

Funktionentheorie

(Theorie der komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen)

Erste Ansätze der Funktionentheorie findet man bei Euler (1707–1783): Eulersche Formel: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, Elliptische Integrale. Gauß (1777–1855) hat nicht nur den komplexen Zahlen zum Durchbruch verholfen (Gaußsche Zahlenebene), sondern war wohl auch bereits im Besitz der grundlegenden Sätze der Funktionentheorie bis hin etwa zum Cauchyschen Integralsatz. Diese Gauß'schen Resultate blieben meist unveröffentlicht und sind z.T. nur aus Gauß' Briefwechsel bekannt.

Den systematischen Aufbau der Funktionentheorie verdanken wir im Wesentlichen Cauchy (1789–1857), Riemann (1826–1866) und Weierstraß (1815–1897). Jeder von ihnen prägte die Funktionentheorie auf seine Weise, und man spricht heute noch vom Cauchyschen, Riemannschen und Weierstraßschen Standpunkt.

Cauchy: Integraldarstellung, Cauchyscher Integralsatz, Residuen

Riemann: geometrischer Standpunkt, Abbildungseigenschaften wie Winkeltreue, Riemannsche Flächen, Riemannsche Vermutung

Weierstraß: Potenzreihen.

Die moderne Funktionentheorie besticht sowohl durch ihre innere Schönheit und Eleganz als auch durch ihre zahlreichen und vielfältigen Anwendungen, die vom Beweis des Primzahlsatzes bis zur Berechnung von Tragflügelumströmungen reichen.

Wir betrachten in dieser Vorlesung ausschließlich *komplexe* Funktionen *einer* komplexen Veränderlichen. Viele der gezeigten Resultate lassen sich problemlos verallgemeinern auf Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow X$, wobei X ein komplexer Banachraum (= vollständiger normierter Raum) ist. Die Theorie der Funktionen *mehrerer* komplexer Veränderlicher erweist sich dagegen als außerordentlich anspruchsvoll.

Literatur

Remmert: Funktionentheorie 1

Conway: Functions of One Complex Variable

Behnke/Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Fischer/Lieb: Funktionentheorie

Heuser: Analysis II

Needham: Anschauliche Funktionentheorie
(Englisch: Visual Complex Analysis)

Wegert: Visual Complex Functions

Vorkenntnisse aus den Vorlesungen Analysis I, II, Lineare Algebra.

- \mathbb{C} ist \mathbb{R}^2 mit Multiplikation $(s, t) \cdot (x, y) = (sx - ty, tx + sy)$.
 $\Rightarrow \mathbb{C}$ ist *Körper*.
- \mathbb{C} ist linearer Raum über \mathbb{R} der Dimension 2 und linearer Raum über \mathbb{C} der Dimension 1. Schreiben und identifizieren

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Jede Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bestimmt und wird bestimmt durch 2 Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert *Norm* und $d(w, z) := |w - z|$ *Abstand* auf \mathbb{C} .

$\Rightarrow \mathbb{C}$ ist metrischer, sogar normierter Raum und vollständig.
 \Rightarrow offene und abgeschlossene Mengen, Rand, Umgebung, ...

- Stetige Funktionen auf \mathbb{C} (Definition, Eigenschaften).
 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z = x + iy$ stetig $\Leftrightarrow u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in (x, y) stetig.
- Folgen und Reihen komplexer Zahlen, insbesondere Potenzreihen (Konvergenzverhalten, Konvergenzradius, absolute Konvergenz), Exponential- und Sinusfunktion im Komplexen.
- Stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Weg*. Die Bildmenge eines Weges heißt *Kurve*. Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend* (oder kurz: *zusammenhängend*), wenn es zu je zwei Punkten $w, z \in D$ einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma(a) = w$ und $\gamma(b) = z$ gibt. Nichtleere offene und (weg-)zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{C} heißen *Gebiete*.
- Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Teilmengen U, V von X gibt mit $U \cap V = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ und $A \subseteq U \cup V$.
- Kurvenintegrale im \mathbb{R}^2 , Wegunabhängigkeit.

1 Differentiation im Komplexen

1.1 Definition und einfache Eigenschaften

Die folgende Definition der komplexen Differenzierbarkeit mittels der komplexen Division ist eine folgenreiche Verschärfung der Differentiation im \mathbb{R}^2 .

Definition 1.1 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt in z_0 komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

in \mathbb{C} existiert. Falls dieser Grenzwert existiert, nennen wir ihn Ableitung von f in z_0 und bezeichnen ihn mit $f'(z_0)$. Ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar, so heißt f holomorph auf D .

Beispiele. Wie im Reellen zeigt man, dass jede ganzrationale Funktion (= Polynom)

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

auf \mathbb{C} holomorph ist und dass für jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 a_2 z + a_1.$$

Dagegen ist die Funktion $g(z) = \bar{z}$ (= konjugiert komplexe Zahl zu z) in keinem Punkt komplex differenzierbar. Der Ausdruck

$$\frac{g(z_0 + h) - g(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

ist nämlich 1 für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und -1 für $h \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und besitzt daher keinen Grenzwert für $h \rightarrow 0$. (Beachten Sie dagegen, dass die reelle Funktion $g(x, y) = (x, -y)$ sehr wohl reell differenzierbar ist.)

Auch die Funktionen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |z|$ sind nirgends komplex differenzierbar. ■

Wie im Reellen beweist man, dass mit zwei Funktionen f, g auch deren Summe und deren Produkt in einem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar bzw. auf D holomorph sind und dass

$$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z), \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Ist außerdem $g(z) \neq 0$ auf D , so ist auch f/g holomorph, und es gilt

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Sind schließlich f und g auf D bzw. D' holomorphe Funktionen und ist $f(D) \subseteq D'$, so ist $g \circ f$ auf D holomorph, und es gilt die *Kettenregel*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Die komplexe Differenzierbarkeit läßt sich auch über eine *Zerlegungsformel* charakterisieren: f ist in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar genau dann, wenn ein $\alpha \in \mathbb{C}$ und eine Funktion r mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ existieren so, dass

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + r(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0.$$

Mit dieser Zerlegungsformel sieht man, dass die komplexe Differenzierbarkeit die Stetigkeit impliziert.

1.2 Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

Sei $z = x + iy$ und $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Wir stellen einen Zusammenhang zwischen der komplexen Differenzierbarkeit von f in z und der Differenzierbarkeit von u und v in (x, y) her.

Satz 1.2 (a) *Ist f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, so sind u und v in (x_0, y_0) partiell differenzierbar, und es gelten in diesem Punkt die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.1)$$

(b) *Sind u und v in z differenzierbare reelle Funktionen und gelten in $(x, y) \hat{=} z \in D$ die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen (1.1), so ist die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in z komplex-differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -i(u_y(x, y) + iv_y(x, y)). \quad (1.2)$$

Beweis. (a) Sei f in $z_0 \in D$ komplex differenzierbar, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

soll existieren. Lassen wir h entlang der reellen Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

(man beachte, dass eine Folge in \mathbb{C} genau dann konvergiert, wenn die Folgen ihrer Real- und Imaginärteile in \mathbb{R} konvergieren). Lassen wir dagegen h entlang der imaginären Achse gegen 0 streben, d.h. wählen wir $h = it$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so folgt analog

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{it} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{t} \right) \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{i} (u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile in den beiden letzten Beziehungen zeigt, dass $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ in z_0 .

(b) Differenzierbarkeit von u und v in z heißt: es gibt Funktionen r und s mit

$$\lim_{(h,g) \rightarrow 0} \frac{r(h,g)}{\|(h,g)\|_2} = 0, \quad \lim_{(h,g) \rightarrow 0} \frac{s(h,g)}{\|(h,g)\|_2} = 0,$$

so dass mit $z = (x, y)$

$$\begin{aligned} u(x+h, y+g) - u(x, y) &= (u_x(z), u_y(z)) \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + r(h, g), \\ v(x+h, y+g) - v(x, y) &= (v_x(z), v_y(z)) \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + s(h, g). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit i , addieren sie zur ersten Gleichung und beachten dabei die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} f(z + (h + ig)) - f(z) &= u_x(z)h + u_y(z)g + iv_x(z)h + iv_y(z)g + r(h, g) + is(h, g) \\ &= u_x(z)(h + ig) + iv_x(z)(h + ig) + r(h, g) + is(h, g). \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{f(z + (h + ig)) - f(z)}{h + ig} = u_x(z) + iv_x(z) + \frac{r(h, g)}{h + ig} + \frac{is(h, g)}{h + ig}.$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\lim_{h+ig \rightarrow 0} \left| \frac{r(h, g)}{h + ig} \right| = \lim_{(h,g) \rightarrow 0} \frac{|r(h, g)|}{\|(h, g)\|_2} = 0$$

und der entsprechenden Beziehung für s . ■

Beispiel. Für die Funktion $f(z) = f(x + iy) := x^3y^2 + ix^2y^3$ gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) = 3x_0^2y_0^2 &\stackrel{!}{=} 3x_0^2y_0^2 = v_y(x_0, y_0) \quad \text{und} \\ u_y(x_0, y_0) = 2x_0^3y_0 &\stackrel{!}{=} -2x_0y_0^3 = -v_x(x_0, y_0), \end{aligned}$$

d.h. genau dann, wenn $x_0y_0(x_0^2 + y_0^2) = 0$, d.h. genau dann, wenn $x_0 = 0$ oder $y_0 = 0$. Die Funktion f ist also genau dann in $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn z_0 auf der reellen oder imaginären Achse liegt. Insbesondere ist f auf keiner offenen Teilmenge von \mathbb{C} holomorph. ■

Folgerung 1.3 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent:

- (a) f ist konstant auf D .
- (b) f ist holomorph auf D und $f'(z) = 0 \quad \forall z \in D$.

Ist D nur offen, steht in (a) *lokal konstant* statt *konstant*.

Beweis. Wir zeigen nur die Implikation (b) \Rightarrow (a). Aus $f' = 0$ auf D und aus den Beziehungen (1.2) (d.h. $f' = u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y)$) folgt

$$u_x(z) = u_y(z) = v_x(z) = v_y(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in D.$$

Wie wir aus der reellen Analysis wissen, müssen u und v und somit auch f konstante Funktionen sein. ■

Als weitere Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zeigen wir

Satz 1.4 Eine komplexe Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph und darf dort gliedweise differenziert werden.

Beweis. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Potenzreihen um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, und sei $f_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ihre n . Partialsumme. Die Real- und Imaginärteile von f bzw. f_n seien u, v bzw. u_n, v_n . Offenbar ist $f'_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$, und wir wissen bereits, dass die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ den gleichen Konvergenzradius R besitzen. Folglich konvergieren die Funktionen f_n bzw. f'_n auf jedem Kreis $\{z : |z| \leq r\}$ mit $r < R$ *gleichmäßig* gegen die Funktion $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ bzw. gegen $z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$. Dann konvergieren aber auch die Real- und Imaginärteile $u_n, v_n, u_{nx}, u_{ny}, v_{nx}, v_{ny}$ dieser Funktionen auf $\{z : |z| \leq r\}$ gleichmäßig. Hieraus folgt, dass die Funktionen u, v für $|z| < r$ partiell differenzierbar sind und dass gilt

$$u_{nx} \rightarrow u_x, \quad u_{ny} \rightarrow u_y, \quad v_{nx} \rightarrow v_x, \quad v_{ny} \rightarrow v_y \quad \text{gleichmäßig.} \quad (1.3)$$

Das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen f_n zieht daher das Bestehen dieser Differentialgleichungen für die Funktion f nach sich:

$$u_x(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{nx}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{ny}(z) = v_y(z) \quad \text{und analog} \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

für alle $|z| < r$. Schließlich sind wegen (1.3) die Funktionen u_x, u_y, v_x, v_y stetig auf $\{z : |z| < r\}$. Da $r < R$ beliebig war, erhalten wir das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f sowie die Stetigkeit der partiellen Ableitungen u_x, \dots, v_y in jedem Punkt z mit $|z| < R$. Nach Satz 1.2 ist f in $\{z : |z| < R\}$ holomorph, und es gilt

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{nx}(z) + iv_{nx}(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$$

woraus folgt, dass

$$f'(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \quad \blacksquare$$

Beispiel. Insbesondere sind die durch

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

definierten Funktionen in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} holomorph. Solche Funktionen heißen *ganze Funktionen*. Weitere Beispiele für ganze Funktionen sind Polynome $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und die Funktionen

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Außerdem folgt aus Satz 1.4, dass Regeln wie

$$(e^z)' = e^z, \quad \sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z$$

auch im Sinne der komplexen Differentiation gültig bleiben. ■

1.3 Differenzierbarkeit im Reellen und im Komplexen

Jede Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kann auch als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachtet werden. Wir wollen uns den Unterschied zwischen der Differenzierbarkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ im Punkt $z \in \mathbb{R}^2$ und der komplexen Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ klarmachen.

Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $z \in \mathbb{R}^2$ heißt, dass es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (genauer: eine \mathbb{R} -lineare Abbildung) und eine Funktion $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ so gibt, dass

$$f(z+h) - f(z) = Ah + r(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0 \in \mathbb{R}^2. \quad (1.4)$$

Die Abbildung A wird dabei durch die (reelle) Jacobimatrix

$$A \hat{=} \begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

beschrieben. Komplexe Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ können wir dagegen so deuten: Es gibt eine lineare Abbildung $B : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (genauer: eine \mathbb{C} -lineare Abbildung) und eine Funktion $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(h)}{h} = 0$ so, dass

$$f(z+h) - f(z) = Bh + s(h) \quad \text{für alle } h \text{ aus Umgebung von } 0 \in \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

Die Abbildung B wird dabei durch die (komplexe) 1×1 Matrix ($f'(z)$) bzw. einfach durch die komplexe Zahl $f'(z)$ gegeben. Der wesentliche Unterschied zwischen (1.4) und (1.6) besteht darin, dass wir in (1.4) lokal durch eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und in (1.6) durch eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $B : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ approximieren.

Wir fragen uns nun, wann allgemein durch eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} induziert wird, wenn wir wie üblich $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in \mathbb{C}$ identifizieren. Soll A \mathbb{C} -linear sein, so gilt einerseits

$$Ai = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b + id$$

und andererseits

$$Ai = Ai \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = iA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = i(a + ic) = -c + ia.$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert $a = d$ und $b = -c$. Nur reelle Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ liefern also \mathbb{C} -lineare Abbildungen. Angewandt auf die Matrix (1.5) heißt das: (1.5) liefert nur dann eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, wenn $u_x(z) = v_y(z)$ und $u_y(z) = -v_x(z)$, d.h. wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind also genau die Zusatzbedingung, die aus der Differenzierbarkeit im Reellen die komplexe Differenzierbarkeit macht.

1.4 Harmonische Funktionen

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern eine sehr einschränkende Bedingung dafür, wann eine im Reellen differenzierbare Funktion Realteil einer holomorphen Funktion ist.

Satz 1.5 *Ist $f = u + iv$ in D holomorph und sind die Funktionen u, v zweimal stetig differenzierbar (im Reellen), so gilt*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{in } D.$$

Beweis. Aus der Holomorphie von f folgt $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Erneutes Ableiten ergibt $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{xy} = v_{yy}$, $u_{yx} = -v_{xx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$ und daher $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$, $v_{xx} + v_{yy} = u_{xy} - u_{yx}$. Nach dem Satz von H.A. Schwarz sind die rechten Seiten dieser Identitäten gleich 0. ■

Wir werden später sehen, dass die geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften von u und v bereits aus der Holomorphie von f folgen. Ist u eine (reell) zweimal partiell differenzierbare Funktion, so erklärt man den *Laplaceoperator* Δ durch

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy}.$$

Funktionen u mit der Eigenschaft $\Delta u = 0$ heißen *harmonisch* oder *Potentialfunktionen*. Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind also harmonische Funktionen (wobei wir im Moment noch eine Zusatzbedingung fordern müssen). Beispielsweise sind

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2) &= \operatorname{Re}(x + iy)^2 = x^2 - y^2 =: u(x, y) \\ \operatorname{Im}(e^z) &= \operatorname{Im}(e^x(\cos y + i \sin y)) = e^x \sin y =: v(x, y) \end{aligned}$$

harmonische Funktionen.

2 Der Cauchysche Integralsatz

2.1 Komplexe Kurvenintegrale

In allen Anwendungen werden wir nur über Kurven integrieren, die sich aus Stücken von Kreisen und Geraden zusammensetzen. Wir definieren komplexe Kurvenintegrale daher nur über stückweise glatten Wegen. Eine Übertragung auf beliebige rektifizierbare Wege ist in den meisten Fällen möglich.

Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung γ von einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ in die komplexe Ebene \mathbb{C} . Der Weg γ heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist (im üblichen „reellen“ Sinn), d.h. ist $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, so sollen die beiden Funktionen $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sein. Die Ableitung $\gamma'(t)$ ist dann die komplexe Zahl $\alpha'(t) + i\beta'(t)$ oder das Paar $(\alpha'(t), \beta'(t)) \in \mathbb{R}^2$. Der Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so gibt, dass die Einschränkung von γ auf jedes Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ einen stetig differenzierbaren Weg ergibt. Im Weiteren sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, $\Gamma := \gamma([a, b])$ die durch γ beschriebene Kurve und $f = u + iv : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

Definition 2.1 Seien $\alpha, \beta, \gamma, f, u, v$ wie soeben beschrieben und γ stetig differenzierbar. Dann definieren wir das komplexe Wegintegral von f entlang γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)) dt + i \int_a^b (v(\gamma(t))\alpha'(t) + u(\gamma(t))\beta'(t)) dt.$$

Setzt sich der stückweise stetig differenzierbare Weg γ aus den stetig differenzierbaren Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ zusammen, so definieren wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Vereinbaren wir folgende Definition für das Integral über eine stetige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} g)(t) dt, \quad (2.1)$$

so erhalten wir weiter

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t) + iv(\gamma(t))\alpha'(t) + iu(\gamma(t))\beta'(t)) dt.$$

Nun ist aber, wie man durch Ausmultiplizieren leicht nachrechnet, der Integrand dieses Integrals gleich

$$\left(u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))\right) \cdot (\alpha'(t) + i\beta'(t)) = f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

und wir gelangen zur äquivalenten

Definition 2.2 Seien f, γ wie oben und γ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

wobei das rechte Integral im Sinne von (2.1) zu verstehen ist.

Eigenschaften von komplexen Wegintegralen

- (a) $\int_{\gamma} f(z) dz$ kann auch über Riemannsummen erklärt werden.
 (b) $\int_{\gamma} f(z) dz$ hängt nur von der Kurve Γ und deren Orientierung, nicht aber von der Parametrisierung γ ab. Wir schreiben daher oft $\int_{\Gamma} f(z) dz$.

(c) $\int_{\gamma} (f + g)(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz.$

(d) $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$



(e) $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$



(f) $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|.$

- (g) Seien $g : \hat{D} \rightarrow D$ eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung, $\hat{\gamma} : [a, b] \rightarrow \hat{D}$ ein stetig differenzierbarer Weg und $\gamma := g \circ \hat{\gamma}$. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\hat{\gamma}} f(g(\zeta)) g'(\zeta) d\zeta.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{g \circ \hat{\gamma}} f(z) dz = \int_a^b f(g(\hat{\gamma}(t))) g'(\hat{\gamma}(t)) \hat{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_{\hat{\gamma}} f(g(\zeta)) g'(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

- (h) Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und Γ die zugehörige Kurve. Weiter seien f_n stetige Funktionen auf Γ , die gleichmäßig gegen eine Funktion f auf Γ konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Beweis: Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen f_n ist f stetig; daher existiert $\int_{\gamma} f(z) dz$. Wegen (c) und (f) gilt:

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Durch Betrachten der Partialsummenfolge erhält man ein analoges Vertauschungsergebnis für gleichmäßig konvergente Reihen.

