Vorlesung Funktionalanalysis
WS 2020/21

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Grundlagen (abstrakte Räume) **5**
2.1 Topologische Räume 5
2.2 Metrische Räume 6
2.3 Normierte Räume 9
2.4 Hilberträume 11

3 Funktionenräume **15**
3.1 Räume stetiger Funktionen 15
3.2 L^p-Räume 21
3.3 Sobolevräume 22

4 Lineare Operatoren **25**
4.1 Stetigkeit 25
4.2 Invertierbarkeit 28

5 Der Bairesche Kategoriensatz und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit **32**
5.1 Der Bairesche Kategoriensatz 32
5.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 34

6 Das Prinzip der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen **36**
6.1 Der Satz von der offenen Abbildung 36
6.2 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen 38

7 Der Dualraum **42**
7.1 Definition und Beispiele 42
7.2 Anwendungen von Satz 7.4 47

8 Der Satz von Hahn-Banach **49**

9 Kompaktheit **56**

10 Schwache Konvergenz und Reflexivität **63**
10.1 Reflexive Banachräume 63
10.2 Schwache Topologien und der Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki 68

11 Kompakte und adjungierte Operatoren **73**
11.1 Kompakte Operatoren 73
11.2 Adjungierte Operatoren 75
11.3 Der Satz vom abgeschlossenen Bild 77

12 Riesz-Schauder-Theorie **83**
12.1 Fredholmoperatoren und ihre Adjungierten 83
12.2 Das Spektrum kompakter Operatoren 85
12.3 Weiteres zu Fredholmoperatoren 89

13 Hilberträume **92**
13.1 Orthonormalsysteme und Basen 92
13.2 Adjungierte Operatoren 95
13.3 Orthogonale Projektionen 96

14 Spektraltheorie normaler und selbstadjungierter Operatoren **99**
14.1 Spektralsätze für normale Operatoren 99
14.2 Einige Konsequenzen 105

15 Der holomorphe Funktionalkalkül **109**
15.1 Ergänzungen zur Complex Analysis 109
15.2 Der Dunford-Kalkül 111
15.3 Spektralsätze für holomorphe Funktionen 114

1 Einleitung

Die Herausbildung der Funktionalanalysis als eigenständige mathematische Disziplin vollzog sich im wesentlichen in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts im Zusammenhang mit dem Bemühen, eine Theorie der Integralgleichungen aufzubauen (Hilbert, Schmidt, Fredholm, Banach). Ihre Ursprünge reichen jedoch viel weiter zurück (Fourier, Euler). Aus Sicht der Physiker ist die Funktionalanalysis die Mathematik der Quantentheorie.

Heute ist die Funktionalanalysis eine breitgefächerte Theorie mit zahlreichen Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik und mit vielfältigen Anwendungen, etwa in der Physik und der Mechanik. Einige dieser Richtungen, auf die wir hier nicht eingehen können, werden in weiterführenden Vorlesungen behandelt: Nichtlineare Funktionalanalysis, Topologische Räume und lokalkonvexe Räume, Sobolevräume und Distributionen, Spektraltheorie für beschränkte und unbeschränkte Operatoren, Banach- und C^*-Algebren, Darstellungstheorie, Anwendungen in der Numerischen Analysis, ...

Das Ziel dieser Vorlesung ist dagegen recht bescheiden. Wir wollen uns nur mit Grundbegriffen der *linearen* Funktionalanalysis befassen. Als ein Leitmotiv wird dabei immer wieder das Problem der Lösbarkeit *linearer Gleichungen*

$$Ax = y \tag{1.1}$$

dienen, wobei y ein gegebenes Element eines linearen Raumes X und $A : X \to X$ eine lineare Abbildung ist. Solche Probleme kennen wir aus der linearen Algebra, wo etwa $y \in X = \mathbb{R}^n$ ist und A eine $n \times n$-Matrix. In diesem Fall kann man sich (1.1) als lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte vorstellen, über dessen Lösbarkeit wir gut Bescheid wissen. So ist (1.1) genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt. Wenn dies der Fall ist, so ist die Matrix A invertierbar, und (1.1) ist für *jede rechte* Seite eindeutig lösbar: $x = A^{-1}y$.

Wir werden solche Gleichungen in Situationen zu betrachten haben, in denen unendlich viele Unbekannte vorliegen und man A etwa als unendliche Matrix auffassen kann, oder wo x, y Funktionen sind und A als Integraloperator wirkt. Beim Übergang von endlichen zu unendlichen linearen Gleichungssystemen gehen viele der vertrauten Eigenschaften verloren. Beispielsweise ist es im Falle unendlich vieler Unbekannter nicht mehr wahr, dass aus der eindeutigen Lösbarkeit von $Ax = 0$ die Lösbarkeit von $Ax = y$ für alle $y \in X$ folgt.

Ein einfaches Beispiel für dieses Phänomen ist das folgende: Wir betrachten linearen Raum X aller Vektoren (Folgen) $x = (x_1, x_2, \ldots)$ mit unendlich vielen Einträgen und auf dieser Menge den *Verschiebungsoperator*

$$V : X \to X, \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Offenbar folgt aus $Vx = 0$, dass $x = 0$. Die Gleichung $Vx = (1, 0, 0, \ldots)$ besitzt jedoch keine Lösungen. ■

Fragen, die uns im Zusammenhang mit Gleichungen $Ax = y$ besonders interessieren, sind:

• Für welche y ist diese Gleichung lösbar?

• Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

• Wie hängt die Lösung x von gegebener rechter Seite y ab? Führen kleine änderungen von y auch nur zu kleinen Änderungen von x, d.h. ist diese Abhängigkeit *stetig?*

Zum Skript. Das vorliegende Skript ist bis auf Kleinigkeiten identisch mit dem Skript von Herrn Prof. Farwig aus dem Wintersemester 2011/12. Ich danke Herrn Farwig recht herzlich für die Erlaubnis, sein Skript für diese Vorlesung nutzen zu dürfen und für das Überlassen der latex-Files.

Eine kleine Auswahl an Literatur:

– Heuser, Funktionalanalysis,
– Werner, Funktionalanalysis,
– Reed/Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I,
– Alt, Lineare Funktionalanalysis,
– Conway, A Course in Functional Analysis,
– Schröder, Funktionalanalysis,
– Gohberg/Goldberg, Basic Operator Theory.

2 Grundlagen (abstrakte Räume)

2.1 Topologische Räume

Wir haben topologische Räume bereits in der Analysis I kurz angesprochen. Ausgangspunkt war die Beobachtung, dass sich viele Begriffe (wie Stetigkeit, Kompaktheit, Zusammenhang) ausgehend von offenen Mengen definieren lassen.

Definition 2.1 (*a*) *Ein* topologischer Raum *ist ein Paar* (X, τ)*, bestehend aus einer Menge* X *und einer Menge* τ *von Teilmengen von* X*, wobei gelten soll*:

- $\emptyset \in \tau$ *und* $X \in \tau$*,*
- *die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus* τ *liegt in* τ*,*
- *der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus* τ *liegt in* τ*.*

Die Mengen aus τ *heißen* offene Mengen*, und* τ *heißt eine* Topologie *auf* X*. Eine Menge* $A \subseteq X$ *heißt* abgeschlossen*, wenn ihr Komplement* $A^c := X \setminus A$ *offen ist.*

(*b*) *Ist* $x \in X$*, so heißt jede Menge* $U \in \tau$ *mit* $x \in U$ (offene) Umgebung von x*. Wir schreiben* $\mathcal{U}(x) := \{U \in \tau : x \in U\}$ *für die Menge aller Umgebungen von* x*.*

(*c*) *Ein Punkt* $x \in X$ *heißt* Häufungspunkt einer Menge $A \subseteq X$*, falls zu jedem* $U \in \mathcal{U}(x)$ *ein* $y \in A \cap U$ *mit* $x \neq y$ *existiert.*

Lemma 2.2 *Sei* (X, τ) *ein topologischer Raum. Dann gilt*

(*a*) $U \subseteq X$ *ist genau dann offen, wenn für alle* $x \in U$ *ein* $V \in \mathcal{U}(x)$ *mit* $V \subseteq U$ *existiert.*

(*b*) $A \subseteq X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* A *alle seine Häufungspunkte enthält.*

Definition 2.3 (*a*) *Der topologische Raum* (X, τ) *heißt* Hausdorffraum*, wenn folgendes* Trennungsaxiom *erfüllt ist: Für alle* $x, y \in X$ *mit* $x \neq y$ *gibt es offene Mengen* $U, V \in \tau$ *mit* $x \in U$*,* $y \in V$ *und* $V \cap U = \emptyset$*.*

(*b*) *Eine Folge* (x_n) *in* X konvergiert gegen $x \in X$*, wenn zu jedem* $U \in \mathcal{U}(x)$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert so, dass* $x_n \in U$ *für alle* $n \geq n_0$*.*

(*c*) *Eine Funktion* $f : X \to Y$ *zwischen topologischen Räumen heißt* stetig*, wenn alle Urbilder offener Mengen in* Y *offen in* X *sind.*

Lemma 2.4 *In Hausdorffräumen haben konvergente Folgen genau einen Grenzwert.*

Die einfachen Beweise verbleiben als Übungsaufgabe. Wir werden uns später (nach Bedarf) mit weiteren topologischen Begriffen befassen. Z.B. werden wir kompakte Teilmengen topologischer Räume in Abschnitt 9 betrachten.

2.2 Metrische Räume

Auch die metrischen Räume kennen wir bereits aus der Analysis 1. Hier sind noch einmal die für uns wichtigsten Begriffe.

Definition 2.5 (a) *Ein* metrischer Raum *ist ein Paar* (X, d)*, bestehend aus einer Menge* X *und einer Abbildung* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *mit den Eigenschaften*

- $d(x, y) = 0$ *genau dann, wenn* $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $x, y \in X$ *(Symmetrie)*,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung)*.

(b) *Für* $x \in X$ *und* $r > 0$ *heißen*

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad bzw. \quad \overline{B_r(x)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

die offene *bzw.* abgeschlossene Kugel um x mit Radius r.

(c) *Eine Menge* $U \subseteq X$ *heißt* offen*, wenn für alle* $x \in U$ *ein* $r > 0$ *mit* $B_r(x) \subseteq U$ *existiert.*

(d) *Eine Menge* $A \subseteq X$ *heißt* dicht in X*, falls* $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ *für alle* $x \in X$ *und alle* $r > 0$.

(e) *Der Raum* (X, d) *heißt* separabel*, falls* X *eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Die Menge der offenen Teilmengen im Sinne dieser Definition bildet eine Topologie auf X. Metrische Räume sind also spezielle topologische Räume, in denen die Topologie mit Hilfe einer Metrik definiert wird. Sie sind stets Hausdorffräume (Übung). Man kann sich leicht überlegen (und wir haben dies in Analysis 1 getan), dass offene bzw. abgeschlossene Kugeln offen bzw. abgeschlossen im Sinne dieser Definition sind.

Beispiele 2.6 (a) (X, d) mit $X = [a, b]$ und $d(x, y) = |x - y|$ ist ein metrischer Raum.

(b) Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ ein metrischer Raum.

(c) $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar und liegt dicht in $\mathbb{R}^n$. Also ist $\mathbb{R}^n$ separabel. ■

Der zuächst etwas unanschauliche Begriff der Separabilität von Räumen wird in vielen Beweisen von Bedeutung sein.

Definition 2.7 *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum.*

(a) *Eine Folge* (x_k) *in* X *heißt* Cauchyfolge*, falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ *für alle* $k, l \geq N_\varepsilon$.

(b) (X, d) *heißt* vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in* X *konvergiert.*

Lemma 2.8 *In jedem metrischen Raum (X, d) gilt*:
(a) *mit (X, d) ist auch jede Teilmenge A von X separabel.*
(b) *ist (X, d) vollständig, so ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. (a) Sei $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X und sei $A \subseteq X$. Zu jedem x_k und jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $B_{1/n}(x_k) \cap A \neq \emptyset$ wählen wir ein $a_{kn} \in A$ mit $d(x_k, a_{kn}) < 1/n$. Dann ist die Menge

$$A' := \{a_{kn} : k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$$

abzählbar, und wir zeigen, dass A' dicht in A liegt. Dazu seien $\varepsilon > 0$ und $a \in A$ beliebig. Sei $j \in \mathbb{N}$ so, dass $2/j < \varepsilon$. Nach Voraussetzung gibt es ein x_k mit $d(a, x_k) < 1/j$. Dann ist insbesondere $B_{1/j}(x_k) \cap A \neq \emptyset$; es gibt also zu x_k ein $a_{kj} \in A'$ mit $d(x_k, a_{kj}) < 1/j$. Dann ist aber

$$d(a, a_{kj}) \leq d(a, x_k) + d(x_k, a_{kj}) < 1/j + 1/j < \varepsilon.$$

(b) $\Leftarrow$: Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und (x_k) eine Cauchyfolge in A. Dann ist (x_k) eine Cauchyfolge im vollständigen Raum X; es gibt also ein $x \in X$ mit $x_k \to x$ für $k \to \infty$. Wäre $x \notin A$, so läge x in der offenen Menge A^c. Damit gäbe es ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq A^c$. Also müsste ein x_k für genügend großes k in A^c liegen. Da (x_k) aber eine Folge in A ist, ist dies ein Widerspruch. Es gilt also $x \in A$, und A ist vollständig. Der Beweis der umgekehrten Implikation verbleibt als Übungsaufgabe. ■

Wir haben bereits in Ana I gesehen, dass die Vollständigkeit eines metrischen Raumes eine wichtige Eigenschaft ist. Es stellt sich die Frage, ob ein beliebiger metrischer Raum so erweitert werden kann, dass er vollständig ist. Der nachfolgende Satz beantwortet diese Frage positiv.

Satz 2.9 (Vervollständigung) *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren auf der Menge $\hat{X}$ aller Cauchyfolgen in X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch*

$$(x_j) \sim (y_j) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j) = 0.$$

Sei $(x_n)^\sim$ die Äquivalenzklasse, die die Cauchyfolge (x_n) enthält. Dann ist die Menge $\tilde{X} := \hat{X}/\sim$ aller Äquivalenzklassen von $\hat{X}$ bzgl. $\sim$ mit der Definition

$$\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty), \quad \tilde{d}\big((x_j)^\sim, (y_j)^\sim\big) := \lim_{j \to \infty} d(x_j, y_j)$$

ein vollständiger metrischer Raum. Durch die Abbildung

$$J : X \to \tilde{X}, \quad x \mapsto (x, x, x, \dots)^\sim$$

wird X injektiv und dicht in $\tilde{X}$ eingebettet, und es gilt $\tilde{d}(J(x), J(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Man kann außerdem zeigen: Ist (X°, d°) ein weiterer vollständiger metrischer Raum, in den (X, d) vermöge J° isometrisch und dicht eingebettet ist, so gibt es eine bijektive Isometrie $j : X^0 \to \tilde{X}$ mit $j \circ J^\circ = J$. In diesem Sinn ist die Vervollständigung eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis wird in fünf Schritten geführt, von welchen die ersten vier als Übungsaufgabe verbleiben:
1. Schritt: $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\hat{X}$.
2. Schritt: $\tilde{d}$ ist wohldefiniert, d.h. der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j)$ existiert und ist von der Wahl der Repräsentanten unabhängig.
3. Schritt: $\tilde{d}$ ist eine Metrik auf $\tilde{X}$.
4. Schritt: X wird durch J isometrisch und dicht in $\tilde{X}$ eingebettet.

Abschließend bleibt zu zeigen, dass $(\tilde{X}, \tilde{d})$ vollständig ist. Sei (x^k) eine Cauchyfolge in $\tilde{X}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist also $x^k = (x_j^k)^\sim$ mit einer Cauchyfolge $(x_j^k)_{j\in\mathbb{N}}$ in X. Insbesondere gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $d(x_i^k, x_j^k) < 1/k$ für alle $i, j \geq N_k$. Hieraus folgt

$$d(x_{N_k}^k, x_{N_l}^l) \leq d(x_{N_k}^k, x_j^k) + d(x_j^k, x_j^l) + d(x_j^l, x_{N_l}^l) \leq \frac{1}{k} + d(x_j^k, x_j^l) + \frac{1}{l}$$

für $k, l \in \mathbb{N}$ und alle hinreichend großen j. Der Grenzübergang $j \to \infty$ liefert

$$d(x_{N_k}^k, x_{N_l}^l) \leq \frac{1}{k} + \tilde{d}(x^k, x^l) + \frac{1}{l}.$$

Hieraus schließen wir, dass $\hat{x} := (x_{N_k}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X ist. Wir zeigen, dass $x := \hat{x}^\sim \in \tilde{X}$ der Grenzwert der Cauchyfolge (x^k) in $\tilde{X}$ ist.

Für jedes $l \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition von $\tilde{d}$ zunächst $d(x_k^l, x_{N_k}^k) \to \tilde{d}(x^l, x)$ für $k \to \infty$. Wegen

$$d(x_k^l, x_{N_k}^k) \leq d(x_k^l, x_{N_l}^l) + d(x_{N_l}^l, x_{N_k}^k) \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt

$$\tilde{d}(x^l, x) = \lim_{k\to\infty} d(x_k^l, x_{N_k}^k) \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Schließlich zeigt man, dass $x \in \tilde{X}$ nicht von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklassen x_k abhängt. ∎

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich eine Lücke aus der Vorlesung Analysis 1 schließen: Es wurde damals auf die Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ verzichtet; vielmehr wurde $\mathbb{R}$ axiomatisch als Menge mit den gewünschten Eigenschaften eingeführt. Obiger Satz liefert nun eine Möglichkeit, $\mathbb{R}$ zu konstruieren, nämlich als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$. Dies liefert auch direkt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

2.3 Normierte Räume

Im Folgenden stehe $\mathbb{K}$ für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 2.10 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Das Paar $(X, \|.\|)$ heißt* normierter Raum*, falls $\|.\| : X \to [0, \infty)$ eine* Norm *auf X ist, d.h. die folgenden Eigenschaften hat:*

- $\|x\| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{K}$ *und alle* $x \in X$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$.

Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

Ist $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum, so ist (X, d) mit $d(x, y) := \|x-y\|$ ein metrischer Raum.

Anmerkung 2.11 Mit Hilfe von Satz 2.9 lassen sich auch normierte Räume zu Banachräumen vervollständigen. Zunächst gewinnen wir mittels der Konstruktion aus Satz 2.9 aus (X, d) mit $d(x, y) := \|x - y\|$ einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$, in den X isometrisch und dicht eingebettet ist. Durch

$$(x_j)^\sim + (y_j)^\sim := (x_j + y_j)^\sim \quad \text{und} \quad \alpha(x_j)^\sim := (\alpha x_j)^\sim$$

und

$$\|(x_j)^\sim\| := \tilde{d}\big((x_j)^\sim, 0\big)$$

werden auf $\tilde{X}$ Operationen und eine Norm definiert, die die Operationen bzw. die Norm auf X fortsetzen und $\tilde{X}$ zu einem Banachraum machen. ■

Wir werden in Kapitel 3 noch zahlreiche Banachräume kennenlernen. Hier sind die vielleicht einfachsten Vertreter, die Folgenräume.

Beispiele 2.12 (Folgenräume) (a) Auf der Menge s aller Folgen $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_j \in \mathbb{K}$ wird durch

$$d(x,\, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \quad \text{für } x = (x_j),\ y = (y_j) \in s$$

eine Metrik definiert. Man kann zeigen, dass die Konvergenz in dieser Metrik gleichbedeutend mit der punktweisen Konvergenz in allen Komponenten ist. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, ist auch (s, d) vollständig.

Sei $e_j := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (mit der 1 an der j. Stelle) der j-te Einheitsvektor in s, und für jedes $x = (x_j) \in s$ sei $x^k := \sum_{j=1}^{k} x_j e_j = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots)$. Dann gilt $d(x, x^k) \to 0$ für $k \to \infty$. Somit liegt die Menge aller *finiten* Folgen, also die Menge aller Folgen mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Folgengliedern, dicht in (s, d). Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt, dass bereits die Menge aller finiten

Folgen mit rationalen Gliedern dicht in (X, d) liegt. Diese Menge ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst abzählbar. Folglich ist (X, d) *separabel.*

(b) Der Raum

$$\ell^\infty := \{x = (x_j) \in s : \|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| < \infty\}$$

ist der Raum aller beschränkten Folgen und wird mit $\|.\|_\infty$ und den üblichen Operationen zu einem normierten Raum. Man kann zeigen, dass die Konvergenz in ℓ^∞ der gleichmäßigen Konvergenz in allen Komponenten entspricht, das heißt, $x^n = (x_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in ℓ^∞ gegen $y = (y_j)$, wenn x_j^n in $j \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen y_j konvergiert.

(c) Für $1 \leq p < \infty$ definiert man

$$\ell^p := \{x = (x_j) \in s : \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Lemma 2.13 (Youngsche Ungleichung) *Sei $1 < p < \infty$ und q der zu p konjugierte Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $a, b \geq 0$:*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q.$$

Lemma 2.14 (Hölder-Ungleichung) *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und q der zu p konjugierte Exponent mit der Konvention $q = \infty$ für $p = 1$ und $q = 1$ für $p = \infty$. Ist $x = (x_j) \in \ell^p$ und $y = (y_j) \in \ell^q$, so liegt die Folge $xy := (x_j y_j)$ in ℓ^1, und es gilt:*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Beweis. Die Hölder-Ungleichung für Folgenräume beweist man genau so wie die Hölder-Ungleichung für Lebesgue-Räume $L^p(\mathbb{R})$, wenn man das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ benutzt.

Ein anderer Beweis benutzt die bereits bewiesene Hölder-Ungleichung für Lebesgue-Räume $L^p(\mathbb{R})$: Zu den Folgen $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ definiert man

$$f_x(z) := \begin{cases} 0, & z \in (-\infty, 1) \\ x_k, & k = \lfloor z \rfloor \end{cases} \quad \text{und} \quad f_y(z) := \begin{cases} 0, & z \in (-\infty, 1) \\ y_k, & k = \lfloor z \rfloor \end{cases}.$$

Dann ist $f_x \in L^p$, $f_y \in L^q$, und es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p = \int_{\mathbb{R}} |f_x(z)|^p \, dz \quad \text{und} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k|^q = \int_{\mathbb{R}} |f_y(z)|^q \, dz.$$

Hieraus folgt

$$\|xy\|_{\ell^1} = \|f_x f_y\|_{L^1(\mathbb{R})} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f_x\|_{L^p(\mathbb{R})} \|f_y\|_{L^q(\mathbb{R})} = \|x\|_{\ell^p} \|x\|_{\ell^q}. \qquad \blacksquare$$

Mit dieser Beweistechnik lassen sich viele Sätze aus der Maßtheorie auf Folgenräume übertragen.

Lemma 2.15 (Minkowski-Ungleichung) *Sind $x, y \in \ell^p$ für $1 \le p \le \infty$, so ist $x + y \in \ell^p$, und es gilt die Dreiecksungleichung:*

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Der Beweis verläuft unter Benutzung der Hölderungleichung oder wieder durch Zurückführen auf L^p-Räume.

Lemma 2.16 *Für $1 \le p \le \infty$ ist $(\ell^p, \|.\|_p)$ ein Banachraum. Dieser ist für $1 \le p < \infty$ separabel, für $p = \infty$ dagegen nicht.*

Beweisidee zur Separabilität. Für $1 \le p < \infty$ zeigt man, dass die Menge der finiten Folgen mit rationalen Einträgen dicht in ℓ^p liegt. Für $p = \infty$ betrachte man die Menge aller Folgen, welche nur die Werte 0 und 1 annehmen, und zeigt, dass diese nicht abzählbar ist und dass zwei verschiedene Folgen dieser Gestalt den ℓ^∞-Abstand 1 haben. ∎

2.4 Hilberträume

Definition 2.17 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt* Sesquilinearform, *falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

(a) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ und $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$.

(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ und $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ für alle $x, y, z \in X$.

Eine Sesquilinearform heißt symmetrisch *($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw.* hermitesch *($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), falls zusätzlich gilt*

(c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für alle $x, y \in X$,

und sie heißt positiv definit, *falls*

(d) $\langle x, x \rangle \ge 0$ für alle $x \in X$ und $\langle x, x \rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform wird Skalarprodukt *genannt.*

Beispiel 2.18 Auf $X = \ell^2$ wird durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \quad \text{für } x = (x_i),\ y = (y_i) \in \ell^2$$

ein Skalarprodukt definiert.

Lemma 2.19 *Ist $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum H, so wird H mit $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zu einem normierten Raum. Das Paar $(H, \langle .,. \rangle)$ heißt auch* Prä-Hilbertraum. *Dabei gilt für alle $x, y \in H$:*

(a) $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \, \|y\|$, und die Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind (Cauchy-Schwarz Ungleichung),

(b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogrammgleichung),

(*c*) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|^2$ *genau dann, wenn* $\langle x, y\rangle = 0$ (Satz von Pythagoras),

(*d*) $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ *falls* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und*

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big)$$

für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Polarisationsformel).

Den Beweis der Cauchy-Schwarz Ungleichung kennen wir aus der Ana II; die übrigen Aussagen rechnet man leicht nach. Bemerkenswert ist, dass eine Umkehrung zu (*b*) gilt: Gilt in einem normierten Raum X die Parallelogrammgleichung für alle $x, y \in X$, so wird die Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt. Dieses wird wie in den Polarisationsformeln definiert.

Anmerkung 2.20 Ist $\langle ., .\rangle$ ein reelles Skalarprodukt, so ist wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} \in [-1, 1]$$

falls $x \neq 0$, $y \neq 0$. Somit lässt sich durch

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \cos\theta \quad \text{mit } \theta \in [0, \pi]$$

ein Winkel zwischen Elementen eines Prä-Hilbertraums definieren.

Definition 2.21 *Sei* $(H, \langle ., .\rangle)$ *ein Prä-Hilbertraum. Man sagt,* $x, y \in H$ *stehen* senkrecht *oder* orthogonal *zueinander, falls* $\langle x, y\rangle = 0$. *Man schreibt dann auch* $x \perp y$. *Ist* M *eine nichtleere Teilmenge von* H*, so heißt*

$$M^\perp := \{y \in H : y \perp x \text{ für alle } x \in M\}$$

der zu M senkrechte Raum *oder das* orthogonale Komplement *von* M.

Einfach aber wichtig: $M^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von H, auch wenn M selbst kein Unterraum oder nicht abgeschlossen ist.

Definition 2.22 *Ein Prä-Hilbertraum* $(H, \langle ., .\rangle)$ *heißt* Hilbertraum*, falls er bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.*

Anmerkung 2.23 Mit Hilfe von Satz 2.9 lassen sich Prä-Hilberträume zu Hilberträumen vervollständigen. Zunächst gewinnen wir mittels der Konstruktion aus Satz 2.9 aus (X, d) mit $d(x, y) := \|x - y\|$ einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$, in den X isometrisch und dicht eingebettet ist. Auf $\tilde{X}$ erklären wir Operationen wie in Anmerkung 2.11. Das Skalarprodukt

$$\langle (x_j)^\sim, (y_j)^\sim\rangle^\sim := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$

macht $\tilde{X}$ zu einem Hilbertraum. ■

Beispiel 2.24 ℓ^2 ist mit $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ ein Hilbertraum. Dagegen ist der Raum der Folgen $F \subseteq \ell^2$ mit nur endlich-vielen Nicht-Null-Einträgen bzgl. dieses Skalarprodukts nur ein Prä-Hilbertraum. Dieser lässt sich zu einem zu ℓ^2 isomorphen Hilbertraum vervollständigen. ∎

Für endlich-dimensionale unitäre Räume ist aus der linearen Algebra bekannt, dass sich diese als direkte Summe eines gegebenen abgeschlossenen Unterraums und des dazu orthogonalen Raums schreiben lassen. Der nachfolgende Satz verallgemeinert dieses Resultat.

Satz 2.25 *Sei M ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes H. Dann gilt*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

im Sinne einer algebraischen und topologischen direkten Summe, d.h. jedes $x \in H$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $x = m + m'$ mit $m \in M$ und $m' \in M^{\perp}$. Insbesondere ist $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Ferner gilt für alle $x \in H$ und m, m' aus der Zerlegung $x = m + m'$

$$\|m\| \leq \|x\|, \quad \|m'\| \leq \|x\|, \quad \|m\| + \|m'\| \leq \sqrt{2}\|x\|.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Sei hierzu $x \in M \cap M^{\perp}$. Dann ist $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$ und somit $x = 0$. Insbesondere folgt, dass die Zerlegung eines Elements $x \in H$ in $x = m + m'$ mit $m \in M$ und $m' \in M^{\perp}$ eindeutig ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $H = M + M^{\perp}$. Sei $x \in H$ beliebig. Wir definieren $d_M(x) := \inf_{m \in M} \|x - m\|$. Dann gibt es eine Folge (m_k) in M mit

$$\|x - m_k\| \to d_M(x) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir zeigen, dass (m_k) eine Cauchyfolge ist. Aus $m_k \in M$ folgt $\frac{1}{2}(m_k + m_n) \in M$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\left\| x - \frac{1}{2}(m_k + m_n) \right\| \geq d_M(x) =: d.$$

Die Parallelogrammgleichung liefert für $x - m_k$ und $x - m_n$

$$\|m_k - m_n\|^2 = 2 \underbrace{\|x - m_k\|^2}_{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} d^2} + 2 \underbrace{\|x - m_n\|^2}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d^2} - \underbrace{\|2x - (m_k + m_n)\|^2}_{=4\,\|x - \frac{m_k + m_n}{2}\|^2 \geq 4d^2}.$$

Also konvergiert $\|m_k - m_n\|^2 \to 0$ für $k, n \to \infty$. Somit ist (m_k) eine Cauchyfolge in M und konvergiert wegen der Vollständigkeit von H und der Abgeschlossenheit von M gegen ein $m \in M$. Für dieses m ist $\|x - m\| = d_M(x)$.

Zu zeigen bleibt noch, dass $m' := x - m \in M^{\perp}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y \in M$ ist

$$\|x - m\|^2 \leq \|x - m + ty\|^2 = \|x - m\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle y, x - m\rangle.$$

Daraus ergibt sich $t^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle y, x-m\rangle \geq 0$. Ist nun $t > 0$, so liefert Division durch t und anschließende Grenzwertbildung $t \to 0+$

$$\operatorname{Re}\langle y, x-m\rangle \geq 0.$$

Genauso ergibt sich für $t < 0$ und $t \to 0-$

$$\operatorname{Re}\langle y, x-m\rangle \leq 0.$$

Also ist $\operatorname{Re}\langle y, x-m\rangle = 0$ für alle $y \in M$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist, folgt $\langle y, x-m\rangle = 0$ für alle $y \in M$; folglich ist $m' = x - m \in M^\perp$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt wie im reellen Fall (mit t ersetzt durch it), dass für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y \in M$

$$-t^2 \|y\|^2 + 2t \operatorname{Re}(i\langle y, x-m\rangle) \geq 0.$$

Damit erhält man wie oben $\operatorname{Im}\langle y, x-m\rangle = 0$. Also ist wiederum $\langle y, x-m\rangle = 0$ und somit $m' = x - m \in M^\perp$.

Die am Ende des Satzes angegebenen Abschätzungen sind leicht zu sehen. So ist

$$\|m\| \leq \sqrt{\|m\|^2 + \|m'\|^2} = \sqrt{\|m + m'\|^2} = \|x\|,$$

wobei die erste Gleichheit aus dem Satz des Pythagoras folgt. Die übrigen Ungleichungen zeigt man ähnlich (bei letzterer ist die bekannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem quadratischen Mittel hilfreich). ■

Dieser Satz ist für beliebige Banachräume X falsch: Ist M ein abgeschlossener Teilraum von X, so gibt es i. allg. keinen *abgeschlossenen* Teilraum M' von X mit $X = M + M'$ und $M \cap M' = \{0\}$. Die Bedeutung dieses Satzes wird erst in Kapitel 6 deutlich. Wir werden dort die Menge aller linearen stetigen Abbildungen von einem Banachraum in den zugrunde liegenden Körper, die sog. linearen Funktionale, studieren. Die Beschreibung solcher Abbildungen ist für Hilberträume deutlich einfacher als für beliebige Banachräume. Der Grund hierfür ist Satz 2.25.

3 Funktionenräume

Die für Anwendungen wichtigsten Banachräume sind Funktionenräume. Wir beginnen mit Funktionenräumen stetiger Funktionen und fahren mit den L^p-Räumen sowie Sobolevräumen schwach differenzierbarer Funktionen fort.

3.1 Räume stetiger Funktionen

Beispiel 3.1 Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und nichtleer sei

$$C^0(S) := \{f : S \to \mathbb{K} : f \text{ stetig auf } S\}$$

(oft schreibt man auch nur $C(S)$ statt $C^0(S)$). Durch

$$\|f\|_{\infty,S} := \|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$$

wird die *Supremumsnorm* auf $C^0(S)$ definiert. Wir zeigen, dass $(C^0(S), \|.\|_{\infty,S})$ ein Banachraum ist.

Dazu sei (f_k) eine Cauchyfolge in $C^0(S)$. Für jedes $x \in S$ ist dann $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$; es gilt nämlich

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \sup_{y\in S} |f_k(y) - f_l(y)| = \|f_k - f_l\|_\infty.$$

Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_n(x))$. Wir definieren eine Funktion $f : S \to \mathbb{K}$ durch

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

und zeigen, dass die Folge (f_k) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq N$ und alle $x \in S$ die Abschätzung $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$ gilt. Im Grenzwert $k \to \infty$ folgt

$$|f(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in S \text{ und alle } l \geq N.$$

Also ist $\|f - f_l\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $l \geq N$. Aus Analysis I ist nun bekannt, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen wieder stetig ist. Somit ist $f \in C^0(S)$, und $C^0(S)$ ist vollständig. ∎

Beispiel 3.2 Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer sei

$$C^0(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ stetig auf } \Omega\}.$$

Dann gibt es eine Ausschöpfung von Ω von innen, d.h., es existiert eine Folge kompakter Mengen $K_m \subset\subset K_{m+1} \subset\subset \Omega$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\cup K_n = \Omega$. Hierbei bedeutet $A \subset\subset B$, dass A kompakt ist und es eine offene Menge $U \subset B$ mit $A \subset U$ gibt.

Zur Konstruktion einer solchen Folge betrachte man für ein fest gewähltes $a \in \Omega$ und jedes $m \in \mathbb{N}$

$$K_m := \big\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m}\big\} \cap \overline{B_m(a)}.$$

Mit Hilfe einer solchen Folge lässt sich durch

$$d(f,g) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\|f-g\|_{\infty,K_j}}{1 + \|f-g\|_{\infty,K_j}}$$

eine Metrik auf $C^0(\Omega)$ definieren (vgl. dazu die Definition der Metrik auf dem Raum aller Folgen s). Mit dieser Metrik wird $(C^0(\Omega), d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Dabei bedeutet die Konvergenz bezüglich d die gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von Ω, kurz: die *kompakt gleichmäßige Konvergenz.* ■

Beispiel 3.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und beschränkt. Wir bezeichnen mit $C^m(\overline{\Omega})$ die Menge aller Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$, die auf Ω m-mal stetig differenzierbar sind und für die für alle Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq m$ die Ableitung $D^\gamma f$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar ist. Durch

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|\gamma| \leq m} \|D^\gamma f\|_\infty$$

wird eine Norm auf $C^m(\overline{\Omega})$ definiert. ■

Beispiel 3.4 Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und beschränkt und $0 < \alpha \leq 1$. Dann heißt

$$[f]_\alpha := \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

die *Hölder-Seminorm zum Exponenten* α von f auf $\overline{\Omega}$. Man beachte, dass $[.]_\alpha$ die zweite und dritte Eigenschaft aus Definition 2.10 erfüllt, jedoch nicht die erste: aus $[f]_\alpha = 0$ folgt nur, dass f konstant auf Ω ist. Der Fall $\alpha = 1$ liefert die (kleinste) Lipschitzkonstante von f.

