Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Steffen Roch

WS 2019/2020

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Grundlagen

Mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen haben Mathematiker und Physiker ein Werkzeug geschaffen, mit dem die zeitliche Entwicklung vieler Systeme in Natur und Gesellschaft beschrieben werden kann. Ein zeitabhängiges System, welches durch n reelle Parameter charakterisiert wird, wird zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ durch einen Vektor $y(t) \in \mathbb{R}^n$ modelliert. Die zeitliche Entwicklung des Systems wird dann durch den Weg $y : I \to \mathbb{R}^n$ beschrieben. Es ist in der Regel schwierig, diese Wege explizit anzugeben. Die Modellierung des Systems liefert aber oft eine Gleichung der Gestalt

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

oder allgemeiner

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right).$$

Dies sind *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen, und ihre Lösungen sind Funktionen. Das Wort *gewöhnlich* bezieht sich darauf, dass die betrachteten Funktionen nur von *einer* Veränderlichen abhängen. Gleichungen, deren Lösungen Funktionen mehrerer Veränderlicher sind und die partielle Ableitungen dieser Funktionen enthalten, heißen *partielle Differentialgleichungen*. Beispiele dafür sind die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$$

und die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2},$$

in denen die gesuchte Funktion y von der Zeit t und den räumlichen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ abhängt.

Als ergänzende Literatur zu diesem Skript kann dienen

- **Braun**: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen (sehr elementar; zahlreiche Beispiele),
- **Heuser**: Gewöhnliche Differentialgleichungen (sehr schönes Buch; zahlreiche Beispiele; viel zur Geschichte),
- **Forster**: Analysis II (knapp und präzise),

- **Aulbach**: Gewöhnliche Differentialgleichungen (breit angelegte Einführung),
- **Arnold**: Gewöhliche Differentialgleichungen (nicht ganz einfach),
- **Walter**: Gewöhnliche Differentialgleichungen,
- **Kamke**: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen (ein Klassiker; über 1500 konkrete Lösungen).

Daneben habe ich mich an den Vorlesungsskripten von Herrn Professor Neeb und Herrn Professor Haller-Dintelmann (zur Stabilität und zum Beweis des Satzes von Peano) orientiert.

Wir werden zunächst einige Beispiele kennenlernen und legen dann den allgemeinen Rahmen fest, in dem wir gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten werden. Anschließend wenden wir uns der Theorie zu und beschäftigen uns mit der Existenz und der Eindeutigkeit von Lösungen.

1.1 Beispiele

Die Traktrix (Schleppkurve). Dieses Problem geht auf Leibniz (1693) zurück. Im $\mathbb{R}^2$ zieht man an einem Punkt P an einer straff gespannten Schnur ZP der Länge a. Der Zugpunkt Z soll auf der positiven y-Achse fortrücken, und zu Beginn befinde sich P in $(a, 0)$ und Z in $(0, 0)$. Offenbar wird sich P auf die y-Achse zu bewegen. Wir beschreiben die Lage von $P = P(x, y)$ durch Angabe einer Funktion $y : (0, a] \to \mathbb{R}$ so, dass $P = P(x, y(x))$.

Die Geometrie der Problemstellung führt auf die folgende Bedingung für die Ableitung von y:

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind also die Stammfunktionen von

$$x \mapsto -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{auf } (0, a).$$

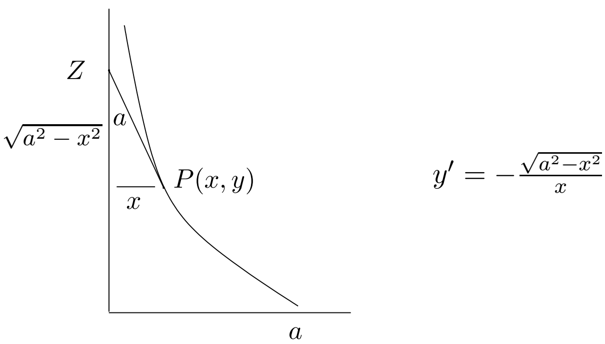


Bild 0

Mit der Substitution $x = a \sin t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, finden wir

$$\begin{aligned}
\int -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx &= -\int \frac{a \cos t}{a \sin t}(a \cos t)\, dt = -a \int \frac{1}{\sin t}\, dt + a \int \sin t\, dt \\
&= -a \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| - a \cos t + C \\
&= -a \ln \frac{1 - \cos t}{\sin t} - a \cos t + C \\
&= -a \ln \frac{a - a \cos t}{a \sin t} - a \cos t + C \\
&= -a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t} - \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} + C \\
&= -a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \\
&= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.
\end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen erfüllt nur eine die Anfangsbedingung $y(a) = 0$, nämlich die mit $C = 0$. Die Lösung unseres Problems ist also die Funktion

$$y : (0, a] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad \blacksquare$$

Exponentielles Wachstum. Eine Bakterienpopulation befindet sich in einer Nährflüssigkeit und habe zur Zeit t die Größe $P(t)$. Nach Ablauf der Zeit Δt hat sie sich um $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$ vermehrt. Eine vernünftige Annahme ist, dass ΔP für kleine Zeitspannen proportional zum Ausgangszustand $P(t)$ und zur Zeitspanne Δt ist:

$$\Delta P = aP(t)\Delta t \quad \text{mit } a > 0.$$

Wir lassen nun außer acht, dass P nur ganzzahlige Werte annimmt (Bakterien sind sehr klein und treten in sehr großer Anzahl auf) und nehmen sogar an, dass P differenzierbar ist. Der Grenzübergang $\Delta t \to 0$ in $\frac{\Delta P}{\Delta t} = aP(t)$ liefert dann die Differentialgleichung $P'(t) = aP(t)$, die (wie wir hoffen) das Wachstum der Bakterienpopulation beschreibt.

Die positiven Lösungen der Gleichung $P' = aP$ kann man wie folgt finden. Wir schreiben $P' = aP$ als $P'/P = a$ bzw. $(\ln P)' = a$ bzw. $Q' = a$ mit

$Q(t) := \ln P(t)$. Die Stammfunktionen von $Q'(t) = a$ können wir sofort angeben: $Q(t) = at + b$ mit $b \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt

$$P(t) = e^{Q(t)} = e^{at+b} = Ce^{at}$$

mit einer positiven Konstanten $C = e^b$. Kennt man den Wert $P_0 = P(t_0)$, so kann man C bestimmen. Aus $P_0 = Ce^{at_0}$ ergibt sich $C = P_0 e^{-at_0}$ und damit

$$P(t) = P_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Dieses Wachstumsmodell heißt *exponentielles Wachstum*. ■

Logistisches Wachstum. Das exponentielle Wachstum ist nur begrenzt realistisch. Wird eine Population sehr groß, so treten in der Regel wachstumshemmende Faktoren (begrenzte Ressourcen) auf. Kann etwa die Population eine Maximalgröße K nicht überschreiten, so ist es vernünftig anzunehmen, dass die Zuwachsrate $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ proportional zur Anzahl $P(t)$ und auch zum „verbleibenden Spielraum" $K - P(t)$ ist, was auf die Differentialgleichung

$$P'(t) = bP(t)(K - P(t)) = aP(t) - bP(t)^2$$

mit $a = bK$ führt. Die Differentialgleichung $P' = aP - bP^2$ wurde 1838 von Verhulst eingeführt und beschreibt das *logistische Wachstum*.

Sei $0 < P < K$. Zur Lösung der logistischen Differentialgleichung $P' = bP(K - P)$ betrachten wir die Funktion $Q := \frac{K-P}{P} = \frac{K}{P} - 1$. Für diese ist $Q' = -\frac{KP'}{P^2}$, so dass P genau dann eine Lösung von $P' = bP(K - P)$ ist, wenn

$$Q' = -\frac{K}{P^2}P' = -\frac{K}{P^2}bP(K-P) = -bK\frac{K-P}{P} = -bKQ,$$

d.h. Q genügt der Differentialgleichung für exponentielles Wachstum. Mit $Q_0 := Q(0)$ erhalten wir die eindeutige Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{-bKt}.$$

Ist $P_0 = P(0) \neq 0$, so ist $Q_0 = \frac{K}{P_0} - 1$, und wir erhalten mit $P = \frac{K}{Q+1}$

$$P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-bKt}}.$$

Hieraus lassen sich Informationen über das logistische Wachstum ableiten. Zum Beispiel ist für $bK > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K}{1 + (\frac{K}{P_0} - 1)e^{-bKt}} = K.$$

Die Größe der Population strebt also unabhängig von ihrer Anfangsgröße $P_0 > 0$ gegen K. ■

1.2 Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Definition 1.1 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung*. Unter einer* Lösung *von* (1.1) *verstehen wir eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit*

$$(x, \varphi(x)) \in G \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Ist f stetig und φ Lösung von (1.1), so ist φ offenbar stetig differenzierbar.

Oft betrachtet man die Komponenten $y_1, \ldots, y_n$ von y getrennt. Aus $y' = f(x, y)$ wird dann das *System von Differentialgleichungen erster Ordnung*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Es ist allerdings meist einfacher, sich y als Punkt und die Gleichung in der Form (1.1) zu denken.

Man betrachtet auch sogenannte *implizite Differentialgleichungen* der Gestalt

$$F(x, y, y') = 0,$$

wobei F eine Funktion auf einer Teilmenge des $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ist. Solche Gleichungen sind im allgemeinen wesentlich schwieriger zu behandeln als die *expliziten Differentialgleichungen* der Gestalt $y' = f(x, y)$ (die man natürlich mit $F(x, y, y') := y' - f(x, y)$ auch in impliziter Form schreiben kann). Wir befassen uns hier ausschließlich mit expliziten Gleichungen (auf die man im Prinzip mit dem Satz über implizite Funktionen alles zurückführen kann).

Die in Abschnitt 1.1 betrachteten Gleichungen ordnen sich in diesen Rahmen wie folgt ein. Für die Gleichung der Traktrix ist

$$G = (0, a] \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x, y) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{mit } a > 0,$$

für die Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums ist

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = ay \quad \text{mit } a > 0,$$

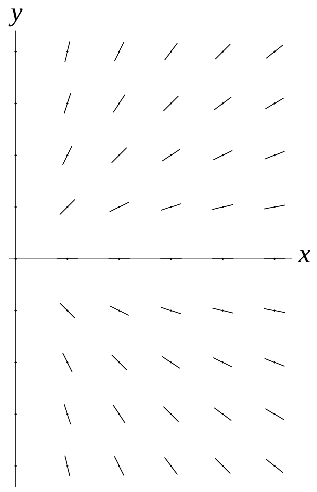
und für die logistische Differentialgleichung haben wir

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad f(x, y) = by(K - y) \quad \text{mit } b, K > 0.$$

Richtungsfelder. Für $n = 1$ kann man die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ geometrisch als *Richtungsfeld* interpretieren, indem man jedem Punkt $(x, y) \in G$ die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $(1, f(x, y))$ der Lösungskurve durch diesen Punkt zuordnet. Für

$$G = (0, \infty) \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f(x, y) = \frac{y}{x}$$

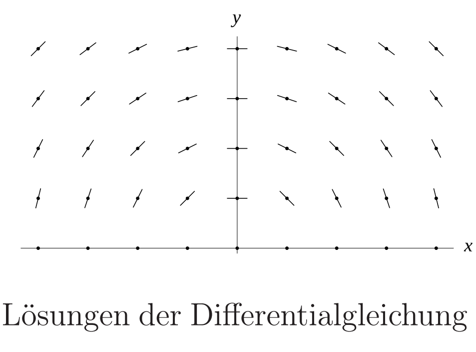
erhält man beispielsweise das folgende Richtungsfeld:



Das Bild suggeriert, dass Geraden durch den Nullpunkt, also Funktionen der Gestalt $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, die Differentialgleichung lösen. Das ist tatsächlich der Fall:

$$\varphi'(x) = a = \frac{\varphi(x)}{x} = f(x, \varphi(x)) \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Für $G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ sieht das Richtungsfeld wie folgt aus:



Tatsächlich sind Lösungen der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ durch „Halbkreiskurven“

$$\varphi : (-c, c) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{c - x^2} \quad \text{mit } c > 0$$

gegeben, denn

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{c-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{c-x^2}} = \frac{-x}{\varphi(x)} = f(x,\varphi(x)). \qquad \blacksquare$$

Definition 1.2 *Seien $n, N \geq 1$, $G \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^n$ und $f : G \to \mathbb{R}^N$. Dann heißt*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Eine* Lösung *von* (1.2) *ist eine n-mal differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit*

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G$$

und

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Zurückführung auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Man kann eine Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen. Sei eine Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{mit} \quad f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^n \supseteq G \to \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

gegeben. Wir betrachten das System der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wir können (1.4) zur Gleichung $y' = F(x, y)$ mit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ zusammenfassen, wenn wir

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^N)^n$$

setzen. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (1.3), so ist

$$\Phi : I \to (\mathbb{R}^N)^n, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

eine Lösung von (1.4), da ja

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) \\ \varphi^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \\ f(x, \Phi(x)) \end{pmatrix} = F(x, \Phi(x)).$$

Ist umgekehrt $\Phi : I \to \mathbb{R}^{nN}$ eine Lösung von (1.4), so ist $\varphi := \Phi_1 : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (1.3), denn es ist ja $\varphi' = \Phi_2$ und daher $\varphi'' = \Phi_2' = \Phi_3$ u.s.w., so dass φ n-mal differenzierbar ist mit

$$\varphi^{(n)}(x) = \Phi_n'(x) = f(x, \Phi(x)) = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Also löst φ tatsächlich (1.2).

Beispiel. Wir betrachten die eindimensionale Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{mit} \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die zugehörige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x, y, y') = -\omega^2 y$. Wir können diese Differentialgleichung auf das System erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\omega^2 y_1 \end{aligned}$$

bzw.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

zurückführen. ∎

Da man Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme erster Ordnung in dem Sinn zurückführen kann, dass man die entsprechenden Lösungen leicht ineinander umrechnen kann, dürfen wir uns für die allgemeine Theorie auf die Betrachtung von Systemen erster Ordnung beschränken.

Zurückführung auf eine Integralgleichung. Ist die Funktion f stetig und unabhängig von y, so reduziert sich (1.1) auf $y' = f(x)$. Die Lösungen dieser Gleichung haben nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Gestalt

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Auch im allgemeinen Fall (mit stetigem f) folgt aus $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, dass

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Nun tritt aber φ auf beiden Seiten der Gleichung auf, so dass diese *Integralgleichung* nicht unmittelbar zur Berechnung von φ genutzt werden kann. Genügt andererseits die stetige Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt, \tag{1.5}$$

so ist der Integrand auf der rechten Seite stetig. Also ist φ stetig differenzierbar. Durch Ableiten beider Seiten von (1.5) erhalten wir $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Somit sind die stetigen Lösungen von (1.5) genau die differenzierbaren Lösungen von (1.1). Die Übersetzung einer Differentialgleichung in eine Integralgleichung wird sich beim Beweis von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen als nützlich erweisen.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Definition 1.3 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir sagen, dass die Funktion f auf G*

(*a*) *einer* Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten L *genügt, wenn*

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_2 \leq L\|y - \tilde{y}\|_2 \quad \textit{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in G,$$

(*b*) *einer* lokalen Lipschitzbedingung *genügt, wenn jeder Punkt von G eine offene Umgebung $U \subseteq G$ besitzt, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitzbedingung genügt.*

Die Funktion f genügt also einer Lipschitzbedingung, wenn die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ für jedes x Lipschitzstetig ist und eine Lipschitzkonstante unabhängig von x gewählt werden kann.

Satz 1.4 *Sei $G \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine stetige Funktion, die bzgl. y stetig partiell differenzierbar ist, d.h. die Funktion*

$$d_2 f : G \to L(\mathbb{R}^n), \quad (x, y) \mapsto (d_2 f)(x, y)$$

sei stetig, wobei $(d_2 f)(x, y)$ für jedes x die Ableitung der Funktion $y \mapsto f(x, y)$ in y bezeichnet. Dann genügt f in G lokal einer Lipschitzbedingung.

Die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $(d_2 f)(x, y)$ ist gegeben durch

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)\right)_{i,j=1}^{n}.$$

Somit ist $d_2 f$ genau dann stetig, wenn alle Einträge dieser Matrix stetige Funktionen von G nach $\mathbb{R}$ sind.

Beweis von Satz 1.4. Sei $(a, b) \in G$. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass

$$V := \overline{U_r(a, b)} = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(u, v) - (a, b)\|_2 \le r\} \subseteq G.$$

Die Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt, und die Funktion $d_2 f : G \to L(\mathbb{R}^n)$ ist stetig. Wir versehen $L(\mathbb{R}^n)$ mit der durch die euklidische Norm induzierten Matrixnorm

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_2 \le 1\}.$$

Da stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, folgt die Existenz von

$$L := \max\{\|(d_2 f)(x, y)\| : (x, y) \in V\}.$$

Mit (x, y), $(x, \tilde{y}) \in V$ liegen auch alle Punkte $(x, y + t(\tilde{y} - y))$ für $t \in [0, 1]$ in V. Mit Satz 10.19 aus Analysis II folgt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_2 \le L\,\|y - \tilde{y}\|_2 . \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass die Konstante L vom Punkt (a, b) abhängt. Ist

$$\sup\{\|(d_2 f)(x, y)\| : (x, y) \in G\} < \infty$$

und ist G z. B. konvex, so kann L unabhängig von (a, b) gewählt werden, und f erfüllt eine globale Lipschitzbedingung.

Eine erste wichtige Konsequenz der Lipschitzbedingung für die Lösung von Differentialgleichungen ist die Eindeutigkeit der Lösung.

Satz 1.5 (Eindeutigkeitssatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die auf G einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Sind φ, $\psi : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, die in einem Punkt des Intervalls I übereinstimmen, so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst: Ist $a \in I$ und $\varphi(a) = \psi(a)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $|x - a| \leq \varepsilon$. Dazu integrieren wir beide Gleichungen $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ und erhalten wegen $\varphi(a) = \psi(a)$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x \big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\big)\, dt.$$

Da f einer lokalen Lipschitzbedingung genügt und φ und ψ stetig sind, gibt es ein $\delta_0 > 0$ und ein L so, dass

$$\|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|_2 \leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 \quad \text{für alle } t \in [a - \delta_0, a + \delta_0].$$

Seien $0 < \delta \leq \delta_0$ und $x \in [a - \delta, a + \delta]$. Mit der Dreiecksungleichung für Integrale erhalten wir

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|_2 \leq L \left| \int_a^x \|\varphi(t) - \psi(t)\|_2\, dt \right|.$$

Mit $M(\delta) := \max\{\|\varphi(t) - \psi(t)\|_2 : t \in [a - \delta, a + \delta]\}$ können wir weiter abschätzen:

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|_2 \leq L|x - a|M(\delta) \leq L\delta M(\delta).$$

Bilden wir noch auf der linken Seite das Maximum über $x \in [a - \delta, a + \delta]$, so folgt schließlich $M(\delta) \leq L\delta M(\delta)$. Wir wählen nun $\varepsilon := \delta \in (0, \delta_0]$ so klein, dass $L\delta < 1$. (Beachte: L hängt nur von δ_0, nicht von δ ab.) Dann folgt $M(\varepsilon) = 0$, d.h. φ und ψ stimmen auf $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ überein.

Nun zeigen wir, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ (für $x \leq a$ erfolgt der Beweis analog). Für $x = a$ ist nichts zu zeigen. Sei $x > a$ und

$$x_1 := \sup\{t \in [a, x] : \varphi|_{[a,t]} = \psi|_{[a,t]}\}.$$

Nach dem ersten Beweisschritt ist $x_1 > a$, und es ist $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$. Ist nämlich (t_n) eine Folge in $[a, x_1)$, die gegen x_1 konvergiert, so folgt

$$\varphi(x_1) = \lim \varphi(t_n) = \lim \psi(t_n) = \psi(x_1).$$

Falls nun $x = x_1$, so folgt $\varphi(x) = \psi(x)$, d.h. die Behauptung. Ist dagegen $a < x_1 < x$, so wenden wir die Überlegung aus dem ersten Beweisschritt auf den Punkt x_1 an Stelle von a an und finden ein $\varepsilon > 0$ so, dass φ und ψ auf $[x_1, x_1 + \varepsilon]$ übereinstimmen. Das widerspricht der Definition von x_1. ∎

Beispiel. Wir betrachten eine Differentialgleichung, deren Lösungen nicht eindeutig sind. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (\sqrt[3]{y})^2.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ ist die Nullfunktion $\varphi = 0$. Daneben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_a(x) := \frac{1}{27}(x-a)^3$ eine Lösung, denn

$$\varphi_a'(x) = \frac{1}{9}(x-a)^2 = \left(\frac{1}{3}(x-a)\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\varphi_a(x)}\right)^2.$$

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind nun φ und φ_a verschiedene Lösungen, die im Punkt a übereinstimmen: $\varphi(a) = \varphi_a(a) = 0$. Man kann aus den Lösungen φ_a noch weitere Lösungen konstruieren. So sind für $a < b$ auch die Funktionen

$$\varphi_{a,b}(x) := \begin{cases} \varphi_a(x) & \text{für} \quad x \le a \\ 0 & \text{für} \quad a < x \le b \\ \varphi_b(x) & \text{für} \quad b < x \end{cases}$$

stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$. Aus Satz 1.5 folgt, dass f nicht überall einer lokalen Lipschitzbedingung genügen kann. In der Tat ist die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \frac{|f(0,y) - f(0,0)|}{|y-0|} = \left|\frac{y^{2/3}}{y}\right| = |y^{-1/3}|$$

auf jeder Umgebung von 0 unbeschränkt. ∎

Satz 1.6 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) *Seien $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $r, R \in (0, \infty)$ und*

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \le r,\ \|y - y_0\|_2 \le R\}.$$

Weiter sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, und es seien $M, L \ge 0$ so, dass

$$\|f(x,y)\|_2 \le M \quad \textit{und} \quad \|f(x,y) - f(x,y')\|_2 \le L\|y - y'\|_2$$

für alle Punkte (x,y), $(x,y') \in G$. Schließlich seien $\varepsilon := \min\{r, R/M\}$ und I das Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Dann gilt:

(a) Auf I existiert eine eindeutige Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.

(b) Diese Lösung lässt sich wie folgt berechnen: Die durch

$$\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_0(x) := y_0$$

und

$$\varphi_{k+1} : I \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt$$

rekursiv definierte Funktionenfolge konvergiert auf I gleichmäßig gegen die Lösung φ.
(c) *Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} e^{L\varepsilon} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty.$$

Hierbei ist $\|f\|_\infty := \max\{\|f(t)\|_2 : t \in I\}$. Die angegebene Fehlerabschätzung lässt sich noch verbessern (vgl. Heuser). Als Startfunktion haben wir die einfachste Funktion gewählt, die die Anfangsbedingung erfüllt. Andere Startfunktionen sind möglich, solange sie die Voraussetzungen von Satz 1.7 (unten) erfüllen.