- (i) Eine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f , wenn $F' = f$. Ist f stetig, $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ stetig differenzierbar und F Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis:

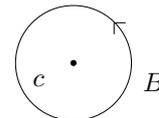
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(\gamma(t))) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir berechnen nun einige der für die Funktionentheorie wichtigsten Integrale.

Beispiel 1. Sei B der Kreis mit Mittelpunkt c und Radius $r > 0$, und wir durchlaufen den Rand ∂B von B im Gegenuhrzeigersinn. (Sofern nichts anderes gesagt wird, werden wir Kreise stets so orientieren.) Dann gilt

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1. \end{cases}$$

Der Rand von B ist die durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto c + re^{it}$ beschriebene Kurve. Wegen $\gamma'(t) = rie^{it}$ ist



$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = \int_{\gamma} (z - c)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = r^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt.$$

Für $n = -1$ ist dieses Integral gleich $2\pi i$. Für $n \neq -1$ ist $F(t) := \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}$ eine Stammfunktion von $f(t) := ie^{i(n+1)t}$, und daher ist

$$\int_{\partial B} (z - c)^n dz = r^{n+1} F(2\pi) - r^{n+1} F(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Beispiel 2. Sei wieder $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$ und ∂B wie in Beispiel 1 orientiert. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in B \\ 0 & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}. \end{cases}$$

Ein Vorgehen wie in Beispiel 1 ist wenig aussichtsreich. Durch einen Trick reduzieren wir das Problem auf den Fall $z = c$. Sei zunächst $z \in B$, d.h. $|z - c| < r$. Wir setzen $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ mit $\zeta \in \partial B$ und erhalten wegen $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - c - (z - c)} = \frac{1}{\zeta - c} \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{\zeta - c} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

(geometrische Reihe).

Da für alle $\zeta \in \partial B$ gilt $|w| = \frac{|z-c|}{r} < 1$, ist $\sum_{n=0}^{\infty} |w|^n$ eine absolut konvergente Majorante für $\sum w^n$. Diese Reihe konvergiert also nach dem Vergleichskriterium gleichmäßig auf ∂B . Mit Eigenschaft (h) erhalten wir für alle z mit $|z - c| < r$:

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - c} \left(\frac{z - c}{\zeta - c} \right)^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (z - c)^n \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{(\zeta - c)^{n+1}},$$

und dies ist gleich $2\pi i$ nach Beispiel 1.

Für z mit $|z - c| > r$ schreiben wir $\frac{1}{\zeta - z}$ als $\frac{-1}{z - c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - c}{z - c} \right)^n$ und erhalten

$$\int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - c)^{n+1}} \int_{\partial B} (\zeta - c)^n d\zeta = 0. \quad \blacksquare$$

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Der Cauchysche Integralsatz (in einer seiner Fassungen) besagt, dass $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede holomorphe Funktion f und jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren (oder wenigstens rektifizierbaren) Weg γ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D . Wenn wir wüssten, dass f eine Stammfunktion besitzt oder dass die Funktionen u_x, u_y, v_x, v_y stetig sind, würde der Cauchysche Integralsatz unmittelbar aus den bekannten Sätzen für reelle Wegintegrale folgen. Wir

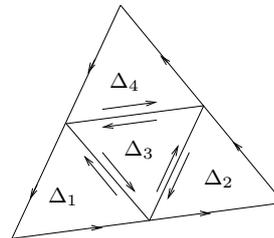
wollen den Satz ohne diese Zusatzvoraussetzungen beweisen und müssen daher etwas weiter ausholen. Allerdings werden wir den Cauchyschen Integralsatz nur in einer seiner einfachsten (für viele Anwendungen ausreichenden) Formulierungen beweisen. Wichtigstes Hilfsmittel für den Beweis ist das

Lemma 2.3 (Integrallemma von Goursat) Sei $D \neq \emptyset$ offen und f holomorph auf D . Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Mit anderen Worten: Der Integralsatz gilt für Dreiecksränder.

Beweis. Für jedes Dreieck Δ bezeichnen wir mit $L(\partial\Delta)$ seinen Umfang, und wir setzen $a(\Delta) := \int_{\partial\Delta} f(z)dz$. Durch Seitenhalbierung teilen wir das Ausgangsdreieck Δ in 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ und orientieren deren Ränder wie in der Skizze.



Wegen Eigenschaften (d) und (e) ist dann

$$a(\Delta) = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 a(\Delta_j).$$

Unter den vier Integralen $a(\Delta_j)$ wählen wir ein betragsgrößtes aus. Das zugehörige Dreieck bezeichnen wir mit Δ^1 . Dann gilt offenbar

$$|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|, \quad L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta).$$

Dieses Verfahren wiederholen wir für Δ^1 und erhalten ein Dreieck Δ^2 . So fortfahrend entsteht eine Folge $\Delta \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$ abgeschlossener Dreiecke mit

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)|, \quad L(\partial\Delta^n) = 2^{-n}L(\partial\Delta). \quad (2.2)$$

Nach dem Intervallschachtelungssatz besteht $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$ aus genau einem Punkt c . Da f holomorph in D ist und $c \in \Delta$ zu D gehört, gibt es eine auf D stetige Funktion mit $g(c) = 0$, so dass

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + (z - c)g(z) \quad \text{für alle } z \in D \quad (2.3)$$

(Zerlegungssatz an der Stelle c). Die speziellen Funktionen $z \mapsto f(c)$ und $z \mapsto f'(c)(z - c)$ besitzen trivialerweise Stammfunktionen. Daher gilt

$$\int_{\partial\Delta^n} f(c)dz = 0, \quad \int_{\partial\Delta^n} f'(c)(z - c)dz = 0, \quad n \geq 1,$$

und aus (2.3) folgt durch Integration über $\partial\Delta^n$

$$a(\Delta^n) = \int_{\partial\Delta^n} (z - c) g(z) dz, \quad n \geq 1.$$

Mit der Abschätzung (f) und mit (2.2) erhalten wir

$$|a(\Delta^n)| \leq L(\partial\Delta^n) \sup_{z \in \partial\Delta^n} |(z - c)g(z)| \leq L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)}$$

und

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n L(\partial\Delta^n)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)} = L(\partial\Delta)^2 \|g\|_{C(\partial\Delta^n)}$$

für alle $n \geq 1$. Wegen $g(c) = 0$ und der Stetigkeit von g an der Stelle c findet man schließlich zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $\|g\|_{C(\partial\Delta^{n_0})} \leq \varepsilon$. Für jedes feste $\varepsilon > 0$ ist daher

$$|a(\Delta)| \leq \varepsilon L(\partial\Delta)^2.$$

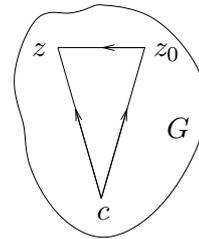
Da ε beliebig ist, folgt $|a(\Delta)| = 0$. ■

Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *Sterngebiet mit Zentrum c* , falls für jeden Punkt $z \in D$ die Verbindungsstrecke $[c, z]$ komplett in D liegt.

Satz 2.4 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete) *Seien G ein Sterngebiet mit Zentrum c und f holomorph auf G . Dann ist $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta) d\zeta$ eine Stammfunktion für f auf G . Insbesondere ist für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G :*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis. Wegen $[c, z] \subset G$ ist die Funktion F korrekt definiert. Für den Beweis des Satzes genügt es zu zeigen, dass F Stammfunktion von f ist, d.h. dass F in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar und $F'(z_0) = f(z_0)$ ist. Sei $z \in G$ so nahe an z_0 , dass auch die Strecke $[z_0, z]$ noch ganz in G liegt. Nach dem Lemma von Goursat ist



$$\int_{[c,z_0] + [z_0,z] + [z,c]} f(\zeta) d\zeta = 0$$

und demzufolge

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.4)$$

Wir definieren in einer Umgebung von z_0

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

und müssen die Stetigkeit von F_1 an der Stelle z_0 beweisen. Wegen (2.4) und wegen $\int_{[z_0, z]} d\zeta = z - z_0$ ist für $z \neq z_0$

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta,$$

woraus mit Abschätzung (f) folgt:

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \underbrace{\frac{1}{|z - z_0|} L([z_0, z])}_{=1} \sup_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)|.$$

Da f stetig in z_0 ist, folgt hieraus die Stetigkeit von F_1 in z_0 . ■

Wir formulieren noch eine allgemeinere Version des Cauchyschen Integralsatzes und benötigen dazu den Begriff eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Anschaulich bedeutet dies, dass sich jede geschlossene Kurve im Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Hier ist die exakte Definition:

Definition 2.5 Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei geschlossene Wege in einem Gebiet G . Dann heißt γ_0 zu γ_1 homotop in G , wenn es eine stetige Funktion $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ so gibt, dass

$$\Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) \quad \text{und} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) \quad \text{für } s \in [0, 1]$$

und

$$\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Sind γ_0 und γ_1 zueinander homotop, so schreiben wir $\gamma_1 \sim \gamma_0$. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 2.6 Ein geschlossener Weg γ in G heißt nullhomotop ($\gamma \sim 0$), wenn γ zu einem konstanten Weg homotop ist.

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass in Gebieten je zwei konstante Wege zueinander homotop sind.

Definition 2.7 Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.

Eine andere anschauliche Deutung des einfachen Zusammenhanges ist, dass das Gebiet keine Löcher aufweist. Bezeichnen wir mit $\mathbb{C}^\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die um den Punkt $\infty \notin \mathbb{C}$ erweiterte komplexe Ebene (die wir über die stereographische Projektion mit der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren), so gilt

Satz 2.8 *Ein Gebiet G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn sein Komplement $\mathbb{C}^\infty \setminus G$ in \mathbb{C}^∞ zusammenhängend ist.*

Satz 2.9 (Cauchyscher Integralsatz) *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ in G und jede auf G holomorphe Funktion f .*

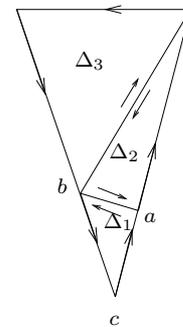
Beweise finden Sie in Conway, Kapitel VIII Satz 2.2, und Kapitel IV Satz 6.15. Dort finden Sie auch weitere Verallgemeinerungen des Cauchyschen Integralsatzes.

2.3 Die Cauchysche Integralformel

Für den Beweis der Cauchyschen Integralformel benötigen wir Verschärfungen des Goursatschen Lemmas und des Cauchyschen Integralsatzes aus 2.2. Später (Riemannscher Fortsetzungssatz) werden wir sehen, dass diese „Verschärfung“ gar keine ist.

Lemma 2.10 (Lemma von Goursat für punktierte Dreiecke) *Sei $D \neq \emptyset$ offen, $c \in D$, f stetig auf D und holomorph auf $D \setminus \{c\}$. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, welches c als Eckpunkt hat,*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$



Beweis. Wir wählen auf den von c ausgehenden Seiten von Δ zwei Punkte a, b und erhalten eine Zerlegung von Δ in Teildreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ wie in der Skizze. Wegen Eigenschaften (d) und (e) gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz.$$

Nach dem Goursatschen Lemma, angewandt auf Δ_2 und Δ_3 , ist weiter

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz.$$

Hieraus folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq L(\partial\Delta_1) \cdot \|f\|_{C(\Delta)},$$

und da $L(\partial\Delta_1)$ durch Wahl von a und b beliebig klein gemacht werden kann, ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$. ■

Mit diesem Lemma beweist man wie in Abschnitt 2.2 den

Satz 2.11 (Cauchyscher Integralsatz für punktierte Sterngebiete) Sei G ein Sterngebiet mit Zentrum c , und die Funktion f sei stetig auf G und holomorph in $G \setminus \{c\}$. Dann ist $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta) d\zeta$ eine Stammfunktion von f auf G , und für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Satz 2.12 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben) Sei D offen, f holomorph auf D , und sei $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - c| \leq r\}$ Kreisscheibe, die komplett in D liegt und deren Rand im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Dann gilt für alle z im Inneren von B

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Die Werte von f im Inneren von B sind also vollständig durch die Werte von f auf dem Rand von B bestimmt.

Beweis. Für jedes feste z im Inneren von B betrachten wir die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{falls } \zeta \in D \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{falls } \zeta = z. \end{cases}$$

Da f in D holomorph ist, ist g holomorph auf $D \setminus \{z\}$ und stetig auf D . Weiter: da $B \subset D$, gibt es ein $s > r$, so dass auch die offene Kreisscheibe $B' := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < s\}$ in D liegt. Die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf das sternförmige (sogar konvexe) Gebiet B' und die Funktion g liefern $\int_{\partial B} g(\zeta) d\zeta = 0$. Benutzen wir noch Beispiel 2 aus 2.1, so folgt:

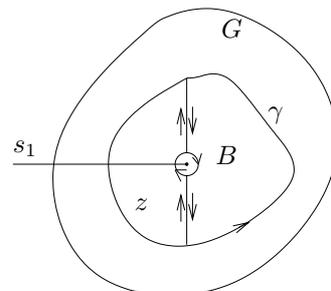
$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial B} g(\zeta) d\zeta &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z), \end{aligned}$$

woraus durch Umstellen die Behauptung folgt. ■

Die Cauchysche Integralformel gilt nicht nur für Kreisscheiben. Eine nützliche Verallgemeinerung des obigen Resultats ist

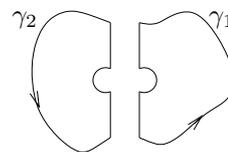
Satz 2.13 (Cauchysche Integralformel) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener und doppelpunktfreier Weg in G , der im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist (das Innere von γ liege also links von γ). Weiter sei z im Inneren von γ und f holomorph auf G . Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



Beweisidee Wir führen den Beweis zurück auf die schon bewiesene Integralformel für Kreisscheiben. Dann wählen wir eine abgeschlossene Kreisscheibe B um z , die ganz im Inneren von γ liegt und erzeugen wie in der Skizze zwei geschlossene Kurven γ_1 und γ_2 .

Weiter sei s_1 ein von z ausgehender Strahl, der γ_1 nicht schneidet. Wir schneiden G von z beginnend entlang s_1 auf, bis wir auf den Rand von G treffen. Das so erhaltene „Schlitzgebiet“ G_1 ist wieder einfach zusammenhängend, die Kurve γ_1 liegt in diesem Gebiet, und die Funktion $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist auf G_1 holomorph. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist



$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad \text{Analog ist auch} \quad \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Damit ist

$$0 = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

Die Cauchysche Integralformel für Kreisgebiete liefert nun die Behauptung. ■

2.4 Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen

In Abschnitt 1.2, Satz 1.4, haben wir gesehen, dass jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ mit positivem Konvergenzradius R im Inneren ihres Konvergenzkreises $\{z : |z-c| < R\}$ holomorph ist und dass die abgeleitete Potenzreihe

$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - c)^{k-1}$ den gleichen Konvergenzradius hat. Hieraus folgt natürlich, dass holomorphe Funktionen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen, unendlich oft komplex differenzierbar sind. Wir zeigen nun, dass sich jede holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln lässt. Diese Aussage wird leicht aus dem folgenden Lemma folgen.

Lemma 2.14 (Entwicklungslemma) *Sei γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in \mathbb{C} mit zugehöriger Kurve Γ , und sei $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Für jedes $c \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - c)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{k+1}} d\zeta$$

in jeder Kreisscheibe um c , die Γ nicht trifft, gegen F .

Weiter: Die Funktion F ist in $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ unendlich oft komplex differenzierbar, und

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (2.5)$$

Beweis von Lemma 2.14 Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ und $B = \{z : |z - c| < r\}$ eine Kreisscheibe, welche Γ nicht trifft. Bekanntlich konvergiert für alle w mit $|w| < 1$ die Reihe

$$\frac{1}{(1 - w)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} w^{n-k}. \quad (2.6)$$

Für $z \in B$ und $\zeta \in \Gamma$ ist $w := \frac{z-c}{\zeta-c}$ vom Betrag < 1 , und wegen (2.6) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} &= \frac{1}{((\zeta - c) - (z - c))^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(\zeta - c)^{k+1} (1 - w)^{k+1}} = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{(z - c)^{n-k}}{(\zeta - c)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Mit $g_n(\zeta) := f(\zeta)/(\zeta - c)^{n+1}$ erhalten wir für alle $z \in B$

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} k! g_n(\zeta) (z - c)^{n-k} \right) d\zeta. \quad (2.7)$$

Die Reihe unter dem rechten Integral konvergiert für jedes feste $z \in B$ gleichmäßig auf Γ . Wegen $|\zeta - c| \geq r$ ist nämlich mit $q := \frac{1}{r} |z - c|$

$$|g_n(\zeta)| |z - c|^{n-k} = |f(\zeta)| \frac{|z - c|^{n-k}}{|\zeta - c|^{n+1}} \leq \frac{|f(\zeta)|}{r^{k+1}} q^{n-k} \leq \frac{\|f\|_{C(\Gamma)}}{r^{k+1}} q^{n-k},$$

und wegen $q < 1$ und (2.6) konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} q^{n-k}$. Wir können also in (2.7) Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} k! (z - c)^{n-k} \cdot a_n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

Damit ist klar, dass F auf B durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ dargestellt wird (in obigen Herleitungen $k = 0$ setzen) und dass (2.5) gilt. ■

Man kann also jeder auf Γ stetigen Funktion f eine auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ holomorphe Funktion F zuordnen. Der Zusammenhang zwischen f und F ist nicht offensichtlich. So gilt z.B. i.Allg. NICHT, dass $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = f(z_0)$ für $z_0 \in \Gamma$. Dies ändert sich auf Grund der Cauchyschen Integralformel, wenn wir von vornherein f als holomorph (in einer Umgebung von Γ) annehmen.

Satz 2.15 (Entwicklungssatz) *Sei D offen, $c \in D$, und B sei die größte offene Kreisscheibe um c in D . Dann ist jede in D holomorphe Funktion f um c in eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - c)^n$ entwickelbar, die auf B gegen f konvergiert. Die Taylorkoeffizienten ergeben sich aus*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei B' irgendein Kreis um c ist, der kleiner als B ist, und dessen Rand im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Insbesondere ist f in D unendlich oft komplex differenzierbar, und in jeder Kreisscheibe B' gelten die Cauchyschen Integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in B', \quad n \geq 0.$$

Beweis. Da f holomorph, gilt die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B'.$$

Das Entwicklungslemma (angewandt auf $\Gamma := \partial B'$ und $F := f$ auf B') liefert die Behauptung. ■

Anmerkungen

- Funktionen, die auf einer offenen Menge *einmal* komplex differenzierbar sind, sind dort bereits *unendlich oft* komplex differenzierbar.

- Auf einer Kreisscheibe unendlich oft komplex-differenzierbare Funktionen lassen sich in auf dieser Scheibe konvergente Potenzreihen entwickeln (man vergleiche dazu die Situation im Reellen).
- Man kann die unendliche Differenzierbarkeit holomorpher Funktion auch beweisen, indem man von der Cauchyschen Integralformel ausgeht und die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation beweist. Wir haben dagegen die Vertauschbarkeit von Integration und Summation benutzt.

Es folgen einige unmittelbare Anwendungen des Entwicklungssatzes. Die erste betrifft eine gewisse Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes.