Mit Hilfe dieser Seminorm lässt sich nun der *Hölderraum*

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) := \big\{f \in C^m(\overline{\Omega}) : [\partial^\gamma f]_\alpha < \infty \text{ für alle } |\gamma| = m\big\}$$

durch

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\gamma|=m} [\partial^\gamma f]_\alpha$$

mit einer Norm versehen. ■

Lemma 3.5 *$C^m(\overline{\Omega})$ und $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ sind Banachräume.*

Beweis. Wir führen den Beweis exemplarisch für $C^1(\overline{\Omega})$.

Sei (f_k) eine Cauchyfolge in $C^1(\overline{\Omega})$. Nach Konstruktion der Norm sind dann (f_k) und $(\partial_i f_k)$ für alle $1 \le i \le n$ Cauchyfolgen bezüglich der Supremumsnorm. Die in Beispiel 3.1 gezeigte Vollständigkeit von $C^0(\overline{\Omega})$ impliziert die Existenz von Funktionen $f, g_1, \ldots, g_n \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f_k \to f$ und $\partial_i f_k \to g_i$ in $C^0(\overline{\Omega})$ für alle $1 \le i \le n$.

Es bleibt zu zeigen, dass f auf Ω differenzierbar und $\nabla f = g := (g_1, \ldots, g_n)$ ist. Seien hierzu $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq \Omega$ gegeben. Sei weiterhin $y \in B_r(x)$ und $x_t := x + t(y-x)$ für $t \in [0,1]$. Mit dem Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\big|(f_k(y) - f_k(x)) - \nabla f_k(x) \cdot (y-x)\big| \\
&\quad = \left| \int_0^1 \nabla f_k(x_t) \cdot (y-x)\, dt - \nabla f_k(x) \cdot (y-x) \right| \\
&\quad = \left| \int_0^1 (\nabla f_k(x_t) - \nabla f_k(x)) \cdot (y-x)\, dt \right| \\
&\quad \le \int_0^1 \big| (\nabla f_k(x_t) - g(x_t) + g(x_t) - g(x) + g(x) - \nabla f_k(x)) \cdot (y-x) \big| dt \\
&\quad \le \Big(2\, \|\nabla f_k - g\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} |g(x_t) - g(x)| \Big)\, |y-x|.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert (man beachte, dass $\|\nabla f_k - g\|_\infty \to 0$)

$$|(f(y) - f(x)) - g(x) \cdot (y-x)| \le \sup_{t \in [0,1]} |g(x_t) - g(x)|\, |y-x|.$$

Wegen

$$\sup_{t \in [0,1]} |g(x_t) - g(x)| = \sup_{t \in [0,1]} |g(x + t(y-x)) - g(x)| \to 0$$

für $y \to x$ ist f in x differenzierbar und $g = \nabla f$. ∎

Im Folgenden wird die Frage nach der Separabilität von $C^0(\overline{\Omega})$ beantwortet und eine dichte Teilmenge von $C^0(\overline{\Omega})$ angegeben. Dazu bezeichne Π_n die Menge aller Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner gleich n.

Satz 3.6 (Weierstraßscher Approximationssatz) *Für jedes $f \in C^0([0,1])$ gibt es eine Folge von Polynomen $p_n \in \Pi_n$, die bezüglich der Supremumsnorm auf $[0,1]$ gegen f konvergieren.*

Der nachfolgende Beweis dieses Satzes ist konstruktiv und liefert somit ein Verfahren zum Bestimmen einer Folge von Polynomen, die gegen eine gegebene stetige Funktion konvergieren.

Beweis. Für $f \in C^0([0,1])$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das n. *Bernstein-Polynom* $P_n f \in \Pi_n$ zu f durch

$$(P_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Wir zeigen, dass die Folge $(P_n f)$ in $C^0([0,1])$ gegen f konvergiert.
Zunächst bestimmen wir $P_n f$ für drei konkrete Funktionen. Für $f \equiv 1$ ist

$$(P_n f)(x) = (x + (1-x))^n = 1 = f(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $f(x) = x$ wenden wir den Operator $x\frac{d}{dx}$ auf beide Seiten der binomischen Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

an und erhalten für $n \geq 1$

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k}.$$

Setzt man $y = 1 - x$, so folgt nach Division durch n

$$f(x) = x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \big(P_n f\big)(x).$$

Schließlich wenden wir für $f(x) = x^2$ den Operator $(x\frac{d}{dx})^2$ auf die binomische Formel an und erhalten für $n \geq 2$

$$nx(x+y)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k y^{n-k}.$$

Setzt man wieder $y = 1 - x$, so folgt

$$nx + n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k}.$$

Division beider Seiten durch n^2 ergibt

$$x^2 + \frac{x - x^2}{n} = \big(P_n f\big)(x) \quad \text{und} \quad P_n f \to f \quad \text{in } C^0([0,1]).$$

Sei nun $f \in C^0([0,1])$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Da f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$ für alle $x, x' \in [0,1]$ mit $|x - x'| < \delta$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{4\|f\|_\infty}{\varepsilon \cdot \delta^2} \sup_{x \in [0,1]} |x - x^2|$$

gewählt. Zunächst ergibt sich

$$|f(x) - (P_n f)(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - f(k/n)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Die Summe lässt sich in zwei Teile aufspalten, wobei der erste Teil über die Menge N_0 aller $k \in \{0, \ldots, n\}$ mit $|x - k/n| < \delta$ summiert. Für diesen ersten Teil der Summe ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in N_0} \left|f(x) - f(k/n)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k \in N_0} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \; = \; \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Für k im Komplement $N_1 := \{0, \ldots, n\} \setminus N_0$ gilt entsprechend $|x - k/n| \geq \delta$, d.h. $|x - k/n|/\delta \geq 1$. Wegen $P_n(x^2) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in N_1} \left|f(x) - f(k/n)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k \in N_1} 2\|f\|_\infty \left(\frac{(x - k/n)}{\delta}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k \in N_1} (x - k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \left(x^2 - 2x P_n(x) + P_n(x^2)\right) \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{n\delta^2} \left|x - x^2\right| \; < \; \varepsilon/2
\end{aligned}$$

für großes n. Somit gilt $\left|f(x) - (P_n f)(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$, und die Folge $(P_n f)$ konvergiert gleichmäßig gegen f. ■

Die Einschränkung auf das Intervall $[0,1]$ ist hierbei nicht notwendig. Betrachtet man zum Beispiel das kompakte Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ und $f \in C^0([a,b])$, so ist $\tilde{f} := f \circ \varphi$ mit $\varphi : [0,1] \to [a,b],\ x \mapsto a + x(b-a)$ eine Funktion in $C^0([0,1])$. Es gibt daher eine Folge von Polynomen $p_n \in \Pi_n$ mit $p_n \to \tilde{f}$. Für diese ist $p_n \circ \varphi^{-1} \in \Pi_n$ und $p_n \circ \varphi^{-1} \to f$.

Eine Verallgemeinerung des klassischen Approximationssatzes von Weierstraß liefert der folgende Satz von Stone-Weierstraß. Im Gegensatz zum vorangegangenen Satz liefert sein Beweis kein konstruktives Verfahren zur Approximation, da an wesentlichen Stellen des Beweises das Auswahlaxiom verwendet wird.

Satz 3.7 (Approximationssatz von Stone-Weierstraß) *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und kompakt und sei $C^0(S)$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf S. Weiterhin sei $M \subseteq C^0(S)$ eine die* Punkte von S trennende Algebra*, die alle konstanten Funktionen enthält. Dann liegt M dicht in $C^0(S)$.*

Zur Erinnerung sei angemerkt, dass eine *Algebra* ein bzgl. der Multiplikation abgeschlossener linearer Raum ist. Eine Menge $M \subseteq C^0(S)$ *trennt die Punkte von* S, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y \in S$ eine Funktion $f \in M$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt. Offenbar erfüllt die Menge Π aller Polynome über $\mathbb{R}^n$ diese Eigenschaften. Hieraus und aus der Tatsache, dass die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist und bzgl. $\|.\|_{\infty,S}$ dicht in Π liegt, erhalten wir unmittelbar:

Folgerung 3.8 Π *liegt dicht in $C^0(S)$, und $C^0(S)$ ist separabel.*

Beweis von Satz 3.7. Sei $B := \overline{M}$. Dann ist B ebenfalls eine die Punkte trennende und die konstanten Funktionen enthaltende Algebra. Wir haben zu zeigen, dass $B = C^0(S)$.

Zunächst folgt aus Satz 3.6, dass für jedes $f \in B$ ist auch $|f| \in B$ ist. Dazu sei (p_n) eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf dem kompakten Intervall $[-R, R]$ mit $R := \|f\|_\infty$ gegen die Betragsfunktion $|.|$ konvergiert. Dann konvergiert $p_n(f)$ gleichmäßig auf S gegen $|f|$.

Weiter impliziert $f, g \in B$ auch $\max(f, g) \in B$ und $\min(f, g) \in B$, da

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \quad \text{und} \quad \max(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|).$$

Seien nun $x, y \in S$ mit $x \neq y$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gegeben und sei $f \in B$ eine Funktion mit $f(x) \neq f(y)$. Dann definiert $h := r + (s - r)\frac{f - f(x)}{f(y) - f(x)}$ eine Funktion in B mit $h(x) = r$ und $h(y) = s$.

Seien $f \in C^0(S)$, $\varepsilon > 0$ und $x \in S$ beliebig. Wir möchten nun zeigen, dass eine Funktion $g_x \in B$ existiert mit $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in S$. Hierzu wählen wir für beliebiges $z \in S$ eine Funktion $h_z \in B$ mit den Eigenschaften

$$h_z(x) = f(x) \quad \text{und} \quad h_z(z) = f(z)$$

(ist $x = z$, wählen wir h_z einfach als konstante Funktion). Da sowohl f als auch h_z stetig sind, existiert eine Umgebung U_z von z mit $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in U_z$. Die Familie $(U_z)_{z \in S}$ bildet eine offene Überdeckung von S; also wird S bereits von einer endlichen Anzahl von Mengen $U_{z_1}, \ldots, U_{z_k}$ überdeckt. Definiert man nun $g_x := \min(h_{z_1}, \ldots, h_{z_k})$, so gilt $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in S$.

Ähnlich wie in der vorangegangenen Argumentation erhält man unter Verwendung der Stetigkeit von f und g_x die Existenz einer Umgebung V_x von x, so dass $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$ für alle $y \in V_x$. Die $(V_x)_{x \in S}$ bilden eine offene Überdeckung von

S. Es gibt also eine endliche Überdeckung $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ von S. Für die Funktion $\varphi_\varepsilon := \max(g_{x_1}, \ldots, g_{x_n}) \in B$ gilt dann

$$f(y) - \varepsilon \leq \varphi_\varepsilon(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in S$$

und somit $\|f - \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt war und B abgeschlossen ist, folgt $f \in B$. ■

Für kompaktes $S \subset \mathbb{C}$ bezeichne $C^0(S; \mathbb{C})$ die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf S. Dann gibt es Punkte trennende und die konstanten Funktionen enthaltende Algebren, die NICHT dicht in $C^0(S; \mathbb{C})$ liegen. Für $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ist beispielsweise die Menge aller Polynome auf S eine solche Algebra. Da Polynome holomorph sind und da gleichmäßig konvergente Folgen holomorpher Funktionen gegen eine holomorphe Funktion konvergieren, liegt die Menge aller Polynome nicht dicht in $C^0(S; \mathbb{C})$ (die Funktion $z \mapsto \overline{z}$ ist sicher stetig, aber nicht holomorph auf S).

Folgerung 3.9 *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und kompakt, und $M \subseteq C^0(S; \mathbb{C})$ sei eine die Punkte trennende und die konstanten Funktionen enthaltende Algebra, die zusätzlich unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, d.h. mit f liege auch $\overline{f}$ in M. Dann ist M dicht in $C^0(S; \mathbb{C})$.*

Beweis. Sei $M_\mathbb{R} := M \cap C^0(S; \mathbb{R})$. Da $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2$ und $\operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/(2i)$ und da M unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, ist $M = M_\mathbb{R} \oplus i M_\mathbb{R}$. Außerdem genügt $M_\mathbb{R}$ den Voraussetzungen von Satz 3.7 und liegt demnach dicht in $C^0(S; \mathbb{R})$. Dann ist auch M dicht in $C^0(S; \mathbb{C})$. ■

Die Sätze von Stone-Weierstraß gelten auch, wenn S nur als kompakter Hausdorff-Raum vorausgesetzt wird.

3.2 L^p-Räume

Diese Räume sind aus der Vorlesung zur Integrationstheorie bekannt. Zur Erinnerung: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann definieren wir

$$\tilde{L}^p(\Omega) := \big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty \big\},$$

wobei $\|f\|_p$ für messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$ und $1 \leq p < \infty$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

und für $p = \infty$ durch

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f| := \inf \Big\{ \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| : N \subseteq \Omega \text{ mit } \mu(N) = 0 \Big\}$$

erklärt ist.

Auf $\tilde{L}^p(\Omega)$ definieren wir Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt: Es sei $f \sim g$ genau dann, wenn eine μ-Nullmenge $N \subset \Omega$ existiert mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$. Mit dieser sei $L^p(\Omega) := \tilde{L}^p(\Omega)/\sim$ für $1 \leq p \leq \infty$. Dann definiert $\|.\|_p$ eine Norm auf $L^p(\Omega)$, und nach dem Satz von Fischer-Riesz ist $L^p(\Omega)$ ein Banachraum.

Es gilt weiterhin die *Hölder-Ungleichung*

$$\left| \int_\Omega f g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

für alle $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Im Falle $p = 2$ wird die Norm $\|.\|_2$ durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f \overline{g} \, d\mu$$

erzeugt. Insbesondere ist $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum.

Satz 3.10 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, und $L^p(\Omega)$ ist separabel. Für $p = \infty$ sind beide Aussagen falsch.*

Abschließend sei vermerkt, dass man L^p-Räume für $1 \leq p < \infty$ auch als Vervollständigung der normierten Räumen $(C^0, \|.\|_p)$ im Sinne von Anmerkung 2.11 gewinnen kann. Der Nachteil dieser Konstruktion ist, dass man dann die Elemente von L^p als Nebenklassen von Mengen von Cauchyfolgen betrachten muss.

3.3 Soboleväume

Ziel dieses Abschnitts ist eine Verallgemeinerung der Theorie der Differenzierbarkeit im Rahmen der L^p-Räumen. Die nachfolgende Definition der sogenannten „schwachen Differenzierbarkeit“ lässt sich über die Formel der partiellen Integration motivieren: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine sogenannte *Testfunktion*, so gilt

$$\int_\Omega (\partial_i f) \varphi \, dx = - \int_\Omega f (\partial_i \varphi) \, dx \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Man beachte, dass die Randterme verschwinden, da φ einen kompakten Träger in Ω hat.

Definition 3.11 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$.*
(a) Eine Funktion $u \in L^p(\Omega)$ hat schwache (*oder* distributionelle) Ableitungen 1. Ordnung *in $L^p(\Omega)$, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Funktion $v_i \in L^p(\Omega)$ existiert, so dass*

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx = - \int_\Omega v_i \varphi \, dx \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

In diesem Fall heißt $v_i =: \partial_i u$ *die* schwache Ableitung *von* u *in Richtung* x_i. *Analog heißt* $\nabla u := (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u) \in L^p(\Omega)^n$ *der* schwache Gradient *von* u.
(*b*) *Der* Sobolevraum

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : u \textit{ hat schwache Ableitungen 1. Ordnung}\}$$

wird versehen mit der Norm

$$\|u\|_{1,p} := \Big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

Hierzu äquivalente Normen sind durch $\big\|(\|u\|_p, \|\partial_1 u\|_p, ..., \|\partial_n u\|_p)\big\|_{\mathbb{R}^{n+1}}$ *gegeben, wobei* $\|.\|_{\mathbb{R}^{n+1}}$ *eine beliebige Norm auf dem* $\mathbb{R}^{n+1}$ *bezeichnet.* (*Aus Analysis II ist bekannt, dass alle diese Normen äquivalent sind.*)
(*c*) *Im Fall* $p = 2$ *wird eine dieser Normen durch ein Skalarprodukt erzeugt, nämlich durch*

$$\langle u, v\rangle_{1,2} := \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Für $W^{1,2}(\Omega)$, *versehen mit diesem Skalarprodukt, schreibt man auch* $H^1(\Omega)$.

Damit obige Begriffe überhaupt wohldefiniert ist, muss der schwache Gradient ∇u eindeutig sein. Diese Eindeutigkeit wird im folgenden Lemma bewiesen.

Lemma 3.12 *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $1 \le i \le n$ *und* $1 \le p \le \infty$. *Sei weiter* $u \in L^p(\Omega)$, *und es existiere eine schwache Ableitung* $v_i = \partial_i u \in L^p(\Omega)$. *Dann ist* v_i *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Neben v_i sei auch v_i' eine schwache Ableitung von u in Richtung x_i. Wir betrachten $v := v_i - v_i'$ und wollen zeigen, dass aus $\int_\Omega v\varphi\, dx = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ bereits $v = 0$ folgt.

Sei zunächst $1 < p < \infty$, und sei $w := \operatorname{sign}(v) \cdot |v|^{p-1}$ und $q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $|v|^{(p-1)q} = |v|^p$ und daher $|v|^{p-1} \in L^q(\Omega)$ und folglich auch $w \in L^q(\Omega)$. Nach Satz 3.10 liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^q(\Omega)$. Somit gibt es eine Folge (φ_k) in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_k \to w$ in $L^q(\Omega)$. Damit folgt

$$0 = \int_\Omega v\varphi_k\, dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega vw\, dx = \int_\Omega (v \operatorname{sign}(v))|v|^{p-1}\, dx = \|v\|_p^p$$

und somit $v = 0$. Die Konvergenz $\int v\varphi_k\, dx \to \int vw\, dx$ folgt aus der Hölder-Ungleichung, wonach

$$\Big|\int_\Omega v\varphi_k\, dx - \int_\Omega vw\, dx\Big| \le \int_\Omega |v(\varphi_k - w)|\, dx \le \|v\|_p \|\varphi_k - w\|_q \to 0.$$

Als nächstes sei $p = \infty$. Ist $\Omega' \subseteq \Omega$ meßbar und beschränkt, so ist $v|_{\Omega'} \in L^r(\Omega')$ für alle $r \in (1, \infty)$, und es gilt $\int_{\Omega'} \varphi v \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. Nach dem zuvor bewiesenen Teil folgt $v|_{\Omega'} = 0$ und somit auch $v = 0$.

Der Fall $p = 1$ ist deutlich komplizierter. Für diesen benötigt man unter anderem Friedrichs'sche Glättungskerne und Faltungsintegrale. Wir möchten hier auf den Beweis verzichten. ■

Satz 3.13 *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ ein Banachraum und für $p = 2$ sogar ein Hilbertraum.*

Beweis. Sei (u_k) eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann sind (u_k) sowie die abgeleiteten Folgen $(\partial_i u_k) =: (v_{ik})$, $1 \leq i \leq n$, Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$ und somit konvergent mit Grenzfunktionen u bzw. $v_1, \ldots, v_n$. Für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt daher

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx \leftarrow \int_\Omega u_k \partial_i \varphi \, dx = -\int_\Omega (\partial_i u_k) \varphi \, dx \to -\int_\Omega v_i \varphi \, dx.$$

Somit ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial_i u = v_i$. ■

4 Lineare Operatoren

4.1 Stetigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir lineare Operatoren (lineare Abbildungen) zwischen normierten Räumen. Zur Erinnerung:

Definition 4.1 *Seien* $(X, \|.\|_X)$ *und* $(Y, \|.\|_Y)$ *normierte Räume über dem gleichen Körper* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. *Dann heißt* $T : X \to Y$ *eine* lineare Abbildung*, falls für alle* $x, y \in X$ *und für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty.$$

Wir schreiben oft $\|.\|$ sowohl für $\|.\|_X$ als auch für $\|.\|_Y$.

Lemma 4.2 *Seien* X *und* Y *normierte Räume und* $T : X \to Y$ *eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) T *ist stetig auf* X.
(b) T *ist stetig in einem Punkt* $x_0 \in X$.
(c) T *ist beschränkt, d.h.*

$$\sup\{\|Tx\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|Tx\|_Y / \|x\|_X : x \in X \setminus \{0\}\} < \infty.$$

(d) Es existiert ein $c > 0$ *mit* $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ *für alle* $x \in X$.

Beachten Sie den Unterschied zur Definition der Beschränktheit einer Funktion in Ana I. Wir haben damals eine Funktion *beschränkt* genannt, wenn ihr Wertebereich beschränkt ist. Für *lineare* Abbildungen ist dieser Begriff wenig nützlich: Der Wertebereich einer linearen Abbildung ist $\{0\}$ (für die Null-Abbildung) oder unbeschränkt.

Für lineare Abbildungen erklärt man die Beschränkheit daher wie oben: Sie überführen die Einheitskugel in eine beschränkte Menge. Hieraus folgt leicht, dass beschränkte lineare Abbildungen *jede* beschränkte Menge in eine beschränkte Menge überführen.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$ ist klar.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sei T in $x_0 \in X$ stetig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\tilde{x} \in X$ mit $\|\tilde{x} - x_0\| < \delta$ die Abschätzung $\|T(\tilde{x} - x_0)\| = \|T\tilde{x} - Tx_0\| < 1$ folgt.

Sei nun $x \in B_1(0)$ beliebig und $\tilde{x} := \delta x + x_0$. Dann ist $\|\tilde{x} - x_0\| = \|\delta x\| < \delta$ und daher $\|T(\delta x)\| = \|T(\tilde{x} - x_0)\| < 1$. Hieraus folgt für $x \in B_1(0)$ sofort

$$\|Tx\| < 1/\delta.$$

$(c) \Rightarrow (d)$: Wähle $c := \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}$.

$(d) \Rightarrow (a)$: Sei (x_n) eine Folge in X, die gegen $x \in X$ konvergiert. Aus

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq c\|x_n - x\| \to 0$$

folgt dann $Tx_n \to Tx$. Der Operator T ist also *folgenstetig* und somit erst recht stetig. ∎

Definition 4.3 *Seien* $(X, \|.\|_X)$ *und* $(Y, \|.\|_Y)$ *normierte Räume. Wir bezeichnen mit* $L(X, Y)$ *den* Raum der linearen stetigen Operatoren von X nach Y. *Im Fall* $X = Y$ *schreiben wir kurz* $L(X)$ *statt* $L(X, X)$. *Für* $T \in L(X, Y)$ *definiert man die* Operatornorm von T *durch*

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\}.$$

Man kann leicht zeigen, dass

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ für alle } x \in X\}.$$

Insbesondere gilt

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Verknüpfung $S \circ T$ zweier Operatoren $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$ heißt das *Produkt* dieser Operatoren. Man schreibt dafür kurz ST.

Lemma 4.4 *Sind* $(X, \|.\|_X)$,$(Y, \|.\|_Y)$,$(Z, \|.\|_Z)$ *normierte Räume, so gilt:*

(a) $L(X, Y)$, *versehen mit der Operatornorm, ist ein normierter Raum.*

(b) *Für* $T \in L(X, Y)$ *und* $S \in L(Y, Z)$ *ist* $ST \in L(X, Z)$, *und es gilt* $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$.

(c) *Ist* Y *ein Banachraum, dann ist auch* $L(X, Y)$ *ein Banachraum. Insbesondere ist* $L(X)$ *eine Banachalgebra, wenn* X *ein Banachraum ist.*

Beweis. Die ersten beiden Aussagen sind einfach zu beweisen und verbleiben als Übungsaufgabe.

Sei (T_n) eine Cauchyfolge in $L(X, Y)$. Dann ist $(T_n x)$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y und somit konvergent. Wir definieren $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. Der so definierte Operator $T : X \to Y$ ist offenbar linear. Wir zeigen, dass er stetig ist und dass $T_n \to T$ in der Operatornorm.

Da (T_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$. Für alle $x \in X$ und $m, n \geq N$ ist dann

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\|.$$

Lassen wir hierin $m \to \infty$ streben, folgt

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } n \geq N.$$

Hieraus folgt erstens die Stetigkeit von $T_n - T$ und damit auch die von $T = T_n - (T_n - T)$ und zweitens die Normabschätzung $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und damit die Normkonvergenz $T_n \to T$. ∎

Satz 4.5 *Sei X ein normierter Raum, X_0 ein linearer dichter Teilraum von X, Y ein Banachraum und $A \in L(X_0, Y)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $\tilde{A} \in L(X, Y)$, der auf X_0 mit A übereinstimmt. Für diesen gilt $\|\tilde{A}\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(X_0,Y)}$.*

Der Operator $\tilde{A}$ heißt die *stetige Fortsetzung* von A auf X.

Beweis. Wir stellen $x \in X$ als Grenzwert einer Folge (x_n) in X_0 dar. Wegen

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\|_{L(X_0,Y)} \|x_n - x_m\|$$

ist (Ax_n) eine Cauchyfolge in Y und folglich konvergent. Außerdem: ist (y_n) eine weitere Folge in X_0, die ebenfalls gegen $x \in X$ konvergiert, so ist

$$\|Ax_n - Ay_n\| = \|A(x_n - y_n)\| \le \|A\| \, \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Also ist der Grenzwert $\lim Ax_n$ unabhängig von der Wahl der Folge $(x_n) \to x$. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\tilde{A}x$. Der so erklärte Operator $\tilde{A} : X \to Y$ ist offenbar linear; er stimmt auf X_0 mit A überein, und er ist beschränkt:

$$\|\tilde{A}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| \le \lim_{n\to\infty} \|A\| \, \|x_n\| = \|A\| \, \|x\|.$$

Hieraus folgt außerdem, dass $\|\tilde{A}\| \le \|A\|$. Die umgekehrte Ungleichung $\|A\| \le \|\tilde{A}\|$ ergibt sich aus

$$\|A\| = \sup_{x\in X_0,\, \|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{x\in X_0,\, \|x\|\le 1} \|\tilde{A}x\| \le \sup_{x\in X, \|x\|\le 1} \|\tilde{A}x\| = \|\tilde{A}\|$$

(auf der rechten Seite steht das Supremum über einer größeren Menge). ■

Beispiele 4.6 (a) Die Nullabbildung $0 : X \to X,\ x \mapsto 0$ ist für jeden normierten Raum X ein linearer und stetiger Operator mit $\|0\| = 0$.

(b) Die Identität $I : X \to X,\ x \mapsto x$ ist für jeden normierten Raum $X \neq \{0\}$ ein linearer und stetiger Operator mit $\|I\| = 1$.

(c) Ist X endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung $A : X \to Y$ in einen normierten Raum Y stetig. (Man betrachte die Wirkung von A auf den Elementen einer Basis von X.)

(d) Auf dem Raum $X := C^0([a, b])$ der stetigen Funktionen definieren wir zu gegebenem $k \in C^0([a, b]^2)$ den *Fredholmschen Integraloperator* mit *Integralkern* k durch

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(t, s) f(s) \, ds.$$

Man sieht leicht, dass Tf für jedes stetige f wieder stetig ist (Parameterintegral), und eine elementare Abschätzung liefert

$$\|Tf\|_\infty \le \|k\|_\infty \|f\|_\infty (b - a).$$

Somit ist $T \in L(X,X)$ und $\|T\| \le \|k\|_\infty (b-a)$. In vielen Anwendungen stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit der Fredholmschen Integralgleichung $(\lambda I - T)f = g$ für stetige Funktionen f, g.

Neben dem Fredholmschen betrachtet man den *Volterraschen Integraloperator*

$$(Sf)(t) := \int_a^t k(t,s) f(s)\, ds,$$

der vollkommen andere Abbildungseigenschaften als ein Fredholmscher Integraloperator aufweist. (Wir haben nichtlineare Volterrasche Integralgleichungen bereits in der Vorlesung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen beim Studium von Anfangswertproblemen kennengelernt. Ganz ähnlich führen Randwertprobleme auf Fredholmsche Integralgleichungen.)

(e) Auf dem Banachraum $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$ definieren wir für $h \in \mathbb{R}^n$ den *Translations-* oder *Verschiebungsoperator* T_h durch $(T_h f)(x) := f(x+h)$. Aus der Substitutionsregel folgt $\|T_h\| = 1$. Außerdem ist aus Analysis IV bekannt, dass $T_h f \to f$ für $h \to 0$ (*Stetigkeit im L^p-Mittel*). Somit konvergiert $T_h \to I$ im Sinne der punktweisen Konvergenz im Argument f, welche wir im Folgenden auch *starke Konvergenz* nennen werden.

Beachten Sie aber: T_h konvergiert *nicht* im Sinne der Operatornorm gegen I: Wählt man $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq B_{|h|/2}(0)$, so ist

$$\|T_h f - f\|_p^p = 2\|f\|_p^p \quad \text{und somit} \quad \|T_h - I\| \ge 2^{1/p}.$$

(f) Für den Gradientenoperator $\nabla : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)^n,\ u \mapsto \nabla u$, gilt $\|\nabla u\|_p \le \|u\|_{1,p}$ und somit $\|\nabla\| \le 1$. ■

4.2 Invertierbarkeit

Als nächstes interessiert uns die Invertierbarkeit linearer Operatoren. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass ein linearer Operator zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist. Dass diese Äquivalenz für unendlich-dimensionale Banachräume nicht gilt, zeigt die Abbildung

$$L : \ell^p \to \ell^p,\ (x_1, x_2, ...) \mapsto (x_2, x_3, ...),$$

der sogenannte „Linksshift“. Diese Abbildung ist surjektiv, aber offensichtlich nicht injektiv. Dagegen ist der „Rechtsshift“

$$R : \ell^p \to \ell^p,\ (x_1, x_2, ...) \mapsto (0, x_1, x_2, ...)$$

injektiv, aber nicht surjektiv.

Selbstverständlich kann man einen injektiven Operator stets auf seinem Bildraum invertieren. Die Inverse ist dabei immer linear, wie sich leicht zeigen lässt.

Aus Analysis 1 ist auch bekannt, dass die Inverse einer stetigen Funktion nicht stetig sein muss. Der folgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein linearer und stetiger Operator stetig invertierbar ist, d.h. eine stetige Inverse besitzt.

Satz 4.7 *Seien X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$. Weiter gebe es eine Konstante $m > 0$ mit $m\|x\| \le \|Tx\|$ für alle $x \in X$. Dann ist T injektiv, und die auf dem Bildraum $\operatorname{im} T := TX$ definierte Inverse T^{-1} ist stetig mit $\|T^{-1}\| \le 1/m$. Ist X ein Banachraum, so ist $\operatorname{im} T$ abgeschlossen in Y und vollständig.*

Beweis. Aus $Tx = 0$ folgt $m\|x\| \le 0$ und damit $x = 0$. Also ist T injektiv, und T^{-1} ist wohldefiniert auf $\operatorname{im} T$. Wir zeigen die Stetigkeit von T^{-1}. Zu jedem $y \in \operatorname{im} T$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $Tx = y$. Mit diesem gilt

$$\|T^{-1}y\| = \|T^{-1}Tx\| = \|x\| \le \frac{1}{m}\|Tx\| = \frac{1}{m}\|y\|.$$

Also ist T^{-1} stetig und $\|T^{-1}\| \le 1/m$.

Es bleibt, die Abgeschlossenheit und Vollständigkeit von $\operatorname{im} T$ im Falle der Vollständigkeit von X zu zeigen. Da sich beides ähnlich zeigen lässt, beschränken wir uns auf den Beweis der Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} T$ in Y.

Sei (y_n) eine Folge in $\operatorname{im} T$ mit Grenzwert $y \in Y$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Folge (x_n) in X mit $Tx_n = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\|x_n - x_l\| \le \frac{1}{m}\|y_n - y_l\|$ ist (x_n) eine Cauchyfolge in X und daher konvergent. Sei x ihr Grenzwert. Da T stetig ist, gilt $Tx_n \to Tx$ und somit $y = Tx \in \operatorname{im} T$. ∎

Definition 4.8 *Sei X ein normierter Raum und $T \in L(X)$. Wir definieren den* Spektralradius *von T als $r(T) := \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$.*

Wir werden die Bedeutung dieses zunächst formal eingeführten Begriffes später verstehen.

Lemma 4.9 *Sei X Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \quad \textit{und} \quad r(T) \le \|T\|.$$

Beweis. Für $T = 0$ ist die Aussage trivial. Sei daher $T \ne 0$. Wir setzen

$$r := \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|T^m\| \le (r+\varepsilon)^m$. Mit diesem m schreiben wir ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ als $n = mp + q$ mit Zahlen $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $q < m$ (Division mit Rest). Dann gilt nach Lemma 4.4 (b)

$$\|T^n\|^{1/n} \le \|T^{mp}\|^{1/n}\|T^q\|^{1/n} \le \|T^m\|^{p/n}\|T\|^{q/n} \le (r+\varepsilon)^{mp/n}\|T\|^{q/n}.$$

Bilden wir auf beiden Seiten den oberen Limes für $n \to \infty$, so folgt wegen $mp/n \to 1$ und $q/n \to 0$ (da q durch $m-1$ beschränkt ist), dass

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq r + \varepsilon = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} + \varepsilon.$$

Da dies für jedes ε gilt, ist $\limsup \|T^n\|^{1/n} \leq \inf \|T^n\|^{1/n}$. Hieraus folgt die behauptete Konvergenz. Die zweite Aussage ist ohnehin klar. ∎

Satz 4.10 (Neumann-Reihe) *Sei X ein Banachraum, $T \in L(X)$ und $r(T) < 1$. Dann ist $I - T$ stetig invertierbar mit*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert. (Wir vereinbaren hier, dass $T^0 := I$.) Gilt sogar $\|T\| < 1$, so ist $\|(I-T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$.

Beweis. Wegen $r(T) < 1$ gibt es ein θ mit $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} < \theta < 1$. Für dieses gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T^n\| < \theta^n$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere gilt $\|T^n\| \to 0$.

Für $n \geq 1$ sei $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} T^k$. Für alle $n \geq m \geq n_0$ ist dann

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m}^{n-1} T^k \right\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k = \theta^m \sum_{k=0}^{n-1-m} \theta^k \leq \frac{\theta^m}{1-\theta}$$

(geometrische Reihe). Somit ist (S_n) eine Cauchyfolge in $L(X)$. Da $L(X)$ vollständig ist, gibt es ein $S \in L(X)$ mit $S_n \to S$ bzgl. der Operatornorm. Die angegebene Reihe konvergiert also. Weiter gilt

$$(I-T)S = \lim_{n\to\infty} (I-T)S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (T^k - T^{k+1}) = \lim_{n\to\infty} (I - T^n) = I$$

(Teleskopsumme), d.h. $(I-T)S = I$. Analog lässt sich $S(I-T) = I$ zeigen. Folglich ist $I - T$ invertierbar mit $(I-T)^{-1} = S$.