Wir haben bereits gesehen, dass die Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ gerade die stetigen Lösungen der Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{1.6}$$

sind. Wir definieren einen Operator $A : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ durch

$$(Ay)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{1.7}$$

und können dann die Integralgleichung (1.6) als *Fixpunktgleichung* $Ay = y$ betrachten. Das legt es nahe, zum Beweis von Satz 1.6 den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 12.1 aus Analysis II) heranzuziehen. Das geht, liefert aber etwas schlechtere Ergebnisse als im Satz angegeben (ε muss verkleinert werden). Besser geeignet ist die folgende Modifikation des Banachschen Fixpunktsatzes.

Satz 1.7 (Fixpunktsatz von Banach-Weissinger) *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und U eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von X. Weiter seien $a_n \geq 0$ Zahlen, für die die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergiert, und $A : U \to U$ sei eine Abbildung mit*

$$\|A^n u - A^n v\| \leq a_n \|u - v\| \quad \text{für alle } u, v \in U \text{ und alle } n \geq 1.$$

Dann besitzt A genau einen Fixpunkt $u \in U$ (d.h. einen Punkt u mit $Au = u$). Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge $(A^n u_0)_{n\geq 1}$ bei beliebig gewähltem Startvektor $u_0 \in U$. Schließlich gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_n\| \leq \left(\sum_{r=n}^\infty a_r \right) \|u_1 - u_0\| \quad \text{mit } u_n := A^n u_0.$$

Ist A eine Kontraktion, d.h. gibt es ein $\lambda < 1$ mit $\|Au - Av\| \le \lambda\|u - v\|$ für alle $u, v \in U$, so ist

$$\|A^2u - A^2v\| \le \lambda\|Au - Av\| \le \lambda^2\|u - v\|,$$

d.h. man kann $a_1 = \lambda$, $a_2 = \lambda^2$ und allgemein $a_n = \lambda^n$ wählen. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ konvergiert, ist der Banachsche Fixpunktsatz aus Analysis II ein Spezialfall von Satz 1.7.

Beweis von Satz 1.7. Sei $u_0 \in U$ und $u_n := A^n u_0$. Dann ist

$$\|u_{n+1} - u_n\| = \|A^n u_1 - A^n u_0\| \le a_n\|u_1 - u_0\|$$

und folglich für $k \ge 1$

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+k} - u_n\| \\
&\quad \le \|u_{n+k} - u_{n+k-1}\| + \|u_{n+k-1} - u_{n+k-2}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \\
&\quad \le (a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_n)\|u_1 - u_0\|. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Das Cauchykriterium für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zeigt, dass $a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_n$ für jedes k kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wird, wenn nur n hinreichend groß ist. Das zeigt zusammen mit (1.8), dass $(u_n)_{n\ge1}$ eine Cauchyfolge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge gegen ein Element u, und u gehört zu U, da alle u_n in U liegen und U abgeschlossen ist. Dieses Element u ist ein Fixpunkt von A: Wegen

$$\|u_{n+1} - Au\| = \|Au_n - Au\| \le a_1\|u_n - u\|$$

folgt nämlich $\lim u_n = Au$. Da aber auch $\lim u_n = u$ ist, muss $Au = u$ sein. Ist nun $v \in U$ ein weiterer Fixpunkt von A, so ist

$$\|u - v\| = \|Au - Av\| = \cdots = \|A^n u - A^n v\| \le a_n\|u - v\|. \qquad (1.9)$$

Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen ist $\lim a_n = 0$. Aus (1.9) folgt also $\|u - v\| = 0$ bzw. $u = v$. Schließlich folgt die angegebene Fehlerabschätzung, wenn wir k in (1.8) gegen ∞ streben lassen. ■

Beweis von Satz 1.6. Wir wählen $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm $\|.\|_\infty$,

$$U := \{y \in X : \|y - \varphi_0\|_\infty \le R\}$$

und A wie in (1.7). Dann ist X ein Banachraum (Satz 9.11 aus Analysis II) und $U \subseteq X$ ist abgeschlossen. Weiter bildet A die Menge U in U ab. Für $y \in U$ und $x \in I$ ist nämlich $(x, y(x)) \in G$ und daher

$$\|(Ay)(x) - y_0\|_2 = \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right\|_2 \le M|x - x_0| \le \varepsilon M \le R.$$

Wir überlegen uns noch die Existenz von Zahlen a_n mit den angegebenen Eigenschaften. Zunächst ist für $x \in I$ und $u, v \in U$

$$\begin{aligned}
\|(Au)(x) - (Av)(x)\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, v(t))\, dt \right\|_2 \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|u(t) - v(t)\|_2\, dt \right| \leq L\|u - v\|_\infty |x - x_0|.
\end{aligned}$$

Ähnlich findet man

$$\begin{aligned}
\|(A^2u)(x) - (A^2v)(x)\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, (Au)(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, (Av)(t))\, dt \right\|_2 \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \|(Au)(t) - (Av)(t)\|_2\, dt \right| \\
&\leq L^2 \|u - v\|_\infty \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| \\
&= L^2 \|u - v\|_\infty \frac{|x - x_0|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Wir fahren so fort, erhalten induktiv

$$\|(A^n u)(x) - (A^n v)(x)\|_2 \leq L^n \|u - v\|_\infty \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

und schließlich wegen $|x - x_0| \leq \varepsilon$

$$\|A^n u - A^n v\|_\infty \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} \|u - v\|_\infty.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}$ konvergiert (ihre Summe ist $e^{\varepsilon L} - 1$), können wir $a_n := \frac{(\varepsilon L)^n}{n!}$ setzen, und alle Voraussetzungen aus dem Fixpunktsatz von Banach-Weissinger sind erfüllt. Dieser Satz liefert nun sofort die Aussagen (a) und (b) von Satz 1.6 sowie die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\varepsilon L)^k}{k!} \|\varphi_1 - \varphi_0\|_\infty.$$

Schließlich bekommen wir wegen

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\varepsilon L)^k}{k!} = \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} (\varepsilon L)^k \leq \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon L)^k}{k!} = \frac{(\varepsilon L)^n}{n!} e^{\varepsilon L}$$

die in Aussage (c) angegebene Fehlerabschätzung. ∎

Das durch $\varphi_0 := y_0$ und

$$\varphi_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_k(t))\, dt$$

definierte Iterationsverfahren heißt *Picard-Iteration*. Satz 1.6 gibt hinreichende Bedingungen für die Konvergenz dieses Verfahrens an. Da diese Bedingungen in der Regel nicht notwendig sind, konvergiert dieses Verfahren oft auch dann, wenn sie nicht erfüllt sind.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 2xy$ in $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und suchen eine Lösung φ mit $\varphi(0) = c$. Der Iterationsoperator A ist

$$(Ay)(x) = c + \int_0^x 2t\, y(t)\, dt.$$

Wir starten mit der konstanten Funktion $\varphi_0(x) := c$ und finden

$$\varphi_1(x) := (A\varphi_0)(x) = c + \int_0^x 2tc\, dt = c(1 + x^2),$$

$$\varphi_2(x) := (A\varphi_1)(x) = c + \int_0^x 2tc(1 + t^2)\, dt = c(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4).$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_k(x) = c(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!}).$$

Damit erhalten wir

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = ce^{x^2}.$$

Tatsächlich gilt für diese Funktion $\varphi(0) = c$ und $\varphi'(x) = 2cxe^{x^2} = 2x\varphi(x)$. Die Funktion φ löst also die gegebene Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ (während Satz 1.6 zunächst nur die Lösbarkeit auf einem Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ garantiert). ■

Satz 1.8 (Lokaler Existenzsatz von Picard-Lindelöf) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ so, dass die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung auf dem Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ hat.*

Beweis. Da G offen ist, findet man $r, R > 0$ so, dass die Menge

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r,\ \|y - y_0\|_2 \leq R\}$$

in G enthalten ist und dass f auf V einer Lipschitzbedingung genügt. Da weiter V kompakt und f stetig ist, gibt es ein $M > 0$ so, dass $\|f(x, y)\|_2 \leq M$ für alle $(x, y) \in V$. Wir setzen $\varepsilon := \min\{r, R/M\}$ und $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Dann gibt es nach Satz 1.6 auf I genau eine Lösung φ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. ■

Beispiel. Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(x, y) = 1 + y^2$. Die Lösung der entsprechenden Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ mit $y(x_0) = y_0 = \tan c$ und vorgegebenem $c \in (-\pi/2, \pi/2)$ hat die Gestalt

$$y(x) = \tan(x - x_0 + c)$$

(Nachrechnen!). An diesem Beispiel wird deutlich, dass sich die Lösung mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nicht über das Intervall

$$(-\frac{\pi}{2} + x_0 - c, \frac{\pi}{2} + x_0 - c)$$

hinaus fortsetzen lässt. In diesem Sinn gibt es keinen globalen Existenzsatz, der auf ganz $\mathbb{R}$ die Existenz einer Lösung garantieren könnte. ■

Definition 1.9 *Eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf der Menge G mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ heißt* maximal, *wenn I ein offenes Intervall ist und für alle anderen Lösungen*

$$\psi : J \to \mathbb{R}^n \quad \textit{mit}\ \psi(x_0) = y_0$$

auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ die Beziehung $J \subseteq I$ gilt.

Satz 1.10 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ genau eine maximale Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.*

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Sind I_j, $j \in \{1, 2\}$, offene Intervalle, die x_0 enthalten, und sind die Funktionen $\varphi_j : I_j \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi_j(x_0) = y_0$, so ist $I_1 \cap I_2$ ein offenes Intervall, das x_0 enthält. Nach Satz 1.5 stimmen die Funktionen $\varphi_1|_{I_1 \cap I_2}$ und $\varphi_2|_{I_1 \cap I_2}$ überein. Daher wird durch

$$\varphi : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ falls } x \in I_1 \\ \varphi_2(x) \text{ falls } x \in I_2 \end{cases}$$

eine Funktion definiert, die auf $I_1 \cup I_2$ Lösung von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

Nun zum eigentlichen Beweis: Sei I die Vereinigung aller offenen Intervalle J, die x_0 enthalten und für die es eine Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$ gibt. Die Menge I ist als Vereinigung offener Mengen wieder offen. Sind weiter $a, b \in I$, so finden wir offene Intervalle J_1, J_2 mit $x_0 \in J_1 \cap J_2$ und $a \in J_1$ sowie $b \in J_2$. Folglich ist $[a, b] \subseteq J_1 \cup J_2 \subseteq I$, und I ist ein offenes Intervall, das x_0 enthält.

Sei nun $x \in I$. Wir wählen ein offenes Intervall J, das x_0 und x enthält und auf dem eine Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\psi(x_0) = y_0$ existiert, und wir definieren $\varphi(x) := \psi(x)$. In der Vorüberlegung haben wir gesehen, dass der Wert $\varphi(x)$ nicht von der konkreten Wahl von J abhängt. Für φ haben wir $(x, \varphi(x)) = (x, \psi(x)) \in G$, und da φ in einer offenen Umgebung eines jeden Punktes $x_1 \in I$ mit einer Lösung $\psi_1 : J_1 \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\psi_1(x_0) = y_0$ übereinstimmt, ist auch φ eine Lösung. Die Maximalität dieser Lösung folgt sofort aus der Konstruktion. ■

Für Gleichungen höherer Ordnung finden wir durch Reduktion auf ein System erster Ordnung sofort den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 1.11 *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^N)^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitzbedingung genügt. Sind φ, $\psi : I \to \mathbb{R}^N$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{1.10}$$

und gilt $\varphi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(a)$ für einen Punkt $a \in I$ und alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, so ist $\varphi = \psi$. Ist umgekehrt ein Punkt $(a, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in G$ gegeben, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und genau eine Lösung $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}^N$ der Differentialgleichung (1.10) *mit*

$$\varphi(a) = c_0, \ \varphi'(a) = c_1, \ \ldots, \ \varphi^{(n-1)}(a) = c_{n-1}.$$

Um die Lösung eindeutig festzulegen, genügt es also nicht, den Wert von φ an der Stelle a vorzuschreiben; vielmehr muss man auch die Werte aller Ableitungen von φ bis zur Ordnung $n - 1$ in diesem Punkt vorgeben. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die die Bewegung eines Teilchens beschreiben, bedeutet dies, dass die Bewegung durch den Ort und die Geschwindigkeit des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt eindeutig festgelegt ist.

Beispiel. Für die Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{auf } G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \text{ mit } \omega \neq 0$$

ist für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

eine Lösung mit $\varphi(0) = a$ und $\varphi'(0) = \omega b$. Aus Satz 1.11 folgt, dass φ die einzige Lösung mit diesen Anfangsbedingungen ist. ■

Der folgende Satz zeigt, dass man bereits für *stetige* Funktionen f die lokale Lösbarkeit der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ garantieren kann. Die Eindeutigkeit der Lösung kann man unter dieser schwächeren Voraussetzung allerdings nicht mehr erwarten, wie wir aus dem Beispiel nach Satz 1.5 wissen.

Satz 1.12 (Lokaler Existenzsatz von Peano) *Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$.*

Für den Beweis übersetzt man $y' = f(x, y)$ wieder in eine Integralgleichung, die man als Fixpunktproblem auffassen kann. Man kann nun z.B. den Schauderschen Fixpunktsatz anstelle des Banachschen Fixpunktsatzes benutzen und benötigt außerdem ein Kriterium für die relative Kompaktheit von Mengen in $C(I)$. Einen solchen Beweis finden Sie z.B. in Aulbach, Satz 2.2.3. Falls am Ende der Vorlesung genügend Zeit bleibt, schauen wir uns einen Beweis des Satzes von Peano an, der Methoden aus der numerischen Approximation benutzt.

2 Elementare Lösungsmethoden

Lösungen von Differentialgleichungen lassen sich nicht immer explizit bestimmen. In diesem Kapitel betrachten wir einige spezielle Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungen auf elementarem Weg bestimmt werden können.

2.1 Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ sowie $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{in} \quad G = I \times J \tag{2.1}$$

heißt *Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.*

Satz 2.1 *Seien I, J, f und g wie oben, und sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir definieren Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $H : J \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \textit{und} \quad H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt.$$

Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ der Gleichung (2.1) *mit $\varphi(x_0) = y_0$. Diese Lösung genügt der Gleichung*

$$H(\varphi(x)) = F(x) \quad \textit{für alle } x \in I'. \tag{2.2}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst: Ist $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2.1) mit $\varphi(x_0) = y_0$, so gilt (2.2). Wegen $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$ ist nämlich

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x),$$

und die Substitution $u = \varphi(t)$ im linken Integral liefert

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{du}{g(u)} = H(\varphi(x)).$$

Wir zeigen weiter: Wenn eine Lösung von (2.2) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt. Wegen $H'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ ist H nämlich streng monoton auf J und besitzt daher eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $U : H(J) \to J$. Aus (2.2) folgt nun

$$\varphi(x) = U(F(x)) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Wenn also eine Lösung von (2.1) existiert, so ist sie eindeutig bestimmt. Schließlich zeigen wir noch die Existenz einer Lösung. Dazu definieren wir

$$\varphi(x) := U(F(x)) \quad \text{für } x \in I'.$$

Die Funktion φ ist stetig differenzierbar, da F, H und U stetig differenzierbar sind, und aus $H(\varphi(x)) = F(x)$ folgt

$$f(x) = F'(x) = H'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}.$$

Also ist $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$, und wegen $H(y_0) = 0$ ist auch

$$\varphi(x_0) = U(F(x_0)) = U(0) = y_0. \qquad \blacksquare$$

Beispiel A. Für die Differentialgleichung

$$y' = y^2 \quad \text{auf } G := \mathbb{R}^2$$

ist eine maximale Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) gesucht. Ist $c = 0$, so ist die eindeutige (und offenbar maximale) Lösung durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ gegeben.

Sei nun $c > 0$. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit $\varphi(0) = c$, so ist $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in I$. Andernfalls gäbe es nämlich nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in I$ mit $\varphi(x_0) = 0$. Nach dem Eindeutigkeitssatz wäre φ dann die Nullfunktion, da diese die Gleichung $y' = y^2$ löst und φ in x_0 mit ihr übereinstimmt. Da dies nicht mit $\varphi(0) = c > 0$ vereinbar ist, ist tatsächlich $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in I$. Wir dürfen uns daher auf das kleinere Gebiet $G_1 := \mathbb{R} \times (0, \infty) \subseteq G$ beschränken. Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.1 ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto y^2.$$

Wir erhalten

$$F(x) = \int_0^x 1\,dt = x \quad \text{und} \quad H(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y}.$$

Dann gilt $H((0, \infty)) = (-\infty, 1/c)$. Also ist $I' := (-\infty, 1/c)$ das maximale Intervall mit $F(I') \subseteq H((0, \infty))$. Für die Lösung φ auf I' gilt nach (2.2)

$$H(\varphi(x)) = \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} \overset{!}{=} x = F(x),$$

d.h. es ist

$$\varphi(x) = \frac{c}{1-cx} \quad \text{auf} \quad (-\infty, 1/c).$$

Analog ergeben sich für $c < 0$ die Lösungen

$$\varphi(x) = \frac{c}{1-cx} \quad \text{auf} \quad (1/c, \infty).$$ ■

Beispiel B. Für die Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{auf} \quad G := \mathbb{R}^2$$

suchen wir eine Lösung $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. In diesem Fall ist $F(x) = x - x_0$ und

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan y - \arctan y_0.$$

Aus

$$H(\varphi(x)) = \arctan \varphi(x) - \arctan y_0 \stackrel{!}{=} x - x_0 = F(x)$$

erhalten wir mit $c := \arctan y_0$ die Lösung

$$\varphi(x) = \tan(x - x_0 + c)$$

(vgl. das Beispiel vor Definition 1.9). ■

2.2 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{2.3}$$

eine *lineare Differentialgleichung erster Ordnung*. Das Wort *linear* lässt sich so verstehen: Erklärt man einen linearen Operator A auf dem linearen Raum der differenzierbaren Funktionen auf I durch $Ay := y' - ay$, so kann man (2.3) schreiben als $Ay = b$, und der Operator A ist *linear*, d.h. für differenzierbare Funktionen y_1 und y_2 und reelle Zahlen c_1, c_2 gilt

$$\begin{aligned} A(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)' - a(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1' - ay_1) + c_2(y_2' - ay_2) \\ &= c_1Ay_1 + c_2Ay_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.3) heißt *homogen*, wenn b die Nullfunktion ist, und sonst *inhomogen*. Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung

$$y' = a(x)y \tag{2.4}$$

(die eine Gleichung in getrennten Variablen ist).

Satz 2.2 *Seien $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung* (2.4) *mit $\varphi(x_0) = c$. Diese ist gegeben durch*

$$\varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right).$$

Beweis. Man rechnet sofort nach, dass $\varphi(x_0) = c$ und

$$\varphi'(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \cdot a(x) = a(x)\varphi(x),$$

d.h. φ löst (2.4) mit der angegebenen Anfangsbedingung. Da für $f(x,y) := a(x)y$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x) = a(x)$ stetig ist, genügt f lokal einer Lipschitzbedingung (Satz 1.4). Somit ist die Lösung eindeutig bestimmt. ■

Beispiel C. Die Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = 2kxy$ mit $k \in \mathbb{R}$ und der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$ haben die Gestalt

$$\varphi(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^{x} 2kt\,dt\right) = c\,\mathrm{e}^{k(x^2 - x_0^2)}.$$ ■

Wir betrachten nun die *inhomogene* lineare Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Sei φ eine Lösung der homogenen Gleichung (2.4) mit $\varphi(x_0) = 1$. Dann ist $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, und jede Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich als $\psi(x) = u(x)\varphi(x)$ schreiben. Dabei ist $u(x) = \psi(x)/\varphi(x)$ eine zu bestimmende, auf dem Intervall I stetig differenzierbare Funktion. Wir suchen nach Bedingungen, die u erfüllen muss, damit ψ die inhomogene Gleichung löst. Zunächst gilt

$$\psi' = u'\varphi + u\varphi' = u'\varphi + ua\varphi = u'\varphi + a\psi.$$

Ein Vergleich mit der inhomogenen Gleichung $\psi' = a\psi + b$ zeigt, dass ψ genau dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn $u'\varphi = b$ gilt. Dann ist aber

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt + u(x_0).$$

Satz 2.3 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu allen $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{R}$ der Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit $\psi(x_0) = c$, nämlich*

$$\psi(x) = \varphi(x)\left(c + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) \quad \textit{mit} \quad \varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right).$$

Für den Beweis ist lediglich zu bemerken, dass $u(x_0) = \psi(x_0)/\varphi(x_0) = \psi(x_0) = c$. ■

Anmerkung 1. Das oben angewandte Verfahren heißt *Variation der Konstanten*. Aus den Lösungen $x \mapsto c\varphi(x)$ der homogenen Gleichung gewinnt man Lösungen ψ der inhomogenen Gleichung durch den Ansatz $\psi(x) = c(x)\varphi(x)$, d.h. indem man die Konstante c zu einer Funktion macht. ■

Anmerkung 2. Jede Lösung ψ der inhomogenen Gleichung $y' = ay + b$ ist von der Gestalt $\psi = c\varphi + \mu$ mit $c \in \mathbb{R}$, mit

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right) \quad \text{und} \quad \mu(x) = \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt.$$

Die Menge aller Funktionen $c\varphi$ mit $c \in \mathbb{R}$ ist gerade die Lösungsmenge der homogenen Gleichung, und μ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. In diesem Sinn setzt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zusammmen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Diesen Sachverhalt kennen Sie aus der linearen Algebra. Er gilt für alle linearen Gleichungen. ■

Beispiel D. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3 \quad \text{auf} \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R};$$

es ist also $a(x) = 2x$ und $b(x) = x^3$. Die zugehörige homogene Gleichung $y' = 2xy$ hat die Lösungen

$$y(x) = c\,\exp\left(\int_0^x 2t\,dt\right) = c\mathrm{e}^{x^2}.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = c$ ist nach Satz 2.3 gleich

$$\psi(x) = \mathrm{e}^{x^2}\left(c + \int_0^x t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right).$$

Wir berechnen das Integral mittels Substitution $s(t) = t^2$ und anschließender partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2}(2t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} s\mathrm{e}^{-s}ds = \frac{1}{2}\left(-s\,\mathrm{e}^{-s}\Big|_0^{x^2} + \int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-s}ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-s}\Big|_0^{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(-x^2\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}
\end{aligned}$$

und finden schließlich

$$\psi(x) = \left(c + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right). \qquad \blacksquare$$

2.3 Die Differentialgleichung $y' = f(y/x)$

Seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{auf} \quad G := \left\{(x,y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} : \frac{y}{x} \in I\right\} \tag{2.5}$$

(leider auch) eine *homogene Differentialgleichung*. Man verwechsele dies nicht mit den homogenen linearen Differentialgleichungen. Neben (2.5) betrachten wir noch die Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) \quad \text{für } (x,z) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times I. \tag{2.6}$$

Wir werden im nächsten Satz sehen, dass man die Lösung von (2.5) auf die Lösung von (2.6) zurückführen kann. Letztere gehört zu den bereits behandelten Typen: sie ist eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen.

