j} \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F) d\lambda_n = \sum_{i=1}^n \int_{U_j} \frac{\partial(a_{p,\varepsilon}F)}{\partial x_j} d\lambda_n = 0$$

nach Lemma 5.9 (a). Genügt dagegen U_j der Bedingung (ii), so folgt die Behauptung durch Anwendung von Lemma 5.10 auf die Komponentenfunktionen $f := a_{p,\varepsilon}F_i$, $i = 1, \dots, n$, von $a_{p,\varepsilon}F$ und durch Summation. ■

Anwendung 1: Oberfläche der Einheitssphäre. Für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ ist $(\operatorname{div} F)(x) = n$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt daher für jedes Kompaktum A mit glattem Rand

$$n \operatorname{vol}_n(A) = \int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial A} \big\langle x, \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x),$$

also

$$\operatorname{vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \big\langle x, \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x).$$

Ist speziell A die n–dimensionale Einheitskugel B_n, so ist ∂B_n die $(n-1)$–dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Weiter ist $\nu(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und daher

$$c_n = \operatorname{vol}_n(B_n) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \|x\|^2 dS_{\partial A}(x) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} dS_{\partial A}(x) = \frac{w_n}{n}.$$

Wir erhalten also erneut die Beziehung $w_n = nc_n$, die wir bereits früher abgeleitet hatten. ■

Anwendung 2: Die Greensche Formel. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ν das äußere Normalenfeld von A. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Ableitung in Normalenrichtung im Punkt* $a \in \partial A$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) := \big\langle (\operatorname{grad} f)(a), \nu(a) \big\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \nu_j(a).$$

Weiter definieren wir für $f \in C^2(U)$

$$\Delta f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

und nennen Δ den *Laplace–Operator*.

Lemma 5.11 *Für $f, g \in C^2(U)$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt*

(a) $\quad \operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f, F\rangle$.

(b) $\quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \Delta f$.

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen und ist Hausaufgabe.

Satz 5.12 (Greensche Formel) *Für $f, g \in C^2$ und A wie oben gilt*

$$\int_A (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial A} \Big(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big) dS_{\partial A}.$$

Beweis Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F := f\operatorname{grad} g - g\operatorname{grad} f$ an und erhalten mit Lemma 5.11

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \operatorname{div}(f\operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g\operatorname{grad} f) \\ &= f\operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle - g\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &\quad - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f\rangle = f\Delta g - g\Delta f. \end{aligned}$$

Auf ∂A ergibt sich

$$\langle F, \nu\rangle = f\langle \operatorname{grad} g, \nu\rangle - g\langle \operatorname{grad} f, \nu\rangle = f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu},$$

und die Behauptung folgt nun aus dem Gaußschen Integralsatz. ■

5.3 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

Wir sehen uns nun den Gaußschen Integralsatz für $n = 2$ genauer an. Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ ist eine Kurve, und wir wollen daher versuchen, das Randintegral aus dem Gaußschen Satz als ein Wegintegral über eine Pfaffsche Form zu interpretieren.

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂A eine kompakte 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Wir können ∂A also in endlich viele Stücke zerlegen, die wir jeweils durch Karten (= injektive Wege, die Immersionen sind) $\gamma_j : (a_j, b_j) \to \partial A$ parametrisieren können (Parametrisierungssatz).

Wir wollen nur solche Wege γ_j betrachten, die für A links der Kurve $\gamma_j((a_j, b_j))$ liegt. Das soll für einen solchen Weg $\gamma : (a, b) \to \partial A$ folgendes bedeuten: Wir verlangen, dass der Normalenvektor $\nu(\gamma(t))$ im Randpunkt $\gamma(t)$ durch

$$\nu\Big(\gamma(t)\Big) := \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|_2}\begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

gegeben ist. Dann ist nämlich

$$\det\Big(\nu(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\Big) = \frac{\|\dot\gamma(t)\|_2^2}{\|\dot\gamma(t)\|_2} = \|\dot\gamma(t)\|_2 > 0,$$

d.h. die Normale $\nu(\gamma(t))$ und die Tangente $\dot{\gamma}(t)$ bilden ein Rechtssystem.