Sei schließlich noch $\|T\| < 1$. Aus $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ und

$$\|S\| \leftarrow \|S_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

folgt auch die letzte Behauptung. ∎

Folgerung 4.11 *Für jeden Banachraum X ist die Menge aller linearen, stetigen und stetig invertierbaren Operatoren offen in $L(X)$. Genauer: ein Operator $S \in L(X)$ ist bereits dann invertierbar, wenn es einen invertierbaren Operator $T \in L(X)$ mit $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ gibt.*

Beweis. Aus $\|S-T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ folgt $\|T^{-1}(S-T)\| \le \|T^{-1}\|\,\|S-T\| < 1$. Satz 4.10 zeigt die Invertierbarkeit von $I - T^{-1}(T-S) = T^{-1}S$ und damit die von S. ■

Definition 4.12 *Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{C}$ und sei $T \in L(X)$. Dann heißt*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ ist stetig invertierbar}\}$$

die Resolventenmenge *von T, und für $\lambda \in \rho(T)$ heißt $R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1} \in L(X)$ die* Resolvente *von T in λ. Schließlich heißt $\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$ das* Spektrum *von T.*

Man trifft entsprechende Definitionen auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Aus der linearen Algebra wissen wir aber, dass dies mit Einschränkungen verbunden ist: Eine quadratische Matrix mit reellen Einträgen muss keine reellen Eigenwerte besitzen. Wir werden daher in allen Fragen der Spektraltheorie meist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen, auch wenn einige Aussagen (wie z.B. die folgende) auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ richtig bleiben.

Folgerung 4.13 *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in L(X)$. Dann ist $\rho(T)$ eine offene Menge mit $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r(T)}(0)} \subseteq \rho(T)$. Entsprechend ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und wegen $\sigma(T) \subseteq \overline{B_{r(T)}(0)} \subseteq \overline{B_{\|T\|}(0)}$ beschränkt, also sogar kompakt.*

Beweis. Sei $|\lambda| > r(T)$. Dann ist

$$r\left(\frac{1}{\lambda}T\right) = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{1}{\lambda}T\right)^n \right\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda|}\|T^n\|^{1/n} = \frac{1}{|\lambda|}\, r(T) < 1,$$

und Satz 4.10 liefert die Invertierbarkeit von $I - \frac{1}{\lambda}T$. Dann ist aber auch $\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T) = \lambda I - T$ invertierbar, und es gilt wieder nach Satz 4.10

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^n.$$

Sei nun $\lambda \in \rho(T)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$. Dann ist

$$\|(\mu I - T) - (\lambda I - T)\| = |\mu - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda I - T)^{-1}\|},$$

und mit Folgerung 4.11 erhält man die Invertierbarkeit von $\mu I - T$. Daher ist $\mu \in \rho(T)$, und $\rho(T)$ ist offen. ■

Wir werden in Satz 15.3 sehen, dass das Spektrum eines Operators $T \in L(X)$ nie leer ist, falls X ein *komplexer* Banachraum ist und dass der Spektralradius seinen Namen tatsächlich verdient: $r(T)$ ist der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe um 0, die $\sigma(T)$ komplett enthält.

5 Der Bairesche Kategoriensatz und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

5.1 Der Bairesche Kategoriensatz

Das Bairesche Kategoriensatz ist wohl einer der unscheinbarsten und zugleich nützlichsten Sätze der Analysis. Er findet überraschende Anwendungen beim Beweis von Aussagen der „elementaren Analysis “(von denen wir uns eine in Satz 5.7 ansehen werden). In der Funktionalanalysis ist er die Grundlage der Beweise des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit (und der verwandten Sätze von Banach/Steinhaus) sowie des Prinzips der offenen Abbildung (und verwandter Sätze wie den Satz von Banach über den inversen Operator).

Für den Beweis benötigen wir ein Resultat aus der Analysis I.

Lemma 5.1 (Cantorscher Durchschnittssatz) *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei (A_n) eine absteigende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von X mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$. Dann enthält $A := \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ genau einen Punkt.*

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in A_n$. Die so definierte Folge (x_n) ist wegen $d(x_m, x_n) \le \operatorname{diam}(A_n)$ für $m \ge n$ und $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ eine Cauchyfolge. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen ein $x \in X$.

Weiter gilt $x_n \in A_m$ für $n \ge m$. Somit ist x Häufungspunkt von A_m für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Abgeschlossenheit der Mengen A_m impliziert $x \in A_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und somit $x \in A$.

Wir zeigen abschließend, dass $A \subseteq \{x\}$. Ist $y \in A$, so ist $d(x, y) \le \operatorname{diam}(A_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit $d(x, y) = 0$. Dann ist aber $x = y$. ∎

Satz 5.2 (Bairescher Kategoriensatz) *Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und (A_n) eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Dann enthält wenigstens ein A_n eine offene Kugel.*

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt

- *nirgends dicht*, wenn $\operatorname{clos} A$ keine inneren Punkte enthält,
- *von 1. Kategorie* oder *mager*, wenn sie eine Vereinigung höchstens abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist,
- *von 2. Kategorie* oder *fett*, wenn sie nicht von erster Kategorie ist.

Mit diesen Begriffen (und ein wenig Arbeit: Übung) lässt sich Satz 5.2 auch wie folgt formulieren.

Satz 5.3 *Jeder vollständige metrische Raum ist von* 2. *Kategorie.*

Der Baire'sche Kategoriensatz hat bemerkenswerte Konsequenzen. Z.B. ist die Menge aller algebraischen Zahlen (d.h. die Menge aller Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten) abzählbar und folglich eine Menge erster

Kategorie. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, folgt aus dem Baire'schen Kategoriensatz die Existenz transzendenter Zahlen. Auch die Menge der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen und in wenigstens einem Punkt differenzierbaren Funktionen erweist sich als von erster Kategorie in $C[0,1]$ (diese Menge ist also „sehr klein"). Da $C[0,1]$ vollständig ist, folgt mit Satz 5.3 die Existenz nirgends differenzierbarer stetiger Funktionen (und es gibt „sehr viele" solcher Funktionen).

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Sei (A_n) eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Angenommen, keine der Mengen A_n enthalte eine offene Kugel. Dann ist das Innere von A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ leer. Für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $U \setminus A_n$ offen und nicht leer, da ansonsten $U \subset A_n$ wäre. Wir finden daher zu jeder offenen Menge U und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n > 0$ und ein $x_n \in X$ mit $B_{r_n}(x_n) \subseteq U \setminus A_n$.

Wir wählen nun speziell $U := X$ und erhalten ein $x_1 \in X$ und ein $r_1' \in (0,1)$ mit $B_{r_1'}(x_1) \subseteq X \setminus A_1$. Sei $r_1 := r_1'/2$. Dann ist $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset X \setminus A_1$.

Induktiv finden wir so Radien $r_n \in (0, \frac{1}{n})$ und Punkte $x_n \in X$ mit

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \setminus A_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist $\operatorname{diam}(B_{r_n}(x_n)) \leq 2/n$. Folglich gibt es nach Lemma 5.1 ein $x \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}(x_n)}$. Nun gilt einerseits $x \in B_{r_n}(x_n)$ und somit $x \notin A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; andererseits ist $x \in X$ und somit $x \in A_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$; ein Widerspruch. ∎

Der Bairesche Kategoriensatz liefert häufig einfache (wenn auch nicht konstruktive) Beweise für Existenzaussagen. Hier ist ein Beispiel.

Folgerung 5.4 *Eine Folge $(f_n) \subset C^0([a,b])$ konvergiere punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann liegt die Menge der Stetigkeitspunkte von f dicht in $[a,b]$.*

Insbesondere ist die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ KEIN punktweiser Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen.

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, dass in jedem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq [a,b]$ mit nichtleerem Inneren ein t_0 existiert, so dass f in t_0 stetig ist. Wir zeigen zuerst, dass zu jedem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq [a,b]$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein abgeschlossenes Teilintervall $\tilde{I} \subseteq I$ mit $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $s, t \in \tilde{I}$ existiert.

Sei hierzu $\varepsilon > 0$ und $I \subseteq [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \big\{ t \in I : |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon/3 \text{ für alle } m > n \big\}.$$

Dann ist

$$A_n = \bigcap_{m>n} \big\{ t \in I : |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon/3 \big\}$$

als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen (Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen sind abgeschlossen). Da die Folge (f_n) punktweise konvergiert, ist $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = I$.

Wir wenden nun Satz 5.2 auf I an und erhalten ein $n \in \mathbb{N}$ und ein offenes Intervall I' mit $I' \subset A_n$. Da f_n stetig ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall $\tilde{I} \subset I'$ mit $|f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ für alle $s, t \in \tilde{I}$. Es ist daher

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_n(s)| + |f_n(s) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

für alle $s, t \in \tilde{I}$.

Mit diesen Vorüberlegungen finden wir für jedes abgeschlossene Intervall $I \subseteq [a, b]$ eine absteigende Folge abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $b_n - a_n < 1/n$ und $a_n < a_{n+1} < \ldots < b_{n+1} < b_n$, so dass $|f(s) - f(t)| < 1/n$ für alle $s, t \in I_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 5.1 existiert ein $t_0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. In t_0 ist f stetig. ■

5.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Der folgende Satz ist auch als Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für stetige Funktionen bekannt.

Satz 5.5 *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger reellwertiger Funktionen auf X, die punktweise nach oben beschränkt ist, d.h. es ist*

$$\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) < \infty \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Dann gibt es eine Kugel $B_r(x_0)$ in X so, dass die Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ auf $B_r(x_0)$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt ein $c > 0$, so dass $f_\alpha(y) < c$ für alle $y \in B_r(x_0)$ und alle $\alpha \in A$.

Beweis. Da jede Funktion f_α stetig ist, ist die Menge

$$F_n := \{x \in X : f_\alpha(x) \leq n \text{ für alle } \alpha \in A\}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen. Aus der punktweisen Beschränktheit der f_α folgt $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Nach Satz 5.2 existiert nun ein $n \in \mathbb{N}$, so dass F_n eine offene Kugel enthält. Auf dieser Kugel ist jedes f_α durch n beschränkt. ■

Satz 5.6 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Weiterhin sei $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Operatoren in $L(X, Y)$, die punktweise beschränkt ist, d.h. es ist $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| < \infty$ für jedes $x \in X$. Dann sind die Operatoren $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ gleichmäßig (norm-)beschränkt, d.h. es ist $\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| < \infty$.*

Beweis. Für jedes $\alpha \in A$ sei $f_\alpha(x) := \|T_\alpha x\|$. Die Funktionen f_α sind stetig auf X, und die Familie f_α ist punktweise beschränkt. Nach Satz 5.5 existieren daher eine Kugel $B_r(x_0)$ in X und ein $c > 0$, so dass $\|T_\alpha x\| \le c$ für alle $\alpha \in A$ und für alle $x \in B_r(x_0)$.

Somit gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\| \le 1$, dass $x_0 + \frac{r}{2}x \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$, und man erhält

$$\|T_\alpha x\| = \left\| T_\alpha \frac{(x_0 + \frac{r}{2}x) - x_0}{r/2} \right\| \le \frac{2}{r}\Big(\|T_\alpha(x_0 + \frac{r}{2}x)\| + \|T_\alpha x_0\| \Big) \le \frac{4c}{r}$$

für alle $\alpha \in A$. ■

Satz 5.7 *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge in $L(X,Y)$, d.h. für alle $x \in X$ existiere der Grenzwert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$. Dann ist $A \in L(X,Y)$ und*

$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|.$$

Beweis. Da $\lim_{n\to\infty} A_n x$ für alle $x \in X$ existiert, ist (A_n) punktweise beschränkt und dann nach Satz 5.6 sogar gleichmäßig (norm-)beschränkt. Dabei gilt für alle $x \in X$

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|\|x\|.$$

Somit ist A beschränkt und $\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|$. ■

Satz 5.8 (Satz von Banach-Steinhaus) *Seien X und Y Banachräume und (A_n) eine Folge in $L(X,Y)$. Weiterhin sei die Folge $(\|A_n\|)$ beschränkt und die Folge $(A_n x)$ für alle x aus einer dichten Teilmenge M von X konvergent. Dann konvergiert (A_n) punktweise gegen einen Operator $A \in L(X,Y)$.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ und $c := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$. Wir wählen ein $x \in M$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{3c}$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n x - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n, m \ge n_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|A_n x_0 - A_m x_0\| &\le \|A_n(x_0 - x)\| + \|A_n x - A_m x\| + \|A_m(x - x_0)\| \\
&\le (\|A_n\| + \|A_m\|)\, \|x - x_0\| + \|A_n x - A_m x\| \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n, m \ge n_0$. Also ist $(A_n x_0)$ eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist, gibt es ein $Ax_0 \in Y$ mit $A_n x_0 \to Ax_0$. Mit Satz 4.6 folgt $A \in L(X,Y)$ und die punktweise Konvergenz von (A_n) gegen A. ■

Eine weitere Anwendung des Baireschen Kategoriensatzes sehen wir im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung im folgenden Abschnitt.

6 Das Prinzip der offenen Abbildung und der Satz vom abgeschlossenen Graphen

6.1 Der Satz von der offenen Abbildung

Zu Beginn dieses Kapitels erinnern wir an einen Satz aus Analysis I: Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge (in Y) eine offene Menge (in X) ist. Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. In beliebigen topologischen Räumen wird so die Stetigkeit definiert. Die Stetigkeit einer Funktion impliziert hingegen nicht, dass das Bild einer offenen Menge offen ist (Beispiel: konstante Funktionen).

Definition 6.1 *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* offen*, falls f jede offene Menge in X auf eine offene Menge in Y abbildet.*

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so ist die Inverse f^{-1} offenbar genau dann stetig, wenn f offen ist.

Satz 6.2 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$ surjektiv. Dann ist T offen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass das Bild jeder offenen Menge offen ist. Sei also $U \subseteq X$ offen. Da T linear ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $0 \in U$. Da jede Umgebung von 0 eine offene Kugel um 0 enthält und jede offene Kugel um 0 eine Umgebung der 0 ist, ist es hinreichend (und notwendig) zu zeigen, dass das Bild einer offenen Kugel um $0 \in X$ eine offene Kugel um $T0 = 0 \in Y$ enthält.

Sei also $U := B_{2r}(0)$ mit $r > 0$, und sei $B := B_r(0)$. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{TU}$ eine offene Kugel um 0 enthält, und anschließend, dass bereits TU eine offene Kugel um 0 enthält.

Wegen $X = \cup_{n=1}^{\infty} nB$ folgt mit der Surjektivität und Linearität von T, dass

$$Y = TX = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nB\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTB \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{TB} \subseteq Y.$$

Damit haben wir den Banachraum Y als abzählbare Vereinigung abgeschlossener Teilmengen dargestellt. Der Bairesche Kategoriensatz impliziert, dass $n\overline{TB}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine offene Kugel $D \subseteq Y$ enthält. Aus $D \subset n\overline{TB}$ folgt $\frac{1}{n}D \subset \overline{TB}$ und weiter

$$\frac{1}{n}D - \frac{1}{n}D \subseteq \overline{TB} - \overline{TB} \subseteq \overline{TB - TB} = \overline{T(B - B)} \subseteq \overline{TU}.$$

(Die *algebraische* Differenz $A - B$ zweier Mengen A, B ist definiert ist als $\{a - b : a \in A,\ b \in B\}$. Insbesondere ist $0 \in A - A \neq \emptyset$ für $A \neq \emptyset$.)

Nun ist $\frac{1}{n}D - \frac{1}{n}D = \bigcup_{x \in \frac{1}{n}D}(\{x\} - \frac{1}{n}D)$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen mit $0 \in \frac{1}{n}D - \frac{1}{n}D$. Es gibt also eine offene Kugel $V \subseteq Y$ um 0 mit

$$V \subseteq \frac{1}{n}D - \frac{1}{n}D \subseteq \overline{TU}.$$

Es ist noch zeigen, dass bereits $TU = TB_{2r}(0)$ eine offene Kugel um 0 enthält. Hierzu wählen wir eine Folge von Radien $r_n > 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < r =: r_0$. Wir wissen bereits, dass es eine Folge offener Kugeln $(B_{s_n})_{n \geq 0}$ um 0 mit $B_{s_n} \subseteq \overline{TB_{r_n}}$ für alle $n \geq 0$ gibt. Insbesondere kann man $(s_n)_{n \geq 0}$ mit $\lim_{n \to \infty} s_n = 0$ wählen. Wir wollen zeigen, dass $B_{s_0} \subseteq TU$.

Sei hierzu $y \in B_{s_0} \subset \overline{TB_{r_0}}$. Dann gibt es ein $x_0 \in B_{r_0}$ mit $\|y - Tx_0\| < s_1$. Induktiv finden wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in B_{r_n}$ und

$$\Big\|y - T\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big)\Big\| < s_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=0}^{\infty} r_n < 2r_0$. Somit folgt aus der Vollständigkeit von X die Existenz eines $x \in X$ mit $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Obige Rechnung zeigt $\|x\| < 2r_0$, d.h. $x \in U$. Wir folgern mit der Stetigkeit von T und $\lim s_n = 0$, dass

$$Tx = T\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\Big) = \lim_{k \to \infty} T\Big(\sum_{n=0}^{k} x_n\Big) = y,$$

also $Tx = y$ und somit $y \in TU$. ■

Folgerung 6.3 *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann ist T genau dann offen, wenn T surjektiv ist.*

Beweis. Aus der Surjektivität folgt die Offenheit nach Satz 6.2. Es verbleibt, die umgekehrte Implikation zu zeigen. Wenn T offen ist, enthält $TB_1(0)$ eine offene Kugel $B_r(0)$. Damit ist

$$TX = T\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) = T\bigcup_{n=1}^{\infty} nB_1(0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nTB_1(0) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_r(0) = Y.$$

Also ist T ist surjektiv. ■

Mit Satz 6.2 erhalten wir außerdem das folgende bemerkenswerte Resultat.

Satz 6.4 (Banach) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$ bijektiv. Dann ist der inverse Operator $T^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig.*

Beweis. Da T bijektiv ist, existiert T^{-1} und ist linear. Nach Satz 6.2 ist T offen, also ist T^{-1} stetig. ■

Wir haben bereits im ersten Kapitel gesehen, dass abgeschlossene Unterräume von Banachräumen vollständig ist. Daher lässt sich ein injektiver linearer Operator $T : X \to Y$ zwischen Banachräumen mit abgeschlossenem Bild $\operatorname{im} T \subseteq Y$ stetig auf diesem invertieren, d.h. $T^{-1} : \operatorname{im} T \to X$ ist stetig.

Folgerung 6.5 *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und $T \in L(X)$. Dann zerfällt das Spektrum $\sigma(T)$ in drei paarweise disjunkte Teilmengen*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Dabei ist $\sigma_p(T)$ die Menge aller Eigenwerte von T und heißt das Punktspektrum *von T, d.h.*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ ist nicht injektiv}\}.$$

Die Menge $\sigma_c(T)$ heißt das kontinuierliche Spektrum *von T und ist definiert als*

$$\sigma_c(T) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ ist injektiv, aber nicht surjektiv} \\ \textit{und } \operatorname{im}(\lambda I - T) \textit{ ist dicht in } X. \end{array} \right\}$$

Das Restspektrum *$\sigma_r(T)$ enthält alle übrigen Punkte aus $\sigma(T)$, d.h.*

$$\sigma_r(T) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \textit{ ist injektiv, aber nicht surjektiv} \\ \textit{und } \operatorname{im}(\lambda I - T) \textit{ ist nicht dicht in } X. \end{array} \right\}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. Dann ist $\lambda I - T$ injektiv. Wäre $\lambda I - T$ auch surjektiv, so würde aus Satz 6.4 folgen, dass $(\lambda I - T)^{-1}$ stetig ist. Somit wäre $\lambda \in \rho(T)$. ■

6.2 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

In vielen Anwendungen sind die zu betrachtenden Operatoren weder auf dem gesamten Banachraum definiert noch stetig. Betrachtet man zum Beispiel den Ableitungsoperator $A = \frac{d}{dx}$ auf $C^0([0,1])$, so ist dieser nur auf der Menge $C^1([0,1])$ der stetig differenzierbaren Funktionen definiert, und er ist als Operator von C^0 nach C^0 nicht stetig. Es ist ja z.B. $\|x^n\|_\infty = 1$ und $\|Ax^n\|_\infty = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir werden uns deshalb kurz mit sogenannten abgeschlossenen Operatoren beschäftigen.

Definition 6.6 *Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume über dem gleichen Körper $\mathbb{K}$.*
(a) Das Produkt $X \times Y$ wird mit

$$\|(x,y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad x \in X,\, y \in Y,$$

zu einem normierten Raum über $\mathbb{K}$.

(b) Ist D ein linearer Unterraum von X und $A : D \to Y$ eine lineare (nicht notwendig stetige) Abbildung, so heißt $\mathcal{D}(A) := D$ der Definitionsbereich *von A, und der lineare Raum*

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

heißt Graph *von A. Die Einschränkung der Produktraumnorm auf den Graphen von A,*

$$\|x\|_A := \|(x, Ax)\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

heißt die Graphennorm *von A.*

(c) Die Abbildung A heißt dicht definiert*, falls $\mathcal{D}(A)$ dicht in X liegt.*

(d) Die Abbildung A heißt abgeschlossen*, falls $\mathcal{G}(A)$ in $X \times Y$ abgeschlossen ist.*

Offensichtlich ist die Konvergenz $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in der Produktraumnorm äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz $x_n \to x$ in X und $y_n \to y$ in Y. Ferner ist $X \times Y$ genau dann ein Banachraum, wenn X und Y Banachräume sind, und $X \times Y$ ist genau dann separabel, wenn X und Y separabel sind.

Eine lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge (x_n) in $\mathcal{D}(A)$, für die $(x_n, Ax_n) \subset \mathcal{G}(A)$ gegen ein $(x, y) \in X \times Y$ konvergiert, der Grenzwert (x, y) bereits in $\mathcal{G}(A)$ liegt. Als wichtiges *Kriterium der Abgeschlossenheit* von A ist also nur zu überprüfen, dass für jede Folge (x_n) in $\mathcal{D}(A)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Ax_n \to y \in Y$ bereits $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y = Ax$ gilt.

Beispiel 6.7 Sei $X = C^0([0,1])$ und $\mathcal{D}(A) = C^1([0,1])$, und $A : \mathcal{D}(A) \to X$ sei der Ableitungsoperator $u \mapsto u'$. Dann ist A abgeschlossen.

Um dies einzusehen, betrachten wir eine Folge (u_n) in $\mathcal{D}(A)$ mit $u_n \to u \in X$ und $Au_n = u_n' \to v \in X$. Zu zeigen ist, dass $u \in \mathcal{D}(A)$ und $Au = v$. Die Konvergenz $u_n' \to v$ bedeutet, dass die Folge (u_n') gleichmäßig gegen v konvergiert. Da die Folge (u_n) ebenfalls gleichmäßig konvergiert, ist u differenzierbar und $u' = v$ (wie wir aus der Ana I wissen). ■

Lemma 6.8 *Seien X, Y normierte Vektorräume und $A \in L(X, Y)$ injektiv. Dann ist $A^{-1} : \mathcal{D}(A^{-1}) := \operatorname{im} A \to X$ abgeschlossen.*

Wir geben zwei Beweise dieser Aussage. Der erste Beweis wird das Kriterium der vorangegangenen Bemerkung benutzen. Dies ist die in der Praxis am häufigsten benutzte Methode, um die Abgeschlossenheit eines Operators zu zeigen. Der zweite Beweis verwendet abstrakte Argumente und ist deutlich eleganter.

1. Beweis von Lemma 6.8. Sei (y_n) eine Folge in $\operatorname{im} A$ mit $y_n \to y \in Y$ und $A^{-1}y_n \to x \in X$. Aus der Injektivität von A folgt die Existenz eindeutig bestimmter Elemente $x_n \in X$ mit $x_n = A^{-1}y_n$ bzw. $y_n = Ax_n$. Aus der Stetigkeit von A folgt dann

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = A \lim_{n\to\infty} x_n = Ax.$$

Also ist $y \in \operatorname{im} A$ und $A^{-1}y = x$. ■

2. Beweis von Lemma 6.8. Wegen $A \in L(X,Y)$ ist A abgeschlossen. Es gilt bis auf die natürliche Isomorphie von $X \times Y$ und $Y \times X$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(A) &= \{(x, Ax) : x \in X\} = \{(x, Ax) : Ax \in \operatorname{im} A\} \\ &= \{(A^{-1}y, y) : y \in \operatorname{im} A\} \\ &\cong \{(y, A^{-1}y) : y \in \mathcal{D}(A^{-1})\} = \mathcal{G}(A^{-1}).\end{aligned}$$

Somit ist A^{-1} abgeschlossen. ■

Definition 6.9 *Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $P : X \to X$ mit $P^2 = P$ heißt* Projektion. *In diesem Fall ist $Q := I - P : X \to X$ ebenfalls eine Projektion, und es gilt* $\operatorname{im} P = \ker Q$, $\operatorname{im} Q = \ker P$ *und somit*

$$X = \operatorname{im} P \oplus \operatorname{im} Q$$

im Sinne einer algebraischen direkten Summe. *Ist X ein normierter Raum und sind* $\operatorname{im} P$ *und* $\operatorname{im} Q$ *abgeschlossen, so bezeichnen wir diese Summenzerlegung als* topologisch.

Satz 6.10 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Sind X, Y Banachräume und ist $A : X \to Y$ ein linearer und abgeschlossener Operator mit $\mathcal{D}(A) = X$, so ist $A \in L(X,Y)$.*

Beweis. Da X, Y Banachräume sind und $\mathcal{G}(A) \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist, ist auch $\mathcal{G}(A)$ ein Banachraum. Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathcal{G}(A) \to X, \quad (x, Ax) \mapsto x.$$

Diese ist offensichtlich linear, stetig und injektiv und wegen $\mathcal{D}(A) = X$ sogar surjektiv. Aus Satz 6.4 folgt, dass P^{-1} stetig ist. Für jedes $x \in X$ ist dann

$$\|Ax\| \le \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\| = \|P^{-1}x\| \le \|P^{-1}\|\,\|x\|,$$

d.h. A ist stetig. ■

Folgerung 6.11 *Eine direkte Summenzerlegung $X = X_1 \oplus X_2$ eines Banachraumes X ist genau dann topologisch, wenn die zugehörigen Projektionen*

$$P_1 : X \to X_1,\ x_1 + x_2 \mapsto x_1 \quad \text{und} \quad P_2 := I - P_1$$

stetig sind. In diesem Fall gibt es ein $c > 0$ mit $\|x_1\| + \|x_2\| \le c\|x\|$ für alle $x = x_1 + x_2 \in X$ mit $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$.

Beweis. $\Leftarrow$: Seien P_1, P_2 stetig. Dann sind $X_1 = P_2^{-1}(\{0\})$ und $X_2 = P_1^{-1}(\{0\})$ als Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen abgeschlossen.

$\Rightarrow$: Seien X_1 und X_2 abgeschlossen. Wir zeigen, dass P_1 abgeschlossen ist. Sei hierzu (x^n) eine Folge in X mit Grenzwert $x \in X$ und mit $x_1^n := P_1(x^n) \to x_1$. Dann ist $x \in \mathcal{D}(P_1) = X$, und da X_1 abgeschlossen ist, gilt $x_1 \in X_1$. Da $x^n - x_1^n \in X_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da X_2 abgeschlossen ist, folgt $x^n - x_1^n \to x - x_1 \in X_2$. Damit gilt $x = x_1 + (x - x_1)$ mit $x_1 \in X_1$ und $x - x_1 \in X_2$. Somit ist $P_1(x) = x_1$; also ist P_1 abgeschlossen.

Mit Satz 6.10 folgt, dass P_1 stetig ist. Dann ist aber auch $P_2 = I - P_1$ als Summe stetiger Operatoren stetig. Für die letzte Aussage kann man z.B. $c := \|P_1\| + \|P_2\|$ wählen. ∎

Es ist an vielen Stellen von Interesse zu wissen, ob man zu einem vorgegebenen abgeschlossenen Unterraum X_1 eines Banachraums X einen abgeschlossenen Komplementärraum X_2 mit $X_1 \oplus X_2 = X$ finden kann. Wir haben in Satz 2.25 gesehen, dass dies in Hilberträumen X stets möglich ist: man wähle einfach $X_2 := X_1^\perp$. In einem beliebigen Banachraum ist diese Aussage im Allgemeinen falsch. So hat z.B. der Folgenraum c_0 kein abgeschlossenes Komplement in l^∞. Ein Beispiel mit $X = L^1(0, 2\pi)$ finden Sie im Buch von W. Rudin, Functional Analysis, Example 5.19. Die Aussage bleibt aber wenigstens noch richtig, wenn X_1 oder X/X_1 endlich-dimensional ist (siehe Lemma 12.2).

Darüber hinaus gilt der folgende Satz von Lindenstrauss und Tzafriri: *Hat in einem Banachraum jeder abgeschlossene Teilraum ein abgeschlossenes direktes Komplement, so ist der Banachraum zu einem Hilbertraum isomorph.*

7 Der Dualraum

7.1 Definition und Beispiele

Definition 7.1 *Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann heißt $X' := L(X, \mathbb{K})$ der* Dualraum *von X. Die Elemente von X' heißen* stetige lineare Funktionale. *Für $f \in X'$ und $x \in X$ schreibt man $f(x)$ auch als $\langle x, f \rangle$. Mit der Operatornorm*

$$\|f\|_{X'} = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$$

wird X' ein Banachraum (siehe Lemma 4.4).

Beispiele 7.2 (a) Sei $X = C^0([a, b])$. Jede Funktion $\varphi \in L^1([a, b])$ definiert durch

$$f_\varphi(u) := \int_a^b u(t)\varphi(t)\, dt, \quad u \in X,$$

ein Element $f_\varphi \in X'$ mit $\|f_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^1}$. Neben diesen gibt es weitere Funktionale: Jedes $t \in [a, b]$ definiert durch

$$\delta_t(u) := u(t), \quad u \in X,$$

ein Funktional in X' mit $\|\delta_t\|_{X'} = 1$.

(b) Sei $X = l^p$ mit $1 \leq p \leq \infty$, und sei $q \in [1, \infty]$ erklärt durch $1/p + 1/q = 1$. Für jedes $x = (x_n) \in l^p$ und jedes $y = (y_n) \in l^q$ konvergiert die Reihe

$$J(y)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

und mit der Hölderungleichung folgt

$$|J(y)(x)| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Also ist $J(y) \in (l^p)'$ und $\|J(y)\| \leq \|y\|_q$, und wir erhalten eine stetige lineare Abbildung $J : l^q \to (l^p)'$ mit $\|J\| \leq 1$. Da J offenbar injektiv ist, definiert J eine *Einbettung* von l^q in $(l^p)'$.

(c) Sei $X = L^p(\Omega)$ mit einer messbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und mit p und q wie vorher. Für jedes $x \in L^p(\Omega)$ und jedes $y \in L^q(\Omega)$ konvergiert das Integral

$$J(y)(x) := \int_\Omega xy\, d\mu,$$

und mit der Hölderungleichung folgt $|J(y)(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Also ist $J(y) \in (L^p)'$, und J liefert eine Einbettung von $L^q(\Omega)$ in $(L^p(\Omega))'$ mit $\|J\| \leq 1$. ■

Wir werden in Satz 7.6 sehen, dass die Einbettungen J in (b) und (c) für $1 < p < \infty$ sogar surjektiv sind, so dass man z.B. $(l^p)'$ mit l^q vermöge der Abbildung J identifizieren kann.

Auch im Falle von Hilberträumen kann man die linearen stetigen Funktionale komplett beschreiben.

Satz 7.3 (Rieszscher Darstellungssatz) *Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Dann ist für jedes $y \in H$ die durch*

$$\Phi(y) : H \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \langle x, y \rangle \quad \textit{für } x \in H$$

definierte Abbildung $\Phi(y)$ ein Element von H', und die Abbildung $\Phi : H \to H'$ ist ein isometrischer und konjugiert linearer Isomorphismus.

Hierbei bedeutet *konjugiert linear* (oder *antilinear*), dass für alle $y_1, y_2 \in H$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\Phi(y_1 + y_2) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2) \quad \text{und} \quad \Phi(\alpha y_1) = \overline{\alpha}\, \Phi(y_1),$$

und Φ heißt eine *Isometrie*, wenn $\|\Phi(y)\|_{H'} = \|y\|_H$ für alle $y \in H$.

Beweis. Für alle $x, y \in H$ gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\Phi(y)(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H.$$

Also ist $\Phi(y) \in H'$ mit $\|\Phi(y)\|_{H'} \leq \|y\|_H$. Es ist sogar $\|\Phi(y)\|_{H'} = \|y\|_H$, da $\Phi(y)(y) = \langle y, y \rangle = \|y\|_H^2$ gilt. Somit ist Φ eine Isometrie und insbesondere injektiv.

Wir zeigen noch, dass Φ auch surjektiv ist. Offenbar liegt das Nullfunktional im Bild von Φ. Sei nun $0 \neq f \in H'$ gegeben, und sei

$$N := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Da f stetig ist, ist N ein abgeschlossener Unterraum von H. Aus Satz 2.25 folgt $H = N \oplus N^\perp$. Man beachte, dass wegen $f \neq 0$ auch $N \neq H$ gilt; somit gibt es ein $0 \neq y \in N^\perp$. Für alle $x \in H$ ist $f(x)y - f(y)x \in N$. Wegen $y \in N^\perp$ folgt hieraus $f(x)\langle y, y \rangle - f(y)\langle x, y \rangle = 0$. Dies impliziert

$$f(x) = \frac{f(y)}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x \in H.$$

Für $\tilde{y} := \frac{f(y)}{\langle y,y \rangle} y \in H$ gilt also $\Phi(\tilde{y}) = f$. Somit ist Φ surjektiv. ■

Man kann also H' mit Hilfe von Φ mit H und insbesondere $(l^2)'$ mit l^2 und $(L^2(\Omega))'$ mit $L^2(\Omega)$ identifizieren. Im Allgemeinen ist die konjugiert lineare Abbildung Φ jedoch nicht trivial: H' darf als Banachraum nicht mit H gleichgesetzt werden.

Satz 7.4 (Lemma von Lax-Milgram) *Sei H ein Hilbert-Raum und $a : H \times H \to \mathbb{K}$ eine stetige Sesquilinearform, d.h.*

$$|a(x,y)| \leq c\|x\|\,\|y\| \quad \textit{für alle } x, y \in H.$$

Dann gibt es genau eine stetige lineare Abbildung $A \in L(H)$ mit

$$a(x,y) = \langle x, Ay\rangle \quad \textit{für alle } x, y \in H.$$

Für diese gilt $\|A\| \leq c$. Ist a zudem koerzitiv, *d.h. gibt es ein $\alpha > 0$ mit*

$$\operatorname{Re} a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in H,$$

so ist A invertierbar und $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$.

Beweis. Für jedes $y \in H$ ist die Abbildung $a(.,y) : H \to \mathbb{K},\ x \mapsto a(x,y)$ ein Element von H' mit $|a(x,y)| \leq c\|x\|\,\|y\|$. Es ist also $\|a(.,y)\|_{H'} \leq c\|y\|_H$. Nach Satz 7.3 gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in H$ mit $a(x,y) = \langle x, z\rangle$ für alle $x \in H$. Wir definieren A durch $Ay := z$. Dann ist tatsächlich

$$a(x,y) = \langle x, Ay\rangle \quad \text{für alle } x, y \in H$$

und

$$\|Ay\|_H = \|\langle ., Ay\rangle\|_{H'} = \|a(.,y)\|_{H'} \leq c\|y\|_H.$$

Da $a(.,.)$ und $\langle ., A.\rangle$ im zweiten Argument konjugiert linear sind, ist A linear und wir erhalten, dass $A \in L(H)$ und $\|A\| \leq c$.