Satz 2.4 *Seien $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Intervall und $(x_0, y_0) \in G$ ein Punkt mit $x_0 \in J$. Eine Funktion $\varphi : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung von* (2.5) *mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$, wenn die Funktion*

$$\psi : J \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x)/x$$

eine Lösung von (2.6) *mit der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$ ist.*

Beweis. Sei zunächst φ eine Lösung von (2.5). Dann ist

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f(\psi(x)) - \psi(x)\right). \end{aligned}$$

Also ist ψ Lösung von (2.6) mit den entsprechenden Anfangsbedingungen.

Ist umgekehrt ψ eine Lösung von (2.6), so ist

$$\varphi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) = \psi(x) + f(\psi(x)) - \psi(x) = f\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right),$$

d.h. φ ist Lösung von (2.5). $\blacksquare$

Man kann die Aussage von Satz 2.4 auch wie folgt formulieren: Die Gleichung (2.5) geht durch die Substitution $z = \frac{y}{x}$ in die Gleichung (2.6) über. Etwas salopp kann man rechnen: Aus $y = zx$ folgt $y' = z + xz'$, also geht $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ über in

$$z' = \frac{y' - z}{x} = \frac{1}{x}(f(z) - z).$$

Beispiel E. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Durch die Substitution $z := \frac{y}{x}$ geht sie über in die Gleichung

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2)$$

mit getrennten Variablen. Für die Lösung z dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0 := \frac{y_0}{x_0}$ gilt daher

$$\arctan z - \arctan z_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

d.h. es ist

$$z(x) = \tan\left(c + \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right) \quad \text{mit} \quad c = \arctan z_0.$$

Die ursprüngliche Gleichung wird somit gelöst durch

$$y(x) = x \, \tan\left(c + \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\right). \qquad \blacksquare$$

Variablensubstitutionen wie $z = y/x$ lassen sich oft bei der Lösung von Differentialgleichungen einsetzen.

2.4 Die Differentialgleichung $y'' = f(y)$

In der Physik begegnet uns die Differentialgleichung $y'' = f(y)$ als eindimensionale Bewegungsgleichung eines Punktes, der einer nur vom Ort abhängigen Kraft ausgesetzt ist. Wir schreiben daher (t, x) statt (x, y) und $\dot{x}$ statt x' und betrachten für ein Intervall I und eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f(x) \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times I. \tag{2.7}$$

Wir definieren eine Funktion $U : I \to \mathbb{R}$ durch

$$U(x) := -\int_a^x f(t)\,dt,$$

wobei $a \in I$ beliebig gewählt ist. Die Funktion U hat die physikalische Bedeutung einer potentiellen Energie. Die Gleichung (2.7) kann dann geschrieben werden als

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}(x). \tag{2.8}$$

Die Gesamtenergie des Massenpunktes zum Zeitpunkt t wird gegeben durch

$$E(t) := \frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2 + U(x(t)). \tag{2.9}$$

Für die Ableitung dieser Funktion ergibt sich

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\,\dot{x}(t) = \dot{x}(t)\left(\ddot{x}(t) + \frac{dU}{dx}(x(t))\right) = 0.$$

Also ist E eine konstante Funktion (Energieerhaltungssatz), und wir können E als reelle Zahl betrachten. Wegen (2.9) genügt die Bewegung dann der Differentialgleichung

$$(\dot{x}(t))^2 = 2(E - U(x(t))).$$

Ist $\dot{x} \geq 0$, so folgt hieraus

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - U(x(t)))},$$

während für $\dot{x} \leq 0$

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2(E - U(x(t)))}$$

ist (man beachte, dass $U(x(t)) \leq E$). Diese beiden Gleichungen sind aber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen. ∎

Beispiel F. Der *harmonische Oszillator* wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -kx \quad \text{mit} \quad k > 0.$$

Wir suchen eine Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = 0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$, wobei $v_0 > 0$. Mit den obigen Bezeichnungen erhalten wir

$$U(x) = \int_0^x kt\,dt = \frac{k}{2}x^2,$$

und aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}(t_0))^2 + U(x(t_0)) = \frac{1}{2}v_0^2.$$

Da wir eine Lösung in einer Umgebung von t_0 suchen und $\dot{x}(t_0) > 0$ vorausgesetzt war, genügt x der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{k}{2}x^2\right)} = \sqrt{v_0^2 - kx^2},$$

und die Bewegung verläuft im Intervall $\{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E\} = \left[-\frac{v_0}{\sqrt{k}}, \frac{v_0}{\sqrt{k}}\right]$. Zur Abkürzung setzen wir

$$A := \frac{v_0}{\sqrt{k}} \quad \text{und} \quad \omega := \sqrt{k}.$$

Die zu lösende Gleichung geht dann über in

$$\dot{x} = \sqrt{kA^2 - kx^2} = \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2},$$

und für $|x| < A$ finden wir mit Satz 2.1

$$\int_0^x \frac{1}{A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{y}{A}\right)^2}}\, dy = \int_{t_0}^t ds$$

bzw. $\frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x}{A} = t - t_0$ und schließlich

$$x(t) = A \sin(\omega(t - t_0)).$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur in einer Umgebung von t_0. Durch Einsetzen stellt man jedoch fest, dass diese Funktion die Differentialgleichung für alle $t \in \mathbb{R}$ löst. ■

3 Lineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir die allgemeine Theorie linearer Differentialgleichungen. Sie werden zahlreiche Parallelen zur Theorie linearer Gleichungssysteme feststellen, die bereits weiter oben angeklungen sind. Wir versehen den linearen Raum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ mit einer Operatornorm versehen. Die Stetigkeit einer Abbildung $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$ ist dann äquivalent zur Stetigkeit aller Einträge a_{ij} von A.

3.1 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition 3.1 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Abbildung. Dann heißt*

$$y' = A(x)y \tag{3.1}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung *bzw. ein* homogenes lineares Differentialgleichungssystem*. Ist $b : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, so heißt*

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{3.2}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung*, und* (3.1) *heißt die* zu (3.2) gehörende homogene Differentialgleichung*.*

Analog definiert man komplex-lineare Differentialgleichungen mit stetigen Funktionen $A : I \to L(\mathbb{C}^n)$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$. Wegen $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ lassen sich diese auf den reellen Fall zurückführen. Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 3.2 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Funktionen. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung*

$$y' = A(x)y + b(x) \quad \textit{mit} \quad \varphi(x_0) = y_0. \tag{3.3}$$

Bei linearen Gleichungen kann man also Lösungen auf dem gesamten Intervall I finden (globale Lösungen), was man für allgemeinere Gleichungen der Gestalt $y' = f(x, y)$ nicht erwarten kann.

Beweis. Man kann sich ähnlich wie im Beweis von Satz 1.10 klarmachen, dass es genügt, die Aussage auf jedem kompakten Intervall $J \subseteq I$ zu zeigen, welches x_0 enthält. Auf J erfüllt die Funktion

$$f : J \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad (x, y) \mapsto A(x)y + b(x)$$

eine Lipschitzbedingung. Für $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbb{K}^n$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\|_2 &= \|(A(x)y_1 + b(x)) - (A(x)y_2 + b(x))\|_2 \\ &= \|A(x)(y_1 - y_2)\|_2 \leq \|A(x)\| \, \|y_1 - y_2\|_2, \end{aligned}$$

und die stetige Funktion $x \mapsto \|A(x)\|$ nimmt auf der kompakten Menge J ihr Maximum L an. Wie im Beweis von Satz 1.6 findet man für den Operator

$$B : C(J) \to C(J), \quad (By)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} (A(t)y(t) + b(t)) \, dt$$

die Abschätzung

$$\|B^n u - B^n v\|_\infty \leq \frac{L^n |J|^n}{n!} \|u - v\|_\infty,$$

wobei $|J|$ für die Länge des Intervalles J steht. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(L|J|)^n}{n!}$ konvergiert, folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 1.6 mit dem Fixpunktsatz von Banach-Weissinger. ■

Man beachte auch, dass man die Lösung von (3.3) wieder durch Picard-Iteration gewinnen kann.

3.2 Die homogene lineare Differentialgleichung

Wir gehen nun genauer auf die Struktur der Lösungsmenge der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y$ ein.

Satz 3.3 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$ eine stetige Funktion. Es bezeichne L_h die Menge aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}^n$ der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$. Dann ist L_h ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und die folgenden Aussagen für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in L_h$ sind äquivalent:*
(a) die Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sind linear unabhängig,
(b) die Vektoren $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0) \in \mathbb{K}^n$ sind für ein $x_0 \in I$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.
(c) die Vektoren $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x) \in \mathbb{K}^n$ sind für jedes $x \in I$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass L_h ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Abbildungen $I \to \mathbb{K}^n$ ist. Offenbar ist die Nullfunktion eine Lösung der homogenen Gleichung. Weiter: sind $y, z \in L_h$, so ist $y' = Ay$ und $z' = Az$ und folglich

$$(y - z)' = y' - z' = Ay - Az = A(y - z),$$

d.h. $y - z \in L_h$. Schließlich ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $y \in L_h$ auch $(\lambda y)' = \lambda y' = \lambda Ay = A(\lambda y)$, d.h. $\lambda y \in L_h$.

Nun zeigen wir die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c). Die Implikation $(c) \Rightarrow (b)$ ist offensichtlich. Weiter: sind die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linear abhängig, so sind auch die Vektoren $\varphi_1(x_0), \dots, \varphi_m(x_0)$ linear abhängig. Das beweist die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$. Es verbleibt zu zeigen, dass $(a) \Rightarrow (c)$. Dazu seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in L_h$ linear unabhängig. Wäre (c) nicht erfüllt, so gäbe es ein $x_0 \in I$ und Zahlen $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{K}$, die nicht alle Null sind mit

$$c_1\varphi_1(x_0) + \cdots + c_m\varphi_m(x_0) = 0.$$

Wir setzen $\varphi := c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m$. Dann ist φ eine Lösung der homogenen Gleichung $A(x)y = y'$ mit $\varphi(x_0) = 0$. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 3.2 ist φ die Nullfunktion. Dies widerspricht aber der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

Schließlich zeigen wir noch, dass $\dim L_h = n$. Die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ zeigt, dass $\dim L_h \le \dim \mathbb{K}^n = n$. Für den Beweis der umgekehrten Ungleichung seien $e_1, \dots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{K}^n$. Nach Satz 3.2 gibt es Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_h$ mit $\varphi_j(x_0) = e_j$. Die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ zeigt die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Also ist $\dim L_h \ge n$. ■

Definition 3.4 *Unter einem* Lösungsfundamentalsystem *(oder auch einer* Integralbasis*) der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ versteht man eine Basis des Vektorraumes L_h ihrer Lösungen.*

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen von $y' = A(x)y$. Schreibt man

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

so ist $\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine $n \times n$-Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix},$$

deren Spalten die Lösungen φ_i sind. Die Zahl $(\det \Phi)(x)$ heißt *Wronski-Determinante von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in x*. Nach Satz 3.3 sind die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ genau dann linear unabhängig, wenn $(\det \Phi)(x_0) \ne 0$ für ein $x_0 \in I$. In diesem Fall ist $(\det \Phi)(x) \ne 0$ für alle $x \in I$, wieder nach Satz 3.3.

Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der Gleichung $y' = A(x)y$, so lässt sich jede Lösung $\varphi \in L_h$ schreiben als

$$\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{K}.$$

In Matrixschreibweise bedeutet das

$$\varphi = \Phi c \quad \text{mit} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Wählt man die φ_i so, dass $\varphi_i(x_0) = e_i$, so ist weiter $\varphi(x_0) = \Phi(x_0)c = c$, d.h. die Anwendung von Φ auf die rechte Seite der Anfangsbedingung liefert eine Lösung $\varphi := \Phi c$ von $y' = A(x)y$ mit $\varphi(x_0) = c$.

Schließlich ist $\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) = A\Phi$, d.h. Φ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$Y' = A(x)Y \quad \text{in} \quad G = I \times L(\mathbb{K}^n)$$

im Raum der $n \times n$-Matrizen.

Beispiel A. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -\omega y_2 \\ y_2' &= \omega y_1 \end{aligned}$$

mit $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 2$. Wir schreiben dieses System als

$$y' = A(x)y \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos\omega x \\ \sin\omega x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin\omega x \\ \cos\omega x \end{pmatrix}$$

Lösungen sind. Diese Lösungen sind linear unabhängig, denn für

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos\omega x & -\sin\omega x \\ \sin\omega x & \cos\omega x \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad \det\Phi(0) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

(und tatsächlich ist auch $\det\Phi(x) = (\cos\omega x)^2 + (\sin\omega x)^2 = 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). ■

3.3 Die inhomogene lineare Differentialgleichung

Wir beginnen wieder mit einer Beschreibung der Struktur der Lösungsmenge.

Satz 3.5 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to L(\mathbb{K}^n)$, $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetige Funktionen. Wir bezeichnen die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$ bzw. der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ mit L_h bzw. L_i. Dann gilt für jedes $\psi_0 \in L_i$ die Beziehung $L_i = \psi_0 + L_h$.*

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält man also durch Addition einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.

Beweis Sei ψ_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Für jedes $\varphi \in L_h$ ist dann

$$(\psi_0 + \varphi)' = \psi_0' + \varphi' = A\psi_0 + b + A\varphi = A(\psi_0 + \varphi) + b,$$

d.h. $\psi_0 + \varphi \in L_i$, woraus $\psi_0 + L_h \subseteq L_i$ folgt. Ist umgekehrt $\psi \in L_i$, so ist

$$(\psi - \psi_0)' = \psi' - \psi_0' = (A\psi + b) - (A\psi_0 + b) = A(\psi - \psi_0),$$

d.h. $\psi - \psi_0 \in L_h$ und $L_i \subseteq \psi_0 + L_h$. ■

Der folgende Satz liefert genau wie im Eindimensionalen (Satz 2.3) ein Verfahren zur Konstruktion der Lösungen von inhomogenen Gleichungen.

Satz 3.6 (Variation der Konstanten) *Es seien die Voraussetzungen wie in Satz* 3.5*. Dann gilt: Ist $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$, so erhält man eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$ durch den Ansatz $\psi(x) = \Phi(x)c(x)$. Dabei ist $c : I \to \mathbb{K}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $c'(x) = \Phi(x)^{-1}b(x)$, d.h.*

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1}b(t)\,dt.$$

Beweis Ist $c' = \Phi^{-1}b$, so folgt mit der Produktregel

$$\psi' = \Phi'c + \Phi c' = \Phi'c + \Phi\Phi^{-1}b = A\Phi c + b = A\psi + b,$$

also $\psi \in L_i$. ■

Beispiel B. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1 + x,$$

d.h. $y' = A(x)y + b(x)$ mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Nach Beispiel A bilden die Spalten von

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen Systems $y' = A(x)y$. Mit

$$\Phi(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(x)^{-1}b(x) = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$$

und Satz 3.6 folgt also

$$c(x) = c(0) + \int_0^x \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} dt.$$

Mit partieller Integration findet man

$$\begin{aligned} \int_0^x t \sin t \, dt &= -t \cos t \Big|_0^x + \int_0^x \cos t \, dt = -x \cos x + \sin x, \\ \int_0^x t \cos t \, dt &= t \sin t \Big|_0^x - \int_0^x \sin t \, dt = x \sin x + \cos x - 1, \end{aligned}$$

also

$$c(x) = c(0) + \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ x \sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung für $c(0) = \binom{0}{1}$ ist daher

$$\psi_0(x) = \Phi(x)c(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ x \sin x + \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \\ &= \Phi(x) \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \cos x + \sin x \\ x \sin x + \cos x \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. ■

3.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Wir übertragen nun die gewonnenen Resultate für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung auf lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Definition 3.7 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Dann heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.4}$$

eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Ist $b : I \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, so heißt*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.5}$$

eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, *und* (3.4) *heißt die* zugehörige homogene Gleichung.

Satz 3.8 *Mit den Bezeichnungen aus Definition* 3.7 *gilt:*

(a) *Die Menge L_h aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{K}$ der homogenen Differentialgleichung* (3.4) *bildet einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

(b) *Bezeichnet L_i die Menge aller Lösungen $\psi : I \to \mathbb{K}$ der inhomogenen Gleichung* (3.5)*, so gilt $L_i = \psi_0 + L_h$ für jedes $\psi_0 \in L_i$.*

(c) *Die Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der homogenen Gleichung* (3.4) *sind genau dann linear unabhängig über $\mathbb{K}$, wenn für ein (und dann für alle) $x \in I$ die Wronski-Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Beweis. Die Differentialgleichung (3.5) ist (vgl. Abschnitt 1.2) äquivalent zum inhomogenen linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= -a_0(x)y_0 - a_1(x)y_1 - \ldots - a_{n-1}(x)y_{n-1} + b(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei der Lösung $\varphi : I \to \mathbb{K}$ von (3.5) die Lösung

$$f = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} : I \mapsto \mathbb{K}^n$$

von (3.6) entspricht. Entsprechendes gilt für die homogenen Gleichungen. Damit folgt die Behauptung aus den Sätzen 3.3 und 3.5. ∎

Definition 3.9 *Eine Basis des Lösungsraumes L_h heißt* Lösungsfundamentalsystem.

Beispiel C Die Gleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \quad \text{auf } (0, \infty) \tag{3.7}$$

hat $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ als Lösungen (Nachrechnen!). Die zugehörige Wronski-Determinante ist

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} = \sqrt{x}/2 - \sqrt{x} = -\sqrt{x}/2 \neq 0$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Folglich bilden φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1 x + c_2\sqrt{x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ∎

Verfahren der Ordnungsreduktion. Wie findet man Lösungen von Differentialgleichungen wie (3.7)? Das im Folgenden beschriebene *Verfahren der Ordnungsreduktion nach d'Alambert* ist anwendbar, wenn *eine* Lösung der Gleichung bekannt ist (die man wie z.B. die Lösung $\varphi(x) = x$ von (3.7) durch Erraten finden kann).

Sei etwa φ eine bekannte Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3.8}$$

Wir suchen eine weitere Lösung ψ in der Form $\psi = \varphi u$ mit einer zu bestimmenden Funktion u. Dann ist

$$\psi' = \varphi' u + \varphi u' \quad \text{und} \quad \psi'' = \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u''$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\psi'' + a\psi' + b\psi &= \varphi'' u + 2\varphi' u' + \varphi u'' + a(\varphi' u + \varphi u') + b\varphi u \\
&= (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)u + \varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' \\
&= \varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u'.
\end{aligned}$$

Wir sehen: Ist $\varphi(x) \neq 0$ auf einem Intervall I, so löst ψ genau dann die Gleichung (3.8), wenn u die Gleichung

$$u'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + a\right) u' = 0 \tag{3.9}$$

löst. Nach der Substitution $u' = v$ geht (3.9) aber in eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung über, die wir in Abschnitt 2.2 gelöst haben. Fassen wir zusammen.

Satz 3.10 *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen. Weiter sei $\varphi : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung der Differentialgleichung* (3.8) *mit $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Ist u eine Lösung der Gleichung* (3.9)*, so ist auch $\psi(x) := \varphi(x)u(x)$ eine Lösung von* (3.8)*. Die Lösungen φ und ψ sind linear unabhängig, wenn die Funktion u nicht konstant ist.*

Ganz analog führt der Produktansatz $\psi := \varphi u$ auch zu einer Reduktion der Ordnung bei der allgemeineren Gleichung (3.4).

Beispiel D. Wir kennen (z.B. durch Erraten) die Lösung $\varphi(x) = x$ der Gleichung (3.7) auf $(0, \infty)$. Der Ansatz $\psi(x) = xu(x)$ liefert eine zu φ linear unabhängige Lösung von (3.7), wenn wir eine nichtkonstante Lösung von

$$u'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + a\right) u' = u'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right) u' = 0$$

finden. Sei $u' = v$. Die Gleichung

$$v' + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x}\right) v = v' + \frac{3}{2x} v = 0$$

hat nach Satz 2.2 die allgemeine Lösung

$$v(x) = c \exp\left(\int_1^x \left(-\frac{3}{2t}\right) dt\right) = c \exp\left(-\frac{3}{2} \ln x\right) = cx^{-3/2}.$$

Für $c = -\frac{1}{2}$ ist $u(x) = x^{-1/2}$ eine Stammfunktion von $v(x)$. Daher ist $\psi(x) = xu(x) = \sqrt{x}$ eine weitere, zu $\varphi(x) = x$ linear unabhängige Lösung. ■

4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir lernen nun eine Klasse von linearen Differentialgleichungen kennen, deren Lösungen man explizit beschreiben kann. Dazu benötigen wir die Matrixexponentialfunktion, die wir uns zunächst anschauen.

Auch in diesem Abschnitt bezeichne $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, $\|.\|_2$ sei die Euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ und $\|.\|$ die induzierte Operatornorm auf $L(\mathbb{K}^n)$. Die normierten linearen Räume $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ und $(L(\mathbb{K}^n), \|.\|)$ sind vollständig. Die identische Abbildung auf $\mathbb{K}^n$ bezeichnen wir mit I, und wir vereinbaren $A^0 := I$ für jede Matrix $A \in L(\mathbb{K}^n)$.

4.1 Die Exponentialfunktion für Matrizen

Sei $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A^n\|$ konvergiert, da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A\|^n = e^{\|A\|}$ eine konvergente Majorante ist. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ konvergiert also absolut. Da $(L(\mathbb{K}^n), \|.\|)$ vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ in diesem Raum. Wir nennen

$$\exp A := e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \tag{4.1}$$

die *Matrixexponentialfunktion*.

Satz 4.1 (*a*) *Die Reihe* (4.1) *konvergiert gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von* $L(\mathbb{K}^n)$.
(*b*) *Die Funktion* $\exp : L(\mathbb{K}^n) \to L(\mathbb{K}^n)$ *ist stetig.*
(*c*) *Es ist* $e^0 = I$, *und für* $AB = BA$ *ist* $e^A e^B = e^{A+B}$.
(*d*) *Für alle* $C \in GL(\mathbb{K}^n)$ *ist* $C^{-1}e^A C = e^{C^{-1}AC}$.
(*e*) *Für alle* $A \in L(\mathbb{K}^n)$ *ist* e^A *invertierbar und* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Beweis. (*a*) Sei B eine beschränkte Teilmenge von $L(\mathbb{K}^n)$ und $\|X\| \le M$ für alle $X \in B$. Dann gilt für alle $X \in B$

$$\left\| \frac{1}{n!}X^n \right\| \le \frac{1}{n!}\|X\|^n \le \frac{1}{n!}M^n.$$

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit

$$f_n : B \to L(\mathbb{K}^n), \quad X \mapsto \frac{1}{n!}X^n$$

ist auf B gleichmäßig konvergent, da

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sup_{X\in B}\|f_n(X)\|\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!} = e^M < \infty.$$

(b) Ist $B \subseteq L(\mathbb{K}^n)$ beschränkt, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Exponentialreihe und aus der Stetigkeit der Funktionen f_n die Stetigkeit von exp auf B. Da jeder Punkt $X_0 \in L(\mathbb{K}^n)$ eine beschränkte Umgebung besitzt, ist exp auf ganz $L(\mathbb{K}^n)$ stetig.