Satz 2.16 (Satz von Morera) *Sei f auf einem sternförmigen Gebiet G stetig, und für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Weg γ in G gelte $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$. Dann ist f holomorph auf G .*

Beweis. Sei c ein Zentrum von G . Wie im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes macht man sich klar, dass $F(z) := \int_{[c,z]} f(\zeta)d\zeta$ eine Stammfunktion für f ist, d.h. dass F komplex differenzierbar und $F'(z) = f(z)$ ist. Nach dem Entwicklungssatz existiert auch F'' und damit f' . ■

Als nächstes überlegen wir uns, dass die “Verschärfung“ des Goursatschen Lemmas gar keine war.

Satz 2.17 (Riemannscher Fortsetzungssatz) *Sei D offen, $c \in D$, und die Funktion f sei auf $D \setminus \{c\}$ holomorph und in einer Umgebung U von c beschränkt. Dann läßt sich f zu einer auf ganz D holomorphen Funktion fortsetzen.*

Dieser Satz ist scharf in folgendem Sinn: Ist f auf jeder Umgebung von c unbeschränkt, so ist f nicht zu einer stetigen Funktion auf D fortsetzbar.

Beweis. O.E.d.A sei $c = 0$. Wir betrachten die Funktionen

$$g(z) := \begin{cases} zf(z) & \text{für } z \in D \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h(z) := zg(z) \text{ für } z \in D.$$

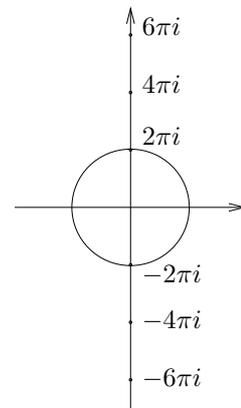
Unsere Annahme garantiert, dass g stetig in 0 ist. Wegen $h(z) = zg(z) = h(0) + zg(z)$ ist daher h komplex differenzierbar in $0 \in D$. Auf $D \setminus \{0\}$ ist h ebenfalls komplex differenzierbar, da dort gilt $h(z) = z^2f(z)$. Also ist h holomorph auf D und folglich in einer Umgebung U der 0 in eine Potenzreihe entwickelbar: $h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Nach Konstruktion ist $h(0) = 0$ und außerdem $h'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0) = 0$. Die Potenzreihe von h reduziert sich also auf $\hat{h}(z) = z^2(a_2 + a_3z + \dots)$. Wegen $h(z) = z^2f(z)$ für $z \neq 0$ ist $\hat{f}(z) := a_2 + a_3z + \dots$ die holomorphe Fortsetzung von f auf ganz U . ■

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Anwendungen auf Potenzreihen.

Division von Potenzreihen. Sei $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ eine in einer Umgebung von 0 konvergente Potenzreihe und sei $a_0 \neq 0$. Dann ist $1/f$ in einer Umgebung von 0 holomorph (Quotientenregel) und nach dem Entwicklungssatz dort wieder in eine Potenzreihe entwickelbar. (Man vergleiche den mühsamen Beweis aus Analysis II.)

Bestimmung von Konvergenzradien. Der Entwicklungssatz gestattet häufig die unmittelbare Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(z) = z/(e^z - 1)$.

Diese ist zunächst für alle z mit $e^z \neq 1$ definiert, d.h. für alle $z \neq 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Sie ist jedoch durch die Festlegung $f(0) := 1$ holomorph auf den Punkt 0 fortsetzbar, denn $e^z - 1 = z(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots)$. Wir können f also in einer Umgebung der 0 in eine Potenzreihe entwickeln, und diese Reihe konvergiert im größten Kreis um 0, der im Holomorphiegebiet liegt. Der Konvergenzradius der Potenzreihe von f ist also 2π .



3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

3.1 Der Identitätssatz

Der Identitätssatz zeigt einen überraschend engen Zusammenhang zwischen den Werten einer holomorphen Funktion auf.

Satz 3.1 (Identitätssatz) *Sei $G \neq \emptyset$ ein Gebiet, und f, g seien holomorphe Funktionen auf G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.
- (ii) Die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ enthält unendlich viele Punkte und besitzt einen Häufungspunkt in G .
- (iii) Es gibt ein $c \in G$ so, dass $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \geq 0$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): ist trivial.

(ii) \Rightarrow (iii): Sei $h := f - g$ und $c \in G$ ein Häufungspunkt der Menge $M := \{z \in G : h(z) = 0\}$. Wir zeigen, dass $h^{(n)}(c) = 0$ für alle n . Angenommen, dies gilt nicht. Dann finden wir ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ mit $h^{(m)}(c) \neq 0$. Nach dem Entwicklungssatz gilt dann auf jedem Kreis $B \subset G$ um c :

$$h(z) = (z - c)^m h_m(z),$$

wobei h_m eine auf B holomorphe Funktion ist. Wegen $h^{(m)}(c) \neq 0$ ist auch $h_m(c) \neq 0$, und aus Stetigkeitsgründen ist dann $h_m(z) \neq 0$ für alle z aus einer Umgebung $U \subset B$ von c . Die Funktion h hat also *keine* Nullstellen in $U \setminus \{c\}$, d.h. c kann kein Häufungspunkt von M sein. \downarrow

(iii) \Rightarrow (i): Sei $h := f - g$ und $S_k := \{z \in G : h^{(k)}(z) = 0\}$. Da $h^{(k)}$ stetig ist, ist jede Menge S_k abgeschlossen in G , und daher ist auch $S := \bigcap_k S_k$ abgeschlossen in G . Andererseits ist S offen in G : Ist nämlich $z \in S$, so können wir h in einer Umgebung U von z in eine Potenzreihe um z entwickeln, welche dann die Nullreihe ist. Also gilt $U \subseteq S$.

Da G zusammenhängend ist, sind die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von G die Mengen \emptyset und G . Wegen $c \in S$ ist S nicht leer und daher $S = G$. ■

Folgerung 3.2 *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein das Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umfassendes Gebiet und f eine Funktion auf I , so gibt es höchstens eine auf G holomorphe Funktion F , die auf I mit f übereinstimmt.*

Man kann also z.B. die reelle Sinusfunktion nur auf eine einzige Weise zu einer auf \mathbb{C} holomorphen Funktion fortsetzen. Mit dem Identitätssatz lassen sich auch analytische Identitäten fortsetzen („Permanenzprinzip“). Nehmen wir beispielsweise an, wir haben e^z als holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} definiert, wissen aber nur für alle reellen w, z , dass $e^{w+z} = e^w e^z$. Für ein fixiertes $w \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen $f(z) := e^{w+z}$ und $g(z) := e^w e^z$ auf \mathbb{C} . Diese sind holomorph auf \mathbb{C} und stimmen auf \mathbb{R} überein. Also stimmen sie auf \mathbb{C} überein; es ist also $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Wiederholen wir diese Überlegung mit fixiertem $z \in \mathbb{C}$, erhalten wir die Gültigkeit von $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. ■

3.2 Der Satz von Liouville

Zur Erinnerung: eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion heißt *ganze Funktion*.

Satz 3.3 (Satz von Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis. Sei f eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter sei $c \in \mathbb{C}$ und B_R eine Kreisscheibe um c mit Radius R . Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$f'(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^2} d\zeta.$$

Dieses Integral läßt sich wie folgt abschätzen:

$$|f'(c)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Lassen wir in dieser Abschätzung $R \rightarrow \infty$ laufen, folgt $f'(c) = 0$. Da c beliebig war, ist f' überall 0, und da \mathbb{C} zusammenhängend ist, ist f eine Konstante. ■

Satz 3.4 (Verallgemeinerter Satz von Liouville) *Gilt für eine ganze Funktion f die Abschätzung $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq R_0$, so ist f ein Polynom höchstens n -ten Grades.*

Beweis. Der Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion nach n . Die Aussage für $n = 0$ ist der Satz von Liouville. Wir nehmen an, die Aussage des Satzes sei für $n - 1$ richtig. Sei f eine Funktion mit Eigenschaften wie im Satz formuliert.

Nach dem Fortsetzungssatz von Riemann ist

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

eine ganze Funktion, und für alle $|z| \geq \max\{1, R_0\}$ gilt die Abschätzung

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{|f(z)| + |f(0)|}{|z|} \leq \frac{M|z|^n + |f(0)| |z|^n}{|z|} = (M + |f(0)|) |z|^{n-1}.$$

Nach Induktionsannahme ist \tilde{f} ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$. Also ist $f(z) = f(0) + z\tilde{f}(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. ■

Wir zeigen nun, wie der Satz von Liouville zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benutzt werden kann. Dazu benötigen wir Aussagen über das Verhalten von Polynomen im Unendlichen.

Lemma 3.5 (Wachstumslemma) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gibt es zu jedem $G > 0$ ein $R > 0$ so, dass $|P(z)| \geq G$ für alle $|z| \geq R$.

Beweis. Sei $G > 0$ vorgegeben. Mit der Dreiecksungleichung ist zunächst

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k.$$

Für $|z| \geq 1$ und mit $m := \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$ folgt hieraus

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{n-1} = |a_n||z|^n - m|z|^{n-1} = |a_n||z|^n \left(1 - \frac{m}{|a_n||z|}\right).$$

Für $|z| \geq \max\{1, \frac{2m}{|a_n|}\}$ erhält man weiter

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2} |a_n||z|^n.$$

Wählt man schließlich $R = \max\{1, \frac{2m}{|a_n|}, \sqrt[n]{\frac{2G}{|a_n|}}\}$, so ist für alle $|z| \geq R$ tatsächlich $|P(z)| \geq G$. ■

Satz 3.6 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Sei P Polynom vom Grad $n \geq 1$ ohne komplexe Nullstellen. Dann ist $1/P$ eine ganze Funktion. Weiter gibt es nach Lemma 3.5 ein $R > 0$ so, dass $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$. Dann ist $|1/P(z)| \leq 1$ für alle $|z| \geq R$. Auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ist die stetige Funktion $|1/P|$ offenbar ebenfalls beschränkt. Die ganze Funktion $1/P$ ist also beschränkt und somit nach Liouville eine Konstante. Dies steht im Widerspruch zu $n \geq 1$. ■

Wie man aus der Algebra weiß, folgt nun leicht, dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ genau n komplexe Nullstellen besitzt (gezählt unter Beachtung ihrer Vielfachheit), und dass jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ eindeutig in n Linearfaktoren zerlegt werden kann:

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n \prod_{r=1}^n (z - z_r),$$

wobei z_r die Nullstellen von P sind.

3.3 Das Maximumprinzip

Als einfache Konsequenz der Cauchyschen Integralformel vermerken wir zunächst die *Mittelwertungleichung* für holomorphe Funktionen. Sei D offen, $B := \{z : |z - c| \leq R\} \subset D$ und f holomorph auf D . Dann ist

$$|f(c)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} d\zeta \right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi} \frac{\max_{\zeta \in \partial B} |f(\zeta)|}{R} = \max_{\zeta \in \partial B} |f(\zeta)|. \quad (3.1)$$

Unser Beweis des Maximumprinzips beruht auf einer weiteren bemerkenswerten Eigenschaft holomorpher Funktionen. Allgemein heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen *offen*, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U in Y offen ist (im Gegensatz dazu bedeutet Stetigkeit, dass das Urbild $f^{-1}(W)$ jeder in Y offenen Menge W in X offen ist).

Satz 3.7 (Offenheitssatz) *Sei D Gebiet und f holomorph auf D und nicht konstant. Dann ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ offen.*

Beweis. Sei $U \subseteq D$ offen und $c \in U$. Wir müssen zeigen, dass $f(U)$ eine Kreisscheibe um $f(c)$ enthält.

Da f nicht konstant ist, gibt es eine Kreisscheibe B um c mit $\overline{B} \subset U$, so dass $f(c) \notin f(\partial B)$ (Identitätssatz). Für dieses B ist also

$$2\delta := \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(c)| > 0. \quad (3.2)$$

Wir zeigen nun genauer, dass die Kreisscheibe $B_\delta(f(c)) := \{w \in \mathbb{C} : |f(c) - w| < \delta\}$ zu $f(U)$ gehört. Wir müssen also zeigen, dass es für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $|f(c) - w| < \delta$ ein $\hat{z} \in U$ so gibt, dass $f(\hat{z}) = w$. Angenommen, es gibt ein w mit dieser Eigenschaft, für das kein solches \hat{z} existiert. Dann ist $f(z) - w \neq 0$ auf U , und damit ist die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$ holomorph auf U . Für alle $z \in \partial B$ gilt aber

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - f(c)| - |f(c) - w| \stackrel{(3.2)}{>} \delta, \quad (3.3)$$

und die Mittelwertungleichung (3.1) auf ∂B liefert

$$\frac{1}{|f(c) - w|} \stackrel{(3.1)}{\leq} \max_{z \in \partial B} \frac{1}{|f(z) - w|} \stackrel{(3.3)}{<} \frac{1}{\delta} < \frac{1}{|f(c) - w|}. \quad \downarrow \quad \blacksquare$$

Folgerung 3.8 *Auf einem Gebiet definierte holomorphe Funktionen mit konstantem Real- oder Imaginärteil oder mit konstantem Betrag sind konstant.*

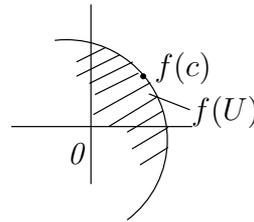
Folgerung 3.9 (Gebietstreue) *Nichtkonstante holomorphe Funktionen bilden Gebiete auf Gebiete ab.*

Denn: wegen der Holomorphie werden offene Mengen auf offene Mengen abgebildet, und wegen der Stetigkeit zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende.

Als wohl wichtigste Folgerung des Offenheitssatzes erhalten wir

Satz 3.10 (Maximumprinzip) Sei G ein Gebiet, und f sei eine auf G holomorphe Funktion, die in G ein lokales Maximum ihres Absolutbetrages annimmt. Dann ist f konstant.

Beweis. Sei $c \in G$ und $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von c mit $|f(z)| \leq |f(c)|$ für alle $z \in U$. Dann gilt $f(U) \subseteq \{w : |w| \leq |f(c)|\}$, d.h. $f(U)$ ist keine offene Umgebung von $f(c)$. Nach dem Offenheitssatz ist f konstant. ■



Satz 3.11 (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete) Da Gebiet G sei beschränkt, und f sei eine auf \overline{G} stetige und in G holomorphe und nichtkonstante Funktion. Dann nimmt $|f|$ sein Maximum nur auf dem Rand von G an:

$$|f(z)| < \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in G.$$

Der Beweis ist klar: Als stetige Funktion muss $|f|$ auf \overline{G} sein Maximum annehmen. Lokale Maxima im Inneren gibt es jedoch nicht, da f nicht konstant ist. ■

Mit Hilfe des Maximumprinzips zeigen wir eine Aussage, die benötigt wird, wenn man z.B. diejenigen holomorphen Funktionen charakterisieren will, die die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ oder die obere Halbebene auf sich selbst abbilden.

Lemma 3.12 (Schwarzsches Lemma) Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann ist entweder

$$f(z) = e^{i\theta} z \quad \text{mit einem } \theta \in \mathbb{R} \text{ für alle } z \in \mathbb{D},$$

oder

$$|f'(0)| < 1 \quad \text{und} \quad |f(z)| < |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Beweis. Wir haben bereits mehrfach benutzt, dass die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

auf \mathbb{D} holomorph ist. Für jedes $r \in (0, 1)$ ist

$$\max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r},$$

woraus mit dem Maximumprinzip folgt

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \text{für alle } |z| \leq r.$$

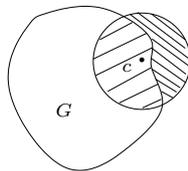
Lassen wir $r \rightarrow 1$ streben, folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $|z| < 1$ und somit

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \quad \text{sowie} \quad |f'(0)| = |g(0)| \leq 1.$$

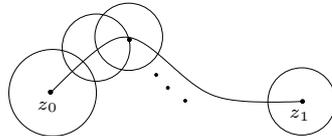
Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ist, so ist $|g(0)| = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$, d.h. g nimmt das Betragsmaximum im Inneren des Kreises \mathbb{D} an. Nach dem Maximumprinzip ist g in diesem Fall eine Konstante vom Betrag 1, d.h. es ist $g(z) = e^{i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$. ■

3.4 Das Prinzip der analytischen Fortsetzung

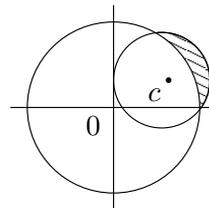
Sei G ein Gebiet und f holomorph auf G . Entwickelt man f um einen Punkt $c \in G$ in eine Potenzreihe, so konvergiert diese im größten in G enthaltenen Kreis um c . Der Konvergenzradius der Potenzreihe kann aber größer sein als der Abstand von c zu ∂G . In diesem Fall kann man die Potenzreihe benutzen, um f auf einem größeren Gebiet zu definieren bzw. um f über G hinaus *analytisch* oder holomorph *fortzusetzen*.



Dieses Prinzip wird häufig mehrfach angewandt, um eine in einer Umgebung eines Punktes z_0 definierte holomorphe Funktion längs einer Kurve Γ bis zu einem Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ fortzusetzen („Kreiskettenverfahren“).



Beispiel 1. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist auf \mathbb{D} holomorph. Ihre Potenzreihenentwicklung um den Punkt $c \in \mathbb{D}$ lautet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(1-c)^{n+1}}$ (beachte: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$). Der Konvergenzradius ist offenbar gleich $|1-c|$. Für $|1-c| > 1-|c|$ hat man also eine echte Fortsetzung. Natürlich ist in diesem Beispiel die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ die größtmögliche analytische Fortsetzung. ■



Beispiel 2. Die Funktion $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ist in \mathbb{D} holomorph (warum?), läßt sich aber auf keine Weise über den Rand von \mathbb{D} hinaus analytisch fortsetzen. Wäre sie fortsetzbar, so müsste f ja wenigstens auf ein Stück von $\partial\mathbb{D}$ stetig fortsetzbar sein. Wir überlegen uns, dass dies nicht zutrifft.

Dazu schreiben wir $z \in \mathbb{D}$ als $z = \rho e^{2\pi i \alpha}$ mit $0 \leq \rho < 1$ und $\alpha \in [0, 1)$. Für rationales α , d.h. $\alpha = p/q$, und $n \geq q$ ist $n! \alpha = n! p/q \in \mathbb{N}$ und daher

$$z^{n!} = \rho^{n!} e^{2\pi i \alpha n!} = \rho^{n!}.$$

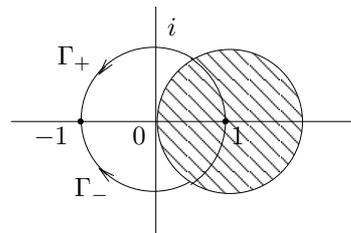
Somit ist

$$f(\rho e^{2\pi i \alpha}) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}.$$

Der erste Summand ist beschränkt durch q , der zweite Summand wächst für $\rho \nearrow 1$ jedoch über alle Schranken. Also wächst auch $|f(\rho e^{2\pi i \alpha})|$ für ein fixiertes α und $\rho \nearrow 1$ über alle Schranken. Da die Punkte $e^{2\pi i \alpha}$ mit rationalem α auf $\partial\mathbb{D}$ dicht liegen, folgt die Behauptung. ■

Beispiel 3. Die Reihe $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert für $\operatorname{Re} z > 1$ und definiert auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ eine holomorphe Funktion. Diese kann holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden. Gemäß der Riemannschen Vermutung liegen alle nichttrivialen Nullstellen von ζ auf der Geraden $\operatorname{Re} z = 1/2$. ■

Beispiel 4. Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (z-1)^n$ konvergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ und stimmt auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\} \cap \mathbb{R}$ mit der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ überein. Die Funktion f kann man sowohl entlang Γ_+ als auch entlang Γ_- zum Punkt -1 analytisch fortsetzen. Die erhaltenen Fortsetzungen stimmen jedoch nicht überein: Man erhält einmal $+i$ und einmal $-i$ als Wert der fortgesetzten Funktion im Punkt -1 ! ■

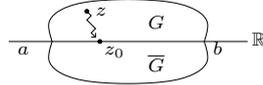


Der folgende Satz gibt Bedingungen dafür an, dass die Fortsetzung eindeutig bestimmt ist. Ein Beweis steht in Behnke/Sommer, III.1, Satz 3.