Sei nun a koerzitiv. Dann gilt

$$\alpha\|x\|^2 \leq \operatorname{Re} a(x,x) = \operatorname{Re}\langle x, Ax\rangle \leq |\langle x, Ax\rangle| \leq \|x\|\,\|Ax\|.$$

Nach Satz 4.7 ist A injektiv, und das Bild von A ist abgeschlossen.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{im} A = H$. Wäre $\operatorname{im} A \neq H$, so gäbe es ein $0 \neq x_0 \in H$ mit $\langle y, x_0\rangle = 0$ für alle $y \in \operatorname{im} A$. Für $y_0 := Ax_0$ gilt dann

$$\alpha\|x_0\|^2 \leq \operatorname{Re} a(x_0,x_0) = \operatorname{Re}\langle x_0, Ax_0\rangle = \operatorname{Re}\langle y_0, x_0\rangle = 0$$

und somit $x_0 = 0$ im Widerspruch zur Annahme $x_0 \neq 0$. Es ist also $\operatorname{im} A = H$, und mit Satz 4.7 folgt, dass $A^{-1} \in L(H)$ und $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$. ∎

Folgerung 7.5 *Unter den Voraussetzungen von Satz* 7.4 (*einschließlich Koerzivität*) *gilt: Zu jedem $f \in H'$ besitzt das* Variationsproblem

$$a(y,u) = f(y) \quad \textit{für alle } y \in H$$

genau eine Lösung $u \in H$. Der Lösungsoperator $L : H' \to H,\ f \mapsto u$ ist konjugiert linear und stetig mit $\|L\| \leq 1/\alpha$.

Beweis. Satz 7.3 impliziert, dass es zu jedem $f \in H'$ genau ein $v \in H$ gibt mit $f(x) = \langle x, v\rangle$ für alle $x \in H$, nämlich $v = \Phi^{-1}(f)$. Dabei gilt $\|v\|_H = \|f\|_{H'}$.

Weiter gibt es nach Satz 7.4 ein $A \in L(H)$ mit $\|A^{-1}\| \leq 1/\alpha$ und $a(x, u) = \langle x, Au\rangle$ für alle $x, u \in H$. Dann ist $u := A^{-1} \circ \Phi^{-1}(f)$ die gesuchte Lösung.

Der Lösungsoperator $L := A^{-1} \circ \Phi^{-1}$ ist konjugiert linear (da Φ^{-1} konjugiert linear ist), und es ist

$$\|L\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\Phi^{-1}\| \leq 1/\alpha.$$

Schließlich ist u eindeutig durch f bestimmt. ■

Der folgende Satz beschreibt die dualen Räume für einige konkrete Banachräume. Zur Beschreibung des Dualraums von $X = C^0([a, b])$, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$, führen wir vorab einige Notationen ein.

Eine Funktion $v : [a, b] \to \mathbb{K}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}\,(v) := \\ &\qquad \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |v(t_k) - v(t_{k-1})| : n \in \mathbb{N},\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\} < \infty, \end{aligned}$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von $[a, b]$ gebildet wird. Die Menge $BV([a, b])$ der Funktionen beschränkter Variation wird zu einem Banachraum bzgl. der Norm $\|v\|_{BV} := |v(a)| + \mathrm{Var}\,(v)$. Für alle $u \in C^0([a, b])$ und $v \in BV([a, b])$ existiert das *Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_a^b u\,dv := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u(t_k)(v(t_k) - v(t_{k-1})) \quad \text{falls } \max_k |t_k - t_{k-1}| \to 0.$$

Schließlich stehe $BV_0([a, b])$ für den Raum aller Funktionen $v \in BV([a, b])$, die $v(a) = 0$ erfüllen und rechtsseitig stetig sind.

Satz 7.6 (*a*) *Sei $1 \leq p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Dann sind $(l^p)'$ und l^q als Banachräume zueinander isometrisch isomorph. Genauer: Die Abbildung*

$$J : l^q \to (l^p)', \quad J(y)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ist stetig, linear, bijektiv und eine Isometrie: $\|J(y)\|_{(l^p)'} = \|y\|_{l^q}$. Für $p = \infty$ ist $J : l^1 \to (l^\infty)'$ linear, stetig und injektiv, jedoch nicht surjektiv.

(*b*) *Sei $1 \leq p < \infty$ und q wie vorher, und sei μ ein σ-endliches Borel-Maß auf einer messbaren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, z.B. das Lebesgue-Maß λ_n. Dann sind mittels*

$$J : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))', \quad J(u)(f) := \int_\Omega f u \, d\mu$$

die Banachräume $L^q(\Omega)$ und $(L^p(\Omega))'$ zueinander isometrisch isomorph.

(c) Sei $X = C^0([a,b])$. Dann gibt es zu jedem $f \in X'$ genau ein $v \in BV_0([a,b])$, so dass

$$f(u) = \int_a^b u\, dv.$$

Für dieses v ist $\|v\|_{BV} = \|f\|_{X'}$.

(d) Allgemeiner sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f \in C^0(K)'$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes komplexes reguläres Borelmaß μ mit

$$f(u) = \int_K u\, d\mu,$$

und es ist $\|f\| = |\mu|(K)$ die Totalvariation von μ:

$$|\mu|(K) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| : K = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\},$$

wobei das Supremum über alle paarweise disjunkten Zerlegungen (E_i), $E_i \in \mathcal{B}_n$, von K genommen wird.

Beweis. Wir beweisen hier nur Aussage (a). Für die übrigen Aussagen sei auf die Bücher zur Funktionalanalysis von Alt, Rudin und Heuser verwiesen.

Zunächst sei $1 < p < \infty$ und $f \in (l^p)'$. Wir setzen $y_n := f(e_n)$, wobei $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots) \in l^p$ (mit der 1 an der $n$ten Stelle) und zeigen, dass $y := (y_n)$ in l^q liegt und $J(y) = f$ ist.

Dazu erklären wir die *komplexe Signumfunktion* durch $\operatorname{sgn} z := 0$ für $z = 0$ und $\operatorname{sgn} z := z/|z|$ für $z \neq 0$ und definieren $x = (x_n)$ durch $x_n := \operatorname{sgn}(\overline{y_n})|y_n|^{q-1}$. Für $N \in \mathbb{N}$ sei weiter

$$x^N := (x_1,\dots,x_N,0,\dots) \in l^p, \quad y^N := (y_1,\dots,y_N,0,\dots) \in l^q.$$

Dann gilt

$$\|x^N\|_p^p = \sum_{n=1}^N |x_n|^p = \sum_{n=1}^N |y_n|^{(q-1)p} = \|y^N\|_q^q.$$

Außerdem ist

$$f(x^N) = \sum_{n=1}^N x_n y_n = \sum_{n=1}^N |y_n|^q = \|y^N\|_q^q,$$
$$|f(x^N)| \leq \|f\|\|x^N\|_p = \|f\|\,\|y^N\|_q^{q/p},$$

woraus

$$\|y^N\|_q = \|y^N\|_q^{q(1-1/p)} \leq \|f\|$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ folgt. Im Grenzwert $N \to \infty$ erhält man $\|y\|_q \leq \|f\|$, also $y \in l^q$.

Ferner gilt für beliebiges $x \in l^p$ wegen $x^N \to x$ in l^p auch $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Damit erhält man $J(y) = f$ und sogar $\|y\|_q = \|f\|$, denn nach der Hölder-Ungleichung ist $|f(x)| = |J(y)(x)| \leq \|x\|_p\|y\|_q$. Damit ist die Behauptung für $p \in (1,\infty)$ gezeigt.

Für $p = 1$ folgt sofort $y \in l^\infty$ für $y_n = f(e_n)$. ■

7.2 Anwendungen von Satz 7.4

Gesucht ist eine Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} u - \Delta u = f &\text{ in } \Omega, \\ u = 0 &\text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (offen und zusammenhängend) ist.

Definition 7.7 *(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei $H_0^1(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$. Der Dualraum von $H_0^1(\Omega)$ bzgl. des L^2-Skalarprodukts $\langle .,. \rangle_2$ wird mit $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$ bezeichnet, die Operatornorm auf $H^{-1}(\Omega)$ mit $\|.\|_{-1,2}$.*
(b) Sei $f \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung *des Problems $(*)$, falls*

$$\langle u, \varphi \rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 = \langle f, \varphi \rangle_2$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Anmerkung 7.8 Sei $f \in C^0(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ die klassische Lösung des Problems $(*)$. Wir testen $(*)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, d.h. wir multiplizieren $(*)$ mit φ und integrieren über Ω. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle_2 &= \langle u, \varphi \rangle_2 + \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \, dx \\ &= \langle u, \varphi \rangle_2 + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \varphi \, d\sigma \\ &= \langle u, \varphi \rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \end{aligned}$$

da $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \varphi \, d\sigma = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Folglich ist

$$\langle f, \varphi \rangle_2 = \langle u, \varphi \rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Wegen $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{1,2}}$ sagt man, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ *Nullrandwerte* hat, also $u|_{\partial\Omega} = 0$ ist. Die Menge $\partial\Omega$ ist aber eine Lebesgue-Nullmenge, so dass die Funktion $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ nicht punktweise auswertbar ist und $u|_{\partial\Omega}$ streng genommen nicht definiert ist. Da wir aber $\nabla u \in L^2$ vorausgesetzt haben, ist obige Notation dennoch sinnvoll (ohne Beweis). ∎

Satz 7.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann besitzt das elliptische Randwertproblem $(*)$ für jedes $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Weiter gibt es eine Konstante $c = c(\Omega) > 0$ mit $\|u\|_{1,2} \leq c\|f\|_2$, und der Lösungsoperator $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, $f \mapsto u$, ist linear und stetig.*

Beweis. Für $f \in L^2(\Omega)$ und $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$|\langle f, \varphi\rangle_2| \leq \|f\|_2\|\varphi\|_2 \leq \|f\|_2\|\varphi\|_{1,2}.$$

Wir können $\langle f, .\rangle_2 \simeq f$ somit als Element von $H^{-1}(\Omega)$ betrachten mit $\|f\|_{-1,2} \leq \|f\|_2$. Wir definieren weiter eine Sesquilinearform a durch

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \langle u,v\rangle_{1,2} := \langle u,v\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_2.$$

Dann gilt mit der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_2\|v\|_2 + \|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 \leq \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2},$$

so dass a eine stetige Bilinearform ist. Außerdem ist

$$a(u,u) = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{1,2}^2,$$

die Form a ist also koerzitiv mit $\alpha = 1$.

Aus Folgerung 7.5 ergibt sich nun die Existenz einer eindeutig bestimmten Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_2 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Der Lösungsoperator L in Folgerung 7.5 hat die Norm $\|L\| \leq 1$, so dass $\|u\|_{1,2} \leq \|f\|_2$ gilt.

Zweiter Beweis zur Eindeutigkeit: Ohne Einschränkung sei $f = 0$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung. Dann gilt für $\varphi = u$

$$\|u\|_2^2 = \langle u,u\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla u\rangle_2 = 0,$$

also $u = 0$. ■

Beispiel: Verallgemeinerung von Satz 7.9. Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Weiter seien $h_j \in L^2(\Omega)$ mit $0 \leq j \leq n$, und sei $f \in H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$f(u) = \int_\Omega \Big(uh_0 + \sum_{j=1}^n (\partial_j u)h_j\Big)\,dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Dann ist

$$|f(u)| \leq \|u\|_2\|h_0\|_2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_2\|h_j\|_2 \leq \|u\|_{1,2}\left(\sum_{j=0}^n \|h_j\|_2^2\right)^{1/2} < \infty,$$

also $f \in H^{-1}(\Omega)$ (im letzten Schritt wurde die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^{n+1}$ benutzt). Somit existiert ein $v \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$f(u) = \langle u,v\rangle_{1,2} = \langle u,v\rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_2 \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

Damit ist $v \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$v - \Delta v = f \in H^{-1}(\Omega), \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Der Isomorphismus Φ im Rieszschen Darstellungssatz Satz 7.3 hängt also hier mit dem Lösen einer partiellen Differentialgleichung zusammen. ■

8 Der Satz von Hahn-Banach

Wir lernen in diesem Abschnitt verschiedene Varianten eines Satzes von Hahn und Banach kennen, der Aussagen zur Fortsetzbarkeit stetiger linearer Funktionale trifft und als das dritte der "Grundprinzipien der Funktionalanalysis" gilt.

Satz 8.1 *Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $Y \subseteq X$ ein linearer Unterraum. Dann besitzt jedes stetige lineare Funktional $f \in Y'$ eine Fortsetzung $\tilde{f} \in X'$ mit*

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Für $Y = X$ ist nichts zu zeigen.

Schritt 1: *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $y_1 \in X \setminus Y$. Wir zeigen, dass $f \in Y'$ eine Fortsetzung f_1 auf*

$$Y_1 := Y + \operatorname{span}\{y_1\} = \operatorname{span}\{Y, y_1\}$$

mit $\|f_1\| = \|f\|$ besitzt.

Ist $f_1 \in Y_1'$ eine Fortsetzung von f und $x = y + \alpha y_1$ mit $y \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt

$$f_1(x) = f_1(y) + \alpha f_1(y_1) = f(y) + \alpha c \quad \text{mit } c := f_1(y_1).$$

Wir suchen also ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\|f_1\| = \|f\|$. Für alle $y \in Y$ und alle $\alpha \neq 0$ soll also gelten, dass

$$|f(y) + \alpha c| = |f_1(x)| \leq \|f\| \, \|y + \alpha y_1\|.$$

Nach Division durch $|\alpha|$ ist dies äquivalent dazu, dass für alle $z = \frac{1}{\alpha} y \in Y$ gilt

$$|f(z) + c| \leq \|f\| \, \|z + y_1\|$$

bzw.

$$-\|f\| \, \|z + y_1\| - f(z) \leq c \leq \|f\| \, \|z + y_1\| - f(z).$$

Mit anderen Worten, für die Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &:= \sup_{z \in Y} \big(- \|f\| \, \|z + y_1\| - f(z) \big), \\ c_2 &:= \inf_{\tilde{z} \in Y} \big(\|f\| \, \|\tilde{z} + y_1\| - f(\tilde{z}) \big) \end{aligned}$$

muss $c_1 \leq c_2$ gelten, denn dann gibt es ein $c \in [c_1, c_2]$. Dies ist nun in der Tat erfüllt, da für alle $z, \tilde{z} \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{z}) - f(z) &\leq |f(\tilde{z} - z)| \\ &\leq \|f\| \, \|\tilde{z} - z\| \\ &\leq \|f\| \big(\|\tilde{z} + y_1\| + \|y_1 + z\| \big). \end{aligned}$$

Schritt 2: *Sei weiter $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und sei X separabel. Wir zeigen, dass dann jedes $f \in Y'$ eine Fortsetzung $\tilde{f} \in X'$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ besitzt.*

Wir können dazu o.E.d.A. annehmen, dass Y abgeschlossen ist. Ist die Kodimension von Y in X endlich, gibt es also endlich viele Vektoren $y_1, \ldots, y_n \in X \setminus Y$ mit $\operatorname{span}\{Y, y_1, \ldots, y_n\} = X$, so folgt die Behauptung unter n-maliger Anwendung von Schritt 1.

Sei also die Kodimension von Y in X unendlich, und sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine (abzählbare) dichte Teilmenge von X. Ferner seien $Y_1 := Y + \operatorname{span}\{x_1\}$, $Y_2 := Y_1 + \operatorname{span}\{x_2\}$, u.s.w. Man kann sich überlegen, dass die Räume Y_1, Y_2 abgeschlossen sind. (Man kann sich diese Überlegung auch sparen und statt mit Y_n mit der Abschließung von Y_n arbeiten.) Sollte einer der Räume Y_n mit seinem Nachfolger Y_{n+1} übereinstimmen, lassen wir Y_{n+1} weg. Wir erhalten dann eine streng wachsende Kette von Teilräumen von X

$$Y \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_2 \subsetneq \ldots \subseteq X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n},$$

Mit dem Resultat von Schritt 1 folgt:

$$\begin{aligned}
&\text{es gibt eine Fortsetzung } f_1 \in Y_1' \text{ von } f \text{ mit } \|f_1\| = \|f\|,\\
&\text{es gibt eine Fortsetzung } f_2 \in Y_2' \text{ von } f_1 \text{ mit } \|f_2\| = \|f_1\|,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Hieraus folgern wir, dass es ein stetiges lineares Funktional f_∞ auf $\cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ gibt, welches f fortsetzt und $\|f_\infty\| = \|f\|$ erfüllt: Ist $y \in \cup_n Y_n$, so gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $y \in Y_k$. Wir definieren $f_\infty(y) := f_k(y)$. Damit gilt

$$|f_\infty(y)| = |f_k(y)| \leq \|f_k\| \, \|y\| = \|f\| \, \|y\|,$$

also $\|f_\infty\| \leq \|f\|$. Man beachte, dass f_∞ wohldefiniert ist.

Da $\cup_n Y_n$ dicht in X liegt und $f_\infty \in (\cup_n Y_n)'$, gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf ganz X mit $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Schritt 3: *Wir zeigen die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und separables X.* Zuerst überlegen wir, wie sich $\mathbb{C}$-lineare Funktionale durch $\mathbb{R}$-lineare darstellen lassen. Sei $f \in X'$, also $\mathbb{C}$-linear. Dann sind $f_1 := \operatorname{Re} f$ und $f_2 := \operatorname{Im} f$ stetige $\mathbb{R}$-lineare Funktionale auf X, die man auch als stetige lineare Funktionale auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $X_\mathbb{R} := X$ auffassen kann.

Umgekehrt steht man oft vor der Aufgabe, zu einem gegebenen $\mathbb{R}$-linearen Funktional f_1 auf $X_\mathbb{R}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional f auf X mit $\operatorname{Re} f = f_1$ zu finden. Wenn es ein solches gibt, muss $f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$ und $f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x)$, also $f_1(ix) = -f_2(x)$ für alle $x \in X$ gelten. Das gesuchte f hat also zwingend die Gestalt

$$f(x) := f_1(x) - if_1(ix), \quad x \in X.$$

Wir zeigen, dass das so definierte Funktional f tatsächlich $\mathbb{C}$-linear ist. Sei $\alpha = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. Dann ist für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f_1(\alpha x) - i f_1(i\alpha x) \\
&= f_1((u+iv)x) - i f_1(i(u+iv)x) \\
&= f_1(ux + ivx) - i f_1(-vx + iux) \\
&= u f_1(x) + v f_1(ix) + iv f_1(x) - iu f_1(ix) \qquad (\mathbb{R}\text{-Linearität von } f_1) \\
&= (u+iv) f_1(x) - i(u+iv) f_1(ix) \\
&= (u+iv) f(x) = \alpha f(x).
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorüberlegungen zeigen wir nun: *Gilt der Satz von Hahn-Banach für $\mathbb{R}$-Vektorräume, so gilt er auch für $\mathbb{C}$-Vektorräume.*

Dazu sei $f \in Y'$, $f = f_1 + i f_2$ mit $f_1, f_2 \in Y'_{\mathbb{R}}$. Dann existiert eine Fortsetzung $g_1 \in X'_{\mathbb{R}}$ von f_1 mit $\|g_1\| = \|f_1\|$. Wir definieren eine Fortsetzung $g \in X'$ von f durch $g(x) := g_1(x) - i g_1(ix)$. Dann ist $g|_Y = f$, und g ist $\mathbb{C}$-linear auf X.

Zur Normabschätzung: Sei $x \in X$ und $g(x) = \rho e^{i\alpha}$ mit $\rho = |g(x)|$. Dann ist $g(e^{-i\alpha}x) = \rho \in \mathbb{R}$ und somit $g(e^{-i\alpha}x) = g_1(e^{-i\alpha}x)$. Weiter gilt

$$|g(x)| = |e^{-i\alpha} g(x)| = |g(e^{-i\alpha}x)| = |g_1(e^{-i\alpha}x)| \le \|g_1\| \, \|e^{-i\alpha}x\| = \|f_1\| \, \|x\|$$

und damit $\|g\| \le \|f_1\| \le \|f\|$. Da g das Funktional f fortsetzt, gilt sogar $\|g\| = \|f\|$. ∎

Bisher wurde der Beweis unter der Annahme geführt, dass X separabel ist. Im folgenden Beispiel wird ein nicht-separabler Raum und ein Teilraum dessen betrachtet, in dem es nicht ersichtlich ist, wie eine Fortsetzung konkret aussieht.

Beispiel 8.2 Sei $X = l^\infty$ und $Y = c$, der Raum aller konvergenten Folgen. Dann ist Y abgeschlossen in X. Das durch $f(y) = \lim_{n\to\infty} y_n$ definierte Funktional $f : Y \to \mathbb{R}$ ist wegen $|f(y)| \le \|y\|_\infty$ stetig. Es liegt also in Y' und hat die Norm 1. Nach Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $X = l^\infty$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$. ∎

Um den Satz von Hahn-Banach für nicht-separable Räume zu beweisen, benötigen wir das *Zorn'sche Lemma*, welches zum *Auswahlaxiom* äquivalent ist. (Der Beweis des Satzes von Hahn-Banach für allgemeine Banachräume ist also nicht konstruktiv.)

Satz 8.3 (Zorn'sches Lemma) *Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine partiell geordnete Menge, d.h. es gibt eine Relation $<$ auf $\mathcal{M}$, so dass für alle $x, y, z \in \mathcal{M}$ gilt:*

- *$x < x$ (Reflexivität),*
- *aus $x < y$ und $y < x$ folgt $y = x$ (Antisymmetrie),*
- *aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).*

Ferne besitze jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, d.h. für alle $x, y \in \mathcal{N}$ gilt

$x < y$ oder $y < x$, eine obere Schranke *$m \in \mathcal{M}$, d.h. für alle $x \in \mathcal{N}$ gilt $x < m$. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein* maximales Element *$z \in \mathcal{M}$, d.h. aus $z < x$ für ein $x \in \mathcal{M}$ folgt bereits $z = x$.*

(Man beachte: $\mathcal{M}$ muss *nicht* total geordnet sein, d.h. es kann Elemente $x \neq y$ in $\mathcal{M}$ geben, für die weder $x < y$ noch $y < x$ ist.)

Beispiel 8.4 Das Zornsche Lemma macht das Leben von MathematikerInnen leichter – sofern man daran glaubt. Als eine Anwendung wollen wir mit seiner Hilfe zeigen, dass jeder Vektorraum X eine *algebraische Basis* oder *Hamel-Basis* besitzt, d.h., es gibt eine Menge $B \subset X$, so dass je endlich viele Elemente aus B linear unabhängig sind und dass sich jedes $x \in X$ als Linearkombination von endlich vielen (!) Elementen aus B schreiben lässt.
Dazu sei

$$\mathcal{M} := \{M \subset X : M \text{ ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus } X\}.$$

Die Menge $\mathcal{M}$ ist partiell geordnet bzgl. der Relation $M < N \Longleftrightarrow M \subseteq N$.

Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ total geordnet. Dann ist $N_\infty := \cup_{N \in \mathcal{N}} N \in \mathcal{M}$ eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Das Lemma von Zorn impliziert nun, dass $\mathcal{M}$ ein maximales Element $M \in \mathcal{M}$ besitzt. Dieses M ist eine algebraische Basis von X. Wäre sie es nicht, so gäbe es ein $x \in X$, welches nicht in der linearen Hülle von M liegt. Dann folgt $M < N$ für $N = M \cup \{x\} \in \mathcal{M}$, was der Definition eines maximalen Elements widerspricht.
Man kann mit dem Zornschen Lemma auch zeigen, dass jeder lineare Teilraum Y eines Vektorraumes X ein direktes algebraisches Komplement besitzt. Die Schwierigkeiten mit dem topologischen Komplement hängen also damit zusammen, dass man dort nur *abgeschlossene* Teilräume betrachtet.

Schließlich sei noch vermerkt, dass das Zornsche Lemma auch einige kuriose und unglaubliche Konsequenzen hat – denken Sie an das Banach-Tarski Paradox, das wir zu Beginn der Analysis IV kurz angerissen hatten. ■

Wir können nun den Beweis von Satz 8.1 abschliessen.

Schritt 4: *Wir zeigen die Aussage für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und beliebiges X.* Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, Y ein Unterraum von X und $f \in Y'$. Wir betrachten die Menge $\mathcal{M}$ aller Fortsetzungen f_Z von f auf einen Unterraum Z von X mit $\|f_Z\| = \|f\|$. Offenbar ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Durch

$$f_{Z_1} < f_{Z_2} \Longleftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2 \text{ und } f_{Z_2}|_{Z_1} = f_{Z_1}$$

wird auf $\mathcal{M}$ eine partielle Ordnung definiert.

Um das Lemma von Zorn anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass jede total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$ eine obere Schranke besitzt. Sei also $\mathcal{N} =$

$\{f_{Z_\alpha} : \alpha \in A\}$ (mit einer Indexmenge A) eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$. Wir definieren

$$Z := \bigcup_{\alpha \in A} Z_\alpha \quad \text{und} \quad f_Z(x) := f_{Z_\alpha}(x) \text{ falls } x \in Z_\alpha \subset Z.$$

Da $\mathcal{N}$ total geordnet ist, ist Z ein Unterraum von X und f_Z ist wohldefiniert, linear und daher in $\mathcal{M}$. Somit ist f_Z ist eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Da $\mathcal{N}$ beliebig war, liefert das Lemma von Zorn ein maximales Element $\tilde{f} := f_Z \in \mathcal{M}$ für ein $Z \subset X$.

Wir zeigen, dass $Z = X$. Angenommen, $Z \subsetneq X$. Dann existiert ein $f_0 \in \mathcal{M}$ mit $\tilde{f} < f_0$, was jedoch der Tatsache widerspricht, dass $\tilde{f}$ maximal ist. Daher ist $\tilde{f}$ die gesuchte Fortsetzung auf X. ∎

Folgerung 8.5 *Sei X ein normierter Vektorraum, Y ein Unterraum von X mit $\overline{Y} \neq X$ und $x \in X \setminus \overline{Y}$. Dann gibt es ein $f \in X'$ mit $f|_Y = 0$, $\|f\| = 1$ sowie $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Beweis. Sei $d := \operatorname{dist}(x, Y)$. Wir definieren ein Funktional auf $Y_0 := Y + \operatorname{span}\{x\}$ durch $f(y + \alpha x) := \alpha d$ (mit $y \in Y$ und $\alpha \in \mathbb{K}$). Dann ist $f|_Y = 0$, $f(x) = d$, und f ist linear. Da für alle $\alpha \neq 0$ nach Definition von d gilt

$$|f(y + \alpha x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| \frac{1}{\alpha} y + x \right\| = \|y + \alpha x\|$$

und da die Abschätzung $|f(y + \alpha x)| \leq \|y + \alpha x\|$ offenbar auch für $\alpha = 0$ richtig ist, folgt

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(y + \alpha x)|}{\|y + \alpha x\|} : 0 \neq y + \alpha x \in Y_0 \right\} \leq 1.$$

Somit ist $f \in Y_0'$ und $\|f\| \leq 1$. Wir zeigen noch, dass $\|f\| \geq 1$.

Nach Definition von d gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in Y$ mit $\|x - y_\varepsilon\| \leq (1+\varepsilon)d$. Für dieses ist $|f(x - y_\varepsilon)| = d \geq \frac{\|x - y_\varepsilon\|}{1+\varepsilon}$, also $\|f\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert $\|f\| \geq 1$.

Nach Hahn-Banach existiert nun eine Fortsetzung von f von Y_0 auf X, die obige Eigenschaften erhält. ∎

Folgerung 8.6 *Zu jedem $x \in X \setminus \{0\}$ gibt es ein $f \in X'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|$. Insbesondere gibt es zu $x_1 \neq x_2 \in X$ ein $f \in X'$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ (die stetigen linearen Funktionale auf X trennen also die Punkte von X).*

Beweis. Für die erste Aussage wählt man $Y := \{0\}$ und benutzt Folgerung 8.5 für Y und x. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit $x := x_1 - x_2 \neq 0$. ∎

Folgerung 8.7 *Ein Vektorraum $Y \subset X$ ist genau dann dicht in X, wenn für alle $f \in X'$ mit $f|_Y = 0$ auch $f = 0$ folgt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Für die Hinlänglichkeit nehmen wir $\overline{Y} \neq X$ an. Dann existiert ein $x \in X \setminus \overline{Y}$. Nach Folgerung 8.5 existiert ein $f \in X'$ mit $f|_Y = 0$ und $\|f\| = 1$. Dann gilt aber $f \neq 0$. ∎

Satz 8.8 *Ist der Dualraum X' von X separabel, so ist auch X separabel.*

Beweis. Sei $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von X'. Zu jedem f_n gibt es ein $x_n \in X$, so dass

$$|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\| \quad \text{und} \quad \|x_n\| = 1.$$

Wir zeigen, dass die Menge $Y := \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Dazu sei $f \in X'$ mit $f|_Y = 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - f\| \geq |(f_n - f)(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|.$$

Sei (f_{n_m}) eine Teilfolge von (f_n), die in der Operatornorm gegen f konvergiert. Wegen

$$\frac{1}{2}\|f_{n_m}\| \leq \|f_{n_m} - f\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty$$

konvergiert (f_{n_m}) gegen 0. Also ist $f = 0$, und mit Folgerung 8.7 erhalten wir $\overline{Y} = X$.

Wir betrachten nun alle endlichen Linearkombinationen der x_n mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ bzw. in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Diese bilden eine abzählbare dichte Teilmenge von X, und X ist separabel. ∎

Folgerung 8.9 *Der Raum l^1 ist nicht isomorph zu $(l^\infty)'$, und $L^1(\Omega)$ ist nicht isomorph zu $(L^\infty(\Omega))'$.*

Beweis. Angenommen, l^1 wäre isomorph zu $(l^\infty)'$. Da l^1 separabel ist, wäre dann $(l^\infty)'$ separabel und nach Satz 8.8 auch l^∞. Jedoch ist l^∞ nicht separabel. Die Aussage für $L^1(\Omega)$ und $(L^\infty(\Omega))'$ folgt analog. ∎

Satz 8.10 (Erweiterung des Satzes von Hahn-Banach) *Sei X ein reeller Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ genüge für alle $x, y \in X$ und $\alpha \geq 0$ den Bedingungen*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \textit{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Ist $Y \subset X$ ein Unterraum und $f : Y \to \mathbb{R}$ eine (nicht notwendig stetige) lineare Funktion mit $f(y) \leq p(y)$ für alle $y \in Y$, so besitzt f eine lineare Fortsetzung $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} \leq p$ auf X.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 8.1. Die Fortsetzungsbedingung von Y auf $Y \oplus \operatorname{span}\{y_1\}$ lautet jetzt

$$\sup_{y \in Y}(-p(-y - y_1) - f(y)) \leq \inf_{\tilde{y} \in Y}\big(p(\tilde{y} + y_1) - f(\tilde{y})\big).$$

Diese Bedingung ist aufgrund der Voraussetzungen erfüllt:

$$f(\tilde{y}) - f(y) = f(\tilde{y} - y) \leq p(\tilde{y} - y) \leq p(\tilde{y} + y_1) + p(-y - y_1).$$

Die Ausarbeitung der Details verbleibt als Übungsaufgabe. ■

Folgerung 8.11 (Trennungssatz) *Sei X ein normierter Raum, M eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von X und $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $f \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass* $\operatorname{Re} f(x_0) > \alpha$ *und* $\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha$ *für alle $x \in M$.*

Beweis. Sei zuerst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und o.E.d.A. $0 \in M$. Wegen $\operatorname{dist}(x_0, M) > 0$ finden wir ein r mit $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, M)$ und definieren damit

$$M_r := \overline{B_r(M)} = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, M) \leq r\}.$$

Dann liegt x_0 nicht in M_r, und 0 ist ein innerer Punkt von M_r mit $\overline{B_r(0)} \subseteq M_r$.

Wir definieren das sogenannte *Minkowski-Funktional* $p = p_{M_r}$ auf X durch

$$p(x) := \inf\left\{s > 0 : \frac{x}{s} \in M_r\right\}, \quad x \in X.$$

Da 0 im Inneren von M_r liegt, ist $0 \leq p(x) < \infty$ für alle $x \in X$. Außerdem gilt $p(x) \leq 1$ für alle $x \in M_r$, und wegen $0 < r < \operatorname{dist}(x_0, M)$ ist $p(x_0) > 1$.

Weiter erfüllt p für alle $x \in X$ und $\alpha \geq 0$ die Gleichung $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, denn $\frac{x}{s} \in M_r \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha s} \in M_r$. Schließlich ist p auch *subadditiv*, d.h. es gilt $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. Sind nämlich $\frac{x}{s}$ und $\frac{y}{t}$ in M_r, so ist auch $\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t} \in M_r$, da M und somit auch M_r konvex ist.

Auf $\operatorname{span}\{x_0\}$ definieren wir das Funktional $f(\beta x_0) := \beta p(x_0)$ für alle $\beta \in \mathbb{R}$. Dann ist f linear, und wegen $f(\beta x_0) = \beta p(x_0) = p(\beta x_0)$ für $\beta \geq 0$ und $f(\beta x_0) = \beta p(x_0) \leq 0 \leq p(\beta x_0)$ für $\beta < 0$ gilt $f \leq p$ auf $\operatorname{span}\{x_0\}$. Nach der Erweiterung des Satzes von Hahn-Banach (Satz 8.10) besitzt f eine lineare Fortsetzung $\tilde{f}$ auf X mit $\tilde{f} \leq p$ auf X. Für $x \in M$ gilt dann $\tilde{f}(x) \leq p(x) \leq 1$, und für $x = x_0$ gilt $\tilde{f}(x_0) = p(x_0) > 1$. Die Behauptung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt also mit $\alpha = 1$, sobald wir gezeigt haben, dass $\tilde{f}$ stetig ist. Dies kann wie folgt geschehen.

Für $x \in X$ gilt $r\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B_r(0)} \subseteq M_r$ und somit $p(\pm x) \leq \frac{\|x\|}{r}$. Dies impliziert

$$\pm\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\pm x) \leq \max\{p(-x), p(x)\} \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

Folglich ist $|\tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{r}\|x\|$ und daher $\|\tilde{f}\| \leq r^{-1}$; $\tilde{f}$ ist also stetig.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so erhält man ein stetiges lineares Funktional $f_1 \in X'_{\mathbb{R}}$ auf X (aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum), welches die Behauptung erfüllt. Definiert man $\tilde{f}(x) := f_1(x) - if_1(ix)$, so gilt $\tilde{f} \in X'$ (siehe Schritt 3 des Beweises des Satzes von Hahn-Banach). Wegen $\operatorname{Re}(\tilde{f}) = f_1$ ist nun die Behauptung gezeigt. ■

9 Kompaktheit

In diesem Abschnitt studieren wir verschiedene Kompaktheitsbegriffe und geben Kriterien für die Kompaktheit in konkreten Banachräumen an.