(c) Die Aussage $e^0 = I$ ist klar. Gilt $AB = BA$, so ist

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}.$$

Mit der Cauchyschen Produktformel erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\,\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^j}{j!} = e^Ae^B. \end{aligned}$$

(d) Für $A \in L(\mathbb{K}^n)$ und $C \in GL(\mathbb{K}^n)$ ist $C^{-1}A^nC = (C^{-1}AC)^n$, und aus der Stetigkeit der Matrixmultiplikation folgt

$$\begin{aligned} C^{-1}e^AC &= C^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)C = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}C^{-1}A^nC \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(C^{-1}AC)^n = e^{C^{-1}AC}. \end{aligned}$$

(e) Nach (c) ist $e^Ae^{-A} = I$. Also ist e^A invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. ■

Beispiel A. Für die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

ist $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}$ und daher $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$. ■

Beispiel B. Für die $n \times n$ Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{u.s.w.}$$

und schließlich $N^n = 0$. Man erhält hieraus für $t \in \mathbb{K}$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tN)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise hat man für

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{den Wert} \quad e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel C. Für Blockdiagonalmatrizen $A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & B_2^n \end{pmatrix} \quad \text{und daher} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 \\ 0 & e^{B_2} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel D. Für den Jordanblock

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ist $A = \lambda I + N$ mit N wie in Beispiel B. Wegen $(\lambda I)N = N(\lambda I)$ gilt

$$e^A = e^{\lambda I} e^N = e^{\lambda} e^N. \qquad \blacksquare$$

Die Berechnung von e^A ist also immer dann einfach, wenn A in Jordan-Normalform vorliegt, d.h. die folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_i ein Jordanblock wie in Beispiel D ist. Wegen Satz 4.1 (d) lässt sich der allgemeine Fall stets auf den Jordanfall zurückführen. Die vorherige Bestimmung der Jordan-Normalform ist aber nicht in jedem Fall erforderlich.

Beispiel E. Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für die Matrixexponentialfunktion haben wir die folgende Differenzierbarkeitseigenschaft.

Lemma 4.2 *Die Abbildung* $\exp : L(\mathbb{K}^n) \to L(\mathbb{K}^n)$ *ist in* $0 \in L(\mathbb{K}^n)$ *differenzierbar. Ihre Ableitung in diesem Punkt ist die identische Abbildung auf* $L(\mathbb{K}^n)$.

Beweis. Aus $\exp X = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ folgt

$$\|e^X - I - X\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \right\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X\|^n = e^{\|X\|} - 1 - \|X\|.$$

Wegen

$$\lim_{X \to 0} \frac{e^{\|X\|} - 1 - \|X\|}{\|X\|} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{1} = 0$$

ist $\lim_{X\to 0}\frac{\|e^X-I-X\|}{\|X\|}=0$, und wir erhalten

$$\exp X=\exp 0+X+r(X)\quad\text{mit}\quad\lim_{X\to 0}\frac{\|r(X)\|}{\|X\|}=0. \qquad\blacksquare$$

Sei nun $A\in L(\mathbb{K}^n)$. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi_A:\mathbb{R}\to L(\mathbb{K}^n),\quad t\mapsto\exp(tA).$$

Wegen Satz 4.1 (c) gilt

$$\Phi_A(s)\Phi_A(t)=\Phi_A(s+t)\quad\text{für alle } s,t\in\mathbb{R},$$

und aus Lemma 4.2 und der Kettenregel folgt $\Phi_A'(0)=\exp'(0)A=A$. Damit ist für $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi_A'(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_A(t+h)-\Phi_A(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_A(h)\Phi_A(t)-\Phi_A(t)}{h}\\&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_A(h)-I}{h}\right)\Phi_A(t)=\Phi_A'(0)\Phi_A(t)=A\Phi_A(t).\end{aligned}$$

Satz 4.3 *Sei $A\in L(\mathbb{K}^n)$. Dann bilden die Spalten von Φ_A ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung $y'=Ay$ mit konstanten Koeffizienten.*

Beweis. Wir haben soeben nachgerechnet, dass $\Phi_A'=A\Phi_A$. Folglich sind die Spalten von Φ_A Lösungen von $y'=Ay$. Diese Spalten sind linear unabhängig, da $\Phi_A(t)$ für jedes t invertierbar ist. $\blacksquare$

Mit dieser expliziten Darstellung der Lösung der homogenen Gleichung und Satz 3.6 über die Variation der Konstanten erhalten wir folgendes Resultat über die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Satz 4.4 *Ist $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $b:I\to\mathbb{K}^n$ stetig, so erhält man eine Lösung $\psi:I\to\mathbb{K}^n$ der inhomogenen Gleichung $y'=Ay+b$ durch den Ansatz $\psi(x)=e^{xA}c(x)$ mit*

$$c(x)=c(x_0)+\int_{x_0}^{x}e^{-tA}b(t)\,dt\quad\textit{mit } x_0\in I.$$

Damit ist

$$\psi(x)=e^{xA}c(x_0)+\int_{x_0}^{x}e^{(x-t)A}b(t)\,dt. \tag{4.2}$$

Beispiel. Gesucht ist die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y_1' = y_2 + 1, \quad y_2' = -y_1 \quad \text{mit} \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

bzw.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In Beispiel E aus Abschnitt 4.1 haben wir für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gefunden, dass

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Aus (4.2) erhalten wir mit $x_0 = 0$ und $c(x_0) = (1,\, 1)^T$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) & \sin(x-t) \\ -\sin(x-t) & \cos(x-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) \\ -\sin(x-t) \end{pmatrix} dt \\
&= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(x-t) \\ -\cos(x-t) \end{pmatrix} \Bigg|_0^x \\
&= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos x + 2\sin x \\ 2\cos x - \sin x - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Phasenporträts. Wir betrachten wieder homogene lineare Differentialgleichungen

$$y' = Ay \quad \text{mit } A \in GL(\mathbb{R}^2) \tag{4.3}$$

und wollen uns eine Vorstellung vom qualitativen Verhalten der Lösungen verschaffen. Dabei unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: *Die Matrix A ist reell diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.* Sind a_1, a_2 die zu diesen Eigenwerten gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren, so bilden die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} a_1, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} a_2$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (4.3). Es ist ja z.B.

$$\varphi_1'(x) = e^{\lambda_1 x}\lambda_1 a_1 = e^{\lambda_1 x} A a_1 = A e^{\lambda_1 x} a_1 = A\varphi_1(x).$$

Betrachten wir speziell die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(auf die sich der allgemeine Fall durch Rotation zurückführen lässt). Als Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 wählen wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die allgemeine Lösung φ von (4.3) gegeben ist durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Da es in der Regel nicht einfach ist, den Graphen der Lösungsfunktion zu veranschaulichen, versucht man, sich eine Vorstellung vom qualitativen Lösungsverhalten zu verschaffen, indem man (4.4) als Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ interpretiert. Solche Lösungskurven heißen auch *Phasenkurven* oder *Trajektorien* der Gleichung (4.3), und Diagramme, die mehrere solcher Trajektorien enthalten und so Aufschluss über das Lösungsverhalten geben, heißen *Phasenporträts*. Die Trajektorien werden durch Übertragen der üblichen Orientierung von $\mathbb{R}$ orientiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (z_1, z_2). Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

erhält man aus (4.4) für $c_1, c_2 > 0$ beispielsweise

$$z_2 = c_2 e^{\lambda_2 x} = c_2 (e^{\lambda_1 x})^{\lambda_2/\lambda_1} = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

mit einer Konstanten c. Durch Variation von c_1 und c_2 findet man das folgende Phasenporträt:

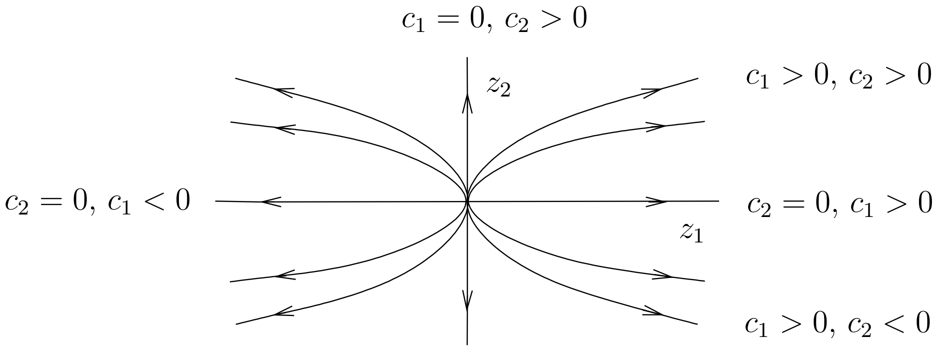


Bild Ia

während man für $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ bzw. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ die folgenden Phasenporträts erhält:

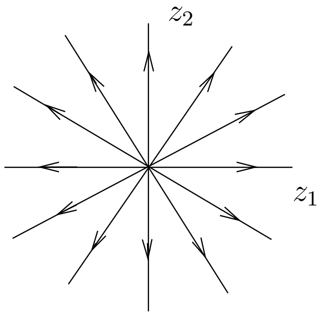


Bild Ib

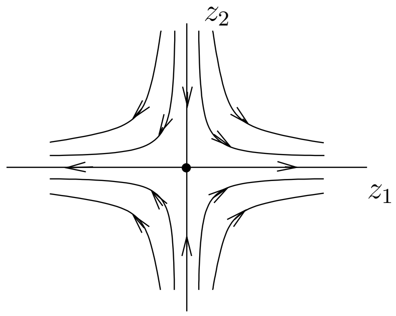


Bild Ic

Eine Vorzeichenumkehr bei λ_1 und λ_2 liefert ähnliche Phasenporträts mit umgekehrten Orientierungen.

Fall 2: *Die Matrix A besitzt keine reellen Eigenwerte.* Dann hat sie zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte, etwa $\lambda_1 = \mu + i\omega$ und $\lambda_2 = \mu - i\omega$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^2$ zugehörige Eigenvektoren, die wir ebenfalls in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$a_1 = b + ic \quad \text{und} \quad a_2 = b - ic \quad \text{mit } b, c \in \mathbb{R}^2.$$

Wie im Fall 1 erhält man die komplexen Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= e^{x\lambda_j} a_j = e^{x\mu}(e^{\pm ix\omega} \cdot b \pm ie^{\pm ix\omega} \cdot c) \\ &= e^{x\mu}(\cos x\omega \cdot b - \sin x\omega \cdot c) \pm ie^{x\mu}(\sin x\omega \cdot b + \cos x\omega \cdot c). \end{aligned}$$

Wir beachten, dass $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$, und gewinnen aus den komplexen Fundamentallösungen die reellen Fundamentallösungen

$$\psi_1 = \operatorname{Re}\varphi_1 = \operatorname{Re}\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \text{und} \quad \psi_2 = \operatorname{Im}\varphi_1 = -\operatorname{Im}\varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2i},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{x\mu}(\cos x\omega \cdot b - \sin x\omega \cdot c), \\ \psi_2(x) &= e^{x\mu}(\sin x\omega \cdot b + \cos x\omega \cdot c). \end{aligned}$$

Wir sehen uns die Trajektorien speziell für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}$ an. In diesem Fall ist mit $\lambda_1 = \mu + i\omega$ und $\lambda_2 = \mu - i\omega$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die reellen Fundamentallösungen sind

$$\psi_1(x) = e^{x\mu} \begin{pmatrix} \cos x\omega \\ -\sin x\omega \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = e^{x\mu} \begin{pmatrix} \sin x\omega \\ \cos x\omega \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Phasenporträts für $\mu = 0$ und $\omega > 0$ bzw. für $\mu, \omega > 0$

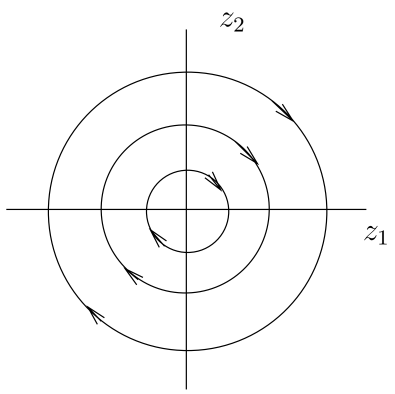


Bild IIa

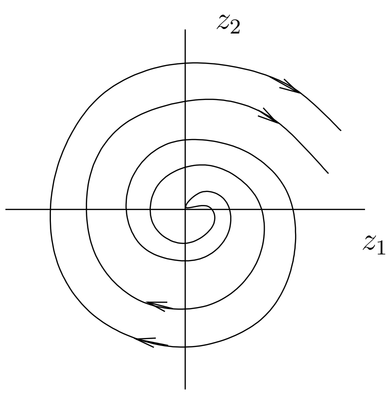


Bild IIb

Umkehr der Vorzeichen führt wieder zur Umkehr der Orientierungen.

Fall 3: *Die Matrix A hat einen reellen Eigenwert und einen eindimensionalen Eigenraum.* Dann hat A die Jordansche Normalform

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren Matrix $S \in L(\mathbb{R}^2)$. Die Substitution $\omega := S^{-1}y$ liefert die Differentialgleichung $\omega' = B\omega$. Wegen

$$\begin{aligned} e^{xB} &= \exp\left(x\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right) \\ &= e^{x\lambda} \exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{x\lambda} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bilden die Funktionen

$$\psi_1(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der Gleichung $\omega' = B\omega$ mit $\psi_1(0) = (1, 0)^T$ und $\psi_2(0) = (0, 1)^T$. Die Funktionen $\varphi_j := S\psi_j$ bilden dann ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung $y' = Ay$. Die Phasenporträts für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sehen für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda > 0$ wie folgt aus:

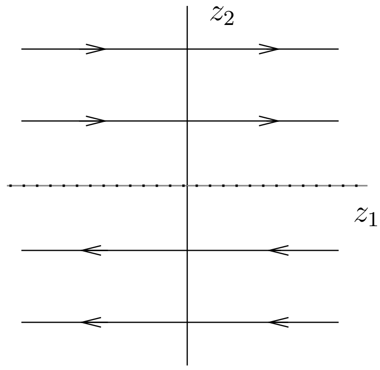


Bild IIIa

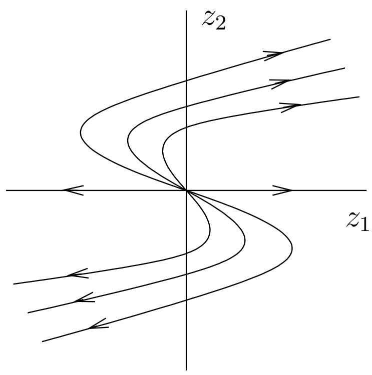


Bild IIIb

Für $\lambda < 0$ kommt es wieder zu einer Orientierungsumkehr in Bild III b.

4.3 Stabilitätstheorie autonomer Gleichungen

Wir wollen uns nun mit dem Langzeitverhalten globaler Lösungen beschäftigen.

Definition 4.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^d$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Eine globale Lösung $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ von*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > 0, \tag{4.5}$$

heißt

(*a*) stabil, *falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ von (4.5) mit $\|v(0)-u(0)\| < \delta$ gilt, dass $\|v(t)-u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t > 0$;*

(*b*) instabil, *falls sie nicht stabil ist;*

(c) attraktiv*, falls es ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle Lösungen* $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ *von* (4.5) *mit* $\|v(0) - u(0)\| < \delta$ *gilt, dass* $\lim_{t\to\infty} \|v(t) - u(t)\| = 0$.

(d) asymptotisch stabil*, falls sie stabil und attraktiv ist.*

Achtung: Aus der Attraktivität folgt i. allg. nicht die Stabilität!

Von besonderem Interesse ist die Stabilität von Gleichgewichtszuständen des durch die Differentialgleichung beschriebenen Systems, d. h. von konstanten Lösungen. Diese werden auch *stationäre Lösungen* genannt.

In dieser Vorlesung werden wir uns auf die Betrachtung von autonomen Gleichungen, d. h. Gleichungen der Form $y'(t) = f(y(t))$, beschränken. Diese haben u. a. den Vorteil, dass die stationären Lösungen sofort als die Nullstellen von f ablesbar sind.

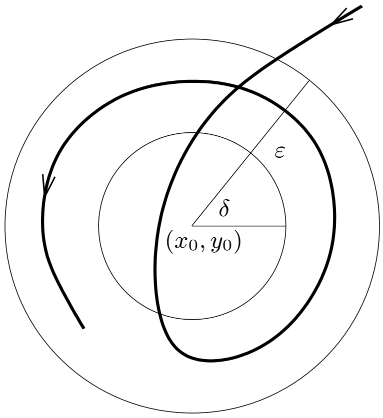
Definition 4.6 *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^d$ *offen und* $f : D \to \mathbb{R}^d$ *erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung.*
(a) *Ein Punkt* $y_0 \in D$ *mit* $f(y_0) = 0$ *heißt* kritischer Punkt *von* f.
(b) *Ein kritischer Punkt* y_0 *von* f *heißt* stabil/instabil/attraktiv/asymptotisch stabil*, wenn die stationäre Lösung* $u(t) = y_0$, $t \geq 0$, *von* $y'(t) = f(y(t))$ *die jeweilige Eigenschaft hat.*

Das Ziel dieses Abschnittes wird es sein, Bedingungen an f zu formulieren, an denen man ablesen kann, welches Stabilitätsverhalten die kritischen Punkte von f haben.

Eine besonders einfache Klasse automomer Differentialgleichungen sind die homogenen linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten $y'(t) = Ay(t)$ aus dem letzten Abschnitt. Wir wollen zunächst die dortigen Ergebnisse nutzen und werden feststellen, dass sich in diesem Fall das gesamte Stabilitätsverhalten an den Eigenwerten der Matrix A ablesen lässt. Wir bezeichnen mit $\sigma(A)$ das *Spektrum* von A, d.h. die Menge der Eigenwerte von A, und mit $s(A) := \max\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ die *Spektralschranke* von A.

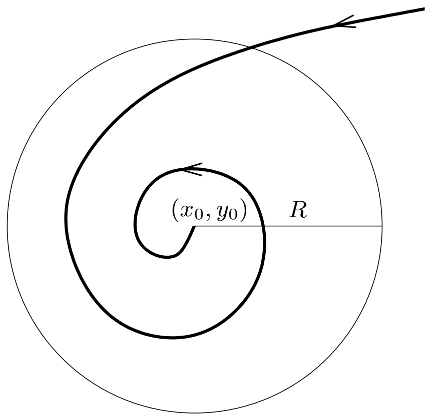
Satz 4.7 *Sei* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$. *Dann gilt für die Nulllösung* o *von* $y'(t) = Ay(t)$:
(a) *Ist* $s(A) < 0$, *so ist* o *asymptotisch stabil.*
(b) *Ist* $s(A) > 0$, *so ist* o *instabil.*
(c) *Ist* $s(A) = 0$, *so ist* o *in keinem Fall asymptotisch stabil, und* o *ist genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte von* A *mit verschwindendem Realteil die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist.*

Für reelle Koeffizienten und $d = 2$ folgt dieser Satz sofort aus den Überlegungen des letzten Abschnittes.



stabil

Bild IVa



asymptotisch stabil

Bild IVb

Im Fall IIa beobachten wir ein stabiles (aber kein asymptotisch stabiles) Verhalten, während im Fall IIb $\mu < 0$ (Orientierungsumkehr) asymptotisch stabiles Verhalten vorliegt.

Beweis. Alle Lösungen der Gleichung $y'(t) = Ay(t)$ sind von der Form

$$\sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} p_i(t), \tag{4.6}$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von A sind und p_i in jeder Komponenten Polynome, deren Grad höchstens die Differenz von algebraischer und geometrischer Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist.

(a) Sei $s(A) < 0$. Wir zeigen, dass es dann Konstanten $M \geq 1$ und $\omega > 0$ gibt mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t} \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{4.7}$$

Jede Spalte v_j, $j = 1, \ldots, d$, von e^{tA} ist von der Form (4.6); es gibt also Vektoren von Polynomen $p_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, d$, mit

$$v_j(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{t\lambda_i} p_{i,j}(t).$$

Da alle Normen auf $\mathbb{C}^{d\times d}$ äquivalent sind, gibt es ein $c \geq 0$ mit

$$\begin{aligned}\|e^{tA}\| &\leq c \max_{1\leq j\leq d} |v_j(t)| \leq c \max_{1\leq j\leq d} \sum_{i=1}^{k} \left|e^{t\lambda_i} p_{i,j}(t)\right| = c \max_{1\leq j\leq d} \sum_{i=1}^{k} e^{t\Re(\lambda_i)} |p_{i,j}(t)| \\ &\leq c \max_{1\leq j\leq d} \sum_{i=1}^{k} e^{ts(A)} |p_{i,j}(t)| = e^{ts(A)/2} \underbrace{c \max_{1\leq j\leq d} \sum_{i=1}^{k} e^{ts(A)/2} |p_{i,j}(t)|}_{\leq M}\end{aligned}$$

Da $s(A)$ negativ ist, ist für $t \geq 0$ der unterstrichene Teil dieses Ausdrucks dank der Kraft der Exponentialfunktion beschränkt und es gilt (4.7) mit dieser Schranke M und $\omega = -s(A)/2$.

Damit gilt nun sogar für jede Lösung v von $y'(t) = Ay(t)$

$$\|v(t) - o(t)\| = \|e^{tA} v(0)\| \leq \|e^{tA}\| \, \|v(0)\| \leq Me^{-\omega t} \|v(0)\| \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Also ist die Nulllösung attraktiv.

Für die Stabilität erhalten wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ mit $\delta := \varepsilon/M$ für jede Lösung v mit $\|v(0)\| < \delta$ aus derselben Abschätzung

$$\|v(t) - o(t)\| \leq Me^{-\omega t} \|v(0)\| < M\delta = \varepsilon$$

für alle $t \geq 0$. Also ist die Nulllösung asymptotisch stabil.

(b) Ist $s(A) > 0$, so hat A einen Eigenwert λ_0 mit $\Re(\lambda_0) > 0$. Sei w ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|w\| = 1/2$. Dann ist für jedes $\delta > 0$ die Funktion $v_\delta(t) := \delta e^{\lambda_0 t} w$ eine Lösung mit $\|v_\delta(0)\| = \delta/2 < \delta$. Es gilt aber

$$\|v_\delta(t)\| = \delta e^{\Re(\lambda_0)t} \|w\| = \frac{\delta}{2} e^{\Re(\lambda_0)t} \to \infty \quad \text{für } t \to \infty.$$

Also ist die Nulllösung instabil.

(c) Sei λ ein Eigenwert von A mit $\Re(\lambda) = 0$, d.h. $\lambda = i\mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist wie in Teil (b) für jedes $\delta > 0$ die Funktion $v_\delta := \delta e^{i\mu t} w$ mit einem geeigneten Eigenvektor w eine Lösung mit $\|v_\delta(0)\| < \delta$, und es gilt

$$\|v_\delta(t) - o(t)\| = \delta \, \|e^{i\mu t} w\| = \delta \|w\|.$$

Also ist die Nulllösung nicht attraktiv und damit auch nicht asymptotisch stabil.