Satz 3.13 (Monodromiesatz) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$, und $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ sei in einer Umgebung $U \subseteq G$ von z_0 konvergent. Wenn sich f von z_0 aus entlang jeder stückweise glatten doppelpunktfreien Kurve in G analytisch fortsetzen läßt, so erzeugt diese Fortsetzung eine eindeutig bestimmte Funktion auf G .

Abschließend geben wir ein Fortsetzungsergebnis an, welches insbesondere beim Übergang vom Reellen ins Komplexe interessant ist.

Satz 3.14 (Spiegelungssatz von Schwarz) Sei G ein Gebiet in der oberen Halbebene, dessen Rand ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ (mit $a < b$) enthält.



Die Funktion f sei auf G holomorph, für jedes $z_0 \in (a, b)$ sollen die Grenzwerte

$$h_0(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G}} f(z)$$

existieren und reell sein, und die Funktion

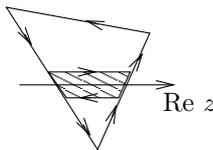
$$h(z) := \begin{cases} f(z) & z \in G \\ h_0(z) & z \in (a, b) \end{cases}$$

sei auf $G \cup (a, b)$ stetig. Weiter sei \bar{G} das an \mathbb{R} gespiegelte Gebiet G . Dann ist die Funktion

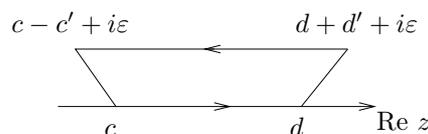
$$H(z) := \begin{cases} h(z) & z \in G \cup (a, b) \\ f(\bar{z}) & z \in \bar{G} \end{cases}$$

holomorph auf $G \cup (a, b) \cup \bar{G}$ (d.h. f wird durch „Spiegelung“ fortgesetzt).

Beweis. Die Funktion H ist holomorph auf \bar{G} . Ist nämlich $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihenentwicklung von f um $z_0 \in G$, so ist $\overline{f(\bar{z})} = \sum \bar{a}_n(z - \bar{z}_0)^n$ eine Potenzreihenentwicklung von H um $\bar{z}_0 \in \bar{G}$ mit gleichem Konvergenzradius. Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir die Aussage mit dem Satz von Morera in der Formulierung aus der Übung.



Dazu müssen wir zeigen, dass das Integral über H entlang jedes Dreiecks D in $G \cup (a, b) \cup \bar{G}$ verschwindet. Da H in G und in \bar{G} holomorph ist, verschwindet das Integral über jedem konvexen n -Eck, das komplett in G oder \bar{G} liegt (Cauchy'scher Integralsatz). Das übrig bleibende (schraffierte) Trapez zerlegen wir in zwei Trapeze, so dass jedes von ihnen mit einer der parallelen Seiten auf der reellen Achse liegt.



Dabei lassen wir zu, dass diese Seite zu einem Punkt zusammenschrumpft. Wir überlegen uns, dass das Integral über H entlang eines solchen Trapezes beliebig klein wird, wenn wir ε beliebig klein wählen. Die Ecken des Trapezes bezeichnen wir mit $c, d, d + d' + i\varepsilon$ und $c - c' + i\varepsilon$ mit $c, d, c', d' \in \mathbb{R}$, und wir beachten, dass die Richtung der beiden Schenkel des Trapezes durch das Ausgangsdreieck festgelegt ist. Mit ε werden also auch c' und d' beliebig klein. Für diese Schenkel ist nun klar, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{c-c'+i\varepsilon}^c h(z) dz \right| &\leq |i\varepsilon - c'| \|h\|_\infty \leq C\varepsilon \|h\|_\infty, \\ \left| \int_d^{d+d'+i\varepsilon} h(z) dz \right| &\leq C\varepsilon \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Für die Summe der Integrale über die Längsseiten finden wir

$$\begin{aligned} &\left| \int_c^d h(z) dz + \int_{d+d'+i\varepsilon}^{c-c'+i\varepsilon} h(z) dz \right| \\ &= \left| \int_c^d h(z) dz - \int_{c-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z) dz \right| \\ &= \left| \int_c^d h(z) dz - \int_{c-c'+i\varepsilon}^{d-c'+i\varepsilon} h(z) dz - \int_{d-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z) dz \right| \\ &\leq \left| \int_c^d (h(z) - h(z - c' + i\varepsilon)) dz \right| + \left| \int_{d-c'+i\varepsilon}^{d+d'+i\varepsilon} h(z) dz \right| \\ &\leq |d - c| \sup_{z \in [c, d]} |h(z) - h(z - c' + i\varepsilon)| + |d' + c'| \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von h wird dies beliebig klein, wenn ε klein genug ist. ■

3.5 Biholomorphe und konforme Abbildungen

In diesem Abschnitt sehen wir uns holomorphe Funktionen unter geometrischen Gesichtspunkten an.

Definition 3.15 *Seien $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow D'$ heißt biholomorph, wenn sie D bijektiv auf D' abbildet und wenn sowohl f als auch die Umkehrfunktion $f^{(-1)} : D' \rightarrow D$ holomorph sind.*

Biholomorphe Funktionen haben viele nützliche Eigenschaften. Z.B. sind sie *winkeltreu* (dies werden wir später genauer formulieren und beweisen). Aus diesem Grund interessiert man sich besonders für die Frage, ob zwei offene Mengen D, D' *biholomorph äquivalent* sind, d.h. ob es eine biholomorphe Funktion $f : D \rightarrow D'$ gibt. Wir werden uns dieser Frage im Kapitel 5 zuwenden. Die

biholomorphen Abbildungen einer offenen Menge D auf sich bilden eine Gruppe, die sog. *Automorphismengruppe* $\text{Aut } D$ von D . Die explizite Beschreibung dieser Gruppen ist eine weitere zentrale Aufgabe der Riemannschen Funktionentheorie. Für $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ werden wir $\text{Aut } \mathbb{D}$ in der Übung identifizieren.

Satz 3.16 (Biholomorphiekriterium) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $D' := f(D)$ offen und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Weiter ist dann $f : D \rightarrow D'$ biholomorph, und für die Umkehrabbildung $f^{(-1)} : D' \rightarrow D$ gilt*

$$(f^{(-1)})'(w) = 1/f'(f^{(-1)}(w)) \quad \text{für alle } w \in D'.$$

Beweis. Wegen der Injektivität ist f nirgends lokal konstant. Nach dem Offenheitssatz ist $D' = f(D)$ offen. Der gleiche Satz zeigt, daß für jede in D offene Menge U ihr $f^{(-1)}$ -Urbild $(f^{(-1)})^{(-1)}(U) = f(U)$ in D' offen ist. Folglich ist $f^{(-1)} : D' \rightarrow D$ eine stetige Funktion.

Die Injektivität von f liefert weiter, daß die Ableitung f' nirgends lokal identisch 0 ist. Nach dem Identitätssatz muss daher die Menge $N(f')$ der Nullstellen von f' diskret (d.h. für jedes $z \in N(f')$ gibt es eine Umgebung, die keinen weiteren Punkt aus $N(f')$ enthält) und abgeschlossen (Stetigkeit von f') sein. Da f ein Homöomorphismus ist, ist die Menge $M := f(N(f'))$ ebenfalls diskret und abgeschlossen in D' .

Wie im Beweis der Kettenregel macht man sich nun klar, dass $f^{(-1)}$ auf $D' \setminus M$ holomorph ist und dass für alle $d \in D' \setminus M$ gilt

$$(f^{(-1)})'(d) \cdot f'(f^{(-1)}(d)) = 1 \quad \text{bzw.} \quad (f^{(-1)})'(d) = 1/f'(f^{(-1)}(d)). \quad (3.4)$$

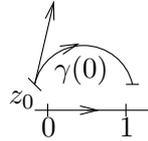
Da außerdem $f^{(-1)}$ auf ganz D' stetig ist, folgt mit dem Riemannschen Fortsetzungssatz (den wir in Abschnitt 2.4 nur für den Fall formuliert haben, dass überall mit Ausnahme eines einzigen Punktes Holomorphie vorliegt, und den wir hier in einer leicht verallgemeinerten Version benötigen), dass $f^{(-1)}$ auf ganz D' holomorph ist. Aus der Stetigkeit von $f^{(-1)}$ und $(f^{(-1)})'$ folgt dann, dass die linke Formel von (3.4) für alle $d \in D'$ gilt. Insbesondere ist also $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. ■

Definition 3.17 *Sei D offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt lokal biholomorph auf D , wenn es für jeden Punkt $z \in D$ eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von z gibt, so dass $f|_U : U \rightarrow f(U)$ biholomorph ist.*

Das folgende Kriterium für lokale Biholomorphie haben Sie im Wesentlichen bereits in der Übung und im Biholomorphiekriterium bewiesen.

Satz 3.18 (Kriterium für lokale Biholomorphie) *Sei D offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f genau dann lokal biholomorph auf D , wenn $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.*

Wir wollen nun den angekündigten Zusammenhang zwischen (Bi-)Holomorphie und Winkeltreue herstellen. Für $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten wir glatte Wege mit z_0 als Anfangspunkt, d.h. stetig differenzierbare Abbildungen $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma'(0) \neq 0$.



Die *Halbtangente* an γ in z_0 ist der Strahl $\{z_0 + s\gamma'(0) : s \geq 0\}$. Sind γ und μ zwei derartige Wege (mit gemeinsamem Anfangspunkt z_0), so definieren wir den *orientierten Winkel* zwischen γ und μ in z_0 durch

$$\sphericalangle(\gamma, \mu) =: \arg \frac{\mu'(0)}{\gamma'(0)}.$$

Auf die Wahl des Argumentes der komplexen Zahl $\mu'(0)/\gamma'(0)$ kommt es dabei nicht an; orientierte Winkel sind also nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Wir wollen nun Abbildungen untersuchen, bei denen diese Winkel erhalten bleiben. Damit wir nach Ausführung der Abbildung überhaupt wieder Winkel definieren können, lassen wir nur Abbildungen zu, die glatte Kurven γ mit $\gamma'(0) \neq 0$ wieder auf solche Kurven abbilden.

Sei also $f = u + iv$ eine Abbildung, die auf einer Umgebung U von z_0 reell stetig differenzierbar ist und für die

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt von U invertierbar ist (es genügt auch die Invertierbarkeit von Df an der Stelle z_0 ; wählt man U klein genug, so folgt wegen der Stetigkeit von u_x, u_y, v_x, v_y die Invertierbarkeit auf ganz U). Für jede solche Abbildung f und jeden wie oben beschriebenen Weg $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ist nach der Kettenregel

$$(f \circ \gamma)'(0) = \begin{pmatrix} u_x(\gamma(0)) & u_y(\gamma(0)) \\ v_x(\gamma(0)) & v_y(\gamma(0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(0) \\ \gamma_2'(0) \end{pmatrix}.$$

Ausrechnen und geeignetes Zusammenfassen liefern

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= \begin{pmatrix} u_x(z_0)\gamma_1'(0) + u_y(z_0)\gamma_2'(0) \\ v_x(z_0)\gamma_1'(0) + v_y(z_0)\gamma_2'(0) \end{pmatrix} \\ &= u_x(z_0)\gamma_1'(0) + u_y(z_0)\gamma_2'(0) + iv_x(z_0)\gamma_1'(0) + iv_y(z_0)\gamma_2'(0) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) + iv_x(z_0) - iu_y(z_0) + v_y(z_0))(\gamma_1'(0) + i\gamma_2'(0)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_x(z_0) + iv_x(z_0) + iu_y(z_0) - v_y(z_0))(\gamma_1'(0) - i\gamma_2'(0)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ist nun f holomorph in U , so gelten in z_0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$, und der Ausdruck (3.5) vereinfacht sich zu

$$(f \circ \gamma)'(0) = (u_x(z_0) + iv_x(z_0)) \gamma'(0) = f'(z_0) \gamma'(0),$$

wobei $f'(z_0) \neq 0$, da nach Voraussetzung an der Stelle z_0 gilt

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z_0)|^2.$$

Für holomorphes f gilt also

$$\sphericalangle(f \circ \gamma, f \circ \mu) = \arg \frac{(f \circ \mu)'(0)}{(f \circ \gamma)'(0)} = \arg \frac{f'(z_0) \mu'(0)}{f'(z_0) \gamma'(0)} = \sphericalangle(\gamma, \mu),$$

d.h. orientierte Winkel bleiben erhalten. Sei nun umgekehrt f eine Abbildung wie oben beschrieben, welche orientierte Winkel erhält. Dann erhält f insbesondere die Winkel zwischen allen Wegen $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + e^{i\alpha}t$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Es ist also für jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg \frac{e^{i\alpha}}{e^{i \cdot 0}} = \arg \frac{\gamma'_\alpha(0)}{\gamma'_0(0)} = \sphericalangle(\gamma_0, \gamma_\alpha) = \sphericalangle(f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_\alpha) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \arg \frac{(u_x + iv_x - iu_y + v_y)e^{i\alpha} + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)e^{-i\alpha}}{(u_x + iv_x - iu_y + v_y) + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)} \quad (= \arg e^{i\alpha}) \end{aligned}$$

mit $u_x := u_x(z_0)$ usw. Hieraus folgt, dass

$$(u_x + iv_x - iu_y + v_y) + (u_x + iv_x + iu_y - v_y)e^{-2i\alpha}$$

ein von α unabhängiges Argument besitzen muss. Dies ist nur möglich, wenn $u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$, d.h. wenn (vergleiche Real- u. Imaginärteile)

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \quad \text{und} \quad u_y(z_0) = -v_x(z_0).$$

Das sind aber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen; f ist also in z_0 komplex differenzierbar.

Definition 3.19 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine reell stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit auf D invertierbarer Ableitung heißt lokal konform, wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in D$ die orientierten Winkel erhält. f heißt konform, wenn f lokal konform ist und D bijektiv auf $f(D)$ abbildet.

Mit diesen Begriffen lassen sich die erzielten Resultate wie folgt zusammenfassen.

Satz 3.20 Seien D und f wie in Definition 3.19. Die Funktion f ist genau dann lokal konform, wenn sie lokal biholomorph ist, und f ist konform genau dann, wenn f biholomorph ist.

4 Funktionen mit isolierten Singularitäten

Funktionen wie $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$, $z \mapsto \tan z$ oder $z \mapsto e^{1/z}$ sind mit Ausnahme einzelner Punkte in \mathbb{C} holomorph. In diesem Abschnitt untersuchen wir solche Funktionen in der Nähe solcher isolierter singularer Stellen.

4.1 Holomorphe Funktionen in Kreisringen

Für $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichnen wir mit $K_c(r, R)$ den Kreisring mit den Radien r und R um c :

$$K_c(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - c| < R\}.$$

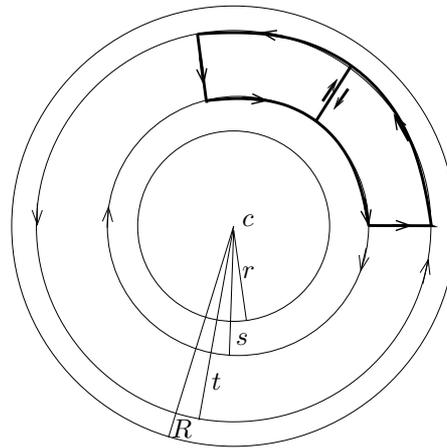
Dabei sind $r = 0$ und $R = \infty$ ausdrücklich zugelassen. $K_c(0, R)$ ist also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt, und $K_c(r, \infty)$ ist das komplette Äußere einer Kreisscheibe. Kreisringe sind nicht einfach zusammenhängend; wir überlegen uns daher zunächst den

Satz 4.1 (Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe) *Die Funktion f sei holomorph im Kreisring $K_c(r, R)$, und seien $s, t \in \mathbb{R}$ mit $r < s < t < R$. Dann gilt*

$$\int_{|\zeta-c|=s} f(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta-c|=t} f(\zeta)d\zeta.$$

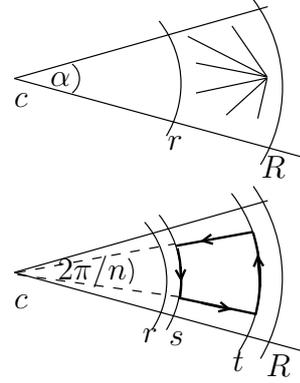
Orientieren wir den Rand von $K_c(s, t)$ so, dass das Innere des Kreisringes stets links vom Rand liegt, kann die Aussage dieses Satzes auch geschrieben werden als $\int_{\partial K_c(s,t)} f(\zeta)d\zeta = 0$.

Wir vereinbaren, dass der Rand von $K_c(s, t)$ stets auf diese Weise orientiert ist.



Beweis. Für $0 < \alpha < 2\pi$ betrachten wir einen Sektor des Kreisringes $K_c(r, R)$ mit „Öffnungswinkel“ α . Es ist klar, dass dieser Sektor für hinreichend kleines α sternförmig ist. Für ein solches α wählen wir n so, dass $2\pi/n < \alpha$ wird und erzeugen wie in der Skizze aus der Integrationskurve $\partial K_c(s, t)$ n geschlossene Wege $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, von denen jeder in einem Sektor mit Öffnungswinkel α liegt und für die gilt

$$\int_{\partial K_c(s, t)} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} f(\zeta) d\zeta.$$



Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete sind alle Integrale $\int_{\Gamma_j} f(\zeta) d\zeta$ gleich Null. ■

Satz 4.2 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe) Seien r, R, s, t und f wie in Satz 4.1. Dann gilt für alle $z \in K_c(s, t)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_c(s, t)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = t} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis. Für jedes feste $z \in K_c(s, t)$ ist die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in K_c(r, R) \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

holomorph in $K_c(r, R) \setminus \{z\}$ und stetig auf $K_c(r, R)$. Nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz ist g holomorph auf ganz $K_c(r, R)$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt daher $\int_{|\zeta - c| = t} g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta - c| = s} g(\zeta) d\zeta$ und somit

$$\int_{|\zeta - c| = t} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta - c| = t} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - c| = s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{|\zeta - c| = s} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Das zweite Integral auf der linken Seite ist $2\pi i$ da $|z - c| < t$, während das zweite Integral auf der rechten Seite wegen $|z - c| > s$ verschwindet. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Ist eine Funktion f in $K_c(r, R)$ holomorph, so wird sie sich im allgemeinen über keinen der Randkreise hinaus holomorph fortsetzen lassen. Wir zeigen, dass sich f aber zerlegen lässt in eine Summe zweier Funktionen, von denen die eine in $B_R(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < R\}$ und die andere in $A_r(c) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c| > r\}$ holomorph ist.