Definition 9.1 *Ein topologischer Raum (X, τ) heißt*

(a) (überdeckungs-)kompakt, *falls es zu jeder Überdeckung von X durch offene Mengen (d.h. für eine Teilmenge $\tau' \subseteq \tau$ ist $X = \cup_{U \in \tau'} U$) eine endliche Teilüberdeckung gibt (d.h. für eine* endliche *Teilmenge $\tau'' \subseteq \tau'$ ist bereits $X = \cup_{U \in \tau''} U$).*

(b) häufungspunktkompakt, *falls jede unendliche Teilmenge M von X einen Häufungspunkt in X besitzt, d.h. einen Punkt $x \in X$, so dass $(U \cap M) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x.*

(c) folgenkompakt, *wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge enthält.*

(d) *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* totalbeschränkt (oder präkompakt), *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Kugeln $B_\varepsilon(x_i)$ $(x_i \in X,\ 1 \leq i \leq N)$ gibt mit $X \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$.*

Satz 9.2 *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Hausdorffräume. Dann gilt:*

(a) *Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.*

(b) *Ist X kompakt und $M \subseteq X$ abgeschlossen, so ist M ist kompakt.*

(c) *Jede kompakte Teilmenge von X ist abgeschlossen.*

Der Beweis ist einfach (Übung). Nur für (c) benötigt man das Hausdorffsche Trennungsaxiom. ■

Satz 9.3 *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

(a) *X ist kompakt,*

(b) *X ist häufungspunktkompakt,*

(c) *X ist folgenkompakt,*

(d) *X ist totalbeschränkt und vollständig.*

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei $M \subseteq X$ eine unendliche Teilmenge von X. Hat M keinen Häufungspunkt in X, gibt es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x von x so, dass der Schnitt $U_x \cap M$ endlich ist. Offenbar ist $X = \cup_{x \in X} U_x$. Da X kompakt ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_N \in X$ mit $X = \cup_{i=1}^N U_{x_i}$. Dann enthält M aber nur endlich viele Elemente im Widerspruch zur Annahme. (Man beachte, dass die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ in beliebigen topologischen Räumen gilt.)

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei X häufungspunktkompakt und (x_n) eine Folge in X. Nimmt diese Folge nur endlich viele verschiedene Werte an, so sind wir fertig. Sei also $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich. Nach Voraussetzung besitzt M einen Häufungspunkt $\bar{x} \in X$. Wird der Wert $\bar{x}$ unendlich oft von der Folge angenommen, so hat (x_n) offenbar eine gegen $\bar{x}$ konvergente Teilfolge. Falls $\bar{x}$ nicht unendlich oft in der Folge (x_n)

vorkommt, so wählen wir zu $r_1 = 1$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass x_{n_1} in $B_1(\bar{x})\setminus\{\bar{x}\}$ liegt. Als nächstes wählen wir $n_2 > n_1$ mit $x_{n_2} \in B_{r_2}(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ und $r_2 := d(\bar{x}, x_{n_1})/2$. Setzt man dies induktiv fort, erhält man eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen $\bar{x}$ konvergiert.

$(c) \Rightarrow (d)$: Sei X folgenkompakt. Angenommen, X wäre nicht totalbeschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass man eine Folge (x_n) in X mit $x_{n+1} \in X \setminus \cup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ findet. Für je zwei Folgenglieder x_n und x_m mit $n \neq m$ gilt $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Folglich besitzt die Folge (x_n) keine konvergente Teilfolge – im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir zeigen die Vollständigkeit von X. Sei (x_n) eine Cauchyfolge in X. Nach Voraussetzung hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $x \in X$. Da (x_n) eine Cauchyfolge ist, konvergiert auch (x_n) gegen x, woraus die Vollständigkeit von X folgt.

$(d) \Rightarrow (a)$: Sei nun X totalbeschränkt und vollständig. Weiter sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X. Angenommen, es lässt sich dazu keine endliche Teilüberdeckung von X finden.

Nach Voraussetzung gibt es zum Radius 1 Punkte $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $X \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_1(x_i)$. Könnte man jede der Mengen $\overline{B_1(x_i)}$ durch endlich viele der U_α üderdecken, dann auch ganz X, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Es gibt daher ein $y_1 := x_i \in X$ so, dass $X_1 := \overline{B_1(y_1)}$ sich nicht durch endlich viele der U_α überdecken lässt. Da mit X auch X_1 totalbeschränkt ist, gibt es $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n'}$ mit $X_1 \subset \cup_{i=1}^{n'} B_{1/2}(\tilde{x}_i)$. Wie oben existiert ein $y_2 := \tilde{x}_i \in X$ so, dass sich $X_2 := \overline{B_1(y_1)} \cap \overline{B_{1/2}(y_2)} \neq \emptyset$ nicht durch endlich viele der U_α überdecken lässt.

Induktiv erhält man abgeschlossene Mengen $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ mit den Eigenschaften $\operatorname{diam}(X_n) \to 0$ und $X_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem Cantorscher Durchschnittssatz (Lemma 5.1) folgt $\cap_{n=1}^{\infty} X_n = \{x\}$ für ein $x \in X$, welches dann der Grenzwert der Folge (y_n) sein muss.

Da $x \in X$ ist, gibt es ein $\alpha \in A$ mit $x \in U_\alpha$. Da U_α offen ist, gilt $X_n \subset U_\alpha$ für ein $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Annahme, dass sich X_n nicht durch endlich viele der U_α überdecken lässt. Also muss X kompakt sein. ∎

Folgerung 9.4 *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann A totalbeschränkt, wenn $\bar{A}$ kompakt ist.*

Beweis. Ist $\bar{A}$ kompakt, so folgt aus Satz 9.3, dass $\overline{A}$ totalbeschränkt ist; dann ist aber auch A totalbeschränkt.

Ist umgekehrt A totalbeschränkt, ist auch $\bar{A}$ totalbeschränkt. Da $\bar{A}$ abgeschlossen und X vollständig ist, ist auch $\bar{A}$ vollständig. Zusammen folgt mit Satz 9.3, dass $\bar{A}$ kompakt ist. ∎

Satz 9.5 (Rieszsches Lemma) *Ist Y ein abgeschlossener echter Unterraum eines normierten Raumes X, so gibt es zu jedem $\eta \in (0, 1)$ einen Vektor*

$$x_\eta \in X \setminus Y \textit{ mit } \|x_\eta\| = 1 \textit{ und } \|x_\eta - y\| \geq \eta \textit{ für alle } y \in Y.$$

Das Lemma von Riesz ist eine Verallgemeinerung der in Hilberträumen H gültigen Aussage, dass es zu jedem echten Unterraum $M \subset H$ ein $m'(\in M^{\perp})$ gibt mit $\|m'\| = 1$ und $\|m' - m\| \geq 1$ für alle $m \in M$. Das Lemma von Riesz wird daher auch oft als *Lemma von der Fast-Senkrechten* bezeichnet.

Beweis. Sei $x \in X \setminus Y$. Da Y abgeschlossen ist, ist

$$d := \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} > 0.$$

Nach Definition von d gibt es zu jedem $\eta \in (0,1)$ ein $z \in Y$ mit $0 < \|x-z\| < d/\eta$. Für $x_\eta := \frac{x-z}{\|x-z\|}$ gilt $\|x_\eta\| = 1$ sowie $x_\eta \notin Y$ (da $x \notin Y$), und es ist

$$\|x_\eta - y\| = \frac{1}{\|x-z\|} \big\| x - (z + \|x - z\| y) \big\| \geq \frac{d}{\|x-z\|} > \eta$$

für alle $y \in Y$. ■

Das folgende Lemma beschreibt die kompakten Teilmengen endlich-dimensionaler normierter Räume.

Lemma 9.6 (a) *Sei X ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf X äquivalent, und es gilt der* Satz von Heine-Borel*: Eine Teilmenge von X ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*
(b) *Jeder endlich-dimensionale Unterraum eines normierten Vektorraumes ist vollständig und folglich abgeschlossen.*

Beweis. (a) Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von X. Die Abbildung

$$\Phi : X \to \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

ist offenbar linear und bijektiv. Weiter: ist $\|.\|_X$ eine Norm auf X, so definiert

$$\|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\| := \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_X$$

eine Norm auf $\mathbb{K}^n$, wobei gilt $\|\Phi(x)\| = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ und $\|\Phi^{-1}(\alpha)\|_X = \|\alpha\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}^n$. Somit sind Φ und Φ^{-1} stetig (und sogar isometrisch). Da auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind (Analysis 2), sind auch alle Normen auf X äquivalent.

Offensichtlich bilden Φ und Φ^{-1} offene/ abgeschlossene/ kompakte bzw. beschränkte Mengen in X auf ebensolche Mengen in Y ab. Da der Satz von Heine-Borel in $\mathbb{K}^n$ gilt (Ana II), gilt er auch in X.

(b) Sei $Y \subseteq X$ ein endlich-dimensionaler Teilraum. Mit dem Isomorphismus $\Phi : Y \to \mathbb{K}^n$ aus (a) folgt die Vollständigkeit von Y aus der von $\mathbb{K}^n$. ■

Satz 9.7 *Sei X ein normierter Raum. Dann ist $\overline{B_1(0)}$ genau dann kompakt bzgl. der Normtopologie, wenn X endlich-dimensional ist. Insbesondere gilt der Überdeckungssatz von Heine-Borel* nur *in endlich-dimensionalen Räumen.*

Beweis. Sei $\dim X = \infty$ und $\eta \in (0,1)$. Wir wählen $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$. Mit Lemma 9.6 folgt, dass $Y_1 := \operatorname{span}\{x_0\}$ abgeschlossen ist. Da $\dim X = \infty$ ist, gilt $Y_1 \subsetneq X$. Nach dem Lemma von Riesz gibt es dann ein $x_1 \in X \setminus Y_1$ mit $\|x_1\| = 1$ so, dass für alle $y_1 \in Y_1$ außerdem $\|x_1 - y_1\| \geq \eta$ gilt.

Induktiv erhalten wir die Existenz einer Folge (x_n) in X mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_k\| \geq \eta$ für alle $0 < k < n$. Also besitzt (x_n) keine konvergente Teilfolge. Da aber $x_n \in \overline{B_1(0)}$, folgt mit Satz 9.3, dass $\overline{B_1(0)}$ nicht kompakt ist. ∎

Wir kommen nun zu Kriterien für die Kompaktheit von Teilmengen einiger wichtiger Funktionenräume und beginnen mit Räumen stetiger Funktionen. Für diese kennen wir das angestrebte Kriterium als *Satz von Arzelà-Ascoli* aus der Vorlesung zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen (wo wir es zum Beweis des Satzes von Peano benutzt haben). Wir lernen nun eine etwas allgemeinere Version dieses Satzes kennen.

Der Beweis des folgenden einfachen Lemmas verbleibt als Übungsaufgabe.

Lemma 9.8 *Seien X, Y Banachräume und $K \subset X$ kompakt. Dann ist der Menge $C^0(K,Y)$ aller stetigen Funktionen $f : K \to Y$, versehen mit punktweise definierten Operationen und mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} \|f(x)\|_Y$, ein Banachraum.*

Satz 9.9 (Satz von Arzelà-Ascoli) *Seien X, Y Banachräume und $K \subset X$ kompakt. Eine Teilmenge $M \subset C^0(K,Y)$ ist genau dann totalbeschränkt (= relativ kompakt), wenn sie folgende zwei Eigenschaften besitzt:*
(a) M ist punktweise gleichgradig stetig, *d.h. für jedes $x \in K$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta_{\varepsilon,x} > 0$ so, dass*

$$\|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon \quad \forall x' \in B_\delta(x) \cap K \text{ und } \forall f \in M,$$

(b) M ist punktweise totalbeschränkt, *d.h. für jedes $x \in K$ ist $M_x := \{f(x) : f \in M\}$ totalbeschränkt in Y.*

Beweis. Dass aus der Totalbeschränktheit von M die Eigenschaften (a) und (b) folgen, sollen Sie in der Übung zeigen.

Sei nun M punktweise gleichgradig stetig und M_x totalbeschränkt für alle $x \in K$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es für jedes $x \in K$ ein $\delta_x > 0$, so dass für alle $x' \in B_{\delta_x}(x) \cap K$ die Ungleichung $\|f(x) - f(x')\|_Y < \varepsilon/3$ für alle $f \in M$ folgt. Da $K \subseteq \cup_{x\in K} B_{\delta_x}(x)$ und K kompakt ist, gilt $K \subset \cup_{i=1}^N B_{\delta_i}(x_i)$ mit $\delta_i := \delta_{x_i}$ für gewisse Punkte $x_1, \ldots, x_N \in K$.

Ferner impliziert die Totalbeschränktheit der Mengen M_{x_i}, dass auch $\cup_{i=1}^N M_{x_i}$ totalbeschränkt in Y ist. Somit existieren $y_1, \ldots, y_L \in Y$, so dass

$$\cup_{i=1}^N M_{x_i} \subset \cup_{l=1}^L B_{\varepsilon/6}(y_l) \subset Y.$$

Für $1 \leq j_1, \ldots, j_N \leq L$ betrachten wir die Teilmengen

$$M_{j_1,\ldots,j_N} := \big\{f \in M : f(x_1) \in B_{\varepsilon/6}(y_{j_1}), \ldots, f(x_N) \in B_{\varepsilon/6}(y_{j_N})\big\}.$$

Es gibt L^N (also endlich viele) solcher Teilmengen, und nach Konstruktion der Mengen $M_{j_1,\ldots,j_N}$ wird M durch Mengen diesen Typs überdeckt. Wir zeigen, dass jede der Mengen $M_{j_1,\ldots,j_N}$ in einer Kugel vom Radius ε liegt.

Für $f, g \in M_{j_1,\ldots,j_N}$ gilt: Zu $x \in K$ gibt es ein x_i mit $x \in B_{\delta_i}(x_i)$ und $f(x_i), g(x_i) \in B_{\varepsilon/6}(y_{j_i})$, so dass

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \underbrace{\|f(x) - f(x_i)\|}_{<\varepsilon/3, \text{ falls } \|x - x_i\| < \delta_i} + \underbrace{\|f(x_i) - g(x_i)\|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|g(x_i) - g(x)\|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon,$$

wobei sich die zweite Abschätzung aus

$$\|f(x_i) - g(x_i)\| \leq \|f(x_i) - y_{j_i}\| + \|y_{j_i} - g(x_i)\| < \varepsilon/6 + \varepsilon/6$$

ergibt. Folglich erhalten wir $M_{j_1,\ldots,j_N} \subseteq B_\varepsilon(f_{j_1,\ldots,j_N})$ für ein $f_{j_1,\ldots,j_N} \in M$. Somit ist M totalbeschränkt. ■

Zum Abschluß dieses Kapitels beweisen wir eine Charakterisierung der Totalbeschränktheit von Teilmengen von L^p, wobei wir den Satz von Arzelà-Ascoli 9.9 benutzen. Im Beweis bezeichne B_R immer eine Kugel im $\mathbb{R}^n$ um 0 mit Radius $R > 0$.

Satz 9.10 (Satz von Riesz, Fréchet, Kolmogorov) *Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Eine Teilmenge $M \subset L^p(\Omega)$ genau dann totalbeschränkt, wenn*

(a) $\sup_{f \in M} \|f\|_p < \infty$,

(b) $\sup_{f \in M} \|f(\cdot + h) - f\|_p \to 0$ *für* $|h| \to 0$, *und*

(c) $\sup_{f \in M} \|f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R}\|_p \to 0$ *für* $R \to \infty$.

Dabei wird jedes $f \in L^p(\Omega)$ als durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt betrachtet.

Beweis. Sei zunächst M totalbeschränkt. Dann existiert eine endliche Menge $M' \subseteq M$ mit $M \subseteq \cup_{g \in M'} B_1(g)$. Zu beliebigem $f \in M$ existiert also ein $g \in M'$ mit $\|f - g\|_p < 1$. Somit ist

$$\|f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g\|_p \leq 1 + \max\{\|g\|_p : g \in M'\},$$

und folglich ist M in L^p beschränkt (Bedingung (a)).

Wir zeigen nun die gleichmäßige Stetigkeit von M im L^p-Mittel (Bedingung (b)). Sei hierzu $\varepsilon > 0$ und $M' \subseteq M$ endlich mit $M \subseteq \cup_{g\in M'} B_{\varepsilon/3}(g)$ gewählt. Da alle $g \in M'$ im L^p-Mittel stetig sind, existiert ein $h_0 > 0$, so dass für alle $0 < |h| < h_0$ und $g \in M'$ die Abschätzung $\|g(\cdot + h) - g\|_p < \varepsilon/3$ gilt. Wieder existiert nun zu beliebigem $f \in M$ ein $g \in M'$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$, so dass für $|h| < h_0$

$$\begin{aligned} \|f(\cdot + h) - f\|_p &\leq \|f(\cdot + h) - g(\cdot + h)\|_p + \|g(\cdot + h) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &= \|f - g\|_p + \|g(\cdot + h) - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es verbleibt, Bedingung (c) zu zeigen. Sei dazu wieder $\varepsilon > 0$ und $M' \subseteq M$ endlich mit $M \subseteq \cup_{g\in M'} B_{\varepsilon/2}(g)$. Da jedes $g \in M'$ eine L^p-Funktion ist, existiert ein $R_0 > 0$, so dass $\|g \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}\|_p < \varepsilon/2$ für alle $R > R_0$ und alle $g \in M'$ gilt. Zu beliebigem $f \in M$ existiert ein $g \in M'$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$, und es folgt

$$\begin{aligned} \|f \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}\|_p &\leq \|f \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} - g \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}\|_p + \|g \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g \cdot \chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass aus den Eigenschaften (a) – (c) die Totalbeschränktheit von M folgt. Sei $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein Friedrichs'scher Mollifier mit $\operatorname{supp} \varrho \subseteq B_1(0)$ und $\int \varrho = 1$. Sei weiterhin $\varrho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varrho(\frac{x}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$, so dass $\operatorname{supp} \varrho_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$ und $\int \varrho_\varepsilon = 1$ folgen.

Wir definieren für jedes $\varepsilon > 0$ einen Operator T_ε durch

$$T_\varepsilon f := \varrho_\varepsilon * (f \cdot \chi_{B_{1/\varepsilon}}), \quad f \in M.$$

Dann ist $\operatorname{supp}(T_\varepsilon f) \subseteq \overline{B_{\varepsilon+1/\varepsilon}}$ und $T_\varepsilon f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für jedes $f \in M$, und weiter

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_\infty &\leq \|\varrho_\varepsilon\|_\infty \|f \cdot \chi_{B_{1/\varepsilon}}\|_1 \\ &\overset{\text{Hölder-Ugl.}}{\leq} \|\varrho_\varepsilon\|_\infty \lambda(B_{1/\varepsilon})^{1/q} \|f\|_p \\ &\overset{\text{Voraussetzung}}{\leq} \|\varrho_\varepsilon\|_\infty \lambda(B_{1/\varepsilon})^{1/q} \sup_{f\in M} \|f\|_p, \end{aligned}$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Somit ist für festes $\varepsilon > 0$ die Funktionenfamilie $(T_\varepsilon f)_{f\in M}$ gleichmäßig in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ beschränkt.

Analog lässt sich

$$\|\nabla(T_\varepsilon f)\|_\infty \leq \|\nabla \varrho_\varepsilon\|_\infty \lambda(B_{1/\varepsilon})^{1/q} \sup_{f\in M} \|f\|_p$$

zeigen; somit ist auch die Familie $(\nabla(T_\varepsilon f))_{f\in M}$ für festes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Folglich ist die Menge

$$M'_\varepsilon := \{T_\varepsilon f : f \in M\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ gleichgradig stetig und beschränkt. Da außerdem der Träger aller Elemente von M'_ε durch eine kompakte Menge beschränkt ist, ist der Satz von Arzelà-Ascoli anwendbar. Die Menge M'_ε ist also totalbeschränkt bezüglich der L^∞-Norm. Mit $\operatorname{supp}(u) \subseteq \overline{B_{\varepsilon+1/\varepsilon}}$ für alle $u \in M'_\varepsilon$ folgt weiterhin die Abschätzung $\|u\|_p \le \lambda(B_{\varepsilon+1/\varepsilon})^{1/p}\|u\|_\infty$. Somit ist M'_ε sogar bezüglich der L^p-Norm totalbeschränkt.

Um den Beweis abzuschließen, wählen wir ein $\alpha > 0$ beliebig. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\|f(\cdot + h) - f\|_p \le \alpha, \quad \|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/r}}\|_p \le \alpha$$

für alle $f \in M$ und alle $0 < |h|, r \le \varepsilon$ gilt.

Da M'_ε in L^p totalbeschränkt ist, existiert zu α eine endliche Teilmenge $F' \subseteq M$, so dass

$$M'_\varepsilon \subseteq \cup_{f' \in F'} B_\alpha(T_\varepsilon f') \quad \text{in } L^p.$$

Sei nun $f \in M$ beliebig. Dann gibt es ein $f' \in F'$ mit $T_\varepsilon f \in B_\alpha(T_\varepsilon f')$. Mit der Dreicksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|f - f'\|_p &\le \|(f - T_\varepsilon f)\chi_{B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p + \|(T_\varepsilon f - T_\varepsilon f')\chi_{B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p \\
&\qquad + \|(T_\varepsilon f' - f')\chi_{B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p + \big(\|f'\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p + \|f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p\big) \\
&\le \|(f - T_\varepsilon f)\chi_{B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p + \alpha + \|(T_\varepsilon f' - f')\chi_{B_{\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}}}\|_p + 2\alpha.
\end{aligned}$$

Aus der Theorie der Faltungsintegrale ist nun bekannt, dass für $g \in M$

$$\begin{aligned}
\|(g - T_\varepsilon g)\chi_{B_{\varepsilon+1/\varepsilon}}\|_p &\le \|g - \rho_\varepsilon * (g\chi_{B_{1/\varepsilon}})\|_q \\
&\le |g - \rho_\varepsilon * g\|_p + \|\rho_\varepsilon * (g - g\chi_{B_{1/\varepsilon}})\|_p \\
&\le \sup_{|h| \le \varepsilon} \|g - g(\cdot + h)\|_p + \|g\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{1/\varepsilon}}\|_p \\
&\le 2\alpha
\end{aligned}$$

ist. Somit ergibt sich schließlich

$$\|f - f'\|_p \le 6\alpha.$$

Folglich ist mit M'_ε auch M totalbeschränkt. ∎

10 Schwache Konvergenz und Reflexivität

10.1 Reflexive Banachräume

In Kapitel 7 haben wir festgestellt, dass für jeden Hilbertraum H in einem geeigneten Sinne $H \cong H' \cong (H')' =: H''$ gilt. Ferner sind für $1 < p < \infty$ die Räume $L^p \cong (L^p)''$ und $\ell^p \cong (\ell^p)''$ jeweils isomorph. Für einen allgemeinen Banachraum X ist die Isomorphie von X zu seinem *Bidual* $X'' := (X')'$ jedoch nicht zu erwarten. Das nachfolgende Lemma besagt aber, dass X stets auf natürliche Weise isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von X'' ist.

Lemma 10.1 *Sei X ein normierter Raum. Dann ist die Abbildung*

$$J : X \to X'', \quad J(x)(f) := f(x) \quad \textit{für } x \in X,\ f \in X',$$

linear, stetig und isometrisch, also auch injektiv.

Beweis. Die Linearität von J ist klar. Aus $|J(x)(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\,\|f\|$ für jedes $f \in X'$ folgt $\|J(x)\| \leq \|x\|$ und damit die Stetigkeit von J. Wählt man speziell nach Folgerung 8.5 zu $x \in X$ ein Funktional $f \in X'$ mit $f(x) = \|x\|$ und $\|f\| = 1$, so ist $J(x)(f) = \|x\|\,\|f\|$. Daraus folgt $\|J(x)\| = \|x\|$, und J ist eine Isometrie. ∎

Die Abbildung $J : X \to X''$ ist *natürlich* in dem Sinn, dass jedem Element $x \in X$ das Element $J(x) \in X''$ leicht (und ohne Willkür) zugeordnet ist. Man schreibt daher auch gern $X \subseteq X''$ (was streng genommen wenig sinnvoll ist und sich *immer* auf die Abbildung J bezieht). Vergleichen Sie hierzu die Abbildung Φ aus dem Rieszschen Darstellungssatz 7.3.

Definition 10.2 *Sei X ein normierter Raum.*
(*a*) *Eine Folge (x_n) in X heißt* schwach konvergent *gegen $x \in X$, falls für alle $f \in X'$ gilt*

$$f(x_n) \to f(x) \quad \textit{für } n \to \infty.$$

Man schreibt dann kurz $x_n \rightharpoonup x$.
(*b*) *Eine Folge (f_n) in X' heißt* schwach-$*$ konvergent (*gesprochen: schwach-stern konvergent*) *gegen $f \in X'$, wenn für alle $x \in X$ gilt*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \textit{für } n \to \infty$$

(*punktweise Konvergenz auf X*). *Man schreibt dann kurz $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

Beispiele 10.3 (1) Sei $X = \ell^p$ für $1 < p < \infty$, und q sei der zu p konjugierte Exponent. Weiter sei für $k \in \mathbb{N}$ das Funktional $e_k \in (\ell^p)' \cong \ell^q$ erklärt durch $e_k(x) = x_k$ für alle $x = (x_n) \in X$. Da jedes $x \in \ell^p$ eine Nullfolge ist, gilt $e_k(x) = x_k \to 0$ und somit $e_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ für $k \to \infty$. Andererseits ist $\|e_k - e_l\|_{\ell^q} = 2^{1/q}$

für $k \neq l$; somit konvergiert (e_k) *nicht* bezüglich der Norm in $(\ell^p)' \cong \ell^q$.

(2) Sei $X = L^2(0, 2\pi)$. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die durch $f_k(t) := e^{ikt}$ definierten Funktionen $f_k \in X'$. Dann ist $f_k(x) = \int_0^{2\pi} x(t)e^{-ikt}\,dt$ bis auf eine Konstante der k-te Fourierkoeffizient von $x \in L^2(0, 2\pi)$. Aus Analysis II ist bekannt, dass dieser für $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert; also ist $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ für $k \to \infty$. Da aber $\|f_k\| = \sqrt{2\pi}$, konvergieren die f_k *nicht* in der Norm von X' gegen 0. ■

Die Beispiele zeigen, dass die schwach-$*$-Konvergenz nicht die Normkonvergenz impliziert. Es gilt aber die umgekehrte Implikation.

Lemma 10.4 *Sei X ein Banachraum. Dann gilt*

(*a*) *Normkonvergenz impliziert die schwache bzw. die schwach-$*$-Konvergenz.*

(*b*) *Schwach beziehungsweise schwach-$*$ konvergente Folgen sind normbeschränkt, und aus $x_k \rightharpoonup x$ bzw. $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ folgt*

$$\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\| \quad \textit{bzw.} \quad \|f\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|.$$

Diese Eigenschaft heißt die Unterhalbstetigkeit der Norm *bei schwacher bzw. schwach-$*$ Konvergenz.*

Beweis. (*a*) Sei $x_k \to x$ in der Norm von X und $f \in X'$. Dann gilt $|f(x_k - x)| \leq \|f\|\,\|x_k - x\| \to 0$ und somit $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$. Der Beweis für schwach-$*$-konvergente Folgen erfolgt analog.

(*b*) Sei $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Dann ist $(f_k) \subset X'$ eine punktweise beschränkte Folge von Funktionalen, und die Behauptung folgt aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 5.6). Die Normabschätzung folgt aus Satz 5.7.

Die Aussage für $x_k \rightharpoonup x$ kann gezeigt werden, indem man von der Folge (x_k) in X zur Folge $(J(x_k))$ in X'' übergeht und $\|x_k\|_X = \|J(x_k)\|_{X''}$ benutzt. ■

Definition 10.5 *Sei X ein normierter Raum.*

(*a*) *Eine Menge $M \subset X$ heißt* schwach folgenkompakt, *wenn jede Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.*

(*b*) *Eine Menge $M \subset X'$ heißt* schwach-$*$-folgenkompakt, *wenn jede Folge in M eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge besitzt.*

(*c*) *Ist die Abbildung J aus Lemma* 10.1 *surjektiv und somit bijektiv, so heißt der Raum X* reflexiv.

Man beachte: Ist X reflexiv, so sind X und X'' zueinander isomorph. Reflexivität beinhaltet aber *mehr* als nur die Isomorphie von X und X'': Die konkrete Abbildung $J : X \to X''$ muss ein Isomorphismus sein! (Man kennt Beispiele von nicht-reflexiven Banachräumen X, die zu ihrem Bidual X'' isomorph sind.)

Satz 10.6 *Sei X ein separabler normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach-$*$ folgenkompakt. Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in X' eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da X separabel ist, gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von X. Sei (f_k) eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X'$. Wegen

$$|f_k(x_n)| \le \|f_k\|_{X'} \|x_n\|_X \le \|x_n\|_X \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}$$

ist $(f_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Insbesondere besitzt $(f_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{k,1}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$.

Ebenso besitzt $(f_{k,1}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(f_{k,2}(x_2))_{k\in\mathbb{N}}$, wobei nun auch $(f_{k,2}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir sondern auf diese Weise immer weiter Teilfolgen so aus, dass die n-te Teilfolge $(f_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in allen Punkten $x_1, \dots, x_n$ konvergiert. Man kann dies schematisch wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{llllll}
f_{1,1} & f_{2,1} & f_{3,1} & \cdots & \qquad & \text{konvergiert in } x_1, \\
f_{1,2} & f_{2,2} & f_{3,2} & \cdots & & \text{konvergiert in } x_1, x_2, \\
f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & \cdots & & \text{konvergiert in } x_1, x_2, x_3, \\
 & \vdots & & & &
\end{array}$$

Wir betrachten die Folge $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ der Diagonalelemente $\xi_j := f_{j,j}$. Diese ist (bis auf endlich viele Elemente) eine Teilfolge jeder horizontalen Folge in diesem Schema. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \xi_j(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun, dass die Folge $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schwach-$*$ konvergiert. Dazu sei $Y := \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Nach Voraussetzung liegt Y dicht in X, und nach den Rechenregeln für konvergente Folgen existiert $\lim_{j\to\infty} \xi_j(y)$ für alle $y \in Y$. Wir definieren ein lineares Funktional ξ auf Y durch

$$\xi(y) := \lim_{j\to\infty} \xi_j(y), \quad y \in Y.$$

Für alle $y \in Y$ ist dann

$$|\xi(y)| = \lim_{j\to\infty} |\xi_j(y)| \le \limsup_{j\to\infty} \|y\|_X \|\xi_j\|_{X'} \le \|y\|_X$$

(beachte, dass $\xi_j \in \overline{B_1(0)}$). Damit ist $\xi \in Y'$ und $\|\xi\|_{Y'} \le 1$, und wir können ξ stetig zu einem beschränktem linearen Funktional auf ganz X fortsetzen, das wir ebenfalls mit ξ bezeichnen. Da $\|\xi_j\|_{X'} \le 1$ gilt und Y dicht in X liegt, folgt nun leicht

$$\xi(x) = \lim_{j\to\infty} \xi_j(x)$$

für alle $x \in X$, also $\xi_j \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$. ■

Satz 10.7 *Sei X ein reflexiver normierter Raum. Dann ist jeder abgeschlossene Unterraum von X ebenfalls reflexiv.*

Beweis. Sei $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $J_Y : Y \to Y''$, die $y \in Y$ auf das Einsetzungsfunktional $f \mapsto f(y)$ abbildet, surjektiv ist, d.h. wir müssen für jedes $y'' \in Y''$ ein $y \in Y$ finden mit $J_Y(y) = y''$.

Sei also $y'' \in Y''$. Wir definieren $x'' \in X''$ durch

$$x''(f) := y''(f|_Y) \quad \text{für alle } f \in X';$$

diese Definition ist sinnvoll, da $f|_Y \in Y'$. Da X reflexiv ist, existiert genau ein $x \in X$ mit $J_X(x) = x''$, also mit $x''(f) = f(x)$ für alle $f \in X'$.

Wir zeigen, dass $x \in Y$. Ist $f \in X'$ ein Funktional, welches auf Y verschwindet, so ist auch

$$f(x) = x''(f) = y''(f|_Y) = y''(0) = 0.$$

Wäre nun $x \in X \setminus Y$, so gäbe es nach Folgerung 8.5 ein $f \in X'$ mit $f|_Y = 0$ und $f(x) \neq 0$. Widerspruch.

Wir zeigen, dass $J_Y(x) = y''$: Zu jedem $g \in Y'$ gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung $f \in X'$ von g, und es gilt

$$J_Y(x)(g) = g(x) \overset{x \in Y}{=} f(x) = x''(f) = y''(f|_Y) = y''(g).$$

Da diese Relation für alle $g \in Y'$ gilt, folgt $J_Y(x) = y''$. ∎

Satz 10.8 *Sei X ein reflexiver normierter Raum. Dann ist $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Beweis. Sei (x_k) eine Folge in $\overline{B_1(0)} \subset X$. Wir betrachten den abgeschlossenen und separablen Unterraum

$$Y := \overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$$

von X, der nach Satz 10.7 mit X ebenfalls reflexiv ist. Dann ist $Y'' = J_Y(Y)$ separabel, da J_Y ein Isomorphismus von Y auf Y'' ist. Nach Satz 8.8 ist auch Y' separabel.

Wir wenden nun Satz 10.6 auf die beschränkte Folge $\big(J_Y(x_k)\big) \subset Y''$ an und erhalten eine Teilfolge $\big(J_Y(x_{k_j})\big)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\big(J_Y(x_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie ein $y'' \in Y''$ mit $J_Y(x_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} y''$. Schreiben wir $y'' = J(y)$ mit $y \in Y$, so folgt für alle $g \in Y'$

$$g(x_{k_j}) = J_Y(x_{k_j})(g) \to y''(g) = g(y).$$

Wegen $x_k, y \in Y$ erhalten wir für alle $f \in X'$

$$f(x_{k_j}) = \big(f|_Y\big)(x_{k_j}) \to \big(f|_Y\big)(y) = f(y).$$

Das impliziert $x_{k_j} \rightharpoonup y$ für $j \to \infty$. ∎

Anmerkung 10.9 Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig: Ein normierter Raum ist genau dann reflexiv, wenn die abgeschlossene Einheitskugel schwach folgenkompakt ist. Dies ist die Aussage des *Satzes von Eberlein-Shmulyan*, vgl. Yosida, Functional Analysis, S. 139-145.

Wir wollen nun genauer untersuchen, unter welchen Voraussetzungen aus der schwachen Konvergenz $x_n \rightharpoonup x$ bereits die Konvergenz in der Norm $\|x_n - x\| \to 0$ folgt. Einige der folgenden Resultate sind dabei als Ausblick zu verstehen, für deren Beweise wir auf die Literatur verweisen.

Definition 10.10 *Ein normierter Raum X heißt* gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $0 < \varepsilon < 2$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ und $\|x - y\| \geq \varepsilon$ gilt $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.*

Satz 10.11 (Milman) *Jeder gleichmäßig konvexe Raum ist reflexiv.*

Ein Beweis ist in Yosida, Functional Analysis, S. 127-128. ■

Satz 10.12 *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Ist (x_n) eine Folge in X und $x \in X$ mit*

$$x_n \rightharpoonup x \quad \textit{und} \quad \|x_n\| \to \|x\|,$$

so konvergiert (x_n) sogar in der Norm gegen x, also $\|x_n - x\| \to 0$.

Beweis. Der Beweis ist einfach, wenn X ein Hilbertraum ist:

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2} - \underbrace{2\,\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle}_{\to 2\|x\|^2} + \|x\|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Der allgemeine Fall verbleibt als (nicht triviale!) Übungsaufgabe. ■

Satz 10.13 *Für $1 < p < \infty$ sind die Räume $L^p(\Omega)$ und ℓ^p gleichmäßig konvex, und für alle x, y in $L^p(\Omega)$ bzw. in ℓ^p gelten die Clarkson-Ungleichungen*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right), \qquad 2 \leq p < \infty,$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_p^q \leq \left(\frac{1}{2}\left(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1 < p < 2$$

(q ist wieder der konjugierte Exponent zu p).