Für die Stabilität der Nulllösung sind die Summanden in (4.6) entscheidend, die zu den Eigenwerten mit verschwindendem Realteil gehören. Ist das Polynom hier nichtkonstant, d.h. ist die algebraische Vielfachheit von der geometrischen verschieden, so wächst die entsprechende Lösung polynomial an und kann (wie soeben vorgeführt) mit δ skaliert werden um nachzuweisen, dass die Nulllösung dann nicht stabil ist.

Ist hingegen immer die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit, so sind wieder alle Lösungen und damit auch die Fundamentalmatrix e^{tA} beschränkt, denn für die Eigenwerte mit negativem Realteil kann man genauso argumenieren wie für v_j in Teil (a), und für die rein imaginären Eigenwerte sind die Polynome alle konstant. Die Stabilität der Nulllösung folgt dann wie in Teil (a). ∎

Die Bedeutung von Satz 4.7 führt weit über die Behandlung von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten hinaus. Wir werden ihn als Startpunkt nehmen, um Stabilitätsaussagen auch für kompliziertere nichtlineare Gleichungen zu bekommen, deren Lösungen sich im Allgemeinen nicht mehr konkret angeben lassen.

Bevor wir uns dieser Aufgabe widmen, stellen wir mit dem *Lemma von Gronwall* ein Resultat vor, welches in der Behandlung von Differentialgleichungen häufige Anwendung findet, z.B. im Beweis von Eindeutigkeitsaussagen.

Satz 4.8 (Lemma von Gronwall) *Seien $a, t_0, T \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < T$ gegeben und seien $u, v \in C([t_0, T], \mathbb{R})$ stetige Funktionen mit $v \geq 0$ auf ganz $[t_0, T]$. Gilt für alle $t \in [t_0, T]$ die Ungleichung*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds, \tag{4.8}$$

so folgt für alle $t \in [t_0, T]$

$$u(t) \leq a \exp\Big(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\Big).$$

Die Stärke dieses Lemmas ist, dass es eine implizite Ungleichung, bei der die Funktion u auf beiden Seiten des Relationszeichens steht, in eine explizite Ungleichung verwandelt: Im Resultat ergibt sich eine Abschätzung für u, die nur von den anderen gegebenen Daten abhängt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Damit betrachten wir die Funktion

$$h_\varepsilon(t) := (a + \varepsilon) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\Big), \quad t \in [t_0, T].$$

Für diese ist

$$h'_\varepsilon(t) = (a + \varepsilon) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\Big) \cdot v(t) = h_\varepsilon(t)v(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also für alle $t \in [t_0, T]$

$$h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} h'_\varepsilon(s)\, ds = a + \varepsilon + \int_{t_0}^{t} h_\varepsilon(s)v(s)\, ds. \tag{4.9}$$

Unser Ziel ist es nun, für alle $t \in [t_0, T]$ und alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$u(t) \leq h_\varepsilon(t) = (a + \varepsilon) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds\Big)$$

zu zeigen. Dann folgt die Behauptung durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

Dazu nehmen wir als Kontraposition an, dass es ein $\varepsilon > 0$ und ein $t \in [t_0, T]$ gibt mit $u(t) > h_\varepsilon(t)$. Wir setzen $\tau := \inf\{t \in [t_0, T] : u(t) > h_\varepsilon(t)\}$. Dann ist zunächst klar, dass $\tau > t_0$ ist, denn nach Voraussetzung (4.8) (mit $t = t_0$) gilt $u(t_0) \leq a < a + \varepsilon = h_\varepsilon(t_0)$. Außerdem muss wegen der Stetigkeit von u und h_ε gelten, dass $u(\tau) = h_\varepsilon(\tau)$ ist.

Da τ der kleinste Zeitpunkt ist, ab dem u die Funktion h_ε übersteigt, muss für alle $t \in [t_0, \tau]$ die Ungleichung $u(t) \leq h_\varepsilon(t)$ erfüllt sein. Das liefert mit Voraussetzung (4.8) und unserem Zwischenergebnis (4.9)

$$u(\tau) \leq a + \int_{t_0}^{\tau} u(s)v(s)\, ds < a + \varepsilon + \int_{t_0}^{\tau} h_\varepsilon(s)v(s)\, ds = h_\varepsilon(\tau),$$

ein Widerspruch. ■

Die Grundidee für das angestrebte Stabilitätsresultat ist, für die rechte Seite f des autonomen Problems $y'(t) = f(y(t))$ eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung um den kritischen Punkt als Entwicklungsstelle vorzunehmen. Dieser wird hier der Einfachheit halber als Null angenommen; wir setzen also $f(0) = 0$ voraus. Das liefert (mit der Jacobimatrix J_f von f)

$$y'(t) = f(y(t)) = \underbrace{f(0)}_{=0} + J_f(0)y(t) + g(y(t)) \quad \text{für}\, t \geq 0 \tag{4.10}$$

mit einer Restfunktion g, von der wir hoffen können, dass diese für kleine Werte von $y(t)$ klein bleibt und damit einen „untergeordneten" Einfluss auf die Gleichung in der Nähe von 0 hat. Der (hoffentlich dominante) vordere Teil

$$y'(t) = J_f(0)y(t)$$

ist eine homogene lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten, von der wir das Stabilitätsverhalten dank Satz 4.7 exakt kennen. Tatsächlich gilt der folgende Stabilitätssatz, der uns gute Hoffnung macht, dass das Verfahren funktionieren könnte.

Satz 4.9 (Stabilitätssatz) *Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $0 \in D$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $s(A) < 0$ und $g : D \to \mathbb{R}^d$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung sowie*

$$\lim_{x\to 0} \|g(x)\|/\|x\| = 0. \tag{4.11}$$

Dann ist die Nulllösung von

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t)) \tag{4.12}$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Zunächst ist die Nullfunktion eine Lösung von (4.12), denn nach Voraussetzung ist g stetig und es gilt insbesondere $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Die rechte Seite von (4.12) erfüllt dank der lokalen Lipschitz-Bedingung an g selbst eine lokale Lipschitz-Bedingung, d.h. das Anfangswertproblem aus (4.12) und $y(0) = y_0$ ist für jedes $y_0 \in D$ eindeutig lösbar.

Schließlich erinnern wir daran (vgl. (4.7)), dass wegen $s(A) < 0$ Konstanten $M \geq 1$ und $\omega > 0$ existieren mit

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t}. \tag{4.13}$$

Nach diesen Vorbetrachtungen sei nun $0 < \varepsilon < \omega$ gegeben. Wegen der Grenzwertbedingung (4.11) gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $\|x\| \leq \tilde{\delta}$ gilt

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{d.h.} \quad \|g(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{M}\|x\|. \tag{4.14}$$

Wir setzen nun $\delta := \min\{\tilde{\delta}, \varepsilon\}$ und zeigen, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass gilt

$$y_0 \in D \text{ mit } \|y_0\| < \frac{\delta}{M} \Longrightarrow \|u(t)\| < \delta e^{-\alpha t} \text{ für alle } t \geq 0, \tag{4.15}$$

wobei u die Lösung von (4.12) mit $u(0) = y_0$ ist.

In (4.15) steckt alles, was wir benötigen: Wegen $\lim_{t\to\infty} \delta e^{-\alpha t} = 0$ folgt sofort die Attraktivität der Nulllösung, und da wir $\delta \leq \varepsilon$ gewählt haben, gilt dann auch $\|u(t)\| < \delta e^{-\alpha t} \leq \delta \leq \varepsilon$ für alle $t > 0$, was die Stabilität der Nulllösung liefert.

Es bleibt noch, (4.15) zu zeigen. Sei also $y_0 \in D$ mit $\|y_0\| < \delta/M$ gegeben und u die zugehörige Lösung des Anfangswertproblems, d.h. es ist

$$u'(t) = Au(t) + g(u(t)), \quad u(0) = y_0.$$

Fasst man den Ausdruck $g(u(t))$ als Inhomogenität auf, so bekommt man mit der Variation-der-Konstanten-Formel aus Satz 3.6

$$u(t) = e^{tA}y_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}g(u(s))\,ds = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(u(s))\,ds. \quad (4.16)$$

Man beachte dabei, dass $Z(t) = e^{tA}$ eine Fundamentalmatrix von $y'(t) = Ay(t)$ ist mit $Z(0) = I$ und $Z(s)^{-1} = e^{-sA}$.

Nun gilt mit (4.16):

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\le \|e^{tA}y_0\| + \int_0^t \left\|e^{(t-s)A}g(u(s))\right\| ds \\ &\le \|e^{tA}\|\,\|y_0\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|\,\|g(u(s))\|\,ds. \end{aligned}$$

Für kleine s ist dank der Stetigkeit von u sicherlich $\|u(s)\| \le \delta$, denn es ist $\|u(0)\| < \delta/M \le \delta$. Gilt $\|u(s)\| \le \delta$ für alle $s \in [0,t]$, so gilt auch $\|u(s)\| \le \delta \le \tilde{\delta}$. Dehalb können wir für diese t mit (4.13), der Voraussetzung aus (4.15) und (4.14) weiter abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &< Me^{-\omega t}\frac{\delta}{M} + \int_0^t Me^{-\omega(t-s)}\frac{\varepsilon}{M}\|u(s)\|\,ds \\ &= \delta e^{-\omega t} + \int_0^t \varepsilon e^{-\omega(t-s)}\|u(s)\|\,ds, \end{aligned}$$

bzw.

$$e^{\omega t}\,\|u(t)\| \le \delta + \int_0^t \varepsilon e^{\omega s}\|u(s)\|\,ds.$$

Auf diese implizite Ungleichung für $e^{\omega t}\|u(t)\|$ wenden wir das Lemma von Gronwall (Satz 4.8) an. Dazu setzen wir $a := \delta$ und $v(s) := \varepsilon$ und erhalten

$$e^{\omega t}\|u(t)\| \le \delta \exp\Big(\int_0^t \varepsilon\,ds\Big) = \delta\, e^{\varepsilon t}, \quad \text{also } \|u(t)\| \le \delta e^{(\varepsilon-\omega)t}.$$

Da wir oben $\varepsilon < \omega$ verlangt hatten, ist $\alpha := -(\varepsilon - \omega) > 0$, und wir sind bei der Abschätzung in (4.15). Man beachte aber, dass unsere Rechnung bisher unter dem Vorbehalt steht, dass $\|u(s)\| \le \delta$ für alle $s \in [0,t]$ gilt. Wir müssen also noch zeigen, dass dies für alle $t \in [0,\infty)$ der Fall ist.

Dazu betrachten wir das Intervall $J := \{t \ge 0 : \|u(s)\| \le \delta$ für alle $s \in [0,t]\}$ der „braven" t und nehmen an, die rechte Intervallgrenze von J wäre ein endliches $T > 0$. Dann sind alle $t \in [0,T)$ brav; insbesondere erfüllen sie die Abschätzung $\|u(t)\| \le \delta$. Wegen der Stetigkeit von u ist dann aber auch

$\|u(T)\| \leq \delta$, und das zeigt, dass T selbst brav, d.h. zu J gehört. Da T kein innerer Punkt von J ist, muss sogar $\|u(T)\| = \delta$ gelten. Entscheidend ist, dass wir unsere Abschätzung von oben damit also (gerade noch) mit $t = T$ machen dürfen. Das liefert schließlich den Widerspruch $\delta = \|u(T)\| \leq \delta e^{(\varepsilon-\omega)T} < \delta$. ■

Es gibt ein analoges Instabilitätskriterium, dass wir hier jedoch nicht beweisen wollen.

Satz 4.10 (Instabilitätssatz) *Sind D und g wie in Satz 4.9 und ist $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $s(A) > 0$, so ist die Nulllösung von (4.12) instabil.*

Die beiden Sätze sind für den Spezialfall des kritischen Punktes Null formuliert. Das ist allerdings keine wirkliche Einschränkung, wie das nächste Lemma zeigt, dessen Beweis als Übungsaufgabe verbleibt.

Lemma 4.11 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung. Dann ist $y_0 \in D$ ein stabiler/instabiler/attraktiver/asymptotisch stabiler kritischer Punkt von f genau dann, wenn Null ein stabiler/instabiler/attraktiver/asymptotisch stabiler kritischer Punkt von $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}^d$ mit $\tilde{D} = D - y_0$ und $\tilde{f}(x) = f(x + y_0)$, $x \in \tilde{D}$, ist.*

Satz 4.12 (Prinzip der linearisierten Stabilität) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$. Ist $y_0 \in D$ ein kritischer Punkt von f, so gilt:*
(a) Ist $s(J_f(y_0)) < 0$, so ist y_0 asymptotisch stabil.
(b) Ist $s(J_f(y_0)) > 0$, so ist y_0 instabil.

Beweis. Mit Lemma 4.11 können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall $y_0 = 0$ zurückziehen. Da f als stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, können wir dann unser Problem in Anlehnung an (4.10) zerlegen in

$$y'(t) = f(y(t)) = J_f(0)y(t) + f(y(t)) - J_f(0)y(t) =: Ay(t) + g(y(t)).$$

Die stetige Differenzierbarkeit von f liefert, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = \lim_{x\to 0} \frac{\|f(x) - J_f(0)x\|}{\|x\|} = 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen der Sätze 4.9 bzw. 4.10 erfüllt. Diese liefern nun die Aussagen des Theorems. ■

Das Prinzip der linearisierten Stabilität macht keine Aussage in dem Fall, dass $s(A)$ gleich Null ist. In diesem Fall hängt das Stabilitätsverhalten sehr sensibel von der Nichtlinearität g ab und kann bei identischen Eigenwerten des linearen Anteils alles zwischen instabil und asymptotisch stabil sein.

Leider sind gerade die in Anwendungen spannenden Gleichgewichtszustände oft solche, bei denen das Prinzip der linearisierten Stabilität keine Aussage macht, wie folgendes Beispiel zeigen soll.

Beispiel: Mathematisches Pendel. Die Auslenkung aus der Ruhelage $y(t)$ eines an einem Ende aufgehängten pendelnden Stocks genügt der Gleichung des mathematischen Pendels

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad t \geq 0.$$

Umgeschrieben in ein System erster Ordnung erhalten wir mit $v = (y, y')^T$

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\sin(v_1(t)) \end{pmatrix} = f\big(v_1(t), v_2(t)\big)$$

mit $f(x, y) = (y, -\sin(x))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die kritischen Punkte sind offensichtlich $(k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, von denen wir uns nur $(0, 0)$ und $(\pi, 0)$ anschauen müssen (die übrigen entsprechen einem dieser beiden, da das Problem 2π-periodisch ist).

Diese beiden kritischen Punkte entsprechen zum einen der Ruhelage $(0, 0)$ des Pendels (Nullausschlag mit Null Geschwindigkeit) und zum anderen dem senkrecht nach oben gerichteten Stock (π Ausschlag mit Null Geschwindigkeit). Nach unserer Alltagserfahrung sollte ersterer stabil und zweiterer instabil sein. Nun ist

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad J_f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte ± 1, es ist also $s(J_f(\pi, 0)) = 1 > 0$, und der kritische Punkt $(\pi, 0)$ tatsächlich instabil. Betrachten wir aber die Ruhelage $(0, 0)$, so finden wir

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat die Eigenwerte $\pm i$. Wir sind also im Fall $s(J_f(0, 0)) = 0$ und können im Moment keine Aussage zur Stabilität dieses kritischen Punktes treffen. ■

4.4 Lyapunov-Stabilität

Mit der Methode der Lyapunov-Funktionen lernen wir nun ein Verfahren kennen, welches oft beim Überprüfen der Stabilitätseigenschaften allgemeiner

Systeme weiterhilft. Dabei ziehen wir uns wieder auf den Spezialfall eines kritischen Punktes im Ursprung zurück (vgl. Lemma 4.11). Im Folgenden sei also $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^d$ mit $f(0) = 0$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann ist 0 ein kritischer Punkt von f.

Definition 4.13 *Seien f und D wie soeben beschrieben. Eine Funktion $L \in C^1(D, \mathbb{R})$ heißt* Lyapunov-Funktion *der Gleichung $y'(t) = f(y(t))$, wenn*
(a) $L(0) = 0$ und $L(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$,
(b) $\nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.
Gilt zusätzlich $\nabla L(x) \cdot f(x) < 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$, so heißt L eine strikte Lyapunov-Funktion.

Satz 4.14 (Stabilitätssatz von Lypunov) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}^d$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung und $f(0) = 0$. Existiert eine Lyapunov-Funktion der Gleichung $y'(t) = f(y(t))$, so ist die Nulllösung stabil. Gibt es sogar eine strikte Lyapunov-Funktion, so ist sie asymptotisch stabil.*

Beweis. Da D offen und $0 \in D$ ist, gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $U_{\varepsilon_0}(0) \subseteq D$. Wir wollen zunächst die Stabilität der Nulllösung zeigen.

Sei $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ so finden, dass für alle Lösungen u mit $\|u(0)\| < \delta$ gilt, dass $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$ ist.

Dazu setzen wir $m_\varepsilon := \min_{\|x\|=\varepsilon} L(x)$. Dieses Minimum existiert, da die Menge der Punkte mit $\|x\| = \varepsilon$ kompakt und L stetig ist. Da L auf dieser Menge als Lyapunov-Funktion außerdem strikt positiv ist, gilt auch $m_\varepsilon > 0$. Wiederum aus der Stetigkeit von L und $L(0) = 0$ folgt nun, dass es ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ gibt mit $L(x) < m_\varepsilon$ für alle x mit $\|x\| < \delta$.

Sei also u eine Lösung mit $\|u(0)\| < \delta$. Dann gilt nach der Wahl von δ, dass $L(u(0)) < m_\varepsilon$ ist. Weiter gilt wegen

$$\frac{d}{dt} L(u(t)) = \nabla L(u(t)) \cdot f(u(t)) \leq 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

und Eigenschaft (a) einer Lyapunov-Funktion, dass

$$0 \leq L(u(t)) \leq L(u(0)) < m_\varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{4.17}$$

Nehmen wir nun an, es gäbe ein $t_0 > 0$ mit $\|u(t_0)\| \geq \varepsilon$. Da $\|u(0)\| < \delta < \varepsilon$ und u stetig ist, muss es dann ein $t_* \in (0, t_0]$ geben mit $\|u(t_*)\| = \varepsilon$. Das liefert aber mit (4.17) den Widerspruch

$$L(u(t_*)) \geq \min_{\|x\|=\varepsilon} L(x) = m_\varepsilon > L(u(t_*)).$$

Also ist $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0$, d.h. die Nulllösung ist stabil.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass für eine strikte Lyapunov-Funktion die Nulllösung attraktiv ist, d.h. wir müssen ein $\delta > 0$ finden, so dass $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0$ für alle Lösungen u mit $\|u(0)\| < \delta$ gilt.

Dazu wählen wir das δ zu ε_0 wie im ersten Teil des Beweises. Dort haben wir bereits gezeigt, dass jede Lösung u mit $\|u(0)\| < \delta$ für alle $t \geq 0$ in der Kugel mit Radius ε_0 bleibt und dass die Funktion $L \circ u$ auf $(0, \infty)$ monoton fällt. Wir zeigen nun die folgende

Zwischenbehauptung. *Es gibt eine Folge* $(t_n) \subseteq (0, \infty)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} u(t_n) = 0$.

Ist unsere Lösung u an einer Stelle gleich Null, so ist wegen der eindeutigen Lösbarkeit des betrachteten Problems u die konstante Nulllösung. In diesem Fall ist die Zwischenbehauptung offenbar richtig.

Ist u an keiner Stelle Null, so nehmen wir an, die Zwischenbehauptung wäre falsch. Dann ist 0 kein partieller Grenzwert der Trajektorie $\{u(t) : t \geq 0\}$, d.h. es existiert ein $T > 0$ und ein $r \in (0, \varepsilon_0)$, so dass $\|u(t)\| > r$ für alle $t \geq T$ gilt. Nun ist der Kreisring $K := \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq \|x\| \leq \varepsilon_0\}$ kompakt und die Funktion $x \mapsto \nabla L(x) \cdot f(x)$ wegen der Eigenschaften einer strikten Lyapunov-Funktion auf dieser Menge strikt negativ und stetig. Also ist $M := \max_{x \in K} \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$.

Sei nun $t > T$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die reelle Funktion $L \circ u$ ein $\tau \in (T, t)$ mit

$$\begin{aligned} L(u(t)) - L(u(T)) &= (L \circ u)'(\tau)(t - T) = (t - T)\nabla L(u(\tau)) \cdot u'(\tau) \\ &= (t - T)\nabla L(u(\tau)) \cdot f(u(\tau)). \end{aligned}$$

Da $\tau > T$ ist, gilt $r \leq \|u(\tau)\| \leq \varepsilon_0$, d.h. $u(\tau) \in K$, und wir bekommen

$$L(u(t)) - L(u(T)) \leq (t - T)M \to -\infty \quad \text{für } t \to \infty.$$

Also muss es ein $t_0 > T$ geben mit $L(u(t_0)) < 0$, und das ist ein Widerspruch dazu, dass L eine Lyapunov-Funktion ist. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. Man beachte, dass wegen der Stetigkeit von L für die Folge (t_n) gilt

$$\lim_{n\to\infty} L(u(t_n)) = L(0) = 0. \tag{4.18}$$

Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ betrachten wir nun den kompakten Kreisring $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \leq \|x\| \leq \varepsilon_0\}$. Dann ist mit dem schon mehrfach genutzten Argument $m_\varepsilon := \min_{x \in K_\varepsilon} L(x) > 0$. Wegen (4.18) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $L(u(t_{n_0})) < m_\varepsilon$. Da $L \circ u$ monoton fallend ist, gilt dann $L(u(t)) \leq L(u(t_{n_0})) < m_\varepsilon$ für alle $t \geq t_{n_0}$. Damit kann $u(t)$ für $t \geq t_{n_0}$ nicht in K_ε

liegen. Da wir bereits wissen, dass $u(t)$ immer in der Kugel mit Radius ε_0 liegt (Stabilität und Wahl von δ), muss $\|u(t)\| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_{n_0}$ gelten. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies, dass $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. ■

Auch hier gibt es ein korrespondierendes Instabilitätsresultat, das wir wieder nicht beweisen wollen.

Satz 4.15 (Instabilitätssatz von Lyapunov) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $0 \in D$, und $f : D \to \mathbb{R}^d$ erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung sowie $f(0) = 0$. Gibt es eine Funktion $L \in C^1(D, \mathbb{R})$ mit*
(a) $L(0) = 0$,
(b) $\nabla L(x) \cdot f(x) > 0$ für alle $x \in D \setminus \{0\}$ und
(c) es gibt eine Folge $(x_j) \subseteq D$ mit $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$ und $L(x_j) > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$,
so ist die Nulllösung von $y'(t) = f(y(t))$ instabil.