Satz 4.3 Sei f holomorph in $K_c(r, R)$. Dann gibt es auf $A_r(c)$ bzw. $B_R(c)$ holomorphe Funktionen f_1 bzw. f_2 so, dass $f = f_1 + f_2$ auf $K_c(r, R) = A_r(c) \cap B_R(c)$. Die Funktion f_1 kann so gewählt werden, dass $\lim_{z \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$. Durch diese Bedingungen werden f_1 und f_2 eindeutig festgelegt.

Beweis. Für jedes $\rho \in (r, R)$ definieren wir auf $B_\rho(c)$ eine Funktion $f_{2,\rho}$ durch

$$f_{2,\rho}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Diese ist nach dem Entwicklungslemma holomorph, und nach dem Cauchyschen Integralsatz für Kreisringe gilt $f_{2,\rho} = f_{2,\tilde{\rho}}$ auf $B_\rho(c)$, falls $\tilde{\rho} > \rho$. In diesem Sinn ist $f_{2,\rho}$ also unabhängig von ρ . Wir können daher eine auf ganz $B_R(c)$ holomorphe Funktion f_2 definieren, wenn wir für $z \in B_R(c)$ ein ρ zwischen $\max\{r, |z-c|\}$ und R wählen und setzen

$$f_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Ganz analog finden wir eine auf $A_r(c)$ holomorphe Funktion f_1 , indem wir für $z \in A_r(c)$ ein $\sigma \in (r, \min\{|z-c|, R\})$ wählen und definieren

$$f_1(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Wegen

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\sigma \cdot \max_{|\zeta-c|=\sigma} |f(\zeta)| \cdot \max_{|\zeta-c|=\sigma} \frac{1}{|\zeta-z|}$$

folgt sofort $\lim_{z \rightarrow \infty} |f_1(z)| = 0$.

Ist nun $z \in K_c(r, R)$, so wählen wir ρ, σ mit $r < \sigma < |z-c| < \rho < R$ und erhalten mit der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = f_2(z) + f_1(z).$$

Zur Eindeutigkeit: Ist $f = g_1 + g_2$ eine analoge Zerlegung mit $\lim_{z \rightarrow \infty} g_1(z) = 0$, so gilt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf $K_c(r, R)$. Durch

$$h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf } A_r(c) \\ g_2 - f_2 & \text{auf } B_R(c) \end{cases}$$

wird also eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion h mit $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$ definiert. Nach Liouville ist h eine Konstante, und wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0$ ist h sogar gleich 0. Also ist $f_1 = g_1$ auf $A_r(c)$ und $f_2 = g_2$ auf $B_R(c)$. ■

Die in Satz 4.3 erklärten Funktionen f_1 und f_2 heißen auch *Haupt-* und *Nebenteil* von f . Wie wir aus dem Entwicklungssatz wissen, läßt sich der Nebenteil in eine auf $B_R(c)$ konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Eine ähnliche Darstellung wollen wir für den Hauptteil f_1 herleiten. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$F : B_{1/r}(0) \setminus \{0\} \rightarrow A_r(c), \quad w \mapsto c + w^{-1},$$

welche biholomorph ist (warum?). Die Funktion $f_1 \circ F$ ist daher holomorph auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, und wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} f_1(z) = 0$ folgt $\lim_{w \rightarrow 0} (f_1 \circ F)(w) = 0$. Wir können daher $f_1 \circ F$ durch den Wert 0 im Nullpunkt holomorph auf ganz $B_{1/r}(0)$ fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion läßt sich in eine auf $B_{1/r}(0)$ konvergente Potenzreihe entwickeln:

$$(f_1 \circ F)(w) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m w^m$$

(beachte: $b_0 = 0$, da $(f_1 \circ F)(0) = 0$ lt. Fortsetzung). Diese konvergiert für jedes $\rho > r$ auf $\overline{B_{1/\rho}(0)}$ gleichmäßig. Ersetzen wir $c + w^{-1}$ durch z bzw. w durch $(z - c)^{-1}$, erhalten wir die Reihendarstellung

$$f_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z - c)^{-m},$$

welche für $\rho > r$ auf $\overline{A_\rho(c)}$ gleichmäßig konvergiert. Mit $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$ schreiben wir schließlich

$$f_1(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - c)^n.$$

Satz 4.4 (Entwicklungssatz) Sei f holomorph auf $K_c(r, R)$. Dann läßt sich f auf $K_c(r, R)$ in eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (4.1)$$

entwickeln, die auf jeder kompakten Teilmenge von $K_c(r, R)$ gleichmäßig konvergiert. Für die Koeffizienten gilt für jedes $\rho \in (r, R)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

Man nennt $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - c)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ auch *Haupt- und Nebenteil der Laurentreihe*. Wie wir gesehen haben, konvergieren diese Reihen auf kompakten Teilmengen von $B_R(c)$ bzw. $A_r(c)$ gegen den Haupt- bzw. Nebenteil von f .

Beweis. Wir müssen nur noch die Formel für die Laurentkoeffizienten a_n zeigen. Diese leiten wir direkt aus der Reihenentwicklung ab. Für $\rho \in (r, R)$ konvergiert

$$(z - c)^{-n-1} f(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} a_{m+n+1} (z - c)^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+n+1} (z - c)^m$$

auf $|z - c| = \rho$ gleichmäßig. Gliedweise Integration ist daher erlaubt und liefert

$$\int_{|\zeta - c| = \rho} (\zeta - c)^{-n-1} f(\zeta) d\zeta = a_n \int_{|\zeta - c| = \rho} \frac{d\zeta}{\zeta - c} = 2\pi i a_n$$

(alle übrigen Integrale verschwinden nach Beispiel 1 in 2.1). ■

Die explizite Bestimmung einer Laurentreihe mittels (4.2) ist i.a. schwierig. Um die Laurentreihe einer Funktion f zu ermitteln, sollte man eher versuchen, diese aus bekannten Potenzreihen zu ermitteln.

Beispiel. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ist auf \mathbb{C} mit Ausnahme der Punkte 1 und 2 holomorph. Sie läßt sich also auf $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in eine „gewöhnliche“ Potenzreihe (Taylorreihe) entwickeln und auf $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ sowie $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ in Laurentreihen.

Die Partialbruchzerlegung von f ist $f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$. Für die Summanden $\frac{1}{z-1}$ und $\frac{1}{z-2}$ finden wir mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n && \text{für } |z| < 1, \\ \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(z/2)} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n && \text{für } |z| < 2, \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 1, \\ \frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-(2/z)} &= \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} && \text{für } |z| > 2. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n && \text{auf } D_1, \\ f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n && \text{auf } D_2, \\ f(z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{z^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-2}^{-\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n && \text{auf } D_3. \end{aligned}$$

4.2 Isolierte Singularitäten

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine Umgebung von z_0 , und f eine auf $U \setminus \{z_0\}$ definierte und dort holomorphe Funktion. Dann heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von f . Die Funktion f kann in jedem Kreisring $K_{z_0}(0, R)$, der ganz in U liegt, in eine Laurentreihe

entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Man klassifiziert isolierte Singularitäten nach dem Verhalten des Hauptteiles dieser Laurentreihe.

Definition 4.5 (a) z_0 heißt hebbare Singularität, wenn alle Laurentkoeffizienten im Hauptteil der Laurentreihe (d.h. alle a_n mit $n \leq -1$) verschwinden.

(b) z_0 heißt Pol, wenn z_0 keine hebbare Singularität ist, aber nur endlich viele Koeffizienten des Hauptteiles ungleich null sind. Ist $a_{-m} \neq 0$, aber $a_{-n} = 0$ für alle $n > m$, so heißt z_0 Pol der Ordnung m .

(c) Ist z_0 weder hebbare Singularität noch Pol, so heißt z_0 wesentliche Singularität. In diesem Fall sind also unendlich viele der Koeffizienten des Hauptteiles der Laurentreihe ungleich 0.

Beispiele. Für jede der Funktionen $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $g(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ und $h(z) = e^{1/z}$ ist $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität. Im ersten Fall ist diese hebbbar, da

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

und diese Reihe konvergiert auf ganz \mathbb{C} . Aus dem Beispiel in 4.1 wissen wir weiter, dass

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}} \right) z^n$$

auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Also ist $z_0 = 0$ ein Pol der Ordnung 1 von g . Schließlich ist

$$h(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

die Laurententwicklung von h in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. In diesem Fall ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. ■

Wir beschreiben nun das Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe von isolierten Singularitäten und beginnen mit den beiden einfachsten Situationen.

Satz 4.6 Sei U offen und $z_0 \in U$ eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist

(a) z_0 genau dann eine hebbare Singularität von f , wenn es eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0 gibt, so dass f auf $V \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.

(b) z_0 genau dann Pol von f , wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Beweis. (a) Sei z_0 hebbare Singularität, d.h. die Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ von f konvergiert auf jedem hinreichend kleinen Kreisring $K_{z_0}(0, R)$ um z_0 . Dann konvergiert diese Reihe auch für $z = z_0$ und stellt eine auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ holomorphe Funktion \hat{f} dar, die auf $K_{z_0}(0, R)$ mit f übereinstimmt. Da \hat{f} auf der kompakten Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R/2\}$ stetig ist, folgt die Beschränktheit von \hat{f} und damit von f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R/2\} \setminus \{0\}$.

Ist umgekehrt f auf $V \setminus \{z_0\}$ holomorph und beschränkt, so läßt sich f nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz zu einer auf ganz V holomorphen Funktion \hat{f} fortsetzen. Diese läßt sich in jeder Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subseteq V$ in eine Potenzreihe entwickeln: $\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Diese Reihe ist zugleich die Laurentreihe von f auf $K_{z_0}(0, R)$.

(b) Sei z_0 ein Pol der Ordnung m und $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Laurentreihe von f auf $K_{z_0}(0, R) \subset U$. Dann ist

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n = (z - z_0)^{-m} h(z)$$

mit einer auf ganz $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ durch $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n$ definierten und dort holomorphen Funktion h , für die außerdem $h(z_0) = a_{-m} \neq 0$ gilt. Wegen $\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^{-m} = \infty$ folgt $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Ist umgekehrt $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, so gibt es eine punktierte Umgebung $V \setminus \{z_0\}$ von z_0 , auf der f nicht verschwindet. Auf dieser ist $1/f$ holomorph, und es gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/f(z) = 0$. Also läßt sich $1/f$ durch den Wert 0 holomorph auf z_0 fortsetzen. Die Potenzreihe von $1/f$ ist sicher nicht die Nullreihe. Daher ist

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m g(z)$$

mit einer in V holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und mit einer eindeutig bestimmten positiven ganzen Zahl m . Dann ist aber

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} h(z) \tag{4.3}$$

mit einer in einer Umgebung W von z_0 holomorphen und in z_0 nicht verschwindenden Funktion $h = 1/g$. Setzen wir in (4.3) für h die Potenzreihenentwicklung ein, so erhalten wir die Laurentreihe von f auf einem geeigneten Ring $K_{z_0}(0, R) \subset W$ und sehen, dass z_0 ein Pol der Ordnung m von f ist. ■

Aus dem Beweis gewinnt man, dass z_0 genau dann ein Pol der Ordnung m ist, wenn

$$M_1|z - z_0|^{-m} \leq |f(z)| \leq M_2|z - z_0|^{-m}$$

mit Konstanten M_1, M_2 in einer punktierten Umgebung $V \setminus \{z_0\}$ von z_0 gilt. Das Verhalten in der Nähe wesentlicher Singularitäten wird beschrieben durch

Satz 4.7 (Casorati-Weierstraß) *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 gilt: z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität von f , wenn zu jedem $w \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $U \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ und $f(z_n) \rightarrow w$ existiert oder, anders formuliert, wenn für jede punktierte offene Umgebung $V \setminus \{z_0\}$ von z_0 das Bild $f(V \setminus \{z_0\})$ in \mathbb{C} dicht liegt.*

Man beachte in diesem Zusammenhang, dass $f(V \setminus \{z_0\})$ nach dem Offenheitssatz eine offene Menge ist.

Beweis. Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f . Angenommen, es gibt eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0 , für die $f(V \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in \mathbb{C} ist. Dann gibt es eine offene Kreisscheibe $B_r(w_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w_0| < r\}$, die von $f(V \setminus \{z_0\})$ nicht getroffen wird. Es ist also $|f(z) - w_0| \geq r$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$. Dann ist aber die Funktion $g(z) := 1/(f(z) - w_0)$ auf $V \setminus \{z_0\}$ holomorph und durch $1/r$ beschränkt. Diese Funktion hat also eine hebbare Singularität in z_0 . Im Falle $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ hat dann offenbar $f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$ eine hebbare Singularität in z_0 , und im Fall $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ hat f einen Pol in z_0 . In keinem Fall hätte f also eine wesentliche Singularität, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Die umgekehrte Implikation ist mit Satz 4.6 klar. ■

Auf ähnliche Weise klassifiziert man das Verhalten einer holomorphen Funktion im Unendlichen. Genauer: Ist die Funktion f auf einem Kreisring $K_0(r, \infty)$ definiert und holomorph, so sagt man, dass ∞ eine isolierte Singularität von f ist. In diesem Fall ist die durch $\tilde{f}(z) := f(1/z)$ erklärte Funktion \tilde{f} auf dem Kreisring $K_0(0, 1/r)$ holomorph und hat 0 als isolierte Singularität (man beachte, dass $z \mapsto 1/z$ eine biholomorphe Abbildung von $K_0(r, \infty)$ auf $K_0(0, 1/r)$ ist). Man schreibt nun der Funktion f in ∞ das gleiche Verhalten zu wie es die Funktion \tilde{f} im Punkt 0 aufweist. Für Polynome $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ mit $a_n \neq 0$ ist $\tilde{f}(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^{-j}$. In diesem Sinne hat ein Polynom vom Grad n einen Pol der Ordnung n in ∞ . Dagegen besitzt $f(z) = e^z$ in ∞ eine wesentliche Singularität. Das Verhalten an der isolierten Singularität ∞ wird wieder durch die Sätze 4.6 und 4.7 beschrieben.

4.3 Meromorphe Funktionen

Das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer isolierten Singularität z_0 bleibt übersichtlich, wenn diese eine Polstelle ist. Wir betrachten daher nur Funktionen, die nur Pole als singuläre Stellen haben.

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge A einer offenen Menge D heißt *diskret in D* , wenn jeder Punkt von D eine Umgebung besitzt, die höchstens endlich viele Punkte aus A enthält.

Definition 4.8 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion f heißt meromorph in D , wenn*

es eine diskrete Teilmenge $P(f)$ von D so gibt, dass f auf $D \setminus P(f)$ holomorph ist und in jedem Punkt von $P(f)$ einen Pol hat.

Diese Menge $P(f)$ heißt dann auch die *Polstellenmenge* von f in D . Zugelassen ist $P(f) = \emptyset$. Die auf D holomorphen Funktionen sind also auch meromorph.

Seien f und g zwei auf einer offenen Menge D meromorphe Funktionen mit Polstellenmengen $P(f)$ und $P(g)$. Dann ist $P(f) \cup P(g)$ eine diskrete Teilmenge von D , und die auf $D \setminus (P(f) \cup P(g))$ definierte Funktion $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ ist auf dieser Menge holomorph. Es ist also $P(f+g) \subseteq P(f) \cup P(g)$, und alle Singularitäten von $f+g$ sind wieder isoliert. Wir zeigen, dass alle Singularitäten entweder hebbbar oder Pole sind. Zu jedem $c \in P(f) \cup P(g)$ gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von c mit $U \cap (P(f) \cup P(g)) = \{c\}$ und es gibt nicht-negative Zahlen m, n so, dass $z \mapsto (z-c)^m f(z)$ bzw. $z \mapsto (z-c)^n g(z)$ in $U \setminus \{c\}$ beschränkte Funktionen sind. Dann ist aber auch die Funktion

$$z \mapsto (z-c)^{\max\{m,n\}}(f(z) + g(z)) \quad \text{beschränkt in } U \setminus \{c\}. \quad (4.4)$$

Die Funktion (4.4) kann also zu einer auf U holomorphen Funktion fortgesetzt werden, und nun ist klar, dass c hebbare Singularität oder Pol von $f+g$ ist. Die Summe zweier auf D meromorpher Funktionen ist also wieder meromorph auf D . Ähnlich zeigt man, dass auch Produkte meromorpher Funktionen wieder meromorph sind.

Wir betrachten noch die Division meromorpher Funktionen und definieren dazu die Nullstellenmenge $N(f)$ einer meromorphen Funktion f auf D als die Nullstellenmenge der holomorphen Funktion $f : D \setminus P(f) \rightarrow \mathbb{C}$. Sei nun f meromorph auf D , und $N(f)$ sei eine diskrete Menge in D . Dann ist auch $N(f) \cup P(f)$ eine diskrete Teilmenge von D , und auf $D \setminus (N(f) \cup P(f))$ ist die Funktion $1/f$ holomorph. Alle Singularitäten von $1/f$ sind isoliert. Genauer: Ist $c \in N(f)$, so ist $\lim_{z \rightarrow c} \frac{1}{f(z)} = \infty$, d.h. c ist Pol von $1/f$, und ist $c \in P(f)$, so ist $\lim_{z \rightarrow c} \frac{1}{f(z)} = 0$, d.h. c ist hebbare Singularität. Also ist $1/f$ meromorph. Damit ist auch klar: sind f und g meromorph auf D und ist $N(g)$ diskret, so ist f/g meromorph. Im wesentlichen haben wir damit bewiesen:

Satz 4.9 *Die auf einem Gebiet meromorphen Funktionen bilden einen Körper.*

Zum Beweis. Man muß sich nur noch klarmachen, dass jede meromorphe Funktion auf einem Gebiet G , die nicht die Nullfunktion ist, invertiert werden kann. Dazu brauchen wir nur, dass die Nullstellenmenge dieser Funktion diskret ist. Dies folgt aus dem Identitätssatz, denn würden sich die Nullstellen in D häufen, wäre die Funktion identisch Null. ■

Sind insbesondere f und g auf einem Gebiet G holomorphe Funktionen mit $g \not\equiv 0$, so ist f/g meromorph auf G . Beispielsweise sind alle *rationalen Funktionen* (d.h. alle Quotienten P/Q von Polynomen $P, Q \not\equiv 0$) oder etwa die Funktion

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ meromorph auf \mathbb{C} . Es ist bemerkenswert, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 4.10 *Die Menge der auf einem Gebiet G meromorphen Funktionen besteht genau aus allen Quotienten f/g von auf G holomorphen Funktionen mit $g \neq 0$.*

Einen Beweis findet man in [Remmert, Funktionentheorie II] oder [Fischer/Lieb, Funktionentheorie, Satz 5.1 in Kapitel VIII]. Der Körper der auf einem Gebiet meromorphen Funktionen ist also gerade der Quotientenkörper des Ringes der auf diesem Gebiet holomorphen Funktionen.

4.4 Residuen

Ist D offen, $c \in D$, f holomorph in $D \setminus \{c\}$ und $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ die in einem Kreisring $K_c(0, R) \subset D$ um c konvergente Laurentreihe von f , so ist nach Satz 4.4

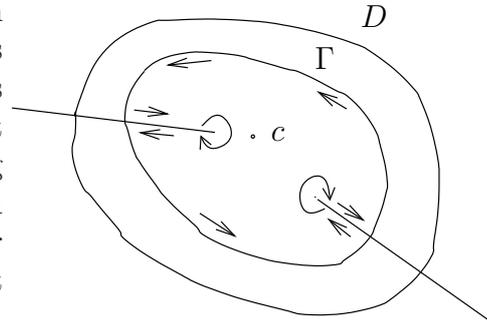
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{S}} f(\zeta) d\zeta$$

für jede Kreislinie $\mathcal{S} \subset K_c(0, R)$ um c . Von allen Laurentkoeffizienten bleibt also bei einer Integration von f um c nur a_{-1} übrig. Dieses „Überbleibsel“ heißt das *Residuum* von f im Punkt c . Wir schreiben auch $\text{res}_c f := a_{-1}$. Das Residuum von f ist also in allen isolierten Singularitäten von f definiert. Mitunter definiert man das Residuum auch an den Holomorphiepunkten von f , indem man es dort gleich Null setzt.