Den Beweis für $2 \leq p < \infty$ finden Sie in Heuser, Funktionalanalysis, S. 261 ff, den für $1 < p < 2$ in Hewitt-Stromberg, Real and Complex Analysis. ■

Anmerkung 10.14 Mit dem Satz von Milman erhalten wir nun, dass $L^p(\Omega)$ und ℓ^p für $1 < p < \infty$ reflexiv sind. Da man den Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ mit einem abgeschlossenen Unterraum des reflexiven Raumes $(L^p(\Omega))^{n+1}$ identifizieren kann, ist $W^{1,p}(\Omega)$ ebenfalls reflexiv. Schließlich haben wir in einer Übungsaufgabe gesehen, dass Hilberträume gleichmäßig konvex sind. Folglich sind auch Hilberträume reflexiv. ∎

Satz 10.15 (Mazur) *Sei X ein normierter Raum. Ist (x_n) eine Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x$, so gibt es eine Folge (y_n) in der konvexen Hülle*

$$\operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} := \left\{ \sum_{i=1}^{N} a_i x_i : N \in \mathbb{N},\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \right\}$$

von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, die in der Norm gegen x konvergiert.

Beweis. Sei $M := \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Man kann leicht zeigen, dass die konvexe Hülle einer Menge konvex ist und dass mit einer konvexen Menge auch ihr Norm-Abschluss konvex ist. Daher sind M und $\overline{M}$ konvexe Mengen.

Wir zeigen $x \in \overline{M}$. Angenommen, es wäre $x \notin \overline{M}$. Nach dem Trennungssatz 8.11 gibt es dann ein $f \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{Re} f(y) \leq \alpha \text{ für alle } y \in \overline{M} \quad \text{und} \quad \operatorname{Re} f(x) > \alpha.$$

Setzt man für y die Folgenglieder x_n ein, so folgt aus $x_n \rightharpoonup x$ der Widerspruch

$$\alpha \geq \operatorname{Re} f(x_n) \to \operatorname{Re} f(x) > \alpha.$$

Also muss $x \in \overline{M}$ gelten. Dann gibt es auch eine Folge in M, die in der Norm gegen x konvergiert. ∎

10.2 Schwache Topologien und der Satz von Banach-Alaoglu-Bourbaki

Es stellt sich die Frage, was man über die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ im Dualraum X' von X aussagen kann, wenn X weder separabel noch reflexiv ist.

Beispiel 10.16 Sei $X = L^\infty(0,1)$ und $(u_n) \subset L^1(0,1)$ die Folge

$$u_n := 2^{n+1} \chi_{(2^{-(n+1)}, 2^{-n})}.$$

Wir können u_n vermöge

$$u_n(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x) u_n(x)\, dx, \quad \varphi \in X,$$

als Funktional auf X mit Norm ≤ 1 auffassen. Es gilt nämlich

$$|u_n(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |u_n(x)|\,dx = \|\varphi\|_\infty.$$

Setzt man für φ die L^∞-Funktion $\chi_{(2^{-(n+1)},2^{-n})}$ ein, erhält man sogar $\|u_n\|_{X'} = 1$.

Man kann nun zeigen, dass (u_n) keine schwach-$*$ konvergente Teilfolge besitzt. Das empfehlen wir den Lesern als Übungsaufgabe. ∎

Definition 10.17 *Sei (X,τ) ein topologischer Hausdorffraum, und sei $\mathcal{U}(x)$ die Menge aller offenen Umgebungen von x. Eine Teilmenge $\mathcal{B}(x)$ von $\mathcal{U}(x)$ heißt eine* Umgebungsbasis *des Punktes x, falls es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $V \subset U$.*

Wir vermerken einige Eigenschaften von Umgebungsbasen:

(a) Ist (X,d) ein metrischer Raum, so definiert $\mathcal{B}(x) := \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis für jeden Punkt $x \in X$.

(b) Es ist $U \subset X$ genau dann offen, wenn für alle $x \in U$ ein $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $V \subset U$ existiert. In diesem Fall gilt also $U = \cup_{x\in U} \cup_{V\in\mathcal{B}(x),V\subset U} V$, d.h. jede offene Menge kann als Vereinigung von Mengen aus den Umgebungsbasen geschrieben werden.

(c) Ist X zusätzlich ein Vektorraum und gilt $\mathcal{U}(x) = x + \mathcal{U}(0)$, so wird die Topologie bereits durch eine beliebige offene Umgebungsbasis $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(0)$ vollständig bestimmt. ∎

Definition 10.18 *Sei X ein normierter Raum mit Dualraum X'. Dann wird die sogenannte* schwache Topologie *$\sigma(X,X')$ von X definiert durch die Umgebungsbasis $\mathcal{B}(0)$ von $0 \in X$, die aus allen Mengen der Gestalt*

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(0) := \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon,\, i = 1,\ldots,n\}$$

besteht, wobei $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $f_1,\ldots,f_n \in X'$ beliebig gewählt sind.

Analog wird die sogenannte schwach-*-Topologie *$\sigma^*(X',X)$ auf X' definiert durch die Umgebungsbasis $\mathcal{B}'(0)$ von $0 \in X'$, bestehend aus allen Mengen der Gestalt*

$$V_{x_1,\ldots,x_n,\varepsilon}(0) := \{f \in X' : |f(x_i)| < \varepsilon,\, i = 1,\ldots,n\},$$

wobei $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\ldots,x_n \in X$ beliebig gewählt sind.

Schließlich heißt eine Teilmenge $M \subset X$ schwach abgeschlossen*, wenn ihr Komplement M^c schwach offen ist, und $M' \subset X'$ heißt* schwach-$*$ abgeschlossen*, wenn $(M')^c$ schwach-$*$ offen ist.*

Wie man leicht sieht, ist $M \subset X$ genau dann schwach abgeschlossen, wenn M jeden schwachen Häufungspunkt von M enthält, und $M' \subset X'$ ist genau dann schwach-$*$ abgeschlossen, wenn M' jeden schwach-$*$ Häufungspunkt von M' enthält.

Lemma 10.19 *Sei X ein normierter Raum. Dann gilt*
(a) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$$J(x) : X' \to \mathbb{K}, \quad J(x)(f) := f(x)$$

stetig bezüglich der $\sigma^*(X', X)$-Topologie auf X'.
(b) Jede schwach offene Menge in X ist offen bezüglich der durch die Norm auf X induzierten Topologie, und jede schwach-$*$ offene Menge in X' ist offen bezüglich der durch die Norm auf X' induzierten Topologie.

Beweis. (a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für jedes Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ ist

$$J(x)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) = V_{x,\varepsilon}(0) \subset X'$$

$\sigma^*(X', X)$-offen. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wird analog behandelt.

(b) Sei $V \subset X$ schwach offen und $x \in V$. Dann gibt es $f_1, \ldots, f_n \in X'$ und $\varepsilon > 0$ mit $U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(x) \subset V$, d.h. für alle $y \in X$ mit $|f_i(y - x)| < \varepsilon$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $y \in V$.

Für $r := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+\|f_1\|}, \ldots, \frac{\varepsilon}{1+\|f_n\|}\right\} > 0$ folgt

$$B_r(x) \subset U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(x).$$

Also ist x ein innerer Punkt von V bezüglich $\|.\|$, und V ist offen. Der Beweis der zweiten Aussage verläuft analog. ■

Satz 10.20 *Sei X ein normierter Raum und $K \subseteq X$ konvex. Dann ist K genau dann norm-abgeschlossen, wenn K $\sigma(X, X')$-abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist K $\sigma(X, X')$-abgeschlossen, so folgt aus Lemma 10.19, dass K abgeschlossen bzgl. der Normtopologie ist.

Sei umgekehrt K norm-abgeschlossen, und sei $x_0 \notin K$. Dann gibt es nach dem Trennungssatz 8.11 ein $f \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha$ für alle $x \in K$ sowie $\operatorname{Re} f(x_0) = \alpha + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.

Für $z \in U_{f,\varepsilon/2}(x_0)$ haben wir $|f(x_0 - z)| < \varepsilon/2$. Nun folgt

$$\operatorname{Re} f(z) \geq \operatorname{Re} f(x_0) - \varepsilon/2 = \alpha + \varepsilon/2 > \alpha$$

und somit $U_{f,\varepsilon/2}(x_0) \subset K^c$. Also ist K^c $\sigma(X, X')$-offen, und K ist $\sigma(X, X')$-abgeschlossen. ■

Der folgende Satz ist außerordentlich wichtig und nützlich. Denken Sie daran, dass die Einheitskugel eines unendlich-dimensionalen Banachraumes nie norm-kompakt ist.

Satz 10.21 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Sei X ein normierter Raum und X' der Dualraum von X. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ von X' kompakt bezüglich $\sigma^*(X', X)$.*

Anmerkung 10.22 Hieraus ergibt sich, dass jede $\sigma^*(X', X)$-abgeschlossene und norm-beschränkte Teilmenge von X' $\sigma^*(X', X)$-kompakt ist. Ist also (f_n) eine beschränkte Folge in X', dann besitzt die Menge $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ (falls sie abzählbar unendlich ist) einen $\sigma^*(X', X)$-Häufungspunkt $f \in X'$; insbesondere gibt es für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|(f - f_n)(x)| < \varepsilon$. ■

Der Beweis das Satzes von Banach-Alaoglu-Bourbaki stützt sich auf ein anderes grundlegendes Resultat, den Satz von Tychonov, welcher meist in Vorlesungen zur Topologie bewiesen wird, so dass wir ihn hier ohne Beweis zitieren. Der Beweis des Satzes von Tychonov erfordert das Auswahlaxiom; Sie finden ihn z.B. in Yosida, Functional Analysis, S. 6-7. (Das Auswahlaxiom garantiert, dass das im Satz eingeführte Produkt nicht leer ist.)

Satz 10.23 (Tychonov's Kompaktheitssatz) *Sei A eine beliebige Indexmenge, und für jedes $\alpha \in A$ sei ein topologischer Raum (Y_α, τ_α) gegeben. Wir versehen den Produktraum*

$$\mathcal{Y} = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha = \{(y_\alpha)_{\alpha \in A} : y_\alpha \in Y_\alpha \text{ für alle } \alpha \in A\}$$

mit der sogenannten Produkttopologie τ*, welches die gröbste Topologie ist, die jede Menge der Gestalt $U := \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ enthält, wobei $U_\alpha \in \tau_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ und $U_\alpha = Y_\alpha$ für alle bis auf endlich (!) viele $\alpha \in A$ ist. Dann gilt: Ist jeder Raum Y_α kompakt bzgl. τ_α, so ist $\mathcal{Y}$ kompakt bezüglich τ.*

Beweis von Satz 10.21. Wir identifizieren das Funktional $f \in \overline{B_1(0)} \subset X'$ mit dem unendlichen Tupel

$$(f(x))_{x \in X} \in \mathcal{Y} := \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{K} : |z| \le \|x\|\} = \prod_{x \in X} \overline{B_{\|x\|}(0)}.$$

Dadurch wird $K := \overline{B_1(0)} \subset X'$ mit einer Teilmenge von $\mathcal{Y}$ identifiziert. Da $\overline{B_{\|x\|}(0)} \subset \mathbb{K}$ kompakt ist, ist nach Satz 10.23 auch $\mathcal{Y}$ bzgl. der Produkttopologie kompakt. Außerdem bemerken wir, dass die Topologie $\sigma^*(X', X)$ auf K mit der Produkttopologie übereinstimmt. Deshalb genügt es nach Satz 9.2 zu zeigen, dass $K \subset \mathcal{Y}$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen ist. Mit anderen Worten: Die Menge $K \subseteq \mathcal{Y}$ muss all ihre $\sigma^*(X', X)$-Häufungspunkte enthalten.

Sei also $f_0 \in \mathcal{Y}$ ein $\sigma^*(X', X)$-Häufungspunkt von K. Wir zeigen zunächst die Linearität und anschließend die Stetigkeit von f_0; daraus folgt dann $f_0 \in K$.

Seien $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$. Da f_0 Häufungspunkt von K ist, gibt es zu diesem ε ein $f \in U_{x,y,\alpha x + \beta y;\varepsilon}(f_0) \cap K \subset X'$, so dass $|(f - f_0)(x)| < \varepsilon$, $|(f - f_0)(y)| < \varepsilon$ und $|(f - f_0)(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon$ gilt. Somit ergibt sich aus der Linearität von f

$$\begin{aligned}
&|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| \\
&\qquad = |(f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) - \beta(f_0 - f)(y)| \\
&\qquad \leq |(f_0 - f)(\alpha x + \beta y)| + |\alpha||(f_0 - f)(x)| + |\beta||(f_0 - f)(y)| \\
&\qquad < \varepsilon\,(1 + |\alpha| + |\beta|).
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus die Linearität von f_0. Analog ergibt sich

$$|f_0(x)| \leq |(f_0 - f)(x) + f(x)| \leq |(f_0 - f)(x)| + |f(x)| < \varepsilon + \|f\|\,\|x\|.$$

Da $\|f\| \leq 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $|f_0(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in X$ und somit $f_0 \in K$. ■

Wir vermerken noch eine durchaus überraschende Konsequenz des Satzes von Banach-Alaoglu-Bourbaki; der praktische Nutzen dieser Aussage ist jedoch eher gering, da der behauptete Isomorphismus nicht konstruiert wird.

Folgerung 10.24 *Jeder normierte Raum X ist isometrisch isomorph zu einem linearen Unterraum von $(C^0(K), \|.\|_\infty)$ mit einem geeigneten kompakten topologischen Raum K. (Für K kann man die nach Satz 10.21 $\sigma^*(X', X)$-kompakte Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ von X' wählen.)*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig und $K := \overline{B_1(0)} \subset X'$. Weiter sei

$$J(x) : K \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto J(x)(f) = f(x).$$

Nach Lemma 10.19 ist $J(x)$ stetig, also $J(x) \in C^0(K)$, wenn K mit der $\sigma^*(X', X)$-Topologie versehen wird. Weiter gilt nach Lemma 10.1

$$\|x\| = \|J(x)\|_{X''} = \sup_{f \in K} |f(x)| = \|J(x)\|_{\infty,K}.$$

Schließlich ist $J : X \to C^0(K)$ eine lineare injektive Abbildung und somit ein isometrischer Isomorphismus auf einen Unterraum von $C^0(K)$. ■

11 Kompakte und adjungierte Operatoren

11.1 Kompakte Operatoren

Definition 11.1 *Seien X, Y normierte Räume. Ein Operator $T \in L(X,Y)$ heißt* kompakt (*in reflexiven Räumen auch* vollstetig *oder* completely continuous), *falls $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt ist. Wir bezeichnen die Menge der kompakten Operatoren $T : X \to Y$ mit $K(X,Y)$. Im Falle $X = Y$ schreiben wir auch $K(X)$ statt $K(X,X)$.*

Im Folgenden seien X, Y, Z Banachräume. Dann ist $T \in L(X,Y)$ genau dann kompakt, wenn $T(B_1(0))$ totalbeschränkt (= präkompakt, relativ kompakt) ist.

Lemma 11.2 *Für $T \in L(X,Y)$ sind äquivalent:*
(a) T ist kompakt.
(b) $T(M)$ ist für jede beschränkte Menge $M \subset X$ totalbeschränkt.
(c) Für jede beschränkte Folge (x_n) in X besitzt die Bildfolge (Tx_n) eine konvergente Teilfolge.
Ist X reflexiv, so ist T genau dann kompakt, wenn für jede schwach konvergente Folge (x_n) in X mit Grenzwert $x \in X$ die Bildfolge (Tx_n) in der Norm von Y gegen Tx konvergiert.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei T kompakt und $M \subset X$ beschränkt, d.h. es ist $M \subseteq B_r(0)$ für ein $r > 0$. Dann ist $T(M) \subseteq T(B_r(0)) = rT(B_1(0))$. Da T kompakt ist, sind $T(B_1(0))$, $rT(B_1(0))$ und folglich auch $T(M)$ totalbeschränkt.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei (x_n) eine beschränkte Folge in X. Dann ist $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine in X beschränkte Menge, und wegen (b) ist $T(M)$ totalbeschränkt, also relativ kompakt. Also ist $\overline{T(M)}$ kompakt und damit auch folgenkompakt. Somit besitzt (Tx_n) eine konvergente Teilfolge.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $(x_n) \subset B_1(0) \subset X$. Dann besitzt $(Tx_n) \subset \overline{T(B_1(0))}$ eine konvergente Teilfolge. Folglich ist $\overline{T(B_1(0))}$ (folgen-)kompakt.

Der Beweis der letzen Aussage verbleibt als Übungsaufgabe. ∎

Beispiele 11.3 **(1)** Sei $\dim Y < \infty$ und $T \in L(X,Y)$. Dann ist $\overline{T(B_1(0))}$ beschränkt und abgeschlossen in Y und somit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt, also $T \in K(X,Y)$. Es gilt daher

$$K(X,Y) = L(X,Y) \quad \text{falls } \dim Y < \infty.$$

(2) Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{E}(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \dim \operatorname{im} T < \infty\}$$

der *Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild* oder *Operatoren von endlichem Rang*. Da $T(B_1(0))$ beschränkt und $\operatorname{im} T$ für $T \in \mathcal{E}(X,Y)$ endlich-dimensional ist, ist $\overline{T(B_1(0))} \subset \operatorname{im} T$ kompakt. Es gilt daher $\mathcal{E}(X,Y) \subseteq K(X,Y)$.

(3) Der identische Operator $I : X \to X$ ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist (Satz 9.7).

(4) Sei $k \in C^0([a,b] \times [a,b])$, $X := C^0([a,b])$ und

$$(Tu)(t) := \int_a^b k(t,s)u(s)\,ds \quad \text{für } t \in [a,b].$$

Dann ist $T \in L(X)$ und sogar $T \in K(X)$. Zum Beweis sei $u \in \overline{B_1(0)} \subset X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tu)(t')| &\leq \int_a^b |k(t,s) - k(t',s)|\,|u(s)|\,ds \\ &\leq (b-a)\|k(t,\cdot) - k(t',\cdot)\|_{\infty,[a,b]}. \end{aligned}$$

Da k auf $[a,b] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig ist, folgt die gleichmäßige und gleichgradige Stetigkeit der Menge $\{Tu : u \in \overline{B_1(0)} \subset X\}$. Offensichtlich ist die Menge

$$\{Tu(t) : u \in \overline{B_1(0)} \subset X\}$$

für jedes feste $t \in [a,b]$ beschränkt. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt und somit $T \in K(X)$. ∎

Satz 11.4 *(a) $K(X,Y)$ ist ein linearer Unterraum von $L(X,Y)$.*

(b) $K(X,Y)$ ist abgeschlossen bzgl. der Operatornorm in $L(X,Y)$, d.h. für jede norm-konvergente Folge kompakter Operatoren (T_n) ist auch ihr Grenzwert T kompakt.

(c) Seien $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$, und einer der beiden Operatoren T, S sei kompakt. Dann ist auch $ST \in L(X,Z)$ kompakt.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $K(X,Y)$ bezüglich der Operatornorm in $L(X,Y)$ abgeschlossen ist. Die übrigen Aussagen verbleiben als Übungsaufgabe.

Sei (T_n) eine norm-konvergente Folge in $K(X,Y)$ mit Grenzwert $T \in L(X,Y)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Wegen $T_n \in K(X,Y)$ ist $T_n(B_1(0))$ totalbeschränkt, d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ und Punkte $y_1, \ldots, y_M \in Y$ so, dass $T_n(B_1(0)) \subseteq \cup_{i=1}^M B_\varepsilon(y_i)$.

Sei nun $x \in B_1(0)$. Dann gibt es ein y_i so, dass $T_n x \in B_\varepsilon(y_i)$. Für dieses ist

$$Tx = y_i + (T_n x - y_i) + (Tx - T_n x).$$

Wegen $\|Tx - T_n x\| < \varepsilon$ und $\|T_n x - y_i\| < \varepsilon$ folgt $Tx \in B_{2\varepsilon}(y_i)$. Folglich ist $T(B_1(0)) \subseteq \bigcup_{i=1}^M B_{2\varepsilon}(y_i)$; d.h. $TB_1(0)$ ist totalbeschränkt und T ist kompakt. ∎

In algebraischer Sprache kann man Satz 11.4 im Fall $X = Y = Z$ wie folgt zusammenfassen: $K(X)$ *ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in der Banachalgebra* $L(X)$.

11.2 Adjungierte Operatoren

Definition 11.5 *Sind X, Y normierte Räume und $T \in L(X,Y)$, so wird durch*

$$T' : Y' \to X', \quad f \mapsto f \circ T$$

eine lineare Abbildung T' definiert, die sogenannte zu T adjungierte Abbildung. *Für diese gilt also*

$$(T'f)(x) = f(Tx) \quad \text{für alle } f \in Y',\ x \in X.$$

Satz 11.6 *Seien $T, U \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*
(a) $T' \in L(Y', X')$ und $\|T'\|_{L(Y',X')} = \|T\|_{L(X,Y)}$,
(b) $(T+U)' = T' + U'$ und $(\lambda T)' = \lambda T'$,
(c) $(ST)' = T'S'$,
(d) $T'' := (T')' = T$, falls X und Y reflexive Banachräume sind,
(e) falls T invertierbar ist, ist auch T' invertierbar, und es ist $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Beweis. Wir zeigen nur (a); der Beweis der übrigen Aussagen verbleibt als Übungsaufgabe. Seien $x \in X$ und $f \in Y'$. Aus

$$|(T'f)(x)| = |f(Tx)| \leq \|f\| \, \|T\| \, \|x\|$$

folgt $\|T'f\| \leq \|T\| \|f\|$. Somit ist $T' \in L(Y', X')$ und $\|T'\|_{L(Y',X')} \leq \|T\|$. Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung.

Seien $x \in X$ und $y := Tx$. Nach Folgerung 8.6 aus dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein $f \in Y'$ mit $\|f\| = 1$ und $f(y) = \|y\|$. Mit diesem erhält man

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|y\| = |f(y)| = |f(Tx)| = |(T'f)(x)| \\ &\leq \|T'f\| \, \|x\| \leq \|T'\| \, \|f\| \, \|x\| = \|T'\| \, \|x\|, \end{aligned}$$

also $\|T\|_{L(X,Y)} \leq \|T'\|_{L(Y',X')}$. ∎

Beispiel: Hilbert-Schmidtsche Integraloperatoren. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Für $u \in L^2(\Omega)$ definieren wir den sogenannten *Hilbert-Schmidt-Operator* T durch

$$(Tu)(t) := \int_\Omega k(t,s) u(s)\, ds, \quad t \in \Omega.$$

Hierdurch ist Tu punktweise f.ü. auf Ω definiert. Für diesen Operator wollen wir zeigen:
(a) $T \in L(L^2(\Omega))$, und

$$\|T\| \leq \|k\|_2 := \left(\int_\Omega \int_\Omega |k(t,s)|^2 \, dt\, ds \right)^{1/2},$$

(b) T' ist ebenfalls ein Hilbert-Schmidt-Operator mit Kern $k'(t,s) := k(s,t)$, und
(c) $T \in K(L^2(\Omega))$.

Beweis. (a) Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Tu(t)|^2 dt &= \int_\Omega \left| \int_\Omega k(t,s)u(s)\,ds \right|^2 dt \\
&\le \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(t,s)|^2\,ds \right) \left(\int_\Omega |u(s)|^2 ds \right) dt \\
&\le \int_\Omega \int_\Omega |k(t,s)|^2\,ds\,dt \cdot \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(b) Wir identifizieren $(L^2(\Omega))'$ mit $L^2(\Omega)$. Für alle $u, v \in L^2(\Omega)$ folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\langle u, T'v \rangle = \langle Tu, v \rangle &= \int_\Omega \left(\int_\Omega k(t,s)u(s)\,ds \right) v(t)\,dt \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega k(t,s)v(t)\,dt \right) u(s)\,ds \\
&= \int_\Omega \left(\int_\Omega k'(s,t)v(t)\,dt \right) u(s)\,ds
\end{aligned}$$

und somit $(T'v)(s) = \int_\Omega k'(s,t)v(t)\,dt$.

(c) Für $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $k_N(t,s) := k(t,s)\chi_{B_N(0)}(s)\chi_{B_N(0)}(t)$. Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt $k_N \to k$ in $L^2(\Omega \times \Omega)$ für $N \to \infty$. Somit gilt für den durch $(T_N u)(t) := \int_\Omega k_N(t,s)u(t)\,ds$ definierten Operator T_N

$$\|T_N - T\| \le \|k_N - k\|_{L^2} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty.$$

Also dürfen wir nach Satz 11.4 ohne Einschränkung annehmen, dass Ω beschränkt ist.

Weiter wissen wir, dass $C^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ dicht in $L^2(\Omega \times \Omega)$ liegt. Demnach lässt sich ohne Einschränkung annehmen, dass $k \in C^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. Schließlich kann man nach dem Satz von Stone-Weierstraß annehmen, dass k ein Polynom ist, etwa $k(t,s) = \sum_{|i|,|j| \le N} a_{ij} t^i s^j$.

Für diesen Kern k lässt sich T schreiben als

$$(Tu)(t) = \int_\Omega k(t,s)u(s)\,ds = \sum_{|i| \le N} t^i \Big(\int_\Omega \sum_{|j| \le N} a_{ij} s^j u(s)\,ds \Big).$$

Dieser Operator T hat offenbar ein endlich-dimensionales Bild und ist folglich kompakt. ∎

Für $M \subseteq X$ definieren wir den *Annihilator von M* als

$$M^\perp := \{ f \in X' : f(x) = 0 \text{ für alle } x \in M \} \subseteq X'.$$

Für $N \subseteq X'$ definieren wir den *Prä-Annihilator von N* als

$$N_\perp := \{x \in X : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in N\} \subseteq X.$$

Für beliebige Mengen $M \subseteq X$ bzw. $N \subseteq X'$ sind $M^\perp$ bzw. $N_\perp$ abgeschlossene Unterräume von X' bzw. X.

Satz 11.7 *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann gilt:*
(a) $\ker T' = (\operatorname{im} T)^\perp$,
(b) $\ker T = (\operatorname{im} T')_\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{im} T} = (\ker T')_\perp$. *Insbesondere ist der adjungierte Operator T' genau dann injektiv, wenn $\operatorname{im} T$ dicht in Y ist.*

Beweis. *(a)* Sei $f \in \ker T'$. Dann gilt für alle $y \in \operatorname{im} T$ mit $y = Tx$

$$f(y) = f(Tx) = (T'f)(x) = 0.$$

Somit ist $f \in (\operatorname{im} T)^\perp$. Ist umgekehrt $f \in (\operatorname{im} T)^\perp$, so folgt für alle $x \in X$, dass $0 = f(Tx) = (T'f)(x)$ und daher $T'f = 0$. Also ist $f \in \ker T'$. Die Aussage *(b)* beweist man analog.

(c): Sei zuerst $y \in \operatorname{im} T$, also $y = Tx$ mit einem $x \in X$. Dann gilt für alle $f \in \ker T'$

$$f(y) = f(Tx) = (T'f)(x) = 0.$$

Daher ist $\operatorname{im} T \subseteq (\ker T')_\perp$ und somit $\overline{\operatorname{im} T} \subseteq (\ker T')_\perp$, da $(\ker T')_\perp$ bereits abgeschlossen ist.

Sei $y \notin \overline{\operatorname{im} T}$. Nach Folgerung 8.5 existiert ein $f \in Y'$ mit $f|_{\overline{\operatorname{im} T}} = 0$ und $f(y) \neq 0$. Für alle $x \in X$ gilt dann $0 = f(Tx) = (T'f)(x)$ und somit $f \in \ker T'$. Daher ist $y \notin (\ker T')_\perp$, und es folgt die Behauptung. ∎

11.3 Der Satz vom abgeschlossenen Bild

Sei T ein Operator mit abgeschlossenem Bild, d.h. $\overline{\operatorname{im} T} = \operatorname{im} T$. Dann gilt $\operatorname{im} T = (\ker T')_\perp$. Somit ist die Gleichung $Tx = y$ für $y \in Y$ genau dann in X lösbar, wenn $y \in \operatorname{im} T = (\ker T')_\perp$. Dies ist bemerkenswert, da die Menge $\ker T'$ oft leichter zu bestimmen ist als $\operatorname{im} T$. (Operatoren mit abgeschlossenem Bild heißen oft auch *normal auflösbar*.)

Daher ist die Frage interessant, wann ein Operator T ein abgeschlossenes Bild hat. Dies ist z.B. der Fall, wenn es ein $m > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$

$$m\|x\| \leq \|Tx\|$$

gilt (siehe Satz 4.7). In diesem Fall ist T notwendigerweise injektiv. Eine Verallgemeinerung auf den Fall, dass T nicht injektiv ist, liefert Satz 11.10. Eine allgemeine Charakterisierung beschreibt schließlich der wichtige Satz vom abgeschlossenen Bild (closed range theorem), den wir uns in diesem Unterabschnitt ansehen (Satz 11.12).

Definition 11.8 *Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Unterraum. Der* Quotientenraum *X/U besteht aus allen Äquivalenzklassen $[x] := x + U$ von Elementen $x \in X$. Wir versehen X/U mit den Operationen*

$$[x] + [y] := [x + y], \quad \lambda[x] := [\lambda x]$$

für $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ und definieren auf X/U

$$\|[x]\|_{X/U} := \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{u \in U} \|x - u\|.$$

Man zeigt leicht, dass diese Definitionen nicht von der Wahl der Äquivalenzklassen abhängen.

Satz 11.9 *Sei X ein Banachraum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist $\|.\|_{X/U}$ eine Norm auf X/U, und X/U ist ein Banachraum.*

Beweis. Der Nachweis, dass $\|.\|_{X/U}$ eine Norm auf X/U darstellt, ist leicht (Übungsaufgabe). Zum Beweis der Vollständigkeit des normierten Raums X/U sei $([x_j])_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X/U. Man findet dann eine Teilfolge $([x_{j_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ von $([x_j])_{j \in \mathbb{N}}$ so, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $j \geq j_k$ gilt

$$\|[x_{j_k}] - [x_j]\|_{X/U} \leq 2^{-k}.$$

Mit $y_k := x_{j_k} - x_{j_{k+1}}$ folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \|[y_k]\|_{X/U} < \infty$.
Nach Definition der Norm $\|\cdot\|_{X/U}$ findet man zu jedem y_k einen Vertreter $y_k' \in [y_k]$ mit

$$\|y_k'\| \leq \|[y_k]\|_{X/U} + 2^{-k}.$$

Damit folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k'\| < \infty$. Da X vollständig ist, existiert ein $y \in X$ mit $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k'$ (aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz). Weiter gilt

$$\left\| [y] - \sum_{k=1}^{m} [y_k] \right\|_{X/U} = \left\| \left[y - \sum_{k=1}^{m} y_k' \right] \right\|_{X/U} \leq \left\| y - \sum_{k=1}^{m} y_k' \right\| \to 0$$

für $m \to \infty$. Also ergibt sich die Konvergenz in X/U

$$[y] \overset{m\to\infty}{\longleftarrow} \sum_{k=1}^{m} [y_k] = \sum_{k=1}^{m} \big([x_{j_k}] - [x_{j_{k+1}}] \big) = [x_{j_1}] - [x_{j_{m+1}}].$$

Die Folge $([x_{j_k}])_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert also in X/U. Da $([x_j])_{j \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, konvergiert damit auch $([x_j])_{j \in \mathbb{N}}$ in X/U, und X/U ein Banachraum. ■

Satz 11.10 *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann sind äquivalent:*
(a) $\operatorname{im} T$ *ist abgeschlossen in Y.*

(*b*) *Es gibt* $m > 0$*, so dass für alle* $x \in X$ *gilt*

$$m \, \|[x]\|_{X/\ker T} \leq \|Tx\|.$$

(*c*) *Es gibt* $m > 0$*, so dass zu jedem* $y \in \operatorname{im} T$ *ein* $x \in X$ *existiert mit* $y = Tx$ *und*

$$m \, \|x\| \leq \|Tx\|.$$

Beweis. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*): Sei $\operatorname{im} T$ abgeschlossen. Da $\ker T$ stets abgeschlossen ist, ist $X/\ker T$ ein Banachraum. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass T eine wohldefinierte bijektive lineare Abbildung

$$\tilde{T} : X/\ker T \to \operatorname{im} T$$

mit $\tilde{T}([x]) = Tx$ induziert. Außerdem ist $\tilde{T}$ stetig mit $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Da $\operatorname{im} T$ ein Banachraum ist, ist nach dem Satz von der offenen Abbildung $\tilde{T}^{-1}$ stetig. Also existiert ein $m > 0$ mit

$$\|\tilde{T}^{-1} y\|_{X/\ker T} \leq \frac{1}{m} \|y\| \quad \text{für alle } y \in \operatorname{im} T.$$

Da $\tilde{T}$ bijektiv ist, gibt es zu jedem $y \in \operatorname{im} T$ genau ein $[x] \in X/\ker T$ mit $\tilde{T}^{-1} y = [x]$ bzw. $y = \tilde{T}[x] = Tx$. Hieraus folgt (*b*).

(*b*) $\Leftrightarrow$ (*c*): Die Äquivalenz von (*b*) und (*c*) folgt aus der Tatsache, dass es zu jedem $[x] \in X/\ker T$ ein $\tilde{x} \in [x]$ gibt mit $\|\tilde{x}\| \leq 2\|[x]\|_{X/\ker T} \leq 2\|\tilde{x}\|$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*): Aus (*b*) und Satz 4.7 folgt, dass der oben definierte bijektive Operator $\tilde{T} : X/\ker T \to \operatorname{im} T \subset Y$ ein abgeschlossenes Bild hat. ∎

Lemma 11.11 *Seien* X, Y *Banachräume und* $T \in L(X, Y)$*. Weiter gebe es ein* $m > 0$ *mit*

$$m\|f\| \leq \|T'f\| \quad \textit{für alle } f \in Y'.$$

Dann ist T *eine offene und surjektive Abbildung.*

Beweis. Für $r > 0$ sei $B_r := B_r(0)$. Mit Ideen wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (Satz 6.2) genügt es zu zeigen, dass $\overline{TB_1}$ eine offene Kugel um 0 enthält. Wir zeigen genauer, dass $B_m \subseteq \overline{TB_1}$.

Angenommen, $B_m \not\subseteq \overline{TB_1}$. Sei $y_0 \in B_m \setminus \overline{TB_1}$. Da $\overline{TB_1}$ abgeschlossen und konvex ist, existiert nach Folgerung 8.11 ein Funktional $f \in Y'$ mit $\operatorname{Re}(f(y)) < \operatorname{Re}(f(y_0))$ für alle $y \in \overline{TB_1}$. Dann gilt $\operatorname{Re}(f(Tx)) < \operatorname{Re}(f(y_0))$ für alle $x \in B_1 \subset X$. Mit einer einfachen Drehung von x in $B_1(0)$ mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ können wir o.E. erreichen, dass $\operatorname{Re}(f(T(\alpha x))) = |f(T(\alpha x))|$ und folglich

$$\operatorname{Re}(f(y_0)) > \operatorname{Re}(f(T(\alpha x))) = |f(T(\alpha x))| = |f(Tx)|$$

ist. Also gilt

$$\begin{aligned} m\|f\| &\leq \|T'f\| = \sup_{x\in B_1} |(T'f)(x)| = \sup_{x\in B_1} |f(Tx)| \leq \mathrm{Re}(f(y_0)) \\ &\leq |f(y_0)| \leq \|y_0\|\,\|f\| \end{aligned}$$

und somit $m \leq \|y_0\|$. Dies ist ein Widerspruch zu $y_0 \in B_m$. ■

Satz 11.12 (Satz vom abgeschlossenen Bild, Closed Range Theorem) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) $\operatorname{im} T$ *ist abgeschlossen in* Y,
(b) $\operatorname{im} T = (\ker T')_\perp$,
(c) $\operatorname{im} T'$ *ist abgeschlossen in* X',
(d) $\operatorname{im} T' = (\ker T)^\perp$.