Die Lyapunov-Methode ist ein starkes Mittel zur Untersuchung von Stabilitätsfragen mit einem Nachteil: Zum Auffinden einer Lyapunov-Funktion für ein konkret gegebenes Problem gibt es kein allgemeines Verfahren. Hier sind gutes Raten, Erfahrung und Intuition und vor allem ein gutes Verständnis des durch die DGL modellierten physikalischen/mechanischen/... Systems gefragt. Eine Lyapunov-Funktion misst in einem gewissen Sinne den Abstand einer Lösung zum Gleichgewichtszustand. Dieser ist üblicherweise ein Zustand, in dem eine charakteristische Größe, z. B. die Energie, minimal wird. Also ist die in einem Zustand $y(t)$ „enthaltene“ Energie in jedem Fall ein guter Kandidat für eine Lyapunov-Funktion! Oft kann man also die Lyapunov-Funktion aus der Physik hinter der Gleichung erahnen.

Zur Illustration diene das folgende Beispiel, das eine Wiederaufnahme des Beispiels aus dem vorangegangenen Abschnitt ist.

Beispiel (Mathematisches Pendel). Wir betrachten wieder die Gleichung $y''(t) + \sin(y(t)) = 0$ des mathematischen Pendels. Das zugehörige System erster Ordnung hat die Form

$$\begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -\sin(v_1(t)) \end{pmatrix} = f\big(v_1(t), v_2(t)\big)$$

mit $f(x, y) = (y, -\sin(x))$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir zeigen, dass die Funktion $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$L(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x \sin(s)\, ds = \frac{1}{2}y^2 - \cos(x) + 1$$

eine Lyapunov-Funktion unseres Systems für die Nulllösung ist.

Die Frage, wie man auf diese Funktion kommt, ist einfach zu beantworten: $y = v_2(t)$ ist die Geschwindigkeit des Pendels. Damit ist (bis auf Kleinigkeiten wie die Masse, die hier auf 1 normiert ist) der Ausdruck $\frac{1}{2}y^2$ gerade die kinetische Energie des Pendels. Das Integral integriert die Größe $\sin(s)$ von der Ruhelage 0 bis zur aktuellen Auslenkung $x = v_1(t)$. Das ergibt genau die potentielle Energie des Pendels, die zur Auslenkung um x gehört. $L(x, y)$ ist also nichts anderes als die Gesamtenergie, die im Zustand (x, y) des Pendels steckt.

Tatsächlich gilt $L(0, 0) = 0$, $L(x, y) > 0$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ außer in $(0, 0)$ selbst, und schließlich ist auch

$$\nabla L(x, y) \cdot f(x, y) = \big(\sin(x), y\big) \cdot \begin{pmatrix} y \\ -\sin(x) \end{pmatrix} = y \sin(x) - y \sin(x) = 0.$$

Somit ist L eine Lyapunov-Funktion, und die Nulllösung ist stabil. ■

Nur am Rande sei abschließend vermerkt, dass es natürlich viele weitere interessante Fragen in diesem Zusammenhang gibt. Eine ist die nach *periodischen* Lösungen eines autonomen Systems wie

$$\dot{x} = F(x, y), \qquad \dot{y} = G(x, y), \tag{4.19}$$

d.h. nach solchen Lösungen, zu denen es ein $T > 0$ gibt mit

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t + T) = y(t) \quad \text{für alle } t.$$

Die Trajektorien solcher Lösungen sind geschlossene Kurven, sogenannte *Zyklen* (vgl. Fall IIa). Wir sehen uns ein weiteres Beispiel an. Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{4.20}$$

hat (0, 0) als einzigen Gleichgewichtspunkt. Aus $x(1 - x^2 - y^2) = y$ und $y(1 - x^2 - y^2) = -x$ folgt nämlich

$$x(1 - x^2 - y^2)^2 = y(1 - x^2 - y^2) = -x.$$

Für $x \neq 0$ liefert diese Gleichung $(1 - x^2 - y^2)^2 = -1$, was unmöglich ist. Aus $x = 0$ und der ersten Gleichung folgt $y = 0$.

Zur Lösung des Systems (4.20) gehen wir zu Polarkoordinaten über. Wir schreiben $x = r \cos\varphi$ und $y = r \sin\varphi$ und erhalten mit

$$\dot{x} = \dot{r} \cos\varphi - r\dot{\varphi} \sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin\varphi + r\dot{\varphi} \cos\varphi$$

nach einigen Umformungen das entkoppelte System

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1,$$

dessen Lösung für $r > 0$ durch

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + ae^{-2t}}}, \quad \varphi(t) = t + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Für $a = 0$ erhält man den Einheitskreis als Trajektorie, und für $a < 0$ bzw. $a > 0$ bekommt man Kurven, die sich für $t \to \infty$ spiralförmig von außen oder innen dem Einheitskreis anschmiegen.

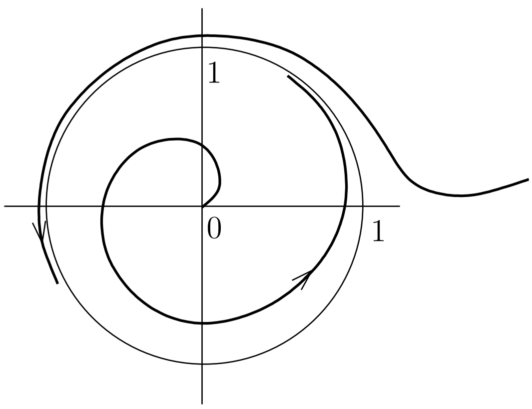


Bild V

Dieses Verhalten ist charakteristisch.

Satz 4.16 *Jeder Zyklus des Systems* (4.19) *umläuft mindestens einen Gleichgewichtspunkt.*

Satz 4.17 (Poincaré-Bendixon) *Sei B die Abschließung einer offenen, beschränkten und zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, B enthalte keine Gleichgewichtspunkte von* (4.19)*, und*

$$T : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

sei eine Trajektorie von (4.19)*, die für alle $t \geq t_0$ in B verläuft. Dann ist T entweder selbst ein Zyklus, oder T schmiegt sich für $t \to \infty$ spiralförmig von innen oder außen einem Zyklus in B an.*

Wenn B also eine "Halbtrajektorie" enthält, so gibt es in B einen Zyklus. Hinweise zu den Beweisen finden Sie in Heuser, Abschnitt X, Nr. 68. ■

4.5 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten gibt es eine elegante Lösungstheorie, die die Bestimmung der Lösungen auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms reduziert.

4.5.1 Polynome von Differentialoperatoren

Wir schreiben $\mathbb{C}[X]$ für die Menge der Polynome in einer Unbestimmten X, d.h. die Elemente von $\mathbb{C}[X]$ sind Ausdrücke der Gestalt

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \tag{4.21}$$

mit komplexen Koeffizienten a_k. Ist $a_n \neq 0$, so heißt P ein Polynom vom Grad n. Ersetzt man in (4.21) die Unbestimmte X durch den Ableitungsoperator $D := \frac{d}{dx}$, so erhält man einen *Differentialoperator*

$$P(D) = a_0 I + a_1 D + \cdots + a_n D^n.$$

Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ordnet $P(D)$ jeder n-mal differenzierbaren Funktion $y : J \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$P(D)y = a_0 I y + a_1 D y + \cdots + a_n D^n y = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}$$

zu, so dass wir die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{mit } a_n \neq 0 \tag{4.22}$$

auch als $P(D)y = 0$ mit einem Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ wie in (4.21) schreiben können. Das Polynom P heißt das *charakteristische Polynom* der Gleichung (4.22). Wir sehen uns zunächst an, wie man mit Differentialoperatoren rechnet.

Lemma 4.18 *Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ Polynome vom Grad n bzw. m.*
(a) Ist $P(X) := P_1(X) + P_2(X)$ und f $\max(m,n)$-mal differenzierbar, so ist

$$P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f.$$

(b) Ist $P(X) := P_1(X)P_2(X)$ und f $(m+n)$-mal differenzierbar, so ist

$$P(D)f = P_1(D)(P_2(D)f).$$

Man rechnet mit Differentialoperatoren also genauso wie mit den zugehörigen Polynomen. Insbesondere folgt aus (b), dass

$$P_1(D)P_2(D)f = P_2(D)P_1(D)f$$

(was für Differentialoperatoren der Gestalt $a_nD^n+\cdots+a_1D+a_0I$ mit *nichtkonstanten* Koeffizienten a_j i.a. nicht gilt).

Beweis von Lemma 4.18. Aussage (a) folgt aus der Tatsache, dass

$$P(D)f = a_0If + a_1Df + \cdots + a_nD^nf = a_0f + a_1f' + \cdots + a_nf^{(n)}$$

linear von den Koeffizienten a_j abhängt. Für (b) betrachten wir

$$P_1(X) = a_0I + a_1X + \cdots + a_nX^n \quad \text{und} \quad P_2(X) = b_0I + b_1X + \cdots + b_mX^m.$$

Dann ist

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n+m} c_jX^j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{k,l\geq 0:k+l=j} a_kb_l,$$

wobei wir $a_k = 0$ für $k > n$ und $b_l = 0$ für $l > m$ setzen. Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned} P(D)f &= \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=j} a_kb_lD^jf = \sum_{j=0}^{n+m}\sum_{k+l=j} a_kb_lD^{k+l}f \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_kD^k(b_lD^lf) = \sum_{k=0}^{n} a_kD^k \sum_{l=0}^{m} b_lD^lf \\ &= P_1(D)(P_2(D)f). \end{aligned}$$

■

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (der in der Vorlesung zur Funktionentheorie bewiesen wird) lässt sich jedes Polynom

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten auf eindeutige Weise in Linearfaktoren zerlegen:

$$P(X) = (X-\lambda_1)^{k_1}\ldots(X-\lambda_r)^{k_r}, \tag{4.23}$$

wobei die λ_i die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen von P und die positiven genzen Zahlen k_i ihre *Vielfachheiten* sind. Offenbar ist $k_1+\cdots+$

$k_r = n$. Weiter wissen wir aus dem Satz über die Partialbruchzerlegung (vgl. Analysis II, Satz 8.40), dass es Polynome $Q_1(X), \ldots, Q_r(X)$ so gibt, dass

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{(X-\lambda_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{Q_r(X)}{(X-\lambda_r)^{k_r}}. \tag{4.24}$$

Wir definieren für $1 \le k \le r$

$$P_k(X) := \prod_{l=1, l \ne k}^{r} (X - \lambda_l)^{k_l}. \tag{4.25}$$

Damit folgt aus (4.24) nach Multiplikation mit $P(X)$ und unter Beachtung von (4.23), dass

$$1 = P_1(X)Q_1(X) + \cdots + P_r(X)Q_r(X). \tag{4.26}$$

Wegen Lemma 4.18 übertragen sich (4.23) und (4.26) auch auf die entsprechenden Differentialoperatoren:

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{k_1} \ldots (D - \lambda_r I)^{k_r}, \tag{4.27}$$

$$I = P_1(D)Q_1(D) + \cdots + P_r(D)Q_r(D). \tag{4.28}$$

Besonders einfach ist die Wirkung der Differentialoperatoren $P(D)$ auf Exponentialfunktionen. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $e_\lambda(x) := e^{\lambda x}$.

Lemma 4.19 *(a) Es ist $P(D)e_\lambda = P(\lambda)e_\lambda$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.*
(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, f k-mal differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$D^k(e_\lambda f) = e_\lambda (D + \lambda I)^k f. \tag{4.29}$$

Beweis. Aussage (a) folgt sofort aus

$$\begin{aligned} P(D)e^{\lambda x} &= a_0 e^{\lambda x} + a_1 (e^{\lambda x})' + \cdots + a_n (e^{\lambda x})^{(n)} \\ &= a_0 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + \cdots + a_n \lambda^n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

(b) Mit der Leibnizschen Produktregel und dem binomischen Satz erhalten wir

$$\begin{aligned} D^k(e_\lambda f) &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (D^l e_\lambda)(D^{k-l} f) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l e_\lambda (D^{k-l} f) \\ &= e_\lambda \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l D^{k-l} \right) f = e_\lambda (D + \lambda I)^k f. \end{aligned}$$ ■

4.5.2 Die homogene Gleichung

Satz 4.20 *Das Polynom*

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \ \in \mathbb{C}[X]$$

habe die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit den entsprechenden Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$. Dann hat die Differentialgleichung

$$P(D)y = 0 \tag{4.30}$$

ein Lösungsfundamentalsystem, bestehend aus allen Funktionen

$$\varphi_{jm}(x) := x^m e^{\lambda_j x} \quad \textit{mit}\ 1 \le j \le r\ \textit{und}\ 0 \le m \le k_j - 1. \tag{4.31}$$

Beweis. Die Bezeichnungen P_j, Q_j seien wie in (4.25) und (4.24). Zuerst zeigen wir: Ist y eine Lösung von (4.30), so ist für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ die Funktion $y_j := P_j(D)Q_j(D)y$ eine Lösung der Gleichung

$$(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j = 0. \tag{4.32}$$

Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned}(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j &= (D - \lambda_j I)^{k_j} P_j(D)Q_j(D)y \\ &= P(D)Q_j(D)y = Q_j(D)P(D)y = 0.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt y_j eine Lösung von (4.32), so ist y_j auch Lösung von (4.30):

$$P(D)y_j = P_j(D)(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j = 0.$$

Da außerdem für jede Lösung y von (4.30) wegen (4.28) gilt

$$y = Iy = (P_1(D)Q_1(D)y + \cdots + P_r(D)Q_r(D))y = y_1 + \cdots + y_r,$$

erhalten wir: Jede Lösung von (4.30) lässt sich schreiben als Summe von Lösungen der Gleichungen (4.32) für $j = 1, \ldots, r$. Umgekehrt ist jede solche Summe eine Lösung von (4.30).

Wir haben also noch (4.32) zu lösen. Wegen (4.29) können wir diese Gleichung schreiben als

$$(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j = e_{\lambda_j} D^{k_j}(e_{-\lambda_j} y_j) = 0.$$

Da e_{λ_j} invertierbar ist, ist y_i genau dann eine Lösung dieser Gleichung, wenn y_i die Gleichung

$$D^{k_j}(e_{-\lambda_j} y_j) = 0 \tag{4.33}$$

löst. Offenbar ist nun y_j genau dann eine Lösung von (4.33), wenn $e_{-\lambda_j} y_j$ ein Polynom vom Grad $\leq k_j - 1$ ist, d.h. die Lösungen von (4.33) sind genau die Funktionen der Gestalt

$$y_j(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k_j - 1} x^{k_j - 1}) e^{\lambda_j x}$$

mit $c_j \in \mathbb{C}$. Damit ist klar: Jede Funktion aus (4.31) löst (4.30), und jede Lösung von (4.30) lässt sich als Linearkombination von Funktionen aus (4.31) schreiben. Da in (4.31) genau $k_1 + \cdots + k_r = n$ Funktionen stehen, bilden diese eine Basis des Lösungsraumes von (4.30). ∎

Anmerkung 1. Hat das Polynom P in Satz 4.20 nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so besteht ein Lösungsfundamentalsystem von (4.30) aus den Funktionen $e_{\lambda_j} : x \mapsto e^{\lambda_j x}$ mit $j = 1, \ldots, n$. ∎

Anmerkung 2. Sind alle Koeffizienten des Polynoms P aus Satz 4.20 reell, so treten seine nichtreellen Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf. Mit

$$e^{\lambda_j x},\ x e^{\lambda_j x},\ \ldots,\ x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x} \tag{4.34}$$

gehören also auch

$$e^{\overline{\lambda}_j x},\ x e^{\overline{\lambda}_j x},\ \ldots,\ x^{k_j - 1} e^{\overline{\lambda}_j x} \tag{4.35}$$

zum Lösungsfundamentalsystem (4.31). Wir können daher die Funktionen aus (4.34) und (4.35) durch ihre Real- und Imaginärteile ersetzen und erhalten ein Fundamentalsystem, das aus reellwertigen Funktionen besteht. Dazu schreiben wir $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \neq 0$ und bekommen

$$x^m e^{\lambda_j x} = x^m e^{\alpha_j x} e^{\beta_j x i} = x^m e^{\alpha_j x} \big(\cos(\beta_j x) + i \sin(\beta_j x) \big).$$

Unter den getroffenen Annahmen bilden also die Funktionen

$$e^{\lambda_j x},\ x e^{\lambda_j x},\ \ldots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$$

für jede k_j-fache reelle Nullstelle λ_j von P und

$$e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),\ x e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),\ \ldots,\ x^{k_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos(\beta_j x),$$

$$e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x),\ x e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x),\ \ldots,\ x^{k_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin(\beta_j x)$$

für jedes Paar $(\lambda_j, \overline{\lambda}_j)$ k_j-facher Nullstellen $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit $\beta_j > 0$ ein Lösungsfundamentalsystem von (4.30). ∎

Beispiel A. Die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

lässt sich schreiben als $P(D) = 0$ mit $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$. Die Nullstellen des Polynoms P sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-x}, \quad \varphi_3(x) = e^{2x}$$

bilden daher ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat die Gestalt

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel B. Die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

hat das charakteristische Polynom $P(X) = X^3 - 2X^2 + X$ mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = 1$. Ein Lösungsfundamentalsystem wird gebildet von den Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{x}, \quad \varphi_3(x) = xe^{x},$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$\varphi(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{x} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel C. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad \text{mit } x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0 \tag{4.36}$$

mit reellen Koeffizienten. Ist $b = 0$, so kann man zunächst x bestimmen als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = ax \quad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

und die gefundene Lösung in die zweite Gleichung von (4.36) einsetzen, wodurch diese zu einer inhomogenen Gleichung wird:

$$\dot{y} - dy = cx \quad \text{mit } y(t_0) = y_0.$$

Für $b \neq 0$ erhalten wir aus der ersten Gleichung von (4.36)

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax)$$

und nach Differenzieren

$$\dot{y} = \frac{1}{b}(\ddot{x} - a\dot{x}).$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung von (4.36) ein, so folgt

$$\frac{1}{b}(\ddot{x} - a\dot{x}) = cx + \frac{d}{b}(\dot{x} - ax),$$

d.h. wir erhalten die Gleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = ax_0 + by_0$. Dies löst man wie oben beschrieben und berechnet abschließend y aus x. Dieses *Eliminationsverfahren* ist oft nützlich bei der Lösung von Differentialgleichungssystemen.

Beispiel D. Das charakteristische Polynom der Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{mit } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

lautet $P(X) = X^2 + \omega^2$ und hat die Nullstellen $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$. Daher bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{i\omega x}, \quad \varphi_2(x) = e^{-i\omega x}$$

ein Fundamentalsystem, und die Funktionen

$$\frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \cos(\omega x), \quad \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \sin(\omega x)$$

bilden ein Fundamentalsystem, das aus reellwertigen Funktionen besteht. ■

Beispiel E. Wir betrachten allgemeiner die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit } \mu \geq 0, \omega_0 > 0$$

der *gedämpften Schwingung*. Diese Gleichung modelliert z.B. eine Masse, die an einer Feder schwingt, wobei μ der Reibungskoeffizient und ω_0^2 die Federkonstante ist. Für $\mu = 0$ besitzt diese Gleichung laut Beispiel D das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \varphi_2(t) = \sin(\omega_0 t).$$

Die Zahl ω_0 ist also die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Wir setzen von nun an $\mu > 0$ voraus.

Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$P(D)x = 0 \quad \text{mit} \quad P(D) = D^2 + 2\mu D + \omega_0^2 I,$$

wobei D nun für $\frac{d}{dt}$ steht. Die Nullstellen von

$$P(X) = X^2 + 2\mu X + \omega_0^2 = (X+\mu)^2 + \omega_0^2 - \mu^2$$

sind

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

wobei $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ im Fall $\mu^2 < \omega_0^2$ für $i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ steht.

Fall 1: $0 < \mu < \omega_0$, *schwache Dämpfung.* In diesem Fall setzen wir $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ und erhalten die konjugiert-komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega$. Somit haben wir ein Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\omega t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\omega t},$$

aus dem wir das reellwertige Fundamentalsystem

$$\psi_1(x) = e^{-\mu t} \cos(\omega t), \quad \psi_2(x) = e^{-\mu t} \sin(\omega t)$$

erhalten. Durch die Dämpfung wird also die Frequenz kleiner, und die Lösungen klingen exponentiell ab.

Fall 2: $\mu = \omega_0$, *aperiodischer Grenzfall.* In diesem Fall ist $\lambda = -\mu$ eine doppelte Nullstelle, so dass wir das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t}, \quad \varphi_2(t) = te^{-\mu t}$$

erhalten. Wir beobachten kein Schwingungsverhalten mehr.

Fall 3: $\mu > \omega_0$, *aperiodischer Fall.* Hier haben wir zwei einfache reelle Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

die wegen $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < \mu$ beide negativ sind. Ein Lösungsfundamentalsystem ist also

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

Die Lösungen klingen exponentiell ab. ■

4.5.3 Die inhomogene Gleichung

Sei wieder $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $b : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$P(D)y = b \tag{4.37}$$

zu finden, bestimmen wir zunächst mit Satz 4.20 ein Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der homogenen Gleichung. Außerdem benötigen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir beschreiben zwei Wege, wie man diese finden kann.

1. Weg: Variation der Konstanten. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$ hat die Form

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)$$

mit Konstanten C_j. Wir suchen eine spezielle Lösung von (4.37) der Gestalt

$$\varphi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $C_j(x) : J \to \mathbb{R}$. Wir berechnen die Ableitungen von φ:

$$\begin{aligned} \varphi' &= C_1'\varphi_1 + C_1\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n + C_n\varphi_n' \\ &= (C_1\varphi_1' + \cdots + C_n\varphi_n') + (C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n). \end{aligned}$$

Um die Rechnung einfach zu halten, versuchen wir, die C_j so zu wählen, dass

$$C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n = 0.$$

Wir werden später sehen, dass dies tatsächlich möglich ist. Dann bleibt

$$\varphi' = C_1\varphi_1' + \cdots + C_n\varphi_n',$$

und wir leiten erneut ab:

$$\varphi'' = (C_1\varphi_1'' + \cdots + C_n\varphi_n'') + (C_1'\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n').$$

Wieder fordern wir

$$C_1'\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n' = 0.$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir

$$\varphi^{(k)} = C_1\varphi_1^{(k)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(k)} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

sowie die zu erfüllenden Bedingungen

$$C_1'\varphi_1^{(k)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(k)} = 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-2.$$

Schließlich erhalten wir für die n-te Ableitung

$$\varphi^{(n)} = (C_1\varphi_1^{(n)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(n)}) + (C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}).$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die inhomogene Gleichung ein und bekommen

$$\begin{aligned}
b = \quad & \varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \ldots + a_1\varphi' + a_0\varphi \\
= \quad & (C_1\varphi_1^{(n)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n)}) + (C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}) \\
+ \quad & a_{n-1}(C_1\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}) \\
& + \ldots + \\
+ \quad & a_1(C_1\varphi_1' + \ldots + C_n\varphi_n') \\
+ \quad & a_0(C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n),
\end{aligned}$$

also

$$C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} \;=\; b,$$

da die φ_j ja die homogene Gleichung $P(D)y = 0$ lösen. Zur Bestimmung der Ableitungen C_j' haben wir damit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1'\varphi_1 + \ldots + C_n'\varphi_n &= 0 \\
C_1'\varphi_1' + \ldots + C_n'\varphi_n' &= 0 \\
&\vdots \\
C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} &= 0 \\
C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} &= b
\end{aligned} \tag{4.38}$$

gewonnen. Dieses System ist aber eindeutig lösbar! Die Determinante der Systemmatrix ist nämlich gerade die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, und diese Determinante ist ungleich Null nach Satz 3.8. Als Lösung des Systems (4.38) bekommen wir die Funktionen $C_1', \ldots, C_n'$ und hieraus durch Integration Funktionen $C_1, \ldots, C_n$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $\varphi = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n$ tatsächlich eine Lösung von (4.37) ist.