Sind alle Wege γ_j so orientiert, und überlappen sich zwei Bereiche $\gamma_i((a_i,b_i))$ und $\gamma_j((a_j,b_j))$, so ist die zugehörige Parametertransformation

$$\varphi_{ij} : U_{ij} := \gamma_j^{-1}\Big(\gamma_i((a_i,b_i))\Big) \to \gamma_i^{-1}\Big(\gamma_j((a_j,b_j))\Big) =: U_{ji}$$

streng monoton wachsend. Wegen $\gamma_j \circ \varphi_{ij} = \gamma_i$ ist nämlich

$$\gamma_i'(t) = (\gamma_j \circ \varphi_{ij})'(t) = \gamma_j'\Big(\varphi_{ij}(t)\Big)\varphi_{ij}'(t),$$

und da γ_i' und γ_j' wegen unserer Wahl (5.6) in die gleiche Richtung zeigen, ist $\varphi_{ij}'(t) > 0$. Für jede stetige Pfaffsche Form w auf einer offenen Umgebung von A ist daher

$$\int_{\gamma_j \circ \varphi_{ij}} w = \int_{\gamma i} w.$$

Wir definieren nun wie in Kapitel 4

$$\int_{\partial A} w := \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \big\langle w(\gamma_j(t)), \gamma_j'(t)\big\rangle dt,$$

wobei die Intervalle $I_j \subseteq (a_j,b_j)$ so gewählt sind, dass $\partial A = \cup_{j=1}^k \gamma_j(I_j)$ und dass die Kurven $\gamma_j(I_j), j = 1,\ldots,k$, paarweise disjunkt sind. Ähnlich wie in Lemma 4.8 sieht man ein, dass dieses Integral nicht von den gewählten Wegen γ_j bzw. Mengen I_j abhängt.

Satz 5.13 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ gilt dann*

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_2 = \int_{\partial A} F_1 dx_2 - F_2 dx_1.$$

Beweis Wegen des Gaußschen Integralsatzes ist noch zu zeigen, dass

$$\int_{\partial A} F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS_{\partial A}(x). \tag{5.7}$$

Dazu verwenden wir eine Karte $\gamma : (a,b) \to \partial A$, wie wir sie oben diskutiert haben, und berechnen die beiden Integrale. Zunächst ist

$$\int_\gamma F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\Big)dt$$

das Integral auf der linken Seite. Wegen (5.6) ist der Integrand des zugehörigen Teiles des rechten Integrals

$$\int_{\gamma((a,b))} \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle dS_{\partial A}(x) = \int_a^b \big\langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t))\big\rangle \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
\Big\langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t))\Big\rangle \|\dot{\gamma}(t)\|_2 &= \left\langle F(\gamma(t)), \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t).
\end{aligned}$$

Da beide Integrale übereinstimmen, folgt (5.7) und die Behauptung. ■

5.4 Der Stokessche Integralsatz im Raum

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir einen einfachen Spezialfall des allgemeinen Stokeschen Satzes. In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum zu berechnen. Wir wollen zunächst diese Begriffe präzisieren. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Sei nun $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist $G := \varphi(A) \subseteq M$ eine kompakte Menge, die von der Kurve $\partial G = \varphi(\partial A)$ berandet wird. Wir definieren *den Fluss eines stetigen Vektorfeldes F durch die Kurve ∂G* als das Integral

$$\int_G \Big\langle F(x), \nu(x)\Big\rangle dS_M(x), \tag{5.8}$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(p), \nu(\varphi(p))\Big) > 0$$

gilt. Man beachte, dass wir dem anschaulichen Konzept des Flusses eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum dadurch einen mathematischen Sinn gegeben haben, indem wir “in diese Kurve eine Fläche $G = \varphi(A)$ eingespannt” haben und den Fluss durch (5.8), also als “Fluss durch eine Fläche” definiert haben.

Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (5.8) tatsächlich nur von der Randkurve ∂G abhängt, und stellen das Integral (5.8) als Kurvenintegral über diesem Rand dar.

Zur Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot} F : U \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation* von F, durch

$$\operatorname{rot} F = \det\begin{pmatrix} e_1 & \dfrac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial x_2} & - & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} & - & \dfrac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & - & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(wobei die Determinantenschreibweise nur symbolisch zu verstehen ist).

Satz 5.14 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei $G \subseteq \varphi(U)$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von G, so gilt (mit $M := \varphi(U)$)*

$$\int_G \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle dS_M = \int_{\partial G} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3.$$

Beweis Wir bezeichnen die Koordinaten in U mit $u = (u_1, u_2)$. In Beispiel 2 aus Abschnitt 5.1 haben wir gesehen, dass

$$\nu\Big(\varphi(u)\Big) = \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2},$$

wobei

$$X_1(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_2(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Die Oberfläche des von den Vektoren $X_1(u)$ und $X_2(u)$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $\|X_1(u) \times X_2(u)\|$, so dass wir für das Oberflächenmaß S_M auf $M = \varphi(U)$ die Formel

$$dS_M(u) = \|X_1(u) \times X_2(u)\| d\lambda_2(u)$$

erhalten. Hiermit ergibt sich für das Oberflächenintegral (mit $A := \varphi^{-1}(G)$)

$$\int_G \Big\langle (\operatorname{rot} F)(x), \nu(x) \Big\rangle dS_M(x) = \int_A \Big\langle (\operatorname{rot} F)(\varphi(u)), X_1(u) \times X_2(u) \Big\rangle d\lambda_2(u).$$

Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten der Stokesschen Integralformel linear von F abhängen. Wir können daher die Fälle, wo F nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.E.d.A. $F_2 = F_3 = 0$ an. Dann ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

und mit den Bezeichnungen $\partial_j\varphi_k := \frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}$ vereinfacht sich der Integrand des Oberflächenintegrals, geschrieben als Integral über A, zu

$$\begin{aligned}
&\langle \operatorname{rot} F, X_1 \times X_2\rangle = \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\partial_1\varphi_3\partial_2\varphi_1 - \partial_1\varphi_1\partial_2\varphi_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\partial_1\varphi_1\partial_2\varphi_2 - \partial_1\varphi_2\partial_2\varphi_1) \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\varphi_2\Big)\partial_2\varphi_1 - \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\varphi_2\Big)\partial_1\varphi_1 \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_1\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_1\varphi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_1\varphi_1\Big)\partial_2\varphi_1 \\
&\quad -\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\,\partial_2\varphi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\,\partial_2\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\,\partial_2\varphi_2\Big)\partial_1\varphi_1 \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\,.
\end{aligned}$$

Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite der Stokesschen Formel erhalten wir mit einer geeigneten Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \partial A$ des Randes von A

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} F_1 dx_1 &= \int_a^b F_1\Big((\varphi\circ\gamma)(t)\Big)(\varphi_1\circ\gamma)'(t)dt \\
&= \int_a^b F_1\Big((\varphi\circ\gamma)(t)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_1}\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_2}\,\gamma_2'(t)\Big)dt \\
&= \int_\gamma (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\,du_1 + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}\,du_2.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu die beiden Integranten dieses Wegintegrals als Komponenten eines Vektorfeldes H :

$$H_1 := (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}\,, \quad H_2 := -(F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} H &= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} - (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\Big\langle(\operatorname{rot} F)\circ\varphi, X_1\times X_2\Big\rangle = \operatorname{div} H.$$

Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial A} H_1 du_2 - H_2 du_1 = \int_A \operatorname{div} H d\lambda_2.$$

Setzen wir hier obige Formeln ein, erhalten wir den Stokesschen Satz. ∎