Anders gesagt: T is genau dann normal auflösbar, wenn T' normal auflösbar ist.

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$: Ist $\operatorname{im} T$ abgeschlossen in Y, so folgt aus Satz 11.7, dass $\operatorname{im} T = \overline{\operatorname{im} T} = (\ker T')_\perp$. Die Umkehrung folgt aus der Tatsache, dass $(\ker T')_\perp$ stets abgeschlossen ist.

$(a) \Rightarrow (d)$: Sei zunächst $f \in \operatorname{im} T'$, also $f = T'g$ für ein geeignetes $g \in Y'$. Für $x \in \ker T$ gilt $f(x) = (T'g)(x) = g(Tx) = 0$, woraus $f \in (\ker T)^\perp$ folgt. Daher ist $\operatorname{im} T' \subset (\ker T)^\perp$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $g \in (\ker T)^\perp$. Zu g definieren wir eine Abbildung $f : \operatorname{im} T \to \mathbb{K}$ durch

$$f(y) := g(x) \quad \text{für } y = Tx \in \operatorname{im} T,$$

und zeigen, dass f wohldefiniert ist und im Dualraum von $\operatorname{im} T$ liegt:

- f ist wohldefiniert: Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $Tx_1 = Tx_2$. Dann gilt $T(x_1 - x_2) = 0$, also $x_1 - x_2 \in \ker T$. Wegen $g \in (\ker T)^\perp$ folgt $g(x_1 - x_2) = 0$ und somit $g(x_1) = g(x_2)$.

- f ist linear: Das zeigt eine einfache Rechnung.

- f ist stetig: Sei $y \in \operatorname{im} T$. Da $\operatorname{im} T$ nach Voraussetzung (a) abgeschlossen ist, gibt es nach Satz 11.10 ein $m > 0$ und zu jedem $y \in \operatorname{im} T$ ein $x \in X$ mit $Tx = y$ und $m\|x\| \leq \|Tx\|$. Hieraus folgt

  $$|f(y)| = |g(x)| \leq \|x\|\|g\| \leq \frac{1}{m}\|y\|\|g\|.$$

  Also ist f stetig auf $\operatorname{im} T$.

Es ist also tatsächlich $f \in (\operatorname{im} T)'$. Mit dem Satz von Hahn-Banach finden wir dann eine Fortsetzung $F \in Y'$ von f, wobei

$$g(x) = f(Tx) = F(Tx) = (T'F)(x)$$

für alle $x \in X$ gilt. Damit ist $g = T'F \in \operatorname{im} T'$.

$(d) \Rightarrow (c)$ ist trivial, da $(\ker T)^\perp$ stets abgeschlossen ist.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $\operatorname{im} T'$ abgeschlossen in X'. Wir wollen zeigen, dass dann $\operatorname{im} T$ abgeschlossen in Y ist.

Dazu definieren wir $Z := \overline{\operatorname{im} T}$ und $T_1 \in L(X, Z)$ durch $T_1 x := Tx$ für alle $x \in X$ (der Raum Y wird also durch den ggf. kleineren Banachraum Z ersetzt). Dann gilt

$$(T'f)(x) = f(Tx) = (f|_Z)(T_1 x) = \big(T_1'(f|_Z)\big)(x)$$

für alle $x \in X$ und $f \in Y'$, so dass $T'f = T_1'(f|_Z)$ für alle $f \in Y'$ gilt.

Umgekehrt gibt es zu jedem $g \in Z'$ eine Fortsetzung $f \in Y'$ (d.h. $f|_Z = g$) mit $T'f = T_1'(f|_Z) = T_1' g$. Damit ist $\operatorname{im} T_1' = \operatorname{im} T'$, also nach Voraussetzung ein abgeschlossener Unterraum von X'. Außerdem ist $\operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T$ nach Definition von Z ein dichter Teilraum von Z.

Mit Satz 11.7 (c) folgt nun $Z = \overline{\operatorname{im} T_1} = (\ker T_1')_\perp$. Damit ist T_1' injektiv, und $T_1' : Z' \to \operatorname{im} T_1'$ ist ein stetiger bijektiver Operator zwischen Banachräumen, nach dem Satz von der offenen Abbildung also sogar stetig invertierbar. Daher gibt es ein $m > 0$ mit

$$m\|g\|_{Z'} \le \|T_1' g\|_{X'} \quad \text{für alle } g \in Z'.$$

Lemma 11.11 impliziert $\operatorname{im} T_1 = Z$, also

$$\overline{\operatorname{im} T} = Z = \operatorname{im} T_1 = \operatorname{im} T,$$

woraus die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} T$ folgt. ∎

Zum Abschluss beweisen wir, dass ein Operator genau dann kompakt ist, wenn der adjungierte Operator kompakt ist.

Satz 11.13 (Schauder) *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T \in K(X, Y)$ genau dann, wenn $T' \in K(Y', X')$.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $T \in L(X, Y)$ kompakt. Dann ist nach Definition $K := \overline{TB_1(0)} \subset Y$ kompakt. Sei (g_n) eine Folge in $B_1(0) \subset Y'$. Dazu betrachten wir die Funktionen

$$f_n : K \to \mathbb{K}, \quad f_n(y) := g_n(y) \quad (\text{also } f_n := g_n|_K).$$

Wegen der Abschätzung $|f_n(y) - f_n(\tilde{y})| \le \|y - \tilde{y}\|\,\|g_n\| \le \|y - \tilde{y}\|$ ist (f_n) eine Familie gleichgradig stetiger und punktweise beschränkter Funktionen auf dem Kompaktum K. Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert die Existenz einer in $C(K)$ konvergenten Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (f_n).

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(T'g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in X' konvergiert. Dazu genügt es zu zeigen, dass $(T'g_{n_k})$ eine Cauchy-Folge ist. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}
\|T'g_{n_k} - T'g_{n_l}\| &= \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |(T'g_{n_k} - T'g_{n_l})(x)| \\
&= \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |(g_{n_k} - g_{n_l})(Tx)| \\
&= \sup_{x\in\overline{B_1(0)}} |f_{n_k}(Tx) - f_{n_l}(Tx)| \\
&\leq \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_{\infty,K}.
\end{aligned}$$

Folglich konvergiert die Folge $(T'g_{n_k})$ in X'.

$\Leftarrow$: Sei nun $T' \in K(Y', X')$. Wie wir soeben gesehen haben, ist dann der Operator $T'' : X'' \to Y''$ kompakt. Dann ist nach Satz 11.4 (c) auch $T'' \circ J_X = J_Y \circ T$ kompakt. Jede Folge in $J_Y \circ TB_1(0)$ enthält also eine konvergente Teilfolge in Y''. Da J_Y eine Isometrie ist, enthält folglich jede Folge in $TB_1(0)$ eine konvergente Teilfolge in Y. Also ist T kompakt. ■

12 Riesz-Schauder-Theorie

12.1 Fredholmoperatoren und ihre Adjungierten

Definition 12.1 *Seien X, Y normierte Räume. Ein Operator $T \in L(X, Y)$ heißt* Fredholmoperator*, falls*

$$\dim \ker T < \infty \quad \textit{und} \quad \operatorname{codim} \operatorname{im} T := \dim(Y/\operatorname{im} T) < \infty.$$

Wir schreiben $F(X, Y)$ für die Menge der Fredholmoperatoren in $L(X, Y)$ und $F(X)$ statt $F(X, X)$. Für $T \in F(X, Y)$ heißt

$$\operatorname{ind}(T) := \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{im} T$$

der Index *von T.*

Fredholmoperatoren sind also "fast invertierbar" in dem Sinn, dass alles, was die Invertierbarkeit verhindert, auf endlich-dimensionale Räume beschränkt bleibt (der Kern ist nicht $\{0\}$, aber endlich-dimensional; das Bild ist nicht Y, aber es fehlen nur endlich viele Dimensionen zu ganz Y). Insbesondere ist jeder invertierbare Operator auch ein Fredholmoperator und hat den Index 0. Lineare Operatoren zwischen endlich-dimensionalen Räumen sind stets auch Fredholmoperatoren. Überlegen Sie, welchen Wert ihr Index hat!

Lemma 12.2 *Seien X, Y ein Banachräume.*

(a) Sei $Z \subset X$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Dann ist Z abgeschlosssen, und es gibt einen Komplementärraum W mit $X = Z \oplus W$ im Sinne einer direkten topologischen Summenzerlegung. Insbesondere gibt es eine Projektion $P \in L(X)$ mit $\operatorname{im} P = Z$ *und* $\ker P = W$.

(b) Sei $Z \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\operatorname{codim} Z < \infty$. *Dann gibt es einen Komplementärraum W mit $X = Z \oplus W$ im Sinne einer direkten topologischen Summenzerlegung. Insbesondere gibt es eine Projektion $P \in L(X)$ mit* $\operatorname{im} P = Z$ *und* $\ker P = W$.

(c) Für jeden Fredholmoperator $T \in F(X, Y)$ ist der Bildraum $\operatorname{im} T$ *abgeschlossen.*

Beweis. (a) Als endlich dimensionaler Unterraum ist Z nach Lemma 9.6 abgeschlossen. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von Z. Dann gibt es Funktionale $f_i \in Z'$ mit $f_i(b_j) = \delta_{ij}$, die mit dem Satz von Hahn-Banach zu Funktionalen $F_i \in X'$ fortgesetzt werden können. Man rechnet leicht nach, dass der Operator

$$P : X \to X, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{n} F_k(x) b_k,$$

eine stetige Projektion mit $\operatorname{im} P = Z$ ist. Dann ist $X = Z \oplus \ker P$ eine direkte topologische Summenzerlegung.

(b) Wegen $\operatorname{codim} Z =: n < \infty$ gibt es linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_n$ in X, so dass $X = Z \oplus W$ mit $W := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ eine algebraische Zerlegung von X liefert. Wir betrachten den Projektor

$$P : X \to X, \quad x = z + w \mapsto z.$$

Da Z abgeschlossen ist, ist P abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 6.10) ist P sogar stetig.

(c) Sei $n := \operatorname{codim} \operatorname{im} T$, und wie im Beweis von Teil (b) sei $Y = \operatorname{im} T \oplus W$ mit $W = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ eine algebraische Zerlegung von Y. Wir betrachten den Operator

$$S : (X/\ker T) \times W \to Y, \quad ([x], w) \mapsto Tx + w.$$

Man zeigt leicht, dass S wohldefiniert, linear, stetig und bijektiv ist. Also ist nach dem Satz von der offenen Abbildung $S^{-1} : Y \to (X/\ker T) \times W$ stetig. Insbesondere ist, da $(X/\ker T) \times \{0\}$ abgeschlossen ist, auch $\operatorname{im} T = (S^{-1})^{-1}\big((X/\ker T) \times \{0\}\big)$ abgeschlossen. ∎

Satz 12.3 *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann ist $T \in F(X, Y)$ genau dann, wenn $T' \in F(Y', X')$. In diesem Fall gilt* $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T')$.

Wir benötigen zum Beweis dieses Satzes zwei Formeln, die die Dimensionen von Kern und Bild von T und T' in Relation stellen. Wir beweisen daher zunächst folgendes Lemma.

Lemma 12.4 *Seien X, Y Banachräume und $T \in F(X, Y)$. Dann gilt*
(a) $\operatorname{codim} \operatorname{im} T = \dim (\operatorname{im} T)^\perp = \dim \ker T'$,
(b) $\operatorname{codim} \operatorname{im} T' = \dim \ker T$.

Beweis. (a) Sei $\{w_1, \dots, w_n\}$ eine Basis eines Komplementärraums $W \subset Y$ zu $\operatorname{im} T$. Wir definieren Funktionale $f_i \in Y'$ durch $f_i(w_j) := \delta_{ij}$ und $f_i(y) = 0$ für alle $y \in \operatorname{im} T$. Diese Funktionale sind aufgrund der Bedingung $f_i(w_j) = \delta_{ij}$ linear unabhängig und liegen in $(\operatorname{im} T)^\perp$. Wir zeigen, dass sie $(\operatorname{im} T)^\perp$ aufspannen.

Sei also $f \in (\operatorname{im} T)^\perp$. Dann stimmen f und $\sum_{i=1}^n f(w_i) f_i$ auf $\operatorname{im} T$ und auf $w_1, \dots, w_n$ überein. Also gilt $f = \sum_{i=1}^n f(w_i) f_i$, und $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis von $(\operatorname{im} T)^\perp$. Dies zeigt die erste Gleichheit; die zweite folgt aus Satz 11.7 (a).

(b) Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von $\ker T$, und seien $f_1, \dots, f_n \in X'$ linear unabhängige Funktionale mit $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Wir zeigen, dass die Nebenklassen $[f_i]$ mit $1 \le i \le n$ eine Basis von $X'/\operatorname{im} T'$ bilden. Zunächst sind die Nebenklassen $[f_1], \dots, [f_n]$ linear unabhängig: Aus $0 = \sum_i \alpha_i [f_i] = \big[\sum_i \alpha_i f_i\big]$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{K}$ folgt $\sum_i \alpha_i f_i \in \operatorname{im} T'$. Da $\operatorname{im} T$ abgeschlossen ist, ist nach Satz 11.12 (d) vom abgeschlossenen Bild $\operatorname{im} T' = (\ker T)^\perp$. Somit gilt $0 = \big(\sum_i \alpha_i f_i\big)(x_k) = \alpha_k$.

Um zu zeigen, dass die Nebenklassen $[f_1], \dots, [f_n]$ den Raum $X'/\operatorname{im} T'$ aufspannen, sei $f \in X'$ beliebig. Dann stimmt f mit $\sum_{i=1}^n f(x_i) f_i$ auf $x_1, \dots, x_n$ und somit auf $\ker T = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ überein. Folglich gilt

$$f - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i \in (\ker T)^\perp = \operatorname{im} T'.$$

Hieraus ergibt sich $[f] = \sum_{i=1}^n f(x_i)[f_i]$; die Vektoren $[f_1], \ldots, [f_n]$ bilden also tatsächlich eine Basis von $X'/\operatorname{im} T'$. ■

Beweis von Satz 12.3. Wir zeigen nur die Implikation $\Rightarrow$ und die Indexformel. Für den Beweis der umgekehrten Implikation sei auf die Literatur verwiesen (z.B. V. Müller, Spectral Theory of Linear Operators, S. 150 und Anhang S. 342).

Sei also $T \in F(X, Y)$. Dann sind $\operatorname{im} T$ und somit auch $\operatorname{im} T'$ abgeschlossen, und mit Lemma 12.4 folgt

$$\dim \ker T' = \operatorname{codim} \operatorname{im} T, \quad \dim \ker T = \operatorname{codim} \operatorname{im} T'.$$

Folglich ist $T' \in F(Y', X')$ und $\operatorname{ind}(T) = -\operatorname{ind}(T')$. ■

12.2 Das Spektrum kompakter Operatoren

Wir kommen nun zu einem Hauptresultat dieses Kapitels, den *Spektralsatz kompakter Operatoren.*

Satz 12.5 (Riesz, Schauder) *Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $T \in K(X)$. Dann*

(a) ist $0 \in \sigma(T)$; inbesondere ist T nicht bijektiv;

(b) ist $\lambda I - T \in F(X)$ und $\operatorname{ind}(\lambda I - T) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(c) besteht das Spektrum von T aus $\lambda = 0$ und höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nur in 0 häufen können. Für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ von T ist der zugehörige Eigenraum endlich-dimensional.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir noch einige Lemmata.

Lemma 12.6 *Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $T \in K(X)$. Weiter sei $S := I - T$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\dim \ker(S^n) < \infty$, und $\operatorname{im}(S^n)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Aus dem binomischen Satz folgt

$$S^n = (I - T)^n = I + T_n \quad \text{mit} \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k T^k.$$

Insbesondere ist T_n kompakt. Es genügt daher, den Fall $n = 1$ zu betrachten.

Wir zeigen zunächst, dass $\dim\ker S < \infty$. Sei hierzu $\overline{B}$ die abgeschlossene Einheitskugel im Banachraum $\ker S$. Dann ist $T|_{\ker S} = I|_{\ker S}$. Da T und ebenso $T|_{\ker S}$ kompakt sind, ist auch $I|_{\ker S}$ kompakt. Also ist $\overline{B} = I(\overline{B})$ kompakt. Aus Satz 9.7 folgt nun $\dim\ker S < \infty$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{im} S$ abgeschlossen ist. Nach Satz 11.10 genügt es zu beweisen, dass ein $m > 0$ existiert mit

$$m\,\|[x]\|_{X/\ker S} \leq \|Sx\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Angenommen, es gäbe kein solches m. Dann gibt es eine Folge (x_n) in X mit $\|[x_n]\|_{X/\ker S} = 1$ und $Sx_n \to 0$. Wir finden weiterhin für jedes n ein $u_n \in \ker S$ mit $\|x_n - u_n\| \leq 2$. Die dadurch definierte Folge $(x_n') := (x_n - u_n)$ ist wegen $1 = \|[x_n]\| \leq \|x_n'\| \leq 2$ beschränkt und erfüllt $Sx_n' \to 0$.

Da T kompakt ist, enthält (Tx_n') eine konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $y \in X$. Ohne Einschränkung gelte bereits $Tx_n' \to y$. Dann gilt $0 \leftarrow Sx_n' = x_n' - Tx_n'$, folglich $x_n' \to y$ und $Sy = \lim_{n\to\infty} Sx_n' = 0$. Also ist $y \in \ker S$, im Widerspruch zu $\operatorname{dist}(x_n', \ker S) = \|[x_n']\| = \|[x_n]\| \geq 1$. ∎

Lemma 12.7 *Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $T \in K(X)$, und sei $S := I - T$ injektiv. Dann ist* $\operatorname{im} S = X$ *und somit* $\operatorname{ind}(S) = 0$.

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $R_j := \operatorname{im}(S^j)$. Nach Lemma 12.6 ist R_j ein abgeschlossener Unterraum von X. Ferner gilt offenbar $R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$.

Angenommen, jede dieser Inklusionen wäre echt. Dann existiert nach dem Lemma von Riesz eine Folge (y_n) mit $y_n \in R_n$, $\|y_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}(y_n, R_{n+1}) > 1/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt für $k < j$

$$Ty_k - Ty_j = y_k - (y_j + Sy_k - Sy_j) = y_k - z \quad \text{mit } z := y_j + Sy_k - Sy_j.$$

Man sieht leicht, dass $z \in R_{k+1}$ und somit $\|y_k - z\| = \|Ty_k - Ty_j\| \geq 1/2$. Folglich enthält $(Ty_k)_k$ keine konvergente Teilfolge – im Widerspruch zur Kompaktheit von T. Unsere Annahme war somit falsch, und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_n = R_{n+1}$.

Sei nun $y \in X$. Dann ist $S^n y \in R_n = R_{n+1}$. Es existiert also ein $x \in X$ mit $S^n y = S^{n+1}x$ bzw. $S^n(Sx - y) = 0$. Da mit S auch S^n injektiv ist, folgt $Sx = y$. Daher ist S surjektiv. Schließlich ist $\operatorname{ind}(S) = 0 - 0 = 0$. ∎

Lemma 12.8 *Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $T \in K(X)$. Für $S := I - T$ gilt dann*

$$\operatorname{codim}\operatorname{im} S = \dim\ker S < \infty$$

und somit $S \in F(X)$ mit $\operatorname{ind}(S) = 0$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Abschätzung $\leq$. Nach Lemma 12.6 ist $\ker S$ endlich-dimensional und $\operatorname{im} S$ abgeschlossen. Angenommen, es wäre

$$\operatorname{codim} \operatorname{im} S > \dim \ker S =: k.$$

Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ mit $\dim Y = k$ und

$$\operatorname{im} S \oplus Y \subsetneq X.$$

Da $\ker S$ endlich-dimensional ist, finden wir mit Lemma 12.2 (a) eine Projektion $P \in L(X)$ mit $PX = \ker S$, die direkte topologische Summenzerlegung

$$X = \ker S \oplus (I - P)X$$

und einen Isomorphismus $J : \ker S \to Y$. Dann ist $\tilde{T} := T - JP \in K(X)$.

Sei $\tilde{S} := I - \tilde{T} = S + JP$. Wir zeigen, dass $\tilde{S}$ injektiv ist. Tatsächlich folgt aus $0 = \tilde{S}x = Sx + JPx$ mit $Sx \in \operatorname{im} S$ und $JPx \in Y$ sowie aus $\operatorname{im} S \cap Y = \{0\}$ sofort $JPx = 0$, also $Px = 0$, und $Sx = 0$; wegen $P|_{\ker S} = I|_{\ker S}$ gilt dann auch $x = 0$. Nun folgt aus Lemma 12.7

$$X = \operatorname{im} \tilde{S} \subseteq \operatorname{im} S \oplus Y \subsetneq X,$$

ein Widerspruch. Folglich ist $\operatorname{codim} \operatorname{im} S \leq \dim \ker S$ und somit $S \in F(X)$.

Wir zeigen noch die umgekehrte Abschätzung. Es ist $T \in K(X)$ und somit nach dem Satz von Schauder (Satz 11.13) $T' \in K(X')$. Dann folgt aus der bereits bewiesenen Abschätzung (mit $S' = I - T'$) und mit Lemma 12.4, dass

$$\dim \ker S = \operatorname{codim} \operatorname{im} S' \leq \dim \ker S' = \operatorname{codim} \operatorname{im} S.$$

Somit ist $\operatorname{ind}(S) = 0$ und $\operatorname{codim} \operatorname{im} S = \dim \ker S$. ■

Wir können nun den wichtigen Satz 12.5 beweisen.

Beweis von Satz 12.5. (a) Wäre $0 \notin \sigma(T)$, so wäre T bijektiv und stetig invertierbar. Dann wäre $I = TT^{-1}$ kompakt und somit $\overline{B_1(0)}$ kompakt - ein Widerspruch zu Satz 9.7.

(b) Dies folgt direkt aus Lemma 12.6 und Lemma 12.8, angewandt auf $\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$ für $\lambda \neq 0$.

(c) Wir halten zunächst fest, dass alle Elemente in $\sigma(T) \setminus \{0\}$ Eigenwerte von T sind. Anderenfalls wäre $T - \lambda I$ für $\lambda \in (\sigma(T) \setminus \sigma_p(T)) \setminus \{0\}$ injektiv; dann wäre $T - \lambda I$ nach Lemma 12.7 auch surjektiv, also stetig invertierbar, und $\lambda \in \rho(T)$.

Wir nehmen an, es gäbe eine Folge (λ_k) in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von paarweise verschiedenen Eigenwerten mit $\lambda_k \to \lambda \neq 0$. Ferner sei (x_k) eine entsprechende Folge von Eigenvektoren und $X_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind; es gilt also $\dim X_n = n$. Dann existiert nach dem Lemma von Riesz eine Folge (y_k) von Vektoren $y_k \in X_k$ mit $\|y_k\| = 1$ und $\|y_k - z_k\| \geq 1/2$ für alle $z_k \in X_{k-1}$. Nun ist aber

$$\frac{1}{\lambda_k} T y_k - \frac{1}{\lambda_l} T y_l = y_k - z$$

mit

$$z := y_l + \frac{1}{\lambda_l}(T - \lambda_l I) y_l - \frac{1}{\lambda_k}(T - \lambda_k I) y_k \in X_{k-1} \quad \text{für alle } k > l;$$

man beachte hier, dass $(T - \lambda_k I) y_k \in X_{k-1}$ ist, da y_k in $X_k = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ liegt und x_k ein Eigenvektor zu λ_k ist. Somit ist $\|\frac{1}{\lambda_k} T y_k - \frac{1}{\lambda_l} T y_l\| \geq 1/2$ und kann – im Widerspruch zur Kompaktheit von T – keine konvergente Teilfolge enthalten. Hieraus folgen leicht alle übrigen Aussagen. ■

Wir halten noch folgendes einfaches Lemma fest:

Lemma 12.9 *Sei X ein Banachraum und $T \in K(X)$. Dann sind für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\lambda I - T$ ist injektiv,

(b) $\lambda I - T$ ist surjektiv,

(c) $\lambda I - T'$ ist injektiv,

(d) $\lambda I - T'$ ist surjektiv.

Beweis. Aus $\operatorname{ind}(\lambda I - T) = \operatorname{ind}(\lambda I - T') = 0$ folgt die Äquivalenz von (a) und (b) sowie von (c) und (d). Da Injektivität von $\lambda I - T$ bzw. die Aussage $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ nach Satz 11.7 (b) äquivalent zu $\operatorname{im}(\lambda I - T') = X'$ ist, sind auch (a) und (d) äquivalent. ■

Unter den Voraussetzungen dieses Lemmas besitzt also die Gleichung $(\lambda I - T)x = y$ genau dann für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung x, wenn die homogene Gleichung $(\lambda I - T)x = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt. Dies wird auch als *Fredholmsche Alternative* bezeichnet. Genauer gilt sogar:

Lemma 12.10 *Sei X ein Banachraum, $T \in K(X)$ und $y \in X$. Dann besitzt die Gleichung $(\lambda I - T)x = y$ genau dann eine Lösung $x \in X$, wenn $f(y) = 0$ für alle Lösungen $f \in X'$ der homogenen adjungierten Gleichung $(\lambda I - T')f = 0$ gilt.*

Die Anzahl dieser Nebenbedingungen an y ist also gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung $(\lambda I - T)x = 0$. Es gilt sogar

$$\begin{aligned} \dim\ker(\lambda I - T) &= \operatorname{codim}\operatorname{im}(\lambda I - T) \\ &= \dim\ker(\lambda I - T') = \operatorname{codim}\operatorname{im}(\lambda I - T'). \end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 11.12 (vom abgeschlossenen Bild) gilt $y \in \operatorname{im}(\lambda I - T)$ genau dann, wenn $y \in \ker(\lambda I - T')_\perp$. Also stimmt die Anzahl der Nebenbedingungen wegen Lemma 12.4 und $\operatorname{ind}(\lambda I - T) = 0$ mit

$$\dim\ker(\lambda I - T') = \operatorname{codim}\operatorname{im}(\lambda I - T) = \dim\ker(\lambda I - T)$$

überein. ■

12.3 Weiteres zu Fredholmoperatoren

Wir wenden uns nun noch einmal den Fredholmoperatoren zu.

Satz 12.11 *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $F(X,Y)$ offen in $L(X,Y)$, und die Indexfunktion* $\mathrm{ind} : F(X,Y) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig. Die Stetigkeit der Indexfunktion impliziert insbesondere, dass sie auf jeder Zusammenhangskomponente von $F(X,Y)$ konstant ist.*

Dies ist höchst bemerkenswert: Ist $T \in L(X,Y)$ ein Fredholmoperator, so sind i. allg. weder $\dim\ker T$ noch $\operatorname{codim}\operatorname{im} T$ invariant bzgl. kleiner Störungen. Ihre Differenz ist es aber!

Beweis. Sei $S \in F(X,Y)$. Wir wählen mit Lemma 12.2 einen abgeschlossenen Unterraum N_1 von X mit $X = \ker S \oplus N_1$ sowie einen endlich-dimensionalen Unterraum $Y_1 \subset Y$ mit $\operatorname{im} S \oplus Y_1 = Y$. Es gilt also $SN_1 = \operatorname{im} S$ und $(SN_1) \oplus Y_1 = Y$. Der Operator

$$\tilde{S} : N_1 \times Y_1 (\subset X \times Y) \to Y, \quad (x,y) \mapsto Sx + y.$$

ist offenbar linear, stetig und bijektiv und somit stetig invertierbar. Da die Menge aller bijektiven Abildungen in $L(N_1 \times Y_1, Y)$ offen ist, finden wir ein $\varepsilon > 0$, so dass alle Operatoren in $B_\varepsilon(\tilde{S}) \subset L(N_1 \times Y_1, Y)$ stetig invertierbar sind.

Sei nun $T \in B_\varepsilon(S) \subset L(X,Y)$. Dann liegt der Operator $\tilde{T} : N_1 \times Y_1 \to Y$, $(x,y) \mapsto Tx + y$, in $B_\varepsilon(\tilde{S})$ und ist stetig invertierbar. Es ist also $Y = \tilde{T}(N_1 \times Y_1) = (TN_1) \oplus Y_1$. Wegen $Tn_1 = \tilde{T}(n_1, 0) \neq 0$ für alle $0 \neq n_1 \in N_1$ und $N_1 \oplus \ker S = X$ ist $\dim\ker T \leq \dim\ker S < \infty$. Weiter folgt aus $TN_1 \subset \operatorname{im} T$ und $(TN_1) \oplus Y_1 = Y$, dass $\operatorname{codim}\operatorname{im} T \leq \dim Y_1 < \infty$. Somit ist $T \in F(X,Y)$.

Es verbleibt, die Stetigkeit der Indexfunktion zu zeigen. Da $\ker T$ endlich-dimensional ist, definiert $N_1 \oplus \ker T$ eine direkte Summe zweier abgeschlossener Unterräume von X. Wegen $\operatorname{codim} N_1 = \dim\ker S < \infty$ finden wir einen endlich-dimensionalen Unterraum M mit $X = M \oplus N_1 \oplus \ker T$. Somit ist

$$T : N_1 \oplus M \to TN_1 \oplus TM$$

ein Isomorphismus, und es gilt $\dim M = \dim TM$. Da außerdem $\dim\ker S = \dim\ker T + \dim M$ sowie $\dim Y_1 = \operatorname{codim} TN_1 = \operatorname{codim}\operatorname{im} T + \dim TM$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\,(T) &= \dim\ker T - \operatorname{codim}\operatorname{im} T \\ &= (\dim\ker S - \dim M) - (\dim Y_1 - \dim TM) = \mathrm{ind}\,(S), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

In Kapitel 11 haben wir gesehen, dass für jeden Banachraum X die Menge der kompakten Operatoren $K(X)$ ein Ideal in der Algebra aller linearen stetigen Operatoren $L(X)$ bildet. Es ist also naheliegend, die nichtkommutative Banachalgebra $L(X)/K(X)$ mit Einselement $I + K(X) \in L(X)/K(X)$ zu untersuchen, die sogenannte *Calkinalgebra* von X. Der nachfolgenden Satz 12.14 wird zeigen, dass eine Nebenklasse $T + K(X)$ genau dann in $L(X)/K(X)$ invertierbar ist, wenn T ein Fredholmoperator ist. Ein analoges Resultat gilt für Operatoren zwischen verschiedenen Banachräumen. Hierzu zunächst folgende Definition.

Definition 12.12 *Seien X, Y Banachräume und $T, S \in L(X, Y)$. Dann heißt T* kongruent zu S modulo $K(X, Y)$*, falls $T - S \in K(X, Y)$. Wir schreiben hierfür kurz $T \equiv_K S$ oder $T = S \mod K(X, Y)$. Der Operator T heißt* modulo $K(X, Y)$ invertierbar*, falls ein Operator $S \in L(Y, X)$ existiert, so dass $I_X \equiv_K ST$ und $I_Y \equiv_K TS$. In diesem Fall heißt S eine* Inverse von T modulo $K(X, Y)$.

Anmerkung 12.13 (a) Die Kongruenz $\equiv_K$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $L(X, Y)$.

(b) Für $S, T \in L(X, Y)$ und $S_1, T_1 \in L(Z, X)$ auf Banachräumen X, Y, Z mit $S \equiv_K T$ und $S_1 \equiv_K T_1$ gilt $TT_1 \equiv_K SS_1$.

(c) Eine Inverse modulo $K(X, Y)$ ist bis auf kompakte Operatoren eindeutig bestimmt. Ist $I_Y - TS \in K(Y)$ und $I_X - \tilde{S}T \in K(X)$, so ist $S \equiv_K \tilde{S}$, und sowohl S als auch $\tilde{S}$ sind Inverse von T modulo $K(X, Y)$.

Satz 12.14 (Satz von Atkinson) *Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in L(X, Y)$ gehört genau dann zu $F(X, Y)$, wenn T eine Inverse modulo $K(X, Y)$ besitzt. In diesem Fall gibt es eine Inverse S von T modulo $K(X, Y)$ mit einem Bildraum endlicher Kodimension.*

Beweis. Sei zunächst $T \in F(X, Y)$. Dann gibt es abgeschlossene Unterräume $N_1 \subset X$ und $Y_1 \subset Y$ mit $X = N_1 \oplus \ker T$, $Y = Y_1 \oplus \operatorname{im} T$ und $\dim Y_1 < \infty$. Wir definieren

$$S : Y = \operatorname{im} T \oplus Y_1 \to X, \quad Tx + y_1 \mapsto x_1 = Px,$$

wobei zu $x \in X = N_1 \oplus \ker T$ mit Hilfe des Projektors $P : X \to N_1$ mit $\ker P = \ker T$ das eindeutig bestimmte Element $x_1 \in N_1$ ausgesucht wird.

Wegen $Tx = Tx_1$ ist $(I_Y - TS)(Tx + y_1) = (Tx + y_1) - Tx_1 = y_1$; folglich ist $I_Y - TS$ die Projektion von Y auf Y_1 entlang $\operatorname{im} T$. Ebenso ist für $n_0 \in \ker T$ und $n_1 \in N_1$ wegen $STn_1 = n_1$

$$(I_X - ST)(n_0 + n_1) = (n_0 + n_1) - STn_1 = n_0.$$

Folglich ist $I_X - ST$ die Projektion von X auf $\ker T$ entlang N_1. Wir erhalten also $\operatorname{im}(I_Y - TS) = Y_1$ und $\operatorname{im}(I_X - ST) = \ker T$. Folglich sind sowohl $I - TS$ also auch $I - ST$ als Operatoren mit endlichen Rang kompakt; somit ist S eine Inverse von T modulo $K(X,Y)$. Wegen $\operatorname{im} S = N_1$ hat S ein Bild endlicher Kodimension.

Sei nun umgekehrt S eine Inverse modulo $K(X,Y)$ zu T. Dann sind ST und TS nach Satz 12.5 Fredholmoperatoren mit $\ker T \subseteq \ker(ST)$ und $\operatorname{im} T \supseteq \operatorname{im}(TS)$. Es folgt $\dim\ker T \le \dim\ker(ST) < \infty$ und $\operatorname{codim}\operatorname{im} T \le \operatorname{codim}\operatorname{im}(TS) < \infty$ und folglich $T \in F(X,Y)$. ∎

Satz 12.15 *Seien X, Y Banachräume und $T \in F(X,Y)$ und $K \in K(X,Y)$. Dann ist $T + K \in F(X,Y)$ und* $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T+K)$*, d.h. sowohl die Fredholm-Eigenschaft als auch der Index sind invariant unter kompakten Störungen.*

Beweis. Für $t \in [0,1]$ betrachten wir die Operatoren $T_t := T + tK$, die offenbar stetig von t abhängen. Mit Satz 12.14 sieht man leicht, dass alle T_t Fredholmoperatoren sind. Es ist also $t \mapsto T_t$ eine stetige Funktion von $[0,1]$ in $F(X,Y)$ (d.h. ein Weg in $F(X,Y)$). Wegen der Stetigkeit der Indexfunktion (Satz 12.11) ist dann auch

$$[0,1] \to \mathbb{Z}, \quad t \mapsto \operatorname{ind}(T_t)$$

stetig. Nach dem Zwischenwertsatz ist diese Funktion sogar konstant. Somit ist $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T_0) = \operatorname{ind}(T_1) = \operatorname{ind}(T+K)$. ∎

Wir schließen das Kapitel ab mit dem folgenden Indexsatz zum Produkt von Fredholmoperatoren.