Beispiel F. Wir betrachten die Gleichung

$$y'' + 4y' = \cos(2x).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' + 4y' = 0$ ist

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

Wir suchen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$\varphi(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-4x}.$$

Das System (4.38) reduziert sich in diesem Fall auf

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-4x} &= 0 \\ -4C_2'(x)e^{-4x} &= \cos(2x). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$C_2'(x) = -\frac{1}{4}e^{4x}\cos(2x), \quad C_1'(x) = \frac{1}{4}\cos(2x).$$

Integration liefert

$$C_1(x) = \frac{1}{8}\sin(2x), \quad C_2(x) = -\frac{1}{4}\frac{4\cos(2x) + 2\sin(2x)}{20}e^{4x}.$$

Damit ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung gleich

$$\varphi(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-4x} = \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x).$$ ■

2. Weg: Spezielle Ansätze bei speziellen rechten Seiten. Für spezielle rechte Seiten kommt man oft schneller mit geeigneten speziellen Lösungsansätzen zu Ziel. So ist es für $b(x) = e^{\mu x}$ naheliegend, eine Lösung φ von $P(D)y = e^{\mu x}$ in der Form $\varphi(x) = ce^{\mu x}$ zu suchen. Dies lohnt sich: Nach Lemma 4.19 (a) ist nämlich

$$P(D)e^{\mu x} = P(\mu)e^{\mu x}, \tag{4.39}$$

und wir sehen: Ist $P(\mu) \neq 0$, so ist tatsächlich

$$\varphi(x) = \frac{1}{P(\mu)}e^{\mu x}$$

eine Lösung von $P(D)y = e^{\mu x}$. Allgemeiner gilt:

Satz 4.21 *Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, und sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad m. Die Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle k-ter Ordnung von P (mit einem $k \geq 0$). Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$P(D)y = f(x)\,e^{\mu x}$$

eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gestalt

$$\varphi(x) = x^k h(x)e^{\mu x}$$

mit einem Polynom $h \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad m.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $P(D) = Q(D)(D - \mu I)^k$ mit $Q(\mu) \neq 0$. Außerdem sei an Lemma 4.19 (b) erinnert: Ersetzen wir dort λ durch $-\lambda$ und anschließend $e_{-\lambda} f$ durch g, so folgt

$$(D - \lambda I)^k \big(e^{\lambda x} g(x)\big) = e^{\lambda x} g^{(k)}(x) \tag{4.40}$$

für jede k-mal differenzierbare Funktion g.

Wir zeigen nun die Behauptung durch vollständige Induktion nach m. Für $m = 0$ ist die Differentialgleichung

$$P(D)y = ce^{\mu x} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}$$

zu lösen. Eine spezielle Lösung ist

$$\varphi(x) := \frac{c}{k! Q(\mu)} x^k e^{\mu x},$$

denn wegen (4.40) und (4.39) ist

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\mu x}) &= Q(D)(D - \mu I)^k (x^k e^{\mu x}) = Q(D)(e^{\mu x}(D^k x^k)) \\ &= Q(D)(k!\, e^{\mu x}) = k!\, Q(\mu) e^{\mu x}, \end{aligned}$$

und φ ist offenbar von der behaupteten Gestalt.

Wir vollziehen nun den Induktionsschritt von $m - 1$ auf m. Wie oben erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} P(D)(x^{k+m} e^{\mu x}) &= Q(D)(D - \mu I)^k (x^{k+m} e^{\mu x}) \\ &= Q(D)(D^k (x^{k+m}) \cdot e^{\mu x}) \\ &= \frac{(k+m)!}{m!} Q(D)(x^m e^{\mu x}) =: g(x) e^{\mu x}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass g ein Polynom vom Grad m ist. Dazu entwickeln wir Q nach Potenzen von $x - \mu$:

$$Q(D) = \sum_{j=0}^{n-k} c_j (D - \mu I)^j.$$

Für $j = 0$ haben wir

$$c_0 (D - \mu I)^0 (x^m e^{\mu x}) = c_0 x^m e^{\mu x},$$

und $c_0 x^m$ ist ein Polynom vom Grad m, da $c_0 = Q(\mu) \neq 0$. Dagegen ist wegen (4.40) für $j > 0$

$$c_j (D - \mu I)^j (x^m e^{\mu x}) = c_j D^j (x^m) e^{\mu x},$$

und $c_j D^j(x^m)$ ist ein Polynom vom Grad kleiner als m. Es ist also g tatsächlich ein Polynom vom Grad m.

Sei nun f ein Polynom vom Grad m. Wie wir soeben gesehen haben, gibt es eine Zahl δ so, dass $f_1 := f - \delta g$ ein Polynom vom Grad kleiner als m ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein Polynom h_1 vom Grad $\leq m-1$ so, dass

$$P(D)(x^k h_1(x)e^{\mu x}) = f_1(x)e^{\mu x}.$$

Wir definieren $h(x) := h_1(x) + \delta x^m$ und erhalten schließlich

$$P(D)(x^k h(x)e^{\mu x}) = f_1(x)e^{\mu x} + \delta g(x)e^{\mu x} = f(x)e^{\mu x}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel G. Wir suchen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(D^3 - 2D^2 - 2D + 2I)y = 2\sin x. \tag{4.41}$$

Wegen $2\sin x = \operatorname{Re}(-2ie^{ix})$ betrachten wir zunächst die Gleichung

$$P(D)y = -2ie^{ix} \quad \text{mit} \quad P(X) = X^3 - 2X^2 - 2X + 2.$$

Da $P(i) = i^3 - 2i^2 - 2i + 2 = 4 - 3i \neq 0$, hat diese Gleichung die spezielle Lösung

$$\psi(x) = \frac{-2i}{P(i)}e^{ix} = \frac{6-8i}{25}e^{ix}.$$

Da außerdem alle Koeffizienten von $P(D)$ reell sind, gilt

$$\operatorname{Re}\big(P(D)\psi(x)\big) = P(D)\operatorname{Re}\psi(x).$$

Also hat (4.41) die spezielle Lösung

$$\varphi(x) := \operatorname{Re}\psi(x) = \frac{6}{25}\cos x + \frac{8}{25}\sin x. \qquad \blacksquare$$

Beispiel H. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = x + 2e^{-x}.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom $P(X) = X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ hat 0 als einfache und -1 als zweifache Nullstelle. Folglich bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-x}, \quad \varphi_3(x) = xe^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$. Um die inhomogene Gleichung zu lösen, suchen wir spezielle Lösungen der Gleichnungen

$$\begin{aligned} P(D)y &= x = xe^{0\cdot x}, & (4.42) \\ P(D)y &= 2e^{-x}. & (4.43) \end{aligned}$$

Nach Satz 4.21 hat (4.42) eine spezielle Lösung der Gestalt $f(x) = c_1x+c_2x^2$. Einsetzen liefert

$$P(D)f = (c_1 + 4c_2) + 2c_2x,$$

d.h. f löst (4.42) genau dann, wenn $2c_2 = 1$ und $c_1 + 4c_2 = 0$, d.h. wenn $c_1 = -2$ und $c_2 = 1/2$. Gleichung (4.43) hat nach Satz 4.21 eine spezielle Lösung der Gestalt $g(x) = d_2x^2e^{-x}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} P(D)g &= P(D)(d_2x^2e^{-x}) = d_2D(D-I)^2(x^2e^{-x}) \\ &= d_2D(D^2(x^2)e^{-x}) = 2d_2D(e^{-x}) = -2d_2e^{-x}, \end{aligned}$$

so dass wir $d_2 = -1$ zu wählen haben. Eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung ist also

$$\psi(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 - x^2e^{-x}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel I. Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = a\cos(\omega t) \quad \text{mit } \omega_0, \omega > 0,\ a \in \mathbb{R} \tag{4.44}$$

beschreibt die Bewegung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 unter Wirkung einer periodischen äußeren Kraft $a\cos(\omega t)$. Wir betrachten zuerst wieder die komplexe Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = ae^{i\omega t}. \tag{4.45}$$

Dann ist $P(D) = D^2 + \omega_0^2I = (D - i\omega_0I)(D + i\omega_0I)$. Wir unterscheiden 2 Fälle.

Fall 1: $\omega \neq \omega_0$**.** Dann erhalten wir eine Lösung von (4.45) durch den Ansatz

$$\psi(t) = ce^{i\omega t}.$$

Wegen $P(D)\psi = c(\omega_0^2 - \omega^2)e^{i\omega t}$ ist $\psi(t) = \frac{a}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t}$ eine Lösung von (4.45) und somit

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\psi(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Fall 2: $\omega = \omega_0$ (*Resonanzfall*). Wegen $P(i\omega_0) = 0$ hat (4.45) eine Lösung der Gestalt $\psi(t) = cte^{i\omega_0 t}$. Einsetzen ergibt

$$P(D)(cte^{i\omega_0 t}) = 2ic\omega_0 e^{i\omega_0 t}.$$

Also ist

$$\psi(t) = \frac{a}{2i\omega_0} te^{i\omega_0 t}$$

eine Lösung von (4.45), und (4.44) besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{a}{2i\omega_0} te^{i\omega_0 t}\right) = \frac{a}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

Die Amplitude wächst für $a \neq 0$ unbeschränkt (Resonanzkatastrophe). ■

Anmerkung 1. Wir betrachten die *Eulersche Differentialgleichung*

$$a_n x^n y^{(n)} + \ldots + a_1 x^1 y' + a_0 y = 0 \tag{4.46}$$

mit $a_n \neq 0$ auf $(0, \infty)$. Diese Gleichung (mit nicht konstanten Koeffizienten) kann durch eine geeignete Substitution auf eine lineare Gleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. Wegen $x > 0$ können wir $x = e^t$ bzw. $t = \ln x$ mit $t \in \mathbb{R}$ schreiben. Sei y eine Lösung von (4.46) auf $(0, \infty)$ und

$$u(t) := y(e^t) \quad \text{bzw.} \quad y(x) = u(\ln x).$$

Wir wollen aus (4.46) eine Differentialgleichung für u gewinnen. Mit $D := \frac{d}{dt}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{du(\ln x)}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} \quad (\text{mit } t = \ln x) \\ &= Du \cdot \frac{1}{x} = e^{-t} Du. \end{aligned}$$

Weiter ist wegen Lemma 4.19 (b)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}(e^{-t} Du) \cdot e^{-t} \\ &= D(e^{-t} Du) \cdot e^{-t} \\ &= e^{-t}(D-1)(Du) \cdot e^{-t} = e^{-2t}(D-1)\, Du. \end{aligned}$$

Sukzessive erhält man für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt}(D-k+1)\ldots(D-1)Du$$

bzw.

$$x^k \frac{d^k y}{dx^k} = (D-k+1)\dots(D-1)Du,$$

formal also $x^k y^{(k)} = k!\binom{D}{k}u$. Die Gleichung (4.46) geht damit über in die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, k! \binom{D}{k} u = 0 \tag{4.47}$$

auf $\mathbb{R}$. Dies ist eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Satz 4.22 *Die Funktion $y : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ löst genau dann die Eulersche Gleichung* (4.46)*, wenn die Funktion $u(t) := y(e^t)$ die Gleichung* (4.47) *löst.*

Beispiel. Sei $n = 2$, d. h. wir betrachten die Eulersche Gleichung

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 = 0.$$

Die entsprechende Gleichung (4.47) für u ist

$$a_2 D(D-1)u + a_1 Du + a_0 u = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_2\ddot{u} + (a_1 - a_2)\dot{u} + a_0 u = 0.$$

Ist beispielsweise

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \tag{4.48}$$

zu lösen, so wird hieraus $\ddot{u} - 2\dot{u} + u = 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Die Lösung für (4.48) ist also

$$y(x) = u(\ln x) = c_1 x + c_2 x \cdot \ln x. \qquad \blacksquare$$

Man beachte: Der Ansatz $y := x^\alpha$ liefert gerade das charakteristische Polynom von (4.47).

Anmerkung 2. Man betrachtet auch Systeme linearer Differentialgleichungen von höherer Ordnung wie etwa

$$y'' - y + z'' - z' = e^x, \quad y'' + y' + z'' = 0. \tag{4.49}$$

Dabei können neue Effekte auftreten. Z.B. hat das System (4.49) *keine* Lösung! Subtrahiert man nämlich die erste Gleichung von der zweiten, so folgt $y' + y + z' = -e^x$ und nach Differenzieren $y'' + y' + z'' = -e^x$, was der zweiten Gleichung von (4.49) widerspricht. $\blacksquare$

5 Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen

In diesem Kapitel betrachten wir eine Methode zur Lösung linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung, die sich anwenden lässt, wenn sich alle Koeffizienten und die rechte Seite in Potenzreihen entwickeln lassen. Die Lösung erhält man dann ebenfalls in Form einer Potenzreihe.

5.1 Potenzreihenansatz

Der Übersichtlichkeit halber beschränken wir uns darauf, den Potenzreihenansatz für Gleichungen zweiter Ordnung zu betrachten. Sei also

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5.1}$$

auf einem Intervall $(-r, r) \subseteq \mathbb{R}$, wobei wir voraussetzen, dass sich p, q und f durch auf $(-r, r)$ konvergente Potenzreihen darstellen lassen, also reell-analytische Funktionen sind,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \tag{5.2}$$

Es liegt nahe, als Lösungsansatz für (5.1) anzunehmen, die Lösung hätte eine in $(-r, r)$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{5.3}$$

Wir bestimmen die Koeffizienten a_n formal. Nach Satz 9.15 aus der Vorlesung Analysis II ist

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

und

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

Einsetzen in (5.1) ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right)$$

$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Mit der Cauchyschen Produktformel folgt weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k}\right)x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n,$$

woraus wir schließlich durch Koeffizientenvergleich für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhalten:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} = f_n.$$

Dies ist eine Rekursionsformel zur Bestimmung der a_n. Wir wählen a_0 und a_1 (z. B. entsprechend den Anfangsbedingungen) und berechnen schrittweise $a_2, a_3, \ldots$ aus

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(f_n - \sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k}\right). \tag{5.4}$$

Falls also eine Lösung von (5.1) in der Form (5.3) existiert, so sind die Koeffizienten $a_2, a_3, \ldots$ eindeutig bestimmt durch a_0 und a_1. Mehr Freiheitsgrade kann man nicht erwarten, da ja die Lösung von (5.1) durch Vorgabe von $y(0) = a_0$ und $y'(0) = a_1$ eindeutig bestimmt wird.

Nachdem wir (5.4) gewonnen haben, gehen wir nun umgekehrt vor. Zu beliebig gewählten Werten a_0, a_1 definieren wir a_n für $n \geq 2$ durch (5.4) und zeigen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ konvergiert. Aus unserer Herleitung folgt dann, dass

$$y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

auf $(-r, r)$ eine Lösung von (5.1) ist und dass man bei entsprechender Wahl von a_0 und a_1 alle Lösungen auf diesem Weg gewinnen kann.

Sei also $|x| < r$. Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert. Dazu wählen wir $\delta \in (|x|, r)$. Nach Voraussetzung konvergieren die Reihen für p, q und f in δ absolut. Insbesondere gibt es ein C mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|\delta^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n|\delta^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\delta^n \ \leq C.$$

Wir setzen noch $A_n := \max\{|a_k|\delta^k : k \leq n\}$ und zeigen, dass $A_{n+1} \leq 1 + A_n$ für alle hinreichend großen n. Mit (5.4) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}|\delta^{n+2} &\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Bigg(|f_n|\delta^n\delta^2 + \sum_{k=0}^{n}(k+1)|a_{k+1}|\delta^{k+2}|p_{n-k}|\delta^{n-k} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\delta^{k+2}|q_{n-k}|\delta^{n-k} \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \big(C\delta^2 + A_{n+1}(n+1)C\delta + A_n C\delta^2 \big) \\
&\leq \frac{C}{n+2} \big(\delta^2 + A_{n+1}(\delta + \delta^2) \big) \leq 1 + A_{n+1}
\end{aligned}$$

falls $n \geq N - 1$ und N hinreichend groß ist. Es ist also

$$|a_{n+1}|\delta^{n+1} \leq 1 + A_n \quad \text{für } n \geq N.$$

Für $k \leq n$ ist wegen der Monotonie der Folge (A_n)

$$|a_k|\delta^k \leq A_k \leq A_n \leq 1 + A_n,$$

so dass wir

$$A_{n+1} \leq 1 + A_n \quad \text{für alle } n \geq N$$

erhalten. Sukzessive finden wir weiter

$$A_{N+1} \leq 1 + A_N, \quad A_{N+2} \leq 1 + A_{N+1} \leq 2 + A_N, \ldots$$

und daher $A_{N+k} \leq k + A_N$ für alle $k \geq 1$. Es gibt also ein $B > 0$ mit

$$|a_n|\delta^n \leq B(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus ergibt sich

$$|a_n||x|^n = |a_n|(|x|/\delta)^n\delta^n \leq B(|x|/\delta)^n(n+1).$$

Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} B(|x|/\delta)^n(n+1)$ (beachte: $|x|/\delta < 1$) folgt nun die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 5.1 *Auf $(-r, r)$ sei die Differentialgleichung*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

gegeben, und die Funktionen p, q und f seien auf $(-r, r)$ in die Potenzreihen (5.2) entwickelbar. Sind dann $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ gegeben und bestimmen wir a_n für $n \geq 2$ gemäß (5.4), so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ genügt.

Anmerkungen. 1. Sind p, q und f Polynome, so kann r beliebig groß gewählt werden, d.h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.
2. Ist man an einem Lösungsfundamentalsystem interessiert, so bestimmt man beispielsweise Lösungen y_1, y_2 mit

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1.$$

3. Der Satz zeigt insbesondere, dass die Lösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit reell-analytischen Daten wieder reell-analytisch ist.

5.2 Einige spezielle Differentialgleichungen

Wir diskutieren nun einige spezielle Differentialgleichungen, die in physikalischen und technischen Anwendungen vorkommen.

5.2.1 Die Hermitesche Differentialgleichung

Hierunter versteht man die Gleichung

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \tag{5.5}$$

wobei λ ein reeller Parameter ist. Satz 5.1 ist offenbar anwendbar, und wir können die Lösung für beliebige Anfangswerte $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe darstellen. Die Rekursionsvorschrift (5.4) liefert in diesem Fall

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\big(0 - (-2)na_n - \lambda a_n\big) = a_n \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ erhalten wir also die Lösung

$$y_1^{(\lambda)}(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots,$$

und für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ finden wir

$$y_2^{(\lambda)}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \cdots.$$

Diese beiden Funktionen bilden ein Fundamentalsystem für die Hermitesche Differentialgleichung. Ist speziell $\lambda = 2n$, so folgt aus der Rekursionsformel

$a_{n+2} = 0$. Für gerades n ist daher $y_1^{(2n)}$ ein Polynom, und für ungerades n ist $y_2^{(2n)}$ ein Polynom. Speziell ergibt sich

$$\begin{aligned}
y_1^{(0)}(x) &= 1, \\
y_2^{(2)}(x) &= x, \\
y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2, \\
y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3, \\
y_1^{(8)}(x) &= 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \quad \text{u.s.w.}
\end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass der Koeffizient vor x^n gleich 2^n wird, so erhalten wir die *Hermite-Polynome*, die man schreiben kann als

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

(Überzeugen Sie sich davon, dass dies tatsächlich Polynome sind, die die Hermitesche Differentialgleichung lösen.)

5.2.2 Die Legendresche Differentialgleichung

Das ist die Gleichung

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}\,y = 0, \tag{5.6}$$

die wir auf $(-1, 1)$ betrachten, und in der λ ein reeller Parameter ist. Für diese Gleichung ist

$$\begin{aligned}
p(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \\
q(x) &= \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}
\end{aligned}$$

und $f(x) = 0$. Diese Reihen konvergieren auf $(-1, 1)$, und Satz 5.1 ist anwendbar. Die Bestimmung der Koeffizienten der Reihendarstellung der Lösung ist aber recht kompliziert. Einfacher wird es, den Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in die zu (5.6) äquivalente Gleichung

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

einzusetzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \lambda(\lambda+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

und einen Koeffizientenvergleich durchzuführen:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda(\lambda+1)a_n = 0,$$

also

$$a_{n+2} = a_n \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} = a_n \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Mit den Vorgaben $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ bzw. $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1^{(\lambda)}(x) &= 1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}x^4 \\ &\quad - \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda+5)}{6!}x^6 + \ldots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} y_2^{(\lambda)}(x) &= x - \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}x^5 \\ &\quad - \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda+2)(\lambda+4)(\lambda+6)}{7!}x^7 + \ldots, \end{aligned}$$

die ein Lösungsfundamentalsystem von (5.6) bilden. Ist $\lambda := n \in \mathbb{N}$, so reduziert sich abwechselnd eine der beiden Lösungen auf ein Polynom vom Grad n:

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(x) &= 1, \\ y_2^{(1)}(x) &= x, \\ y_1^{(2)}(x) &= 1 - 3x^2, \\ y_2^{(3)}(x) &= x - \frac{5}{3}x^3, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Normiert man diese Polynome so, dass sie an der Stelle $x = 1$ den Wert 1 annehmen, so gelangt man zu den *Legendre-Polynomen*, die man in folgender Form schreiben kann

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

(Man kann wieder zeigen, dass dies Polynome vom Grad n sind, die die Legendresche Differentialgleichung lösen.)

5.2.3 Die Besselsche Differentialgleichung

Das ist die Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \tag{5.7}$$

die man auf $(0, \infty)$ betrachtet und in der wieder λ ein reeller Parameter ist. Wir können diese Gleichung auch in der Form

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - \lambda^2}{x^2}y = 0$$

schreiben. Offenbar ist Satz 5.1 nicht anwendbar, da sich die Koeffizienten nicht um 0 in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Für gewisse Werte von λ lassen sich zwar Lösungen durch einen modifizierten Potenzreihenansatz

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

gewinnen; eine befriedigende Lösungstheorie erfordert jedoch Methoden der komplexen Funktionentheorie. Wir diskutieren daher nur den modifizierten Potenzreihenansatz (5.8). Mehr zu diesem Thema finden Sie z. B. in Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Abschnitt 27.

Wir erinnern an die Gammafunktion

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

die der Funktionalgleichung $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ genügt. Für $n \geq 1$ ergibt sich hieraus

$$\Gamma(x + n) = (x + n - 1) \dots (x + 1)\, x\, \Gamma(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Diese Identität erlaubt es, die Gammafunktion auf $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ fortzusetzen durch

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{(x + n - 1) \dots (x + 1)\, x} \quad \text{für } x \in (-n, \infty) \setminus (-\mathbb{N}).$$

Man rechnet leicht nach, dass man auf diesem Wege eine wohldefinierte Funktion $\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ erhält, die der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x + 1) = x\, \Gamma(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$$

genügt.