Satz 4.11 (Residuensatz) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in D mit $\overline{G} \subseteq D$, das von einer stückweise stetig differenzierbaren und doppelpunktfreien Kurve Γ berandet wird, die im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Weiter sei A eine endliche Teilmenge von D mit $A \cap \Gamma = \emptyset$, und die Funktion f sei holomorph auf $D \setminus A$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A \cap G} \text{res}_a f.$$

Beweisidee. Nachdem wir gegebenenfalls D durch eine hinreichend kleine Umgebung von \overline{G} ersetzt haben, können wir annehmen, dass D ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist und dass $A \subset G$. Für jeden Punkt $a \in A$ schneiden wir das Gebiet D entlang einer in a beginnenden Strecke \mathcal{S}_a bis zum Rand von D auf, wobei keine zwei der Strecken \mathcal{S}_a einen nichtleeren Durchschnitt haben sollen.



Weiter findet man zu jedem $a \in A$ eine Kreisscheibe B_a um a so, dass $\overline{B}_a \subset G$ und $\overline{B}_a \cap \overline{B}_b = \emptyset$ für $a, b \in A$ mit $a \neq b$. Aus Γ , den Strecken $\mathcal{S}_a \cap (\overline{G} \setminus B_a)$ und den Kreislinien ∂B_a bilden wir einen stückweise stetig differenzierbaren und geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$ wie in der Skizze. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist dann

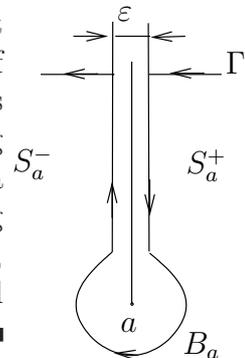
$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 0.$$

Da sich die Integrale längs der entlang \mathcal{S}_a verlaufenden Wegstücke aufheben, folgt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{a \in A \cap G} \int_{\partial B_a} f(z) dz = 0,$$

d.h. der Residuensatz.

Genau genommen dürfen wir den Cauchyschen Integralsatz nicht unmittelbar anwenden, da $\tilde{\gamma}$ zum Teil auf dem Rand (nämlich auf $\mathcal{S}_a \cap D$) des Gebietes $D \setminus \cup_{a \in A \cap G} \mathcal{S}_a$ verläuft. Man betrachtet für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ einen stückweise glatten geschlossenen Weg γ_ε wie in der Skizze, der nun komplett in $D \setminus \cup_{a \in A \cap G} \mathcal{S}_a$ liegt. Da f auf jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\mathcal{S}_a \cap (\overline{G} \setminus B_a)$ stetig ist, schließt man wie im Beweis des Schwarzschen Spiegelungssatzes, dass der Beitrag von $\int_{\mathcal{S}_a^+} f(z) dz + \int_{\mathcal{S}_a^-} f(z) dz$ zum Gesamtintegral beliebig klein wird, wenn ε klein genug ist. ■



In vielen Fällen ist es möglich, Residuen ohne explizite Berechnung von Umlaufintegralen zu ermitteln. Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 1. Ist c ein einfacher Pol von f , so ist

$$\operatorname{res}_c f = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z). \quad (4.5)$$

Dies ist offensichtlich, da ja $f(z) = a_{-1}(z - c)^{-1} + h(z)$ mit einer holomorphen Funktion h . Als Folgerung erhalten wir

Lemma 4.12 Sind g und h holomorph in einer Umgebung von c und gilt $g(c) \neq 0$, $h(c) = 0$ und $h'(c) \neq 0$, so hat $f := g/h$ in c einen Pol erster Ordnung, und es gilt

$$\operatorname{res}_c f = g(c)/h'(c). \quad (4.6)$$

Beweis. Die Taylorentwicklung von h um c ist

$$h(z) = h'(c)(z - c) + \dots = (z - c) \left(h'(c) + \dots \right).$$

Daher ist c ein einfacher Pol von f , und es gilt mit (4.5)

$$\operatorname{res}_c f = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{(z - c)g(z)}{h(z) - h(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}. \quad \blacksquare$$

Betrachten wir etwa die Funktion $f(z) = z/(z^n - 1)$. Die Nullstellen des Nenners sind die n . Einheitswurzeln $c_k := e^{2\pi i k/n}$ mit $k = 0, \dots, n - 1$, und all diese Nullstellen sind einfach. Folglich besitzt f in jedem der Punkte c_k einen einfachen Pol, und es gilt

$$\operatorname{res}_{c_k} f = \frac{c_k}{n c_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{c_k^2}{c_k^n} = \frac{c_k^2}{n} = \frac{1}{n} e^{4\pi i k/n}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 2. Etwas weniger handlich ist die Residuenbestimmung bei Polen höherer Ordnung.

Lemma 4.13 Hat f in c einen Pol höchstens m . Ordnung, und ist g die holomorphe Fortsetzung von $z \mapsto (z - c)^m f(z)$ nach c , so gilt

$$\operatorname{res}_c f = \frac{1}{(m - 1)!} g^{(m-1)}(c). \quad (4.7)$$

Beweis. Die Laurententwicklung von f um c ist $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-c} + h(z)$ mit einer in einer Umgebung von c holomorphen Funktion h . Dann ist

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - c) + \dots + a_{-1}(z - c)^{m-1} + \dots$$

die Taylorreihe von g um c , und es ist unmittelbar klar, dass

$$g^{(m-1)}(c) = (m - 1)! a_{-1}. \quad \blacksquare$$

Zur Illustration betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}$, welche in $\pm i$ jeweils einen n -fachen Pol besitzt. Um $\operatorname{res}_i f$ zu bestimmen, betrachten wir die in einer Umgebung von i holomorphe Funktion $g(z) = (z - i)^n f(z) = (z + i)^{-n}$. Es ist

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(z) &= (-n)(-n-1) \dots (-n-n+2) (z+i)^{-n-n+1} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \end{aligned}$$

und folglich

$$\operatorname{res}_i f = \frac{1}{(n-1)!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{2^{2n-1}}. \quad \blacksquare$$

Beispiel 3. Sei g eine in einer Umgebung von c holomorphe Funktion, die nicht identisch 0 ist. Ist $g(c) = 0$, so definieren wir die *Ordnung* $n_c(g)$ der Nullstelle c von g als kleinste Zahl n , für die eine um c holomorphe Funktion \tilde{g} mit $g(z) = (z-c)^n \tilde{g}(z)$ und $\tilde{g}(c) \neq 0$ existiert.

Lemma 4.14 *Seien g, h holomorph in einer Umgebung von c , und c sei eine Nullstelle von g der Ordnung $n_c(g)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_c \left(h \frac{g'}{g} \right) = h(c) \cdot n_c(g). \quad (4.8)$$

Beweis. Sei $n := n_c(g)$. Dann gibt es eine um c holomorphe Funktion \tilde{g} mit $\tilde{g}(c) \neq 0$ und $g(z) = (z-c)^n \tilde{g}(z)$. Es folgt für $z \neq c$

$$h(z) \frac{g'(z)}{g(z)} = h(z) \frac{n(z-c)^{n-1} \tilde{g}(z) + (z-c)^n \tilde{g}'(z)}{(z-c)^n \tilde{g}(z)} = \frac{n \cdot h(z)}{z-c} + f$$

mit einer in einer Umgebung von c holomorphen Funktion f . Mit (4.5) folgt sofort die Behauptung. \blacksquare

Ganz analog zeigt man:

Lemma 4.15 *Sei h holomorph in einer Umgebung U von c , und g sei holomorph auf $U \setminus \{c\}$ und habe in c einen Pol der Ordnung $p_c(g)$. Dann ist*

$$\operatorname{res}_c \left(h \frac{g'}{g} \right) = -h(c) \cdot p_c(g). \quad (4.9)$$

Wir sehen uns nun einige Folgerungen aus dem Residuensatz an. Eine der bemerkenswerten Konsequenzen ist eine Anzahlformel für Null- und Polstellen meromorpher Funktionen. Wir leiten sie aus einem allgemeineren Satz her und bezeichnen dazu die Menge der Polstellen bzw. Nullstellen einer meromorphen Funktion f in einer Menge D mit $P_D(f)$ bzw. $N_D(f)$.

Satz 4.16 *Es seien D, G, Γ wie im Residuensatz, f sei eine auf D meromorphe Funktion mit endlich vielen Pol- und Nullstellen, von denen keine auf Γ liegen soll, und F sei holomorph auf D . Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{c \in N_G(f)} n_c(f) F(c) - \sum_{c \in P_G(f)} p_c(f) F(c). \quad (4.10)$$

Beweis. Die auf G meromorphe Funktion $F f'/f$ besitzt höchstens in den Punkten von $N_G(f) \cup P_G(f)$ nicht verschwindende Residuen. Nach dem Residuensatz ist also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{c \in N_G(f) \cup P_G(f)} \operatorname{res}_c \left(F \frac{f'}{f} \right).$$

Die Behauptung folgt nun sofort aus den Lemmas 4.14 und 4.15. ■

Bezeichnen wir schließlich mit

$$\#N_G(f) := \sum_{c \in N_G(f)} n_c(f) \quad \text{bzw.} \quad \#P_G(f) := \sum_{c \in P_G(f)} p_c(f)$$

die Anzahl aller Null- bzw. Polstellen (unter Beachtung ihrer Vielfachheit) der meromorphen Funktion f in G , so folgt aus (4.10), indem wir dort $F \equiv 1$ setzen:

Satz 4.17 *Seien D, G, Γ, f wie in Satz 4.16. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#N_G(f) - \#P_G(f).$$

Wir geben noch einige Anwendungen der Sätze 4.16 und 4.17 an.

Anwendung 1: Umkehrabbildungen biholomorpher Funktionen. *Seien D, D' offen, $f : D \rightarrow D'$ eine biholomorphe Funktion und \bar{B} eine abgeschlossene Kreisscheibe in D , deren Rand im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Dann wird die Umkehrabbildung $f^{(-1)}$ zu f auf $f(B)$ gegeben durch*

$$f^{(-1)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz \quad \text{für } w \in f(B).$$

Beweis. Die Funktion $z \mapsto f(z) - w$ hat keine Pole in D und wegen der Injektivität genau eine Nullstelle in B , die wir c nennen. Diese Nullstelle ist einfach (sonst wäre $f'(c) = 0$, was dem Biholomorphiekriterium widerspricht). Also gilt nach (4.10) mit $F(z) := z$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = c.$$

Nun ist aber $f(c) - w = 0$, d.h. $c = f^{(-1)}(w)$, woraus die Behauptung folgt. ■

Anwendung 2: Alternativer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. Nach Lemma 3.5 gibt es ein R so, dass $|P(z)| \geq 1$ für alle $|z| \geq R$. Für $|z| \geq R$ hat man nun

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n z^{n-1} + \dots}{z^n + \dots} = \frac{n}{z} + \text{Terme in } \frac{1}{z^k} \text{ mit } k \geq 2. \quad (4.11)$$

Integriert man die linke Seite von (4.11) über $\partial B_R(0)$, so folgt (da P keine Pole in \mathbb{C} hat)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \#N_{B_R(0)}(P).$$

Die gleiche Integration über die rechte Seite von (4.11) liefert den Wert n . Also ist

$$\#N_{B_R(0)}(P) = n = \text{Grad des Polynoms.}$$

Hieraus folgt für $n \geq 1$ die Existenz von Nullstellen und außerdem, da alle Nullstellen von P im Kreis $B_R(0)$ liegen, auch, dass Polynome vom Grad ($n \geq 1$) genau n Nullstellen besitzen. ■

Anwendung 3: Satz von Rouché. Seien D, G, Γ wie im Residuensatz, die Funktionen f und g seien holomorph in D , und es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{für alle } z \in \Gamma. \quad (4.12)$$

Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in G :

$$\#N_G(f) = \#N_G(g).$$

Beweis. Für jedes $t \in [0, 1]$ betrachten wir die Funktion $h_t := g + t(f - g)$. Diese Funktionen sind holomorph auf D , und nach Voraussetzung (4.12) gilt

$$|h_t(z)| \geq |g(z)| - t|f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0$$

auf Γ . Alle Funktionen h_t sind also nullstellenfrei auf Γ . Nach Satz 4.17 ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz = \#N_G(h_t).$$

Das linksstehende Integral nimmt nur ganzzahlige Werte an und hängt stetig von t ab. Da $[0, 1]$ zusammenhängend ist, muß dieses Integral für alle t den gleichen Wert annehmen. Insbesondere ist $\#N_G(h_0) = \#N_G(h_1)$. Nun ist aber $h_0 = g$ und $h_1 = f$, woraus die Behauptung folgt. ■

Hieraus erhalten wir leicht einen dritten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Wir setzen

$$f(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \quad \text{und} \quad g(z) := z^n.$$

Dann ist $f - g$ ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$. Mit dem Wachstumslemma (Lemma 3.5) folgt die Existenz eines $r > 0$ so, dass

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{für alle } |z| = r$$

und dass f keine Nullstellen außerhalb des Kreises $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ hat. Nach Rouché ist dann $\#N_{\mathbb{C}}(f) = \#N_K(f) = \#N_K(g) = n$. ■

Abschließend sehen wir uns noch einige Anwendungen des Residuensatzes zur Berechnung bestimmter Integrale an.

Beispiel 4: Trigonometrische Integrale. Sei $R = R(z) = R(x, y)$ eine komplexe rationale Funktion, die keine Pole auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$ des Einheitskreises besitzt, und sei

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \right).$$

Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{c \in P_{\mathbb{D}}(\tilde{R})} \text{res}_c(\tilde{R}). \quad (4.13)$$

Beweis. Mit $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, gilt $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ und $\sin t = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$. Also ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{i} \int_{\partial\mathbb{D}} \underbrace{R \left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \right)}_{\tilde{R}(z)} \frac{1}{z} dz.$$

Nun folgt (4.13) sofort aus dem Residuensatz. ■

Als konkrete Anwendung berechnen wir $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2}$ mit $p \in \mathbb{C}$, $|p| \neq 1$. In diesem Fall ist $R(x, y) = \frac{1}{1 - 2px + p^2}$, also

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - p(z + z^{-1}) + p^2} = \frac{1}{(z - p)(1 - pz)}.$$

Die Funktion \tilde{R} hat genau einen Pol in \mathbb{D} , nämlich in p falls $|p| < 1$ und in p^{-1} falls $|p| > 1$. In beiden Fällen ist der Pol einfach; es gilt daher

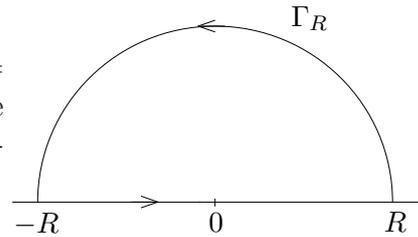
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2p \cos t + p^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{falls } |p| < 1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

■

Beispiel 5: Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Sei D eine offene Menge, die die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ umfaßt, f sei auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten, die alle in $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ liegen, holomorph, und $P(f)$ bezeichne die Menge dieser Singularitäten. Weiter existiere das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx (= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx)$, und es gelte $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{c \in P(f)} \text{res}_c f. \quad (4.14)$$

Beweis. Für jedes $R > 0$ sei $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Für hinreichend große R liegen alle Singularitäten von f in $B_R(0)$. Nach dem Residuensatz ist also



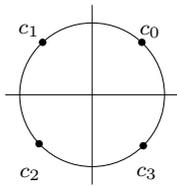
$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{c \in P(f)} \operatorname{res}_c f. \quad (4.15)$$

Nun ist aber

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)|.$$

Wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ ist aber $\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| = 0$. Lassen wir also in (4.15) $R \rightarrow \infty$ gehen, folgt die Behauptung (4.14). ■

Beispielsweise hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ genau vier einfache Pole: $c_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$, von denen genau zwei in der oberen Halbebene liegen. Außerdem überprüft man sofort, dass $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$, und auch die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ als uneigentliches Integral ist leicht einzusehen. Nach (4.14) gilt also



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i (\operatorname{res}_{c_0} f + \operatorname{res}_{c_1} f) \stackrel{(4.6)}{=} 2\pi i \left(\frac{1}{4c_0^3} + \frac{1}{4c_1^3} \right) = -\frac{\pi i}{2} (c_0 + c_1),$$

woraus sich nach kurzer Rechnung ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \quad \blacksquare$$

Beispiel 6: Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx$. Sei g holomorph auf \mathbb{C} mit Ausnahme endlich vieler Punkte, von denen keiner auf \mathbb{R} liegt. Wir bezeichnen die Menge dieser Singularitäten in der oberen (bzw. unteren) Halbebene mit $P_+(f)$ (bzw. $P_-(f)$). Weiter sei $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{w \in P_+(f)} \operatorname{res}_w (g(z)e^{i\alpha z}) & \text{falls } \alpha > 0, \\ -2\pi i \sum_{w \in P_-(f)} \operatorname{res}_w (g(z)e^{i\alpha z}) & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$

Einen Beweis finden Sie in Remmert, Funktionentheorie 1, S. 320. Integrale dieser Form werden Sie im kommenden Semester unter dem Thema *Fouriertransformation* wiedersehen.

Als Beispiel berechnen wir $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx$ für $\alpha > 0$. Die Funktion $f(z) := (1+z^2)^{-2}$ erfüllt die Voraussetzungen. Ihre einzige Singularität in der oberen

Halbebene ist der Punkt $w = i$, in dem eine Polstelle zweiter Ordnung vorliegt. Nach obigem Satz ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{res}_i(e^{i\alpha z} f(z)).$$

Da $x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2}$ eine ungerade Funktion ist, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx = 0.$$

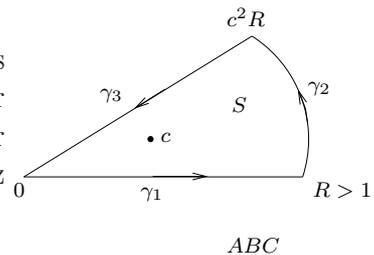
Es verbleibt die Berechnung des Residuums, was wir mittels (4.7) erledigen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(1+x^2)^2} dx &= 2\pi i \operatorname{res}_i \left(\frac{e^{i\alpha z}}{(1+z^2)^2} \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{d}{dz} \frac{e^{i\alpha z}}{(z+i)^2} \right) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{i\alpha e^{i\alpha z} (z+i)^2 - e^{i\alpha z} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \\ &= 2\pi i \frac{i\alpha e^{-\alpha} (2i)^2 - e^{-\alpha} \cdot 4i}{16} \\ &= \frac{\alpha + 1}{2} \pi e^{-\alpha}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 7: Integrale $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ für $m, n \in \mathbb{N}, 0 < m < n$. Der Integrand $f(z) := z^{m-1}(1+z^n)^{-1}$ hat in $c := e^{i\pi/n}$ einen Pol erster Ordnung, und es ist

$$\operatorname{res}_c f = \frac{c^{m-1}}{n c^{n-1}} = \frac{c^m}{n c^n} = -\frac{c^m}{n}.$$

Zur Auswertung des Integrals integrieren wir längs des Randes $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ des Kreissektors \mathcal{S} wie in der Skizze. Die Funktion f ist bis auf den Punkt c in einer Umgebung von \mathcal{S} holomorph. Nach dem Residuensatz ist also



$$\int_0^R f(x) dx + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} c^m. \quad (4.16)$$

Der Weg $-\gamma_3$ wird durch $t \mapsto tc^2$ mit $t \in [0, R]$ parametrisiert. Daher gilt

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_0^R \frac{t^{m-1} c^{2m-2}}{1+t^n \underbrace{c^{2n}}_{=1}} c^2 dt = -c^{2m} \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt,$$

d.h. (4.16) geht über in

$$(c^{2m} - 1) \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \frac{2\pi i}{n} c^m. \quad (4.17)$$

Weiter ist

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{n} R \cdot \max_{z \in \gamma_2} |f(z)|$$

und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| = 0 \quad \text{wegen } m < n.$$

Der Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ in (4.17) liefert also

$$(c^{2m} - 1) \int_0^\infty f(x) dx = \frac{2\pi i}{n} c^m.$$

Eine einfache Rechnung gibt schließlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{m}{n} \pi \right)^{-1}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $0 < m < n$. ■

5 Der Riemannsche Abbildungssatz

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass man jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit wenigstens zwei Randpunkten in \mathbb{C}^∞ biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbilden kann. Im Beweis werden wir die gesuchte biholomorphe Abbildung als Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen gewinnen. Wir betrachten daher zunächst Folgen holomorpher Funktionen.

5.1 Folgen holomorpher Funktionen und normale Familien

Wir beschreiben zunächst den für Folgen holomorpher Funktionen passenden Konvergenzbegriff.

Definition 5.1 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt kompakt konvergent, wenn für jede kompakte Teilmenge K von D die Folge der Einschränkungen $(f_n|_K)$ gleichmäßig auf K konvergiert. Die Folge (f_n) konvergiert lokal gleichmäßig auf D , wenn jeder Punkt $z_0 \in D$ eine offene Umgebung $U \subset D$ besitzt, auf der die Folge $(f_n|_U)$ gleichmäßig konvergiert.

Lemma 5.2 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Folge (f_n) konvergiert genau dann kompakt, wenn sie lokal gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Sei (f_n) kompakt konvergent und $z_0 \in D$. Wir wählen einen Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, der komplett in D liegt. Dann ist $K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r/2\}$ eine in D enthaltene kompakte Menge, auf der die Funktionen (f_n) gleichmäßig konvergieren. Dann konvergieren diese Funktionen erst recht gleichmäßig auf der Umgebung $U = \{z : |z - z_0| < r/2\}$ von z_0 .

Sei umgekehrt (f_n) lokal gleichmäßig konvergent und K kompakte Teilmenge von D . Für jedes $z_0 \in K$ gibt es eine offene Umgebung $U(z_0)$, auf der die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert. Die offenen Mengen $U(z_0)$ mit $z_0 \in K$ überdecken K . Wegen der Kompaktheit von K findet man eine Überdeckung von K durch endlich viele der $U(z_0)$, etwa $K \subseteq U(z_1) \cup \dots \cup U(z_n)$ mit $z_i \in K$. Es ist nun klar, dass die Folge (f_n) gleichmäßig auf $U(z_1) \cup \dots \cup U(z_n)$ und damit auf K konvergiert. ■

Satz 5.3 (Weierstraß) Sei G ein Gebiet. Eine Folge (f_n) holomorpher Funktionen konvergiere auf G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f . Dann ist f wieder holomorph, und alle Ableitungen von f_n konvergieren lokal gleichmäßig gegen die entsprechende Ableitung von f .

Beweis. Die Funktion f ist als lokal gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig. Sei nun Γ der Rand eines Dreiecks, welches einschließlich seines Randes ganz in G liegt. Da Γ kompakt ist, konvergieren die f_n auf Γ gleichmäßig gegen f , und wir dürfen Integration und Grenzübergang vertauschen:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist f holomorph in G . Wir zeigen nun noch die lokal gleichmäßige Konvergenz von $f_n^{(k)}$ gegen $f^{(k)}$ für alle $k \geq 1$. Dazu sei $z_0 \in G$, $B_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ sei ein Kreis um z_0 , der einschließlich seines Randes komplett in G liegt, und es sei $B_{r/2} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r/2\}$. Für alle $z \in B_{r/2}$ ist dann nach dem Entwicklungssatz (bzw. der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel)

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1} \\ &= C \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \end{aligned}$$

mit einer von $z \in B_{r/2}$ und n unabhängigen Konstanten C . Es gilt also

$$\sup_{z \in B_{r/2}} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq C \sup_{\zeta \in \partial B_r} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \rightarrow 0,$$

woraus die lokal gleichmäßige Konvergenz folgt. ■

Folgerung 5.4 (Weierstraß) Sei G ein beschränktes Gebiet, und die Funktionen f_n seien auf $\overline{G} = G \cup \partial G$ stetig und in G holomorph. Wenn die Folge (f_n) auf ∂G gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert sie auf ganz \overline{G} gleichmäßig, und die Grenzfunktion ist in G holomorph.

Beweis. Nach dem Maximumprinzip gilt für alle m und n sowie für alle $z \in \overline{G}$

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)|.$$

Hieraus, aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) auf ∂G sowie aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt sofort die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) auf \overline{G} . Nach Satz 5.3 ist die Grenzfunktion auf G holomorph. ■

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für Reihen von Funktionen.

Beispiel. (wird im weiteren nicht benötigt.) Wir überlegen uns, dass die Reihe

$$z \mapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} \quad \text{in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \text{ kompakt konvergiert.}$$

Sei K kompakt in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Wählen wir $R \in \mathbb{R}$ so, dass K im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ enthalten ist. Dann gilt für alle $z \in K$ und alle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2R$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|j| \geq N} \frac{1}{(z-j)^2} \right| &= \left| \sum_{j \geq N} \frac{1}{(z-j)^2} + \sum_{j \geq N} \frac{1}{(z+j)^2} \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} 2 \sum_{j \geq N} \frac{1}{(j-|z|)^2} \leq 2 \sum_{j \geq N} \frac{1}{(j-j/2)^2} = 8 \sum_{j \geq N} \frac{1}{j^2}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass für $j \geq N > 2R$ gilt: $|z| \leq R < N/2 \leq j/2$. Die Reihe $2 \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ ist also eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (z-j)^{-2}$, woraus die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe auf K und damit die kompakte Konvergenz folgt. Die Summe dieser Reihe ist übrigens

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Man nennt daher $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j)^2}$ auch die *Partialbruchentwicklung* der Funktion $z \mapsto \pi^2 / \sin^2 \pi z$. Ähnliche Entwicklungen findet man für alle in \mathbb{C} meromorphen Funktionen. ■

Weiter stellt sich die Frage, ob der Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge biholomorpher Abbildungen (der nach Satz 5.3 holomorph ist) wieder biholomorph ist. Zur Antwort benötigen wir den Satz von Rouché in der folgenden einfachen Form.

Satz 5.5 (Satz von Rouché) *Sei G ein Gebiet, B eine Kreisscheibe, die mit ihrem Rand ∂B komplett in G liegt, und f und g seien in G holomorph. Gilt*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B,$$

so haben f und g in B gleich viele Nullstellen (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten).

Satz 5.6 *Sei G ein Gebiet und (f_n) eine auf G kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion f . Hat f in $z_0 \in G$ eine k -fache w_0 -Stelle, so gibt es beliebig kleine Umgebungen $U \subseteq G$ von z_0 , so dass jede Funktion f_n mit hinreichend großem n auf U genau k w_0 -Stellen (gezählt unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit) besitzt.*

Beweis. O.E.d.A. sei $w_0 = 0$. Wir wählen $r > 0$ so, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ (mit $B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$) und dass f auf $\overline{B_r(z_0)}$ nur in z_0 verschwindet (da f nicht konstant ist, sind Nullstellen von f isolierte Punkte ↗ Identitätssatz).

Dann ist $d := \min\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\} > 0$. Weiter wählen wir nun N so, dass für alle $n \geq N$ und alle $z \in \partial B_r(z_0)$ gilt: $|f_n(z) - f(z)| < d$ (möglich wegen gleichmäßiger Konvergenz auf $\partial B_r(z_0)$). Für alle $n \geq N$ ist also

$$|f(z) - f_n(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B_r(z_0).$$

Der Satz von Rouché liefert nun die Behauptung. ■

Folgerung 5.7 *Sei G Gebiet und (f_n) eine auf G kompakt konvergente Folge holomorpher Funktionen mit nichtkonstanter Grenzfunktion f . Sind alle f_n injektiv, so ist auch f injektiv.*

Beweis. Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann gibt es ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und Punkte $z_1 \neq z_2 \in G$ so, dass $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. Nach Satz 5.6 gibt es disjunkte Umgebungen U_1 von z_1 und U_2 von z_2 so, dass jede Funktion f_n mit hinreichend großem n in U_1 und in U_2 jeweils mindestens eine w_0 Stelle besitzt. Dann sind diese Funktionen f_n nicht injektiv im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Desweiteren benötigen wir noch Sätze, die man als Kompaktheitskriterien für Funktionenmengen deuten kann. Bekanntlich besitzt jede beschränkte Folge im \mathbb{R}^n eine konvergente Teilfolge („Beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n sind relativ kompakt“). Wir benötigen ähnliche Kriterien, die die Existenz konvergenter Teilfolgen in Mengen von Funktionen garantieren. Für Mengen stetiger Funktionen und die übliche gleichmäßige Konvergenz leistet dies der Satz von Arzelá/Ascoli. Vorher eine Definition.

Definition 5.8 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und \mathcal{F} eine Menge von Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Die Menge \mathcal{F} heißt gleichgradig stetig, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| < \delta$ und für alle $f \in \mathcal{F}$.*

Satz 5.9 (Satz von Arzelá/Ascoli) *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und (f_n) eine beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gibt es eine auf X gleichmäßig konvergente Teilfolge von (f_n) .*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung V_x^k von x mit

$$|f_n(x) - f_n(y)| < 1/k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } y \in V_x^k.$$

Da X kompakt ist, lässt sich aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x \in X} V_x^k$ eine endliche Überdeckung auswählen. Es gibt also Punkte $x_1^k, \dots, x_{m_k}^k$ in X und Umgebungen $V_i^k := V_{x_i^k}^k$ dieser Punkte so, dass $X = \bigcup_{i=1}^{m_k} V_i^k$ und

$$|f_n(x) - f_n(x_i^k)| < 1/k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in V_i^k, \text{ und } i = 1, \dots, m_k. \quad (5.1)$$

Wir ordnen die abzählbare Menge $\{x_i^k : k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m_k\}$ wie folgt in eine Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$:

$$x_1^1, \dots, x_{m_1}^1, x_1^2, \dots, x_{m_2}^2, \dots$$

Für jedes y_m ist die Menge $\{f_n(y_m) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Es gibt daher eine Teilfolge (f_n^1) von (f_n) , die in y_1 konvergiert. Aus gleichem Grund gibt es eine Teilfolge (f_n^2) von (f_n^1) , die in y_2 konvergiert. Wir fahren so fort und erhalten für jedes $k > 1$ eine Teilfolge (f_n^k) von (f_n^{k-1}) , die in y_k (und damit auf $\{y_1, \dots, y_k\}$) konvergiert. Dann ist $(f_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (f_n) , die in jedem Punkt von

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_j^k : k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_k\} \quad (5.2)$$

konvergiert. Um die Bezeichnungen nicht unnötig zu verkomplizieren, nehmen wir an, dass bereits die Folge (f_n) auf der Menge (5.2) punktweise konvergiert.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Folge (f_n) punktweise auf X konvergiert. Sei $x \in X$. Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{C} genügt es zu zeigen, dass $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3}{k} < \varepsilon$ und ein x_j^k mit $x \in V_j^k$, und es ist wegen (5.1)

$$|f_n(x) - f_n(x_j^k)| < 1/k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Folge $(f_n(x_j^k))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x_j^k) - f_{n'}(x_j^k)| < 1/k \quad \text{für alle } n, n' \geq n_0.$$

Für $n, n' \geq n_0$ ist dann

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{n'}(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_j^k)| + |f_n(x_j^k) - f_{n'}(x_j^k)| + |f_{n'}(x_j^k) - f_{n'}(x)| \\ &\leq 3 \cdot \frac{1}{k} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es ist also $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, folglich konvergent. Wir setzen $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ und zeigen noch, dass die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass $3/k < \varepsilon$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f_n(x_i^k) - f(x_i^k)| \leq 1/k \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und } i = 1, \dots, m_k.$$

Da jedes x in einer der Mengen V_i^k mit $i = 1, \dots, m_k$ enthalten ist, ist für $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i^k)| + |f_n(x_i^k) - f(x_i^k)| + |f(x_i^k) - f(x)|. \quad (5.3)$$

Die ersten beiden Summanden sind nicht größer als $1/k$. Für den dritten gilt ebenfalls

$$|f(x_i^k) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_i^k) - f_n(x)| \leq 1/k.$$

Also ist für $n \geq n_0$ und jedes $x \in X$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 3/k < \varepsilon,$$

d.h. die f_n konvergieren tatsächlich gleichmäßig gegen f . ■

Hieraus ergibt sich leicht eine lokale Variante. Dazu nennen wir eine Familie \mathcal{F} von auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ definierten Funktionen *lokal beschränkt* bzw. *lokal gleichgradig stetig*, wenn jeder Punkt von U eine Umgebung $V \subset U$ besitzt, auf der die Familie der Einschränkungen $(f|_V)$, $f \in \mathcal{F}$, beschränkt bzw. gleichgradig stetig ist. Aus Arzelá/Ascoli ergibt sich sofort

Satz 5.10 („Lokaler“ Satz von Arzelá/Ascoli) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und (f_n) eine lokal beschränkte und lokal gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gibt es eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge von (f_n) .

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ ($= \mathbb{R}^2$) und sind die Funktionen f_n holomorph, vereinfacht sich die Situation wesentlich:

Satz 5.11 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Jede auf U lokal beschränkte Familie \mathcal{F} holomorpher Funktionen ist lokal gleichgradig stetig.

Beweis. Sei $a \in U$ und $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ eine Kreisscheibe, deren Abschließung ganz in U liegt. Dann gibt es eine Konstante K so, dass $|f(z)| \leq K$ für alle $z \in \overline{B_r(a)}$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Wir zeigen die gleichgradige Stetigkeit von \mathcal{F} auf $\overline{B_{r/2}(a)}$. Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $z_1, z_2 \in \overline{B_{r/2}(a)}$ und $f \in \mathcal{F}$ ist dann

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz \right| \leq |z_2 - z_1| \max_{z \in \overline{B_{r/2}(a)}} |f'(z)|.$$

Weiter gilt für $z \in \overline{B_{r/2}(a)}$ nach dem verallgemeinerten Cauchyschen Integralsatz

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{K}{(r/2)^2} = \frac{4K}{r}.$$

Für $z_1, z_2 \in \overline{B_{r/2}(a)}$ mit $|z_1 - z_2| < \delta := \frac{r\varepsilon}{4K}$ hat man also $|f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$. Da δ nicht von f sondern nur von \mathcal{F} abhängt, ist der Satz bewiesen. ■

Als unmittelbare Folgerung von Satz 5.11 und dem lokalen Satz von Arzelá/Ascoli findet man:

Satz 5.12 (Satz von Montel) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann besitzt jede auf D lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Traditionell heißt eine Menge \mathcal{F} holomorpher Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine *normale Familie*, wenn jede Folge aus \mathcal{F} eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Wir können den Satz von Montel also auch wie folgt formulieren:

Jede lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.

Abschließend noch eine Aussage über die Konvergenz von Folgen aus normalen Familien. Wir werden sehen, dass in jeder normalen Familie jede punktweise konvergente Folge lokal gleichmäßig konvergiert. Es gilt sogar noch allgemeiner:

Satz 5.13 (Satz von Vitali) *Sei G ein Gebiet und \mathcal{F} eine normale Familie von auf G holomorphen Funktionen. Weiter sei $(z_n)_{n \geq 1}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte aus G , die gegen ein $z_0 \in G$ konvergiert, und $(f_n) \subseteq \mathcal{F}$ sei eine Folge von Funktionen, die auf $M := \{z_n : n \geq 0\}$ punktweise konvergiert. Dann konvergiert (f_n) auf G lokal gleichmäßig.*

Beweis. Wir definieren eine Funktion $g : M \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z_k) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_k)$. Außerdem wissen wir, dass es eine Teilfolge von f_n gibt, die lokal gleichmäßig gegen eine auf G holomorphe Funktion f konvergiert. Auf M gilt offenbar $f|_M = g$. Wir zeigen nun, dass die komplette Folge (f_n) lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$, eine kompakte Menge K in G , eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ von (f_n) sowie Punkte $x_k \in K$ ($k \geq 1$) so, dass

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{für alle } k. \quad (5.4)$$

Da $(f_{n_k}) \subseteq \mathcal{F}$ und \mathcal{F} normal, gibt es eine Teilfolge $(f_{n_{k_r}})_{r \geq 1}$ von (f_{n_k}) , die auf G lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion \tilde{f} konvergiert. Wegen (5.4) kann diese nicht mit f übereinstimmen. Andererseits ist natürlich $\tilde{f}|_M = g$, d.h. auf M stimmen f und \tilde{f} überein. Nach dem Identitätssatz stimmen f und \tilde{f} auf ganz G überein. Widerspruch. ■

5.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Der Riemannsche Abbildungssatz macht eine Aussage über einfach zusammenhängende Gebiete. Zur Erinnerung: Wir bezeichnen mit \mathbb{C}^∞ die um den Punkt ∞ erweiterte komplexe Ebene, die wir über die stereographische Projektion mit der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren.

Definition 5.14 *Ein Gebiet (d.h. eine offene und zusammenhängende Menge) $G \subseteq \mathbb{C}^\infty$ heißt einfach zusammenhängend, wenn das Komplement $\mathbb{C}^\infty \setminus G$ zusammenhängend ist.*

Die gleiche Definition trifft man auch für offene und zusammenhängende Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}^\infty$. Wir werden in diesem Abschnitt die einfach zusammenhängenden Gebiete in \mathbb{C}^∞ bis auf biholomorphe Äquivalenz klassifizieren. Sehen wir uns zunächst zwei einfache Beispiele an.

Beispiel 1. \mathbb{C}^∞ ist einfach zusammenhängend. \mathbb{C}^∞ ist jedoch zu keinem echten Teilgebiet G biholomorph äquivalent. Bei jeder konformen Abbildung $f : \mathbb{C}^\infty \rightarrow G$ muß nämlich die Menge $G = f(\mathbb{C}^\infty)$ offen (Offenheitssatz) und kompakt (da \mathbb{C}^∞ kompakt ist) sein. Dies ist nur für $G = \mathbb{C}^\infty$ möglich. ■

Beispiel 2. Sei $p \in \mathbb{C}^\infty$. Dann ist die punktierte Sphäre $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$ einfach zusammenhängend. Falls $p = \infty$, ist $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$ gleich \mathbb{C} . Anderenfalls ist $z \mapsto \frac{1}{z-p}$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{C}^\infty \setminus \{p\}$ auf \mathbb{C} (wobei $\infty \mapsto 0$ und $p \mapsto \infty$). \mathbb{C} selbst ist jedoch zu keinem beschränkten Gebiet biholomorph äquivalent (Satz von Liouville). ■

Erstaunlicherweise sind aber alle einfach zusammenhängenden Gebiete in \mathbb{C}^∞ , deren Komplement mindestens 2 verschiedene Punkte enthält, zum Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ biholomorph äquivalent! Dies ist der Riemannsche Abbildungssatz. Es gibt also genau 3 Klassen einfach zusammenhängender Gebiete in \mathbb{C}^∞ bezüglich biholomorpher Äquivalenz. Diese werden repräsentiert durch \mathbb{C}^∞ , \mathbb{C} und \mathbb{D} .