Lemma 5.2 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $a_n := \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)}$ und betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$. Mit der Funktionalgleichung für die Gammafunktion erhalten wir

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)}{(n+1)!\,\Gamma(n+2+\lambda)}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)(n+1+\lambda)}\right| \to 0$$

für $n \to \infty$. Aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$. ■

Aus diesem Lemma ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}$ und alle $x \in (0, \infty)$ die Konvergenz der Reihe

$$J_\lambda(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}.$$

Die so definierten Funktionen $J_\lambda : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißen *Besselfunktionen erster Art.*

Lemma 5.3 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}$. Dann ist J_λ auf $(0, \infty)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung* (5.7).

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)2^{2n+\lambda}}$$

und erhalten

$$J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+\lambda}.$$

Da wir konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren dürfen, folgt

$$\begin{aligned} J'_\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+\lambda) x^{2n-1+\lambda}, \\ J''_\lambda(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+\lambda)(2n-1+\lambda) x^{2n-2+\lambda}. \end{aligned}$$

Setzen wir $a_{-1} := 0$, so finden wir weiter

$$\begin{aligned}
&x^2 J_\lambda''(x) + xJ_\lambda'(x) + (x^2 - \lambda^2)J_\lambda(x) \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} \big((2n+\lambda)(2n-1+\lambda)a_n + (2n+\lambda)a_n + a_{n-1} - \lambda^2 a_n\big)\, x^{2n+\lambda} \\
= &\sum_{n=0}^{\infty} \big((4n^2 + 4n\lambda)a_n + a_{n-1}\big)\, x^{2n+\lambda}. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(4n^2 + 4n\lambda)a_n &= 4n(n+\lambda)\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+\lambda)2^{2n+\lambda}} \\
&= -\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,\Gamma(n+\lambda)2^{2(n-1)+\lambda}} = -a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Also verschwinden alle Koeffizienten der Potenzreihe (5.9), d.h. J_λ löst die Besselsche Differentialgleichung. ■

Satz 5.4 *Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann bilden J_λ und $J_{-\lambda}$ ein Lösungsfundamentalsystem der Besselschen Differentialgleichung.*

Beweis. Wegen Lemma 5.3 ist nur noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen J_λ und $J_{-\lambda}$ zu zeigen. Diese folgt aus

$$\lim_{x\to 0+} J_\lambda(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+} J_{-\lambda}(x) = \infty \quad \text{für } \lambda > 0,$$

was man leicht mit der Definition von J_λ bestätigt. ■

In einigen Fällen lassen sich die Besselfunktionen durch bekannte Funktionen darstellen.

Satz 5.5 *Für alle $x > 0$ ist*

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \textit{und} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \qquad (5.10)$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Beziehung aus (5.10) und benötigen dazu den speziellen Wert $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Zuerst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \dots \\
&= \frac{2n+1}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)\dots 3\cdot 1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n+1)!}{n!2^n2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{n!2^{2n}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! 2^{2n}}{n!(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin x}{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Für $\lambda = n \in \mathbb{N}$ ist J_{-n} nicht definiert. Trotzdem kann man J_n durch eine sogenannte *Besselsche Funktion zweiter Art* (oder auch *Neumannsche Funktion*) N_n zu einem Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung ergänzen. Diese Funktionen N_n sind definiert durch

$$N_n(x) := \lim_{\lambda \to n} \frac{J_\lambda(x)\cos(\pi\lambda) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\pi\lambda)}.$$

6 Anhang: Beweis des Satzes von Peano

Am Ende von Kapitel 1 haben wir den lokalen Existenzsatz von Peano kennengelernt. Seine Aussage lautete:

> *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subseteq I \times \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Dann hat für jedes $(t_0, y_0) \in D$ das Anfangswertproblem*
>
> $$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& f(t, y(t)), \quad t \in I, \\ y(t_0) &=& y_0 \end{array} \right. \tag{6.1}$$
>
> *mindestens eine Lösung.*

Genauer heißt dies, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine Funktion $\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$, die die Differentialgleichung löst und die Anfangsbedingung erfüllt.

Wir werden im Beweis wieder benutzen, dass die Lösbarkeit dieser Differentialgleichung äquivalent ist zur (stetigen) Lösbarkeit der Integralgleichung

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds. \tag{6.2}$$

Lösungen von (6.2) suchen wir in Räumen der Form $C([a, b], G)$, wobei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und G eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist. Versehen mit der Maximumnorm wird $C([a, b], G)$ zu einem Banachraum. Essentiell für unseren Zugang zum Beweis des Satzes von Peano ist ein Kriterium für die Kompaktheit von Teilmengen von $C([a, b], G)$. Man beachte, dass dieser Raum unendlichdimensional ist, so dass der Satz von Heine-Borel nicht mehr zieht und Kompaktheit nicht leicht nachzuweisen ist.

Für das gewünschte Kriterium benötigen wir einige neue Begriffe.

Definition 6.1 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $C([a, b], G)$ heißt*
(a) relativ kompakt, *wenn ihr Abschluss $\overline{\mathcal{F}}$ kompakt ist.*
(b) gleichgradig stetig, *wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und für alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ gilt*

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon,$$

d.h. alle $f \in \mathcal{F}$ sind gleich gut gleichmäßig stetig.

Ein handhabbares Kriterium für gleichgradige Stetigkeit gibt das folgende Lemma an, dessen Beweis als Übung verbleibt.

Lemma 6.2 *Sei $\mathcal{F} \subseteq C([a,b],G)$ gleichmäßig Lipschitzstetig, d.h. es gebe eine Konstante $L \geq 0$ mit*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \quad \textit{für alle } t_1, t_2 \in [a,b] \textit{ und alle } f \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

Die Bedeutung dieses Begriffes ergibt sich aus dem folgenden Satz von Arzelà-Ascoli, der ein sehr mächtiges Kompaktheitskriterium für Teilmengen von $C([a,b],G)$ liefert.

Satz 6.3 (Arzelà-Ascoli) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{F} \subseteq C([a,b],G)$ beschränkt und gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{F}$ relativ kompakt.*

Beweis. Wir zeigen, dass jede Folge $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ eine in $C([a,b],G)$ konvergente Teilfolge hat. Dann folgt die relative Kompaktheit von $\mathcal{F}$, da in normierten Räumen Folgenkompaktheit und Kompaktheit äquivalent sind.

Zunächst wählen wir eine Folge (t_n) in $[a,b]$, die in diesem Intervall dicht liegt, z.B. eine Abzählung der rationalen Punkte in diesem Intervall.

Sei nun (f_n) eine Folge in $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, ist die Folge $(f_n(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, angewandt in $\mathbb{R}^d$, besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k}(t_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Die zugehörige Folge von Funktionen $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir mit $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$.

In einem zweiten Schritt setzen wir nun die Stelle t_2 in die Funktionen dieser Folge ein. Das ergibt wiederum eine beschränkte Folge $(f_n^{(1)}(t_2))$ in $\mathbb{R}^d$, die wieder eine konvergente Teilfolge besitzt. Die zugehörige Funktionenfolge bezeichnen wir mit $(f_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$. Man beachte, dass $(f_n^{(2)})$ eine Teilfolge von $(f_n^{(1)})$ ist, d.h. nicht nur die Folge $(f_n^{(1)}(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$, sondern auch die Folge $(f_n^{(2)}(t_1))_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathbb{R}^d$ konvergent.

Iterieren wir dieses Verfahren, so erhalten wir für jedes $k \geq 2$ eine Teilfolge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $(f_n^{(k)}(t_j))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $j = 1, 2, \ldots, k$ konvergiert.

Wir betrachten nun die Diagonalfolge $g_k := f_k^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Diese ist zunächst eine Teilfolge unserer ursprünglichen Folge (f_n). Außerdem ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ das Endstück $(g_k)_{k\geq j}$ eine Teilfolge der j-ten ausgewählten Teilfolge $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $(g_k(t_j))_{k\geq j}$ konvergent und damit auch $(g_k(t_j))_{k\in\mathbb{N}}$. Dieses Argument zieht für jedes j, d.h. die Folge (g_k) konvergiert an allen Stellen $t_1, t_2, \ldots$ (die wir so gewählt hatten, dass sie in $[a,b]$ dicht liegen).

Wir zeigen nun, dass diese Folge (g_k) unsere gesuchte konvergente Teilfolge von (f_n) ist. Dazu zeigen wir, dass sie eine Cauchy-Folge ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$ und für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.3}$$

Zu diesem δ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(b - a)/N < \delta$ und verwenden nun, dass die Folge (t_n) dicht in $[a, b]$ liegt, indem wir das Intervall $[a, b]$ in N gleich lange Stücke aufteilen und aus jedem der Intervalle $[a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N})$, $j = 1, \ldots, N$, ein Folgenglied t_{n_j} auswählen.

Nun haben wir oben gesehen, dass für jedes dieser t_{n_j}, $j = 1, \ldots, N$, die Folge $(g_k(t_{n_j}))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent ist. Damit ist sie insbesondere eine Cauchyfolge. Also gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|g_k(t_{n_j}) - g_l(t_{n_j})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } k, l \geq K \text{ und alle } j = 1, \ldots, N. \tag{6.4}$$

Sei nun $t \in [a, b]$ beliebig gegeben. Dann liegt t in einem unserer Teilintervalle, d.h. es gibt ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $t \in [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$. Da t im selben Teilintervall wie t_{n_j} liegt, ist $|t - t_{n_j}| < (b - a)/N < \delta$ nach Wahl von N. Also gilt wegen (6.3)

$$|g_k(t) - g_k(t_{n_j})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Verwenden wir nun (6.5), (6.4) und noch einmal (6.5), so erhalten wir für alle $k, l \geq K$

$$\begin{aligned} |g_k(t) - g_l(t)| &\leq |g_k(t) - g_k(t_{n_j})| + |g_k(t_{n_j}) - g_l(t_{n_j})| + |g_l(t_{n_j}) - g_l(t)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Beachten wir nun noch, dass K unabhängig von t ist, so folgt daraus für alle $k, l \geq K$

$$\|g_k - g_l\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |g_k(t) - g_l(t)| \leq \varepsilon.$$

Somit ist tatsächlich (g_k) eine Cauchyfolge in $C([a, b], G)$. ■

Nun können wir uns dem Satz von Peano zuwenden. Die Grundidee dessen Beweises ist über lange Strecken konstruktiv. Wir werden eine Familie von approximativen Lösungen konstruieren, aus der wir dann durch geeignete Grenzwertbildung eine Lösung des betrachteten Anfangswertproblems gewinnen. Wir verwenden dazu das *Eulersche Polygonzugverfahren*, dessen Grundidee die Folgende ist: Der Graph einer Lösung y verläuft durch den Punkt (t_0, y_0) und hat dort die Steigung $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$. Wir approximieren den Graphen mit einem kurzen Geradenstück, das genau diese Steigung hat, bis zu einem Zeitpunkt $t_1 > t_0$. Dann werten wir an der Stelle (t_1, y_1), an der wir nun angekommen sind, $f(t_1, y_1)$ aus und nehmen das als neue Steigung für ein weiteres Geradenstück bis $t_2 > t_1$. Arbeiten wir uns so durch eine endliche Zerlegung des betrachteten Intervalls, so bekommen wir einen Polygonzug als Näherungslösung. Für jede Partition des Intervalls liefert das natürlich ein anderes Ergebnis. Betrachten wir aber immer feinere Partitionen, so ist es zumindest plausibel, dass wir in die Nähe einer Lösung unseres Anfangswertproblems kommen.

Tatsächlich bildet dieses Polygonzugverfahren die Grundlage vieler weitverbreiteter numerischer Algorithmen zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen (näheres dazu gibt es in der Vorlesung "Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen").

Beweis des Satzes von Peano. Wir zeigen, dass für ein $T > 0$ die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{6.6}$$

eine stetige Lösung u besitzt, für die $(t, u(t)) \in D$ für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$ gilt. Dann folgt, wie wir wissen, die Lösbarkeit des Anfangswertproblems auf $[t_0, t_0 + T]$. Die Lösbarkeit auf einem Intervall $[t_0 - T, t_0]$ zeigt man analog.

Dazu wählen wir ein $T_0 > 0$ und einen Radius $r > 0$, so dass für[1] $G := \overline{U_r(y_0)}$ die Menge $K := [t_0, t_0 + T_0] \times G$ eine kompakte Teilmenge von D ist. Das geht dank der Offenheit von D. Nun ist f eine stetige Funktion auf K; es gibt also eine Konstante $M \geq 0$ mit

$$|f(s, y)| \leq M \quad \text{für alle } (s, y) \in K. \tag{6.7}$$

Mit dieser setzen wir schließlich $T := \min\{T_0, r/(2M)\}$.

Sei $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_l\}$ eine Partition des Intervalls $[t_0, t_0 + T]$, d.h. es gilt $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_l = t_0 + T$, und als Maß der Feinheit der Partition P definieren wir

$$\delta_P := \max_{1 \leq j \leq l} (t_j - t_{j-1}).$$

Weiter definieren wir zu dieser Partition die Funktion $u_P : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$ als den zu P gehörigen Eulerschen Polygonzug, d.h. es ist $u_P(t_0) := y_0$ und für $k = 0, 1, \ldots, l - 1$ jeweils

$$u_P(t) := u_P(t_k) + (t - t_k) f(t_k, u_P(t_k)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}].$$

[1]Mit $U_r(y_0)$ bezeichnen wir die offene Kugel um y_0 mit Radius r.

Man beachte, dass die Funktion u_P nur scheinbar durch sich selbst definiert wird. Um die Werte auf einem Intervall $(t_k, t_{k+1}]$ zu definieren, benötigen wir nur den Wert von u_P in t_k, und der ist bereits auf dem vorhergehenden Intervall definiert worden.

Trotzdem gibt es an dieser Stelle etwas zur Wohldefiniertheit von u_P zu klären, denn wir müssen sicher gehen, dass unser Polygonzug nicht den Definitionsbereich von f verlässt. Dazu zeigen wir induktiv die folgende

Zwischenbehauptung 1. *Für alle $k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$ ist $u_P(t_k) \in U_r(y_0)$.*

Die Aussage fällt für $k = 0$ auf $y_0 \in U_r(y_0)$ zurück, so dass nichts zu zeigen ist. Nun setzen wir voraus, dass die Aussage für alle $j \leq k$ mit einem $k \in \{0, 1, \ldots, l-2\}$ gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |u_P(t_{k+1}) - y_0| &= \Big|\sum_{j=0}^{k}\big(u_P(t_{j+1}) - u_P(t_j)\big)\Big| \leq \sum_{j=0}^{k}\big|u_P(t_{j+1}) - u_P(t_j)\big| \\ &= \sum_{j=0}^{k}\big|u_P(t_j) + (t_{j+1} - t_j)f(t_j, u_P(t_j)) - u_P(t_j)\big| \\ &= \sum_{j=0}^{k}(t_{j+1} - t_j)\big|f(t_j, u_P(t_j))\big|. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegt jedes vorkommende $u_P(t_j)$ in $U_r(y_0)$. Also haben wir $(t_j, u_P(t_j)) \in K$, so dass wir die Funktion f jeweils nach (6.7) abschätzen können. Das liefert

$$|u_P(t_{k+1}) - y_0| \leq M\sum_{j=0}^{k}(t_{j+1} - t_j) = M(t_{k+1} - t_0) \leq MT \leq r/2.$$

Damit haben wir die Zwischenbehauptung 1 bewiesen.

Für das weitere ist es wichtig zu bemerken, dass u_P als stetige und stückweise lineare Funktion stückweise stetig differenzierbar ist, wobei die Ableitung auf jedem Zerlegungsintervall konstant ist. Diese Stufenfunktion der Ableitungen von u_P bezeichnen wir mit

$$\widetilde{u_P}(t) := f(t_k, u_P(t_k)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}],\ k \in \{0, 1, \ldots, l-1\}.$$

Wenden wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf jedem Zerlegungsintervall an, erhalten wir für jedes $t \in (t_0, t_0 + T]$, wobei wir k so wählen, dass $t \in (t_k, t_{k+1}]$ liegt,

$$\begin{aligned}
u_P(t) &= u_P(t) - u_P(t_k) + \sum_{j=0}^{k-1} \big(u_P(t_{j+1}) - u_P(t_j)\big) + u_P(t_0) \\
&= \int_{t_k}^{t} u_P'(s)\,ds + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} u_P'(s)\,ds + y_0 \\
&= y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \widetilde{u_P}(s)\,ds + \int_{t_k}^{t} \widetilde{u_P}(s)\,ds \\
&= y_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{u_P}(s)\,ds, \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

so dass wir auch einen „Hauptsatz“ für diese „Ableitung“ haben.

Nun folgt der wesentliche Schritt. Mit Hilfe des Satzes von Arzelá-Ascoli zeigen wir die

Zwischenbehauptung 2. *Die Menge*

$$\mathcal{U} := \{u_P : P \text{ ist eine Partition von } [t_0, t_0 + T]\}$$

ist relativ kompakt in $C([t_0, t_0 + T], G)$.

Dazu müssen wir zeigen, dass $\mathcal{U}$ beschränkt und gleichgradig stetig ist. Wir weisen zunächst die gleichmäßige Lipschitzstetigkeit von $\mathcal{U}$ nach, woraus nach Lemma 6.2 die gleichgradige Stetigkeit folgt.

Für alle $t, \tau \in [t_0, t_0 + T]$ und alle Partitionen P dieses Intervalls gilt auf Grund unseres oben gezeigten „Hauptsatzes“ (6.8)

$$|u_P(t) - u_P(\tau)| = \Big|y_0 + \int_{t_0}^{t} \widetilde{u_P}(s)\,ds - y_0 - \int_{t_0}^{\tau} \widetilde{u_P}(s)\,ds\Big| = \Big|\int_{\tau}^{t} \widetilde{u_P}(s)\,ds\Big|.$$

Da nach Zwischenbehauptung 1 alle Werte von $\widetilde{u_P}$ Werte von f mit Argumenten in K sind, ist auch $\widetilde{u_P}$ nach (6.7) durch M beschränkt. Wir bekommen also

$$|u_P(t) - u_P(\tau)| \leq M\Big|\int_{\tau}^{t} ds\Big| \leq M\,|t - \tau|. \qquad (6.9)$$

Somit ist $\mathcal{U}$ gleichgradig stetig. Setzen wir in die soeben gewonnene Abschätzung speziell $\tau = t_0$, so erhalten wir für alle $t \in [t_0, t_0 + T]$

$$|u_P(t)| \leq |u_P(t) - u_P(t_0)| + |u_P(t_0)| \leq M|t - t_0| + |y_0| \leq MT + |y_0|.$$

Damit ist $\|u_P\|_\infty \leq MT + |y_0|$ für alle Partitionen P, womit $\mathcal{U}$ auch beschränkt ist. Die relative Kompaktheit folgt nun aus dem Satz von Arzelá-Ascoli (Theorem 6.3).

Für den nächsten Schritt wählen wir nun eine Folge (P_k) von Partitionen von $[t_0, t_0+T]$, deren Zerlegungsfeinheiten δ_{P_k} für $k \to \infty$ gegen Null gehen. Dann existiert wegen der relativen Kompaktheit von $\mathcal{U}$ eine Teilfolge $(u_{P_{k_n}})$ von (u_{P_k}), die in $C([t_0, t_0+T], G)$ konvergiert. Wir bezeichnen diese mit (u_n) und kürzen die zugehörige Zerlegungsfeinheit mit $\delta_n := \delta_{P_{k_n}}$ ab.

Da u_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist und die Folge (u_n) in $C([t_0, t_0+T], G)$, d. h. gleichmäßig, konvergiert, ist auch $u := \lim_{n\to\infty} u_n$ stetig und liegt in $C([t_0, t_0+T], G)$. Wir beenden den Beweis, indem wir zeigen, dass u eine Lösung der Integralgleichung (6.6) ist.

Die Hauptarbeit besteht darin zu zeigen, dass

$$\widetilde{u_n}(t) \to f(t, u(t)) \quad \text{gleichmäßig auf } [t_0, t_0+T]. \tag{6.10}$$

Haben wir dieses, so können wir den gleichmäßigen Limes unter das Integral ziehen und bekommen Dank unseres „Hauptsatzes“ aus (6.8)

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} u_n(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(y_0 + \int_{t_0}^t \widetilde{u_n}(s)\, ds \Big) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s))\, ds,$$

womit u die gesuchte Lösung wäre.

Wenden wir uns also schlussendlich dem Nachweis von (6.10) zu. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Die Funktion f ist auf der kompakten Menge K stetig und damit dort auch gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$ so, dass für alle $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in K$ gilt

$$|f(s_1, y_1) - f(s_2, y_2)| < \varepsilon \quad \text{falls } |s_1 - s_2| < \delta \text{ und } |y_1 - y_2| < \delta. \tag{6.11}$$

Da die Zerlegungsfeinheiten δ_n gegen Null und die Funktionen u_n gleichmäßig gegen u konvergieren, finden wir zu diesem δ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\delta_n < \delta$ und

$$|u_n(t) - u(t)| + M\delta_n < \delta \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0+T] \text{ und alle } n \geq n_0 \tag{6.12}$$

gilt. Wir bezeichnen die zu u_n gehörige Partition mit $\{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{l_n}^{(n)}\}$. Zu vorgegebenem $t \in (t_0, t_0+T]$ und $n \geq n_0$ wählen wir nun das $k \in \{0, 1, \dots, l_n\}$ mit $t \in (t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$. Dann gilt

$$|t_k^{(n)} - t| \leq t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)} \leq \delta_n < \delta,$$

woraus wir mit Hilfe von (6.9) und (6.12) folgern, dass

$$\begin{aligned} |u_n(t_k^{(n)}) - u(t)| &\leq |u_n(t_k^{(n)}) - u_n(t)| + |u_n(t) - u(t)| \\ &\leq M|t_k^{(n)} - t| + |u_n(t) - u(t)| \\ &\leq M\delta_n + |u_n(t) - u(t)| < \delta. \end{aligned}$$

Damit können wir (6.11) verwenden und erhalten

$$|\widetilde{u_n}(t) - f(t, u(t))| = \left| f\left(t_k^{(n)}, u_n(t_k^{(n)})\right) - f(t, u(t))\right| < \varepsilon.$$

Das liefert die in (6.10) geforderte gleichmäßige Konvergenz, und der Beweis ist beendet. ■

Obwohl der Beweis mit den sehr konkreten approximativen Lösungen u_P arbeitet, ist er am Ende nicht konstruktiv, d.h. er liefert kein universelles Verfahren, mit dem man eine Lösung der Gleichung konkret berechnen kann. Das liegt daran, dass im entscheidenden Moment mit der Kompaktheit argumentiert wird. Hier weiß man eben nicht konstruktiv, welche Teilfolge man auswählen müsste, die gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert. An dieser Stelle geht unter Umständen auch die Eindeutigkeit der Lösung verloren, denn wir können nicht ausschließen, dass andere Teilfolgen gegen andere Lösungen konvergieren.