Satz 5.15 (Riemannscher Abbildungssatz) Sei $G \subset \mathbb{C}^\infty$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Komplement $\mathbb{C}^\infty \setminus G$ mindestens zwei Punkte enthält. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung f von G auf \mathbb{D} . Man kann außerdem vorschreiben, dass für einen beliebig gewählten Punkt $z_0 \in G \setminus \{\infty\}$ gilt: $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$. Durch diese Vorgaben wird f eindeutig bestimmt.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis dieses Satzes gewidmet. Wir beginnen mit der *Eindeutigkeit*. Seien f und g biholomorphe Abbildungen von G auf \mathbb{D} mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $f'(z_0), g'(z_0) > 0$. Dann ist $h := f \circ g^{-1}$ eine biholomorphe Abbildung von \mathbb{D} auf sich mit $h(0) = 0$. Wie wir aus der Übung wissen, ist h dann eine Drehung, d.h. $h(z) = e^{i\varphi}z$ mit einem $\varphi \in [0, 2\pi]$. Hieraus folgt $h'(0) = e^{i\varphi}$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} h'(0) &= (f \circ g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) \\ &= f'(z_0) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = f'(z_0)/g'(z_0) > 0, \end{aligned}$$

so dass notwendigerweise $e^{i\varphi} = 1$, d.h. $h(z) = z$ bzw. $f = g$. ■

Den *Existenzbeweis* führen wir in drei Schritten:

- (a) Wir konstruieren eine biholomorphe Abbildung f_1 von G auf ein Gebiet $G^* \subseteq \mathbb{D}$ so, dass $f_1(z_0) = 0$ und $f_1'(z_0) > 0$.

- (b) Unter allen injektiven holomorphen Abbildungen g von G^* in \mathbb{D} mit $g(0) = 0$ suchen wir einen Kandidaten f_0 für eine Abbildung *auf* \mathbb{D} . Die Idee ist, $g'(0)$ maximal zu wählen, da $g'(0)$ den „Vergrößerungsfaktor“ von g in der Nähe der 0 beschreibt.
- (c) Wir zeigen, dass die in (b) bestimmte Abbildung tatsächlich der Bedingung $f_0(G^*) = \mathbb{D}$ genügt. Damit ist $f = f_0 \circ f_1$ eine Funktion, deren Existenz der Riemannsche Abbildungssatz behauptet.

Zu (a). Sei $G \subset \mathbb{C}^\infty$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, a und b seien aus $\mathbb{C}^\infty \setminus G$, und z_0 aus $G \setminus \{\infty\}$. Wir wählen eine biholomorphe Abbildung T_1 auf \mathbb{C}^∞ so, dass $T_1(a) = 0$ und $T_1(b) = \infty$, z.B. durch

$$T_1 : z \mapsto \begin{cases} \frac{z-a}{z-b} & \text{für } a, b \neq \infty, \\ \frac{1}{z-b} & \text{für } a = \infty, b \neq \infty, \\ z - a & \text{für } a \neq \infty, b = \infty. \end{cases}$$

Dann ist $G_1 := T_1 G$ ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Auf G_1 existiert daher eine Quadratwurzel T_2 (d.h. es ist $(T_2(z))^2 = z$ für alle $z \in G_1$), und G_1 wird durch T_2 biholomorph auf ein Gebiet $G_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet. (↗ Übung. Die Existenz einer solchen Quadratwurzel folgt auch mit dem Kreiskettenverfahren.)

Ist w_0 irgendein Punkt in G_2 , so gibt es eine Kreisscheibe $B_r(w_0)$ mit $\overline{B_r(w_0)} \subset G_2$. Dann ist aber $\overline{B_r(-w_0)} \cap G_2 = \emptyset$. Mit $w \in G_2$ kann nämlich nicht gleichzeitig $-w \in G_2$ gelten, da sonst T_2 nicht bijektiv wäre. Im Komplement von G_2 liegt also eine komplette abgeschlossene Kreisscheibe, nämlich $\overline{B_r(-w_0)}$.

Wir wählen nun eine biholomorphe Abbildung $T_3 : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, die $\mathbb{C}^\infty \setminus \overline{B_r(-w_0)}$ auf \mathbb{D} abbildet. Dies wird z.B. erreicht durch

$$T_3 : z \mapsto \frac{r}{z + w_0}.$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(-w_0)}$ ist nämlich $|z + w_0| > r$, d.h. $|T_3(z)| < 1$. Wegen $G_2 \subseteq \mathbb{C}^\infty \setminus \overline{B_r(-w_0)}$ ist also $G_3 := T_3 G_2$ ein in \mathbb{D} enthaltenes einfach zusammenhängendes Gebiet.

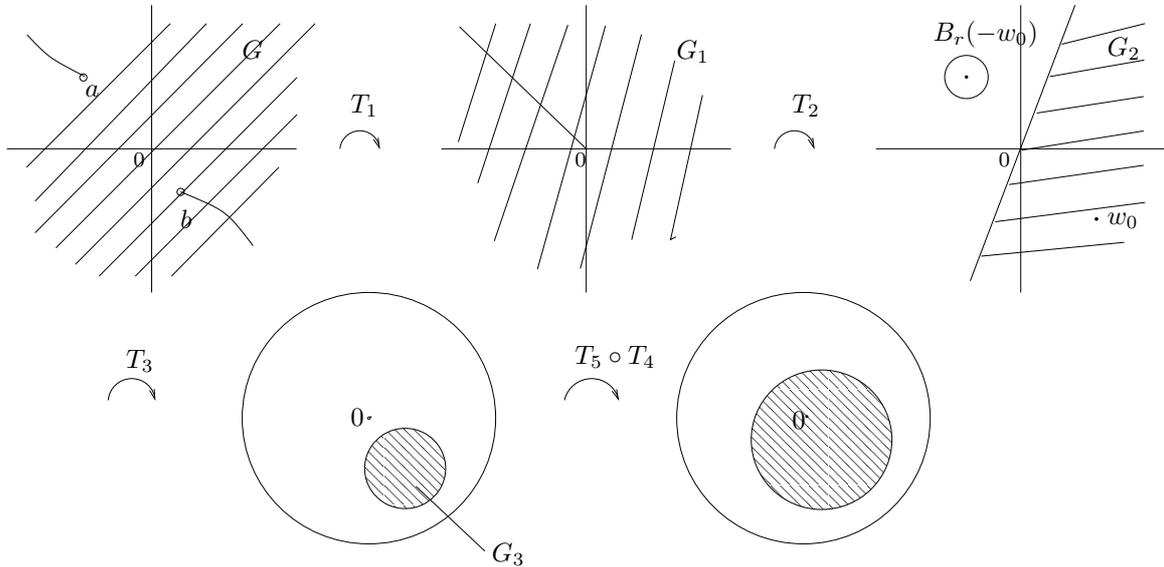
Sei noch $z_3 := T_3 \circ T_2 \circ T_1(z_0) \in G_3 \subset \mathbb{D}$. Dann ist

$$T_4 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto \frac{z - z_3}{1 - \overline{z_3}z}$$

eine biholomorphe Abbildung, die \mathbb{D} auf sich und z_3 in 0 abbildet. Schließlich ist, da alle Abbildungen T_i biholomorph sind, $(T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)'(z_0) =: a_0$ ungleich 0 (vgl. Biholomorphiekriterium). Es gibt also ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $e^{i\varphi} a_0 > 0$. Mit der Drehung

$$T_5 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto e^{i\varphi} z$$

haben wir damit das Gewünschte erhalten: die Funktion $f_1 := T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ bildet G biholomorph auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G^* \subset \mathbb{D}$ ab, und es gilt $f_1(z_0) = 0$ sowie $f_1'(z_0) > 0$.



Zu (b). Sei nun also $G^* \subset \mathbb{D}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G^*$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} := \{f : G^* \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ holomorph, injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}.$$

Die Menge \mathcal{F} ist nicht leer, da sie die identische Abbildung $z \mapsto z$ enthält, und \mathcal{F} ist durch 1 beschränkt. Nach dem Satz von Montel ist \mathcal{F} also eine normale Familie. Es sei

$$\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(0).$$

Da die Funktion $z \mapsto z$ zu \mathcal{F} gehört, ist $\alpha \geq 1$. Wir zeigen, dass $\alpha < \infty$. Dazu sei (f_n) eine Folge aus \mathcal{F} mit $f_n'(0) \rightarrow \alpha$. Da \mathcal{F} eine normale Familie ist, enthält die Folge (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, die wir der Einfachheit halber wieder mit (f_n) bezeichnen. Ihre Grenzfunktion nennen wir f_0 . Nach dem Satz von Weierstraß (= Satz 5.3) gilt $f_n'(0) \rightarrow f_0'(0)$, also ist $\alpha = f_0'(0)$ endlich.

Wir überlegen uns noch, dass $f_0 \in \mathcal{F}$. Zunächst ist wegen $\alpha = f_0'(0) \neq 0$ die Funktion f_0 nicht konstant. Weiter: aus $|f_n| < 1$ auf G^* folgt $|f_0| \leq 1$ auf G^* . Nach dem Maximumprinzip ist dann sogar $|f_0| < 1$ auf G^* , d.h. $f_0(G^*) \subseteq \mathbb{D}$. Schließlich ist f_0 injektiv nach Folgerung 5.7. Da natürlich $f_0(0) = 0$ ist, folgt die Behauptung $f_0 \in \mathcal{F}$.

Zu (c). Sei $G^* \subseteq \mathbb{D}$ wie in (a) konstruiert und $f_0 : G^* \rightarrow \mathbb{D}$ wie in (b) definiert. Wir wollen nun zeigen, dass $f_0(G^*) = \mathbb{D}$. Dazu beweisen wir folgende Aussage, die man als Umkehrung des Schwarzschen Lemmas (\nearrow Abschnitt 3.3) deuten kann.

Lemma 5.16 Sei G_0 ein einfach zusammenhängendes echtes Teilgebiet von \mathbb{D} mit $0 \in G_0$. Dann gibt es eine injektive holomorphe Funktion $h : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) > 1$.

Angenommen, dieses Lemma wäre bereits bewiesen. Dann könnten wir den Beweis des Riemannsches Abbildungssatzes wie folgt beenden: Wir wollen zeigen, dass $f_0(G^*) = \mathbb{D}$. Wäre $G_0 := f_0(G^*)$ eine *echte* Teilmenge von \mathbb{D} , so könnte man eine Funktion $h : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$ wie im Lemma wählen. Dann wäre $h \circ f_0$ eine Funktion aus \mathcal{F} , für deren Ableitung in 0 gilt

$$(h \circ f_0)'(0) = h'(f_0(0)) \cdot f_0'(0) = h'(0) \cdot \alpha > \alpha.$$

Dies widerspricht der Definition $\alpha := \sup \{f'(0) : f \in \mathcal{F}\}$ von α . ■

Beweis des Lemmas. Wir wählen einen Punkt $c \in \mathbb{D} \setminus G_0$. Dann ist

$$S_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

eine biholomorphe Abbildung von \mathbb{D} auf \mathbb{D} , die c in 0 und 0 in $-c$ überführt. Also enthält $S_1(G_0)$ den Nullpunkt nicht. Da außerdem $S_1(G_0)$ wieder einfach zusammenhängend ist, gibt es auf $S_1(G_0)$ einen holomorphen Zweig S_2 der Quadratwurzel. S_2 ist injektiv, und $(S_2 \circ S_1)(G_0) \subseteq \mathbb{D}$. Mit $d := S_2(-c)$ (beachte, dass $-c \in S_1(G_0)$) und einem beliebigen $\lambda \in \mathbb{R}$ (welches wir später genau festlegen) sei

$$S_3 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto e^{i\lambda} \frac{z - d}{1 - \bar{d}z}.$$

Wir betrachten die Funktion $h := S_3 \circ S_2 \circ S_1 : G_0 \rightarrow \mathbb{D}$. Es ist $h(0) = S_3(S_2(-c)) = S_3(d) = 0$ und (da alle betrachteten Funktionen biholomorph sind, vgl. Biholomorphiekriterium) $h'(0) \neq 0$. Wir wählen und fixieren nun $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $h'(0) > 0$ und überlegen uns, dass dann bereits $h'(0) > 1$ sein muss.

Es sei $S_2^* : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto z^2$. Dann ist $h^* := S_1^{(-1)} \circ S_2^* \circ S_3^{(-1)}$ eine holomorphe Abbildung von \mathbb{D} in sich. Da die Einschränkung von S_2^* auf $S_2(S_1(G_0))$ die Umkehrabbildung zu S_2 ist, ist die Einschränkung von h^* auf $S_3(S_2(S_1(G_0))) = h(G_0)$ die Umkehrabbildung zu h . Es ist also $h^*(0) = 0$, die Abbildung h^* ist jedoch keine Drehung von \mathbb{D} (h^* ist nicht einmal injektiv, da zwar S_1 und S_2 bijektiv sind, die Abbildung S_2^* aber z.B. $+1/2$ und $-1/2$ jeweils auf $1/4$ abbildet). Nach dem Lemma von Schwarz ist daher $|(h^*)'(0)| < 1$. Dann ist aber

$$h'(0) = 1/(h^*)'(0) > 1,$$

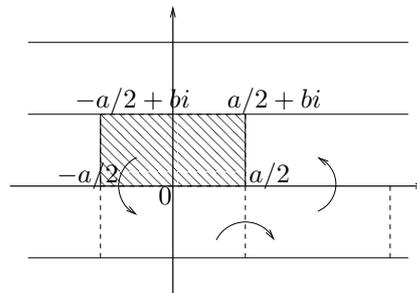
was zu zeigen war. ■

Als triviale Folgerung erhält man, dass insbesondere jedes von \mathbb{C}^∞ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiet umkehrbar stetig auf \mathbb{D} abgebildet werden kann. Dies läßt sich auch direkt beweisen, ist aber ebenfalls keineswegs trivial.

Über die praktische Bestimmung von Riemann-Abbildungen für konkrete Gebiete kann man sich orientieren in *Prem Kythe: Computational Conformal Mapping*. Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, können Sie auch Bsp. 1 in IV, §9 von Behnke/Sommer durcharbeiten. Dort wird eine biholomorphe Abbildung untersucht, die das Rechteck mit Ecken in $\pm a/2$ und $\pm a/2 + bi$ auf die obere Halbebene abbildet, wobei $\pm a/2$ in ± 1 und bi in ∞ übergehen. Durch diese Festlegungen ist die gesuchte Abbildung f eindeutig bestimmt. Es wird dann (im wesentlichen mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip) gezeigt, dass sich f zu einer *doppelt-periodischen* Funktion mit den Perioden $2a$ und $2bi$ fortsetzen lässt, d.h. dass

$$f(z + m \cdot 2a + l \cdot 2bi) = f(z) \quad \text{für alle } m, l \in \mathbb{Z}.$$

Die Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ wird durch ein sog. elliptisches Integral beschrieben.



5.3 Zum Randverhalten Riemannscher Abbildungen

Wir wenden uns noch kurz der Frage zu, ob sich eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ wie im Riemannschen Abbildungssatz stetig auf den Rand von G fortsetzen lässt. Da wir etwas über den Rand von G aussagen wollen, ist es zweckmäßiger, statt f die Umkehrabbildung $g : \mathbb{D} \rightarrow G$, $g = f^{(-1)}$ zu betrachten. Außerdem nehmen wir an, dass $0 \in G$ und $g(0) = 0$ sowie $g'(0) > 0$.

Wir nehmen zunächst einmal an, g ließe sich stetig auf den Rand $\partial\mathbb{D}$ von \mathbb{D} fortsetzen. Dann gilt

$$g(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial G. \quad (5.5)$$

Ist nämlich $a^* \in \partial\mathbb{D}$ und $(a_n) \subset \mathbb{D}$ eine gegen a konvergierende Folge, so folgt aus der Stetigkeit von g , dass $g(a_n) \rightarrow g(a^*) =: b^*$. Wäre b^* im Inneren von G , so würde, da die Umkehrfunktion zu g in einer Umgebung von b^* stetig ist, gelten:

$$g^{(-1)}(g(a_n)) \rightarrow g^{(-1)}(b^*) \in \mathbb{D} \quad \text{bzw.} \quad a_n \rightarrow a^* \in \mathbb{D}. \quad \downarrow$$

Wir überlegen uns weiter, dass

$$g(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{G}. \quad (5.6)$$

Aus $g(\mathbb{D}) = G$ und $g(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial G$ folgt $g(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq \overline{G}$. Sei $b^* \in \partial G$. Wir wählen eine Folge $(b_n) \subset G$, die gegen b^* konvergiert. Die Folge (a_n) , $a_n := g^{(-1)}(b_n)$, besitzt eine in $\overline{\mathbb{D}}$ konvergente Teilfolge. Ist a^* ihr Grenzwert, so gilt $g(a^*) = \lim g(a_n) = \lim b_n = b^*$, d.h. $b^* \in g(\overline{\mathbb{D}})$.

Mit (5.5) und (5.6) und wegen $g(\mathbb{D}) = G$ hat man nun $g(\partial\mathbb{D}) = \partial G$. Mit anderen Worten: ∂G ist ein stetiges Bild von $\partial\mathbb{D}$, d.h. eine geschlossene *Kurve*. Falls sich g sogar zu einem Homöomorphismus (d.h. g ist stetig, die Umkehrabbildung existiert und ist wieder stetig) von $\overline{\mathbb{D}}$ auf \overline{G} fortsetzen läßt, so ist ∂G ein homöomorphes Bild von $\partial\mathbb{D}$, d.h. eine *Jordankurve*.

Bisher haben wir von der Holomorphie von g gar nicht Gebrauch gemacht. Es zeigt sich nun, dass für Abbildungen g wie im Riemannsches Abbildungssatz auch die Umkehrung gilt:

Satz 5.17 *Sei g ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet und $g : \mathbb{D} \rightarrow G$ die Riemann-Abbildung mit $g(0) = 0$ und $g'(0) > 0$. Dann läßt sich g genau dann zu einem Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{D}}$ auf \overline{G} fortsetzen, wenn ∂G eine Jordan-Kurve ist.*

Einen Beweis finden Sie in Conway, Functions Of One Complex Variable, II. Springer, Theorem 5.6 in Abschnitt 14.8.

Dieses Resultat zeigt, dass das Randverhalten von Riemannabbildungen in vielen Fällen recht gut ist. Um den Gegensatz zum Randverhalten nicht-holomorpher stetiger Funktionen zu verdeutlichen, betrachten wir ein abschließendes Beispiel.

Beispiel. Die Funktion

$$\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \mapsto ze^{i\frac{1}{1-|z|}}$$

ist ein Homöomorphismus von \mathbb{D} auf sich. Betrachtet man für fixiertes $\varphi \in \mathbb{R}$ aber das Verhalten von $\varphi(e^{i\varphi}r)$ für $(0, 1) \ni r \rightarrow 1$, so ist wegen

$$\varphi(e^{i\varphi}r) = re^{i\varphi} e^{i\frac{1}{1-r}}$$

klar, dass das Bild von $e^{i\varphi}(0, 1)$ unter der Abbildung φ sich spiralförmig dem Einheitskreis $\partial\mathbb{D}$ nähert und dabei den Nullpunkt unendlich oft umläuft. Obwohl der Rand $\partial\mathbb{D}$ also so gut ist wie nur möglich, läßt sich φ nicht stetig auf diesen fortsetzen.