Satz 12.16 *Seien X, Y, Z Banachräume, $T \in F(X,Y)$ und $S \in F(Y,Z)$. Dann ist $ST \in F(X,Z)$ und*

$$\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Beweis. Der erste Aussage $ST \in F(X,Z)$ beruht auf Satz 12.14 und verbleibt als einfache Übungsaufgabe. Zum Beweis der Indexformel betrachten wir die Operatorenfamilie

$$A_t : Y \oplus X \to Z \oplus Y, \quad A_t := \begin{pmatrix} \cos(t)\, S & -\sin(t)\, ST \\ \sin(t)\, I & \cos(t)\, T \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Offensichtlich sind

$$A_0 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -ST \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Fredholmoperatoren mit

$$\operatorname{ind}(A_0) = \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(S) \quad \text{und} \quad \operatorname{ind}(A_{\pi/2}) = \operatorname{ind}(ST).$$

Es bleibt zu zeigen, dass A_t eine stetige Familie von Fredholmoperatoren ist. Dies ist aber klar wegen

$$A_t = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t)\, I & -\sin(t)\, I \\ \sin(t)\, I & \cos(t)\, I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Die Indexformel folgt nun wieder aus der Stetigkeit der Indexfunktion. ∎

13 Hilberträume

13.1 Orthonormalsysteme und Basen

Definition 13.1 *Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ heißt ein* Orthonormalsystem *(kurz: ONS), falls $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 13.2 Im Folgenraum ℓ^2 bilden die Vektoren $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (mit der 1 an der $n-$ten Position) ein Orthonormalsystem. In diesem Fall ist das ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ soger eine Art "Basis" von ℓ^2: Wir können jeden Vektor $x \in \ell^2$ als $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, also als eine "Linearkombination" aus abzählbar unendlich vielen Vektoren des ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben. ■

Lemma 13.3 *Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS im Hilbertraum H und (α_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ genau dann in H, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ konvergiert.*

Beweis. Wegen $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ gilt für $N, M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$

$$\Big\| \sum_{n=1}^{M} \alpha_n e_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n \Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=N+1}^{M} \alpha_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\alpha_n|^2.$$

Also ist die Reihe (= Folge der Partialsummen) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ genau dann eine Cauchyfolge in H, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Da sowohl H als auch $\mathbb{R}$ vollständig sind, folgt die Behauptung. ■

Satz 13.4 *Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in H. Dann konvergiert für jeden Vektor $x \in H$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$, und es gilt die* Bessel-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Insbesondere gilt $\langle x, e_k \rangle \to 0$ für $k \to \infty$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\le \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \Big\|^2 \\ &= \Big\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \Big\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle x, e_k \rangle \langle e_k, x \rangle}_{= |\langle x, e_k \rangle|^2} - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\overline{\langle x, e_j \rangle} \langle x, e_j \rangle}_{= |\langle x, e_j \rangle|^2} + \sum_{j,k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{= \delta_{jk}} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Es ist also $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Definition 13.5 *Sei $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS von H. Für $x \in H$ heißt $\langle x, e_k\rangle$ der (verallgemeinerte) k-te* Fourier-Koeffizient *von x bzgl. dieses ONS, und die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$ heißt die (verallgemeinerte)* Fourier-Reihe *von x.*

Das ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ heißt eine Orthonormalbasis (ONB) *von H, falls* span $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in H liegt.*

Satz 13.6 *Ein ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ in H ist genau dann eine ONB von H, wenn für jedes $x \in H$ die* Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2$$

gilt. In diesem Fall ist $x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$. Weiter gilt für alle $x, y \in H$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle} = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle \langle e_k, y\rangle.$$

Beweis. Mit $M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ schreiben wir H als $M \oplus M^\perp$.

"$\Rightarrow$": Sei zunächst $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB von H. Dann ist $H = M$ und demnach $M^\perp = \{0\}$, d.h. aus $y \perp e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $y = 0$.

Sei $x \in H$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $y := x - \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle e_k \perp e_n$. Daher ist $y = 0$ und $x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle e_k$. Hieraus folgt für alle $x, z \in H$

$$\begin{aligned} \langle x, z\rangle &= \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{l\in\mathbb{N}} \langle z, e_l\rangle e_l \Big\rangle \\ &= \sum_{k,l\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle z, e_l\rangle} \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle z, e_k\rangle}. \end{aligned}$$

Für $z = x$ ist $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, e_k\rangle|^2$.

"$\Leftarrow$": Aus $\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, e_k\rangle|^2$ folgt wie im Beweis von Satz 13.4 für $n \to \infty$

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k\rangle|^2 \longrightarrow 0.$$

Daher ist $x = \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k$ für alle $x \in H$ und somit $M = H$; insbesondere ist $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB in H. ■

Beispiel 13.7 Im Raum $H = L^2(0, 2\pi)$ bilden die Funktionen

$$e_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z},\ t \in (0, 2\pi),$$

eine ONB. Für jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ gilt mit den Fourier-Koeffizienten

$$\hat{f}_n := \langle f, e_n \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

die Parseval-Gleichung $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$, und es ist $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e_n(t)$ im Sinne der Konvergenz in $L^2(0, 2\pi)$. Wir zeigen nun diese Aussagen.

Wegen $\langle e_j, e_k \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijt} e^{-ikt}\, dt = \delta_{jk}$ ist $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS. Wir haben zu zeigen, dass $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ sogar eine ONB ist.

Sei zuerst $f \in C^\infty_{per}[0, 2\pi] := \{u \in C^0[0, 2\pi] : u(0) = u(2\pi)\}$. Dann lässt sich f mit einer Funktion $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{T})$ auf der komplexen Einheitskreislinie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ vermöge $f(t) = \tilde{f}(e^{it}) = \tilde{f}(z)$, $z = e^{it} \in \mathbb{T}$, identifizieren.

Nach der komplexen Version des Satzes von Stone-Weierstraß in $C^0(\mathbb{T})$ (Folgerung 3.9) gibt es zu $\tilde{f}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $\tilde{p}$,

$$\tilde{p}(z, \bar{z}) = \sum_{0 \le j,k \le n} a_{jk} z^j \bar{z}^k, \quad a_{jk} \in \mathbb{C},$$

mit $\|\tilde{f} - \tilde{p}\|_{C^0(\mathbb{T})} < \varepsilon$. Mit $z = e^{it}$ und $\bar{z} = e^{-it}$ folgt hieraus, dass ein trigonometrisches Polynom p,

$$p(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

mit $\|f - p\|_{C^0([0,2\pi])} < \varepsilon$, also $\|f - p\|_{L^2(0,2\pi)} < \varepsilon\sqrt{2\pi}$, existiert. Da bekanntlich

$$C_0^0([0, 2\pi]) = \{f \in C^0([0, 2\pi]) : \operatorname{supp} f \subset (0, 2\pi)\} \subset C^0_{per}[0, 2\pi]$$

dicht in $L^2(0, 2\pi)$ liegt, folgt, dass $\operatorname{span}\{e_k : \mathbb{Z}\}$ dicht in $L^2(0, 2\pi)$ liegt. ■

Folgerung 13.8 (Riesz-Fischer) *Jeder unendlich-dimensionale separable Hilbertraum H besitzt eine abzählbare ONB und ist isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Beweis. Ist H separabel, so existiert eine abzählbare Menge $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ linear unabhängiger Vektoren u_n so, dass $\overline{\operatorname{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$. Mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren gewinnt man aus $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $e_n \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\} \setminus \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Dies ist wegen $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$ zudem eine ONB.

Die Abbildung $H \to \ell^2(\mathbb{N})$, $x \mapsto (\langle x, e_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ ist nach Satz 13.6 (Parseval-Gleichung) eine Isometrie, bijektiv und linear. ■

13.2 Adjungierte Operatoren

Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A \in L(H_1, H_2)$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es zur Linearform $f : x \mapsto \langle Ax, y \rangle_{H_2}$ auf H_1 (mit festem $y \in H_2$) genau ein Element $z := A^* y \in H_1$ mit

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1}.$$

Man sieht sofort, dass der hierdurch definierte Operator $A^* : H_2 \to H_1$ linear ist. Wegen $\|A^* y\| = \|z\| = \|f\| \le \|A\| \, \|y\|$ ist dieser Operator stetig, und es gilt $\|A^*\| \le \|A\|$.

Definition 13.9 *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Jedem $A \in L(H_1, H_2)$ wird durch*

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1} \quad \textit{für alle } x \in H_1,\ y \in H_2,$$

eine lineare Abbildung $A^* \in L(H_2, H_1)$ zugeordnet, die sogenannte Adjungierte *oder* Hilbertraum-Adjungierte *von A.*

Mit den anti-linearen „Isomorphismen" $\Phi_j : H_j \to H_j'$ aus Satz 7.3 und der zu $A \in L(H_1, H_2)$ adjugierten Abbildung $A' \in L(H_2', H_1')$ folgt für alle $x \in H_1$, $y \in H_2$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle_{H_2} &= (\Phi_2 y)(Ax) = (A' \Phi_2 y)(x) \\ &= \langle x, \Phi_1^{-1} A' \Phi_2 y \rangle_{H_1} \\ &= \langle x, A^* y \rangle_{H_1}. \end{aligned}$$

Es ist also $A^* = \Phi_1^{-1} A' \Phi_2$ für alle $A \in L(H_1, H_2)$.

Die folgenden einfachen Eigenschaften des adjungierten Operators vermerken wir ohne Beweis (Übung).

Lemma 13.10 *Für alle $A, B \in L(H)$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*
(a) $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ und $(AB)^* = B^* A^*$.
(b) $A^{**} = A$ und $\|A\| = \|A^*\|$.

Lemma 13.11 *(a) Für alle $A \in L(H_1, H_2)$ gilt ($^\perp$ steht für das orthogonale Komplement)*

$$\begin{aligned} (\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^*, &\quad \overline{\operatorname{im} A} = (\ker A^*)^\perp, \\ (\operatorname{im} A^*)^\perp = \ker A, &\quad \overline{\operatorname{im} A^*} = (\ker A)^\perp. \end{aligned}$$

(b) Ein Operator $A \in L(H)$ ist genau dann bijektiv, wenn A^* bijektiv ist. In diesem Fall gilt $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Außerdem ist für alle $A \in L(H)$

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} := \{\bar{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} y \in (\operatorname{im} A)^{\perp} &\Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = 0 \ \ \forall x \in H_1 \\ &\Leftrightarrow \langle x, A^*y\rangle = 0 \ \ \forall x \in H_1 \\ &\Leftrightarrow y \in \ker A^*. \end{aligned}$$

Aus $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \ker A^*$ folgt weiter

$$(\ker A^*)^{\perp} = \big((\operatorname{im} A)^{\perp}\big)^{\perp} = \overline{\operatorname{im} A}.$$

Die übrigen Gleichungen lassen sich analog beweisen.

(b) Ist A bijektiv, so ist $A^{-1} \in L(H)$ und $I = AA^{-1} = A^{-1}A$. Daher gilt $I = (A^{-1})^*A^* = A^*(A^{-1})^*$; es ist also A^* bijektiv und $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Die umgekehrte Implikation folgt analog. Aus

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) &\Leftrightarrow \lambda I - A \text{ ist bijektiv} \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda} I - A^* \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(A^*) \end{aligned}$$

folgt schließlich auch die letzte Aussage. ■

Definition 13.12 *Sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $A \in L(H)$ heißt*

(a) normal, *falls $AA^* = A^*A$.*

(b) selbstadjungiert, *falls $A = A^*$.*

(c) positiv definit, *falls $A = A^*$ und $\langle Ax, x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$. In diesem Fall schreiben wir auch $A > 0$.*

(d) positiv semidefinit, *falls $A = A^*$ und $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \neq 0$. Dann schreiben wir $A \geq 0$. Sind $A, B \in L(H)$ selbstadjungiert und ist $A - B > 0$ bzw. $A - B \geq 0$, so schreiben wir $A > B$ bzw. $A \geq B$.*

Man beachte bei (c) und (d), dass für selbstadjungierte Operatoren $A \in L(H)$ der Ausdruck $\langle Ax, x\rangle$ für alle $x \in H$ reell ist; es ist ja

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Zeigen Sie zur Übung noch das *C^*-Axiom*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \quad \text{für alle } A \in L(H).$$

13.3 Orthogonale Projektionen

Definition 13.13 *Eine Projektion $P \in L(H)$ heißt* Orthogonalprojektion, *falls* $\ker P$ *und* $\operatorname{im} P$ *eine orthogonale Zerlegung von H liefern.*

Lemma 13.14 *Sei H ein Hilbertraum und $P \in L(H)$ eine Projektion. Dann sind äquivalent:*
(a) P ist eine Orthogonalprojektion;
(b) P ist selbstadjungiert;
(c) $\|x - Px\| \leq \|x - Py\|$ für alle $x, y \in H$.
Gilt eine dieser Aussagen, so ist $0 \leq P \leq I$, und es ist $\|P\| = 1$ falls $P \neq 0$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei P eine Orthogonalprojektion. Dann ist $\langle Px, y - Py \rangle = 0$ und $\langle Px - x, Py \rangle = 0$ für alle $x, y \in H$, da Px und Py in $\operatorname{im} P$ und $x - Px$ und $y - Py$ in $\ker P$ liegen. Folglich ist

$$\langle Px, y \rangle - \langle x, Py \rangle = \langle Px, y - Py \rangle + \langle Px - x, Py \rangle = 0$$

für alle $x, y \in H$ und somit $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Es ist

$$\|x - Py\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px - Py\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x - Px, Px - Py \rangle$$

für alle $x, y \in H$. Wegen

$$\langle x - Px, Px - Py \rangle = \langle P(x - Px), x - y \rangle = 0$$

folgt $\|x - Py\|^2 \geq \|x - Px\|^2$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Zuerst bemerken wir, dass $\operatorname{im} P = \ker (I - P)$ wegen $P \in L(H)$ abgeschlossen ist und dass Satz 2.25 zu $M := \operatorname{im} P$ eine orthogonale Zerlegung $H = M \oplus M^\perp$ liefert.

Die Ungleichung in (c) impliziert, dass das Minimierungsproblem

$$\inf\{\|x - Py\| : y \in H\} = \inf\{\|x - z\| : z \in \operatorname{im} P\}$$

durch $z = Px$ gelöst wird. Der Beweis von Satz 2.25 zeigte zudem, dass die eindeutige Lösung Px dieses Minimierungsproblems die Eigenschaft $x - Px \perp \operatorname{im} P$ erfüllt; es gilt also $\ker P = \operatorname{im} (I - P) \perp \operatorname{im} P$. Da aber $H = \ker P \oplus \operatorname{im} P$ (für jede Projektion P) im Sinne einer direkten Zerlegung ist, folgt $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$, und P ist eine Orthogonalprojektion.

Sei nun P eine Orthogonalprojektion. Dann ist $0 \leq \|Px\|^2 = \langle x, Px \rangle$ und somit $P \geq 0$. Wendet man dieses Argument auf die komplementäre Orthogonalprojektion $I - P$ an, erhält man $P \leq I$.

Schließlich ist $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2$ und somit $1 \leq \|P\|$ für $P \neq 0$. Da außerdem $\|Px\|^2 = \langle Px, x \rangle \leq \|Px\| \|x\|$ ist, folgt $\|P\| \leq 1$ und somit $\|P\| = 1$. ■

Lemma 13.15 *Sei H ein Hilbertraum und seien $P, Q \in L(H)$ Orthogonalprojektionen. Dann sind äquivalent:*
(a) $P \leq Q$,
(b) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$,
(c) $PQ = QP = P$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Für $P \leq Q$ ist $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2$ für alle $x \in H$. Also ist $\ker Q \subseteq \ker P$, was äquivalent ist zu $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$. Dann ist $Q|_{\operatorname{im} P} = I$ und somit $QP = P$. Weiter folgt $P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Für den Operator $E := Q - P$ ist

$$E^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - P = E,$$

d.h., E ist eine Projektion. Außerdem ist E offensichlich selbstadjungiert. Aus dem vorigen Lemma folgt $E \geq 0$ und somit die Behauptung. ∎

Lemma 13.16 *Sei H ein Hilbertraum. Dann ist $A \in L(H)$ genau dann normal, wenn $\|Ax\| = \|A^*x\|$ für alle $x \in H$. In diesem Fall ist $\lambda I - A$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ normal, und es gilt*

$$\ker(\lambda I - A) = \ker(\overline{\lambda} I - A^*) = \big(\operatorname{im}(\lambda I - A)\big)^\perp = \big(\operatorname{im}(\overline{\lambda} I - A^*)\big)^\perp.$$

Beweis. $\Rightarrow$: Für normales A ist

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \|A^*x\|^2.$$

$\Leftarrow$: Wir erinnern an die Polarisierungsformel aus Lemma 2.19: Für alle $x, y \in H$ gilt

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big)$$

(wobei die letzten beiden Terme nur im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ erforderlich sind). Wenden wir diese Formel auf die Vektoren Ax, Ay an, so erhalten wir $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle$ und somit $\langle A^*Ax, y\rangle = \langle AA^*x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ und folglich $A^*A = AA^*$.

Offenbar sind mit A auch alle Operatoren $\lambda I - A$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ normal. Die Identitäten $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = \big(\operatorname{im}(\lambda I - A)\big)^\perp$ und $\ker(\lambda I - A) = \big(\operatorname{im}(\overline{\lambda} I - A^*)\big)^\perp$ sind nach Lemma 13.11 klar. Aus $\|(\lambda I - A)x\| = \|(\overline{\lambda} I - A^*)x\|$ folgt sofort auch $\ker(\overline{\lambda} I - A^*) = \ker(\lambda I - A)$. ∎

14 Spektraltheorie normaler und selbstadjungierter Operatoren

14.1 Spektralsätze für normale Operatoren

Für normale und selbstadjungierte Operatoren lassen sich die allgemeinen Aussagen zum Spektrum noch wesentlich ergänzen.

Satz 14.1 *Sei H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$ normal. Dann gilt:*
(a) *Der Spektralradius $r(A) := \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ von A ist gleich*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|.$$

Insbesondere gibt es ein $\lambda \in \sigma(A)$ mit $|\lambda| = \|A\|$.
(b) *Jedes $\lambda \in \sigma(A)$ ein* approximativer Eigenwert, *d.h. es gibt eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$ und $(A - \lambda I)x_n \to 0$. Ferner gilt $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Beweis. (a) Die Gleichheit $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ gilt für beliebige lineare Operatoren $A \in L(X)$ auf einem Banachraum X (der Spektralradius trägt seinen Namen also zu Recht). Dies werden wir in Abschnitt 15 zeigen. Da $\sigma(A)$ kompakt ist, gibt es ein $\lambda \in \sigma(A)$, in dem das Betragsmaximum auf $\sigma(A)$ angenommen wird.

Wir zeigen nun, dass $r(A) = \|A\|$. Dazu überlegen wir uns, dass für normale Operatoren $\|A^n\| = \|A\|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, woraus die Behauptung sofort folgt.

Wir bemerken vorab unter Ausnutzung von $\|A^*y\| = \|Ay\|$ für alle $y \in H$ (Lemma 13.16), dass

$$\begin{aligned} \|A^n x\|^2 &= \langle A^n x, A^n x\rangle = \langle A^* A^n x, A^{n-1}x\rangle \\ &\leq \|A^* A^n x\| \, \|A^{n-1}x\| = \|A^{n+1}x\| \, \|A^{n-1}x\| \\ &\leq \|A^{n+1}\| \, \|A^{n-1}\| \, \|x\|^2 \end{aligned}$$

und somit $\|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\| \, \|A^{n-1}\|$ gilt.

Wir beweisen nun die Behauptung $\|A^n\| = \|A\|^n$ über vollständige Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Im Induktionsschritt setzen wir $\|A^k\| = \|A\|^k$ für alle $k \leq n$ voraus. Dann gilt

$$\|A\|^{n+1} = \frac{\|A^n\|^2}{\|A^{n-1}\|} \leq \|A^{n+1}\|.$$

Da die Abschätzung $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1}$ klar ist, erhalten wir die Behauptung für $n + 1$.

(b) Angenommen, ein $\lambda \in \sigma(A)$ wäre kein approximativer Eigenwert. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ mit $\|(\lambda I - A)x\| \geq \alpha \|x\|$. Somit ist $\lambda I - A$ injektiv und $\operatorname{im}(\lambda I - A)$ abgeschlossen. Da mit Lemma 13.16 und obiger Eigenschaften

$$\operatorname{im}(\lambda I - A) = \overline{\operatorname{im}(\lambda I - A)} = \big(\ker(\lambda I - A)\big)^{\perp} = H$$

gilt, ist $\lambda I - A$ surjektiv und somit nach dem Satz der offenen Abbildung stetig invertierbar. Es ist also $\lambda \in \rho(A)$ im Widerspruch zur Annahme $\lambda \in \sigma(A)$.

Für $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ ist $\lambda I - A$ injektiv und somit $\operatorname{im}(\lambda I - A)$ dicht in H. Also ist $\lambda \in \sigma_c(A)$. ■

Satz 14.2 *Sei H ein Hilbertraum, $A \in L(H)$ selbstadjungiert. Mit*

$$\begin{aligned} m(A) &:= \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}, \\ M(A) &:= \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

gilt dann

(a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ und

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|} \quad \textit{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

(b) $m(A)I \leq A \leq M(A)I$ sowie

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max\{|m(A)|, |M(A)|\} \\ &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

(c) $\sigma(A) \subset [m(A), M(A)]$ und $m(A), M(A) \in \sigma(A)$. Ferner gilt für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m(A), M(A)]$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\min\{|\lambda - m(A)|, |\lambda - M(A)|\}}.$$

Beweis. (a) Sei $\lambda = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$, und sei $x \in H$. Dann ist

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \|(aI - A)x\|^2 + b^2\|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\big(ib\langle(aI - A)x, x\rangle\big).$$

Der letzte Summand verschwindet, da $\langle(aI - A)x, x\rangle \in \mathbb{R}$. Damit folgt $\|(\lambda I - A)x\|^2 \geq b^2\|x\|^2$ und auch $\|\lambda I - A\| \geq |\operatorname{Im}(\lambda)|$. Daher ist λ kein approximativer Eigenwert und folglich $\lambda \in \rho(A)$.

(b) Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt für $x \in H$ sofort $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|\,\|x\|^2$. Für

$$\mu := \sup\Big\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| = 1\Big\} \tag{14.1}$$

gilt also $\mu \leq \|A\|$.

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung benutzen wir die für alle $u, v \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gültige Gleichung

$$4\lambda \operatorname{Re}\langle Au, v\rangle = \big\langle A(\lambda u + v), \lambda u + v\big\rangle - \big\langle A(\lambda u - v), \lambda u - v\big\rangle,$$

aus der mit der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} |4\lambda \operatorname{Re}\langle Au, v\rangle| &\le \mu\left(\|\lambda u + v\|^2 + \|\lambda u - v\|^2\right) \\ &= 2\mu\left(\|\lambda u\|^2 + \|v\|^2\right) \end{aligned}$$

folgt. Mit $\lambda := \|v\|/\|u\|$ für $u \neq 0$ ergibt sich dann

$$4 \cdot \frac{\|v\|}{\|u\|} \cdot |\operatorname{Re}\langle Au, v\rangle| \le 4\mu\|v\|^2,$$

also

$$|\operatorname{Re}\langle Au, v\rangle| \le \mu\|u\|\,\|v\|,$$

was auch für $u = 0$ richtig ist.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ersetzt man v durch $e^{i\theta}v$ mit einem geeigneten Winkel θ und erhält

$$|\langle Au, v\rangle| \le \mu\|u\|\,\|v\| \quad \text{für alle } u, v \in H,$$

also wie gewünscht $\|Au\| \le \mu\|u\|$ und $\|A\| \le \mu$.

(c) Sei $\lambda < m(A)$. Falls $\lambda \in \sigma(A)$, muss λ ein approximativer Eigenwert sein, d.h. es gibt eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$ und $(A - \lambda I)x_n \to 0$. Mit dieser erhalten wir aus

$$\underbrace{\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle}_{\to 0} = \underbrace{\langle (A - m(A)I)x_n, x_n\rangle}_{\ge 0} + \underbrace{\langle (m(A) - \lambda)x_n, x_n\rangle}_{= m(A) - \lambda > 0}$$

den Widerspruch $0 = m(A) - \lambda > 0$. Also ist $\lambda \in \rho(A)$. Analog zeigt man $\lambda \in \rho(A)$ für alle $\lambda > M(A)$.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass $m(A) \in \sigma(A)$. O.E.d.A. sei $m(A) = 0$ (sonst ersetze man A durch $A - m(A)I$). Es gilt also $A \ge 0$, d.h. A ist positiv semidefinit. Durch

$$s : H \times H \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle,$$

wird dann eine positiv-semidefinite hermitesche Sesquilinearform definiert. Man zeigt leicht, dass s durch $|x| := \sqrt{s(x, x)}$ eine Seminorm definiert und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für diese Seminorm gültig ist. Insbesondere gilt

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \le \langle Ax, x\rangle\,\langle Ay, y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Mit $y = Ax$ folgt

$$\|Ax\|^4 \le \langle Ax, x\rangle\,\langle A^2x, Ax\rangle \le \langle Ax, x\rangle\,\|A\|^3\|x\|^2.$$

Nach Definition von $m(A) = 0$ gibt es eine Folge (x_n) in H mit $\|x_n\| = 1$ und $\langle Ax_n, x_n\rangle \to 0$. Mit dieser erhalten wir

$$\|Ax_n\|^4 \leq \langle Ax_n, x_n\rangle \, \|A\|^3 \to 0,$$

also $\|Ax_n\| \to$ für $n \to \infty$. Somit ist 0 ein approximativer Eigenwert von A und $m(A) = 0 \in \sigma(A)$. Die Behauptung $M(A) \in \sigma(A)$ folgt analog.
Wir zeigen noch die Abschätzung in (c). Für $\lambda > M(A)$ haben wir

$$\begin{aligned}(\lambda - M(A))\,\|x\|^2 &= \big\langle \lambda - M(A))x, x\big\rangle \\ &\leq \big\langle (\lambda I - A)x, x\big\rangle \leq \|(\lambda I - A)x\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|(\lambda I - A)x\| \geq (\lambda - M(A))\|x\|$ und damit wegen $\lambda - M(A) > 0$ die Behauptung $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - M(A)}$. Die Abschätzung für $\lambda < m(A)$ zeigt man analog. ∎

Der folgende Satz ist ein zentrales Resultat dieses Abschnittes.

Satz 14.3 (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren)
Sei $T \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gibt es ein ONS $(e_m)_{m=1}^M$ in H aus Eigenvektoren von T zu den entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählten Eigenwerten $(\lambda_m)_{m=1}^M \subset [m(T), M(T)] \setminus \{0\}$ so, dass

$$Tx = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle x, e_m\rangle \, e_m \quad \textit{für alle } x \in H.$$

Dabei ist $M \in \mathbb{N}$ oder $M = \infty$; im Fall $M = \infty$ gilt $\lambda_m \to 0$ für $m \to \infty$. Alle Eigenräume von T zu Eigenwerten ungleich 0 sind endlich-dimensional.

Falls H unendlich-dimensional ist, ist $0 \in \sigma(T)$. Falls $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, kann $\ker T$ unendlich-dimensional sein.

Beweis. Aus Kapitel 12 und Satz 14.2 wissen wir bereits, dass $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset [m(T), M(T)] \setminus \{0\}$ aus paarweise verschiedenen Eigenwerten $(\mu_n)_{n=1}^N$ mit $\mu_n \neq 0$ besteht. Dabei gilt $\mu_n \to 0$ für $n \to \infty$ falls $N = \infty$. Sei

$$\mathcal{N}_n := \ker(\mu_n I - T).$$

Dann ist $\dim \mathcal{N}_n < \infty$. Wir zeigen weitere Eigenschaften der Räume $\mathcal{N}_k$.

1. Es gilt $\mathcal{N}_n \perp \mathcal{N}_k$ für alle $k \neq n$. Aus $x_n \in \mathcal{N}_n$, $x_k \in \mathcal{N}_k$ und

$$\mu_n\langle x_n, x_k\rangle = \langle Tx_n, x_k\rangle = \langle x_n, Tx_k\rangle = \mu_k\langle x_n, x_k\rangle$$

folgt wegen $\mu_n \neq \mu_k$ nämlich sofort $\langle x_n, x_k\rangle = 0$, d.h. $x_n \perp x_k$.

2. Jeder Unterraum $\mathcal{N}_n$ ist T-invariant, d.h. $T\mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_n$. Genauer gilt sogar $T|_{\mathcal{N}_n} = \mu_n I|_{\mathcal{N}_n}$.

3. $H = \ker T \oplus \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{N}_n$.

   Für den Beweis sei $Y := \left(\ker T \oplus \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{N}_n\right)^\perp$. Dann ist $Y = \{0\}$ zu zeigen. Seien $y \in Y$ und $x \in \mathcal{N}_n$ oder $x \in \ker T$. Dann folgt

   $$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \mu_n \langle x, y\rangle = 0$$

   (mit $\mu_n = 0$ falls $x \in \ker T$). Somit ist $Ty \in Y$, und Y ist invariant bzgl. T. Da die Einschränkung eines kompakten Operators wieder kompakt ist, ist auch $T|_Y$ kompakt und selbstverständlich wieder selbstadjungiert.

   Wäre $T|_Y \neq 0$, also $\|T|_Y\| \neq 0$, so gäbe es ein $\mu \in \sigma(T|_Y)$ mit $|\mu| = \|T|_Y\|$. Da $T|_Y$ kompakt ist, muss $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von $T|_Y$ und damit auch von T sein. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu_n = \mu$. Hieraus folgt der Widerspruch $\mathcal{N}_n \cap Y \neq \{0\}$. Also gilt $T|_Y = 0$ und damit auch $Y \subset \ker T$. Folglich ist $Y = \{0\}$, und die Behauptung ist bewiesen.

Wir wählen nun zu jedem Raum $\mathcal{N}_n$ eine ONB $\{e_{k,n} : k = 1, \ldots, \dim \mathcal{N}_n\}$ und fassen die einzelnen ONB der Räume $\mathcal{N}_n$ zu einer ONB $\{e_m\}$ von $\bigoplus_{n=1}^N \mathcal{N}_n$ zusammen. Damit können wir jedes $x \in H$ eindeutig als eine in H konvergente Reihe

$$x = y + \sum_{m=1}^{M} \langle x, e_m\rangle\, e_m \quad \text{mit einem } y \in \ker T$$

darstellen. Wenden wir hierauf den Operator T an, so erhalten wir

$$Tx = \underbrace{Ty}_{=0} + \sum_{m=1}^{N} \langle x, e_m\rangle \underbrace{Te_m}_{=\lambda_m e_m} = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \langle x, e_m\rangle e_m,$$

was zu zeigen war. ■

Man kann die gewonnene Reihendarstellung so interpretieren, dass die (in Analogie zur Linearen Algebra) definierte Matrixdarstellung eines kompakten selbstadjungierten Operators eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen ist.

Folgerung 14.4 *Im Kontext von Satz* 14.3 *gibt es für $n = 0, 1, \ldots, N$ mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ Orthogonalprojektionen $P_n \in L(H)$ mit folgenden Eigenschaften*
(a) $\operatorname{im} P_n = \mathcal{N}_n = \ker(\mu_n I - T)$ *für alle* $n \geq 1$,
(b) $\operatorname{im} P_0 = \ker T$,
(c) $P_n P_k = 0$ *für alle* $n \neq k$,
(d) $H = \ker T \oplus \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{N}_n$,

(e) $I = P_0 + \sum_{n=1}^N P_n$ *und* $T = \sum_{n=1}^N \mu_n P_n$ *(Spektralzerlegungen).*
Dabei sind $(\mu_n)_{n=1}^N$ *die paarweise verschiedenen Nicht-Null-Eigenwerte von* T*. Im Fall* $N = \infty$ *ist die Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^\infty P_n$ *im Sinne der starken Konvergenz zu verstehen, d.h. punktweise für alle* $x \in H$*. Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \mu_n P_n$ *konvergiert sogar in der Operatornorm.*

Beweis. Für $n = 0, 1, \ldots, N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sei P_n die Orthogonalprojektion von H auf $\mathcal{N}_0 := \ker T$ und $\mathcal{N}_n := \ker(\mu_n I - T)$ für $n \geq 1$. Dann ist $\mathcal{N}_n \perp \mathcal{N}_k$ und somit $P_n P_k = 0$ für alle $n \neq k$.

Wie im Beweis von Satz 14.3 wählen wir zu jedem Raum $\mathcal{N}_n$ eine ONB und setzen diese ONB zu einer ONB $\{e_m\}_{m=1}^M$ mit $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von H zusammen. Damit lässt sich jedes Element $x \in H$ als $x = y + \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle e_m$ mit einem $y \in \ker(T)$ schreiben. Anwendung von P_n liefert daher

$$P_0 x = P_0 y = y \quad \text{und} \quad P_n x = \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle P_n e_m = \sum_{j \in \mathbb{N}: e_j \in \mathcal{N}_n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

für $n \geq 1$. Hieraus folgt direkt $I = P_0 + \sum_{n=1}^N P_n$ im Sinne der starken Konvergenz, denn für $x \in H$ ist

$$\begin{aligned} P_0 x + \sum_{n=1}^N P_n x &= y + \sum_{n=1}^N \sum_{j \in \mathbb{N}: e_j \in \mathcal{N}_n} \langle x, e_j \rangle e_j \\ &= y + \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle e_m = x = Ix. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $T = \sum_{n=1}^N \mu_n P_n$ im Sinne der starken Konvergenz; für $x \in H$ ist nämlich

$$Tx = Ty + \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle T e_m = \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle \lambda_m e_m = \sum_{n=1}^N \mu_n P_n x.$$

Um die Konvergenz $T = \sum_{n=1}^N \mu_n P_n$ in der Operatornorm zu zeigen, betrachten wir für $x \in H$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^N \mu_n P_n x \Big\|^2 &= \Big\| \sum_{m=1}^M \langle x, e_m \rangle \lambda_m e_m \Big\|^2 \leq \sum_{m=1}^M |\langle x, e_m \rangle|^2 |\lambda_m|^2 \\ &\leq \max_{m=1,\ldots,M} |\lambda_m|^2 \sum_{m=1}^M |\langle x, e_m \rangle|^2 \leq \max_{n=1,\ldots,N} |\mu_n|^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt die Bessel-Ungleichung benutzt. Aus

$$\max_{k \leq n \leq l} |\mu_n| \to 0 \quad \text{für } k, l \to \infty$$

folgt nun sofort die Konvergenz von $\sum_{n=1}^N \mu_n P_n$ in der Operatornorm. ■

Satz 14.5 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren) *Die Aussagen von Satz* 14.3 *und Folgerung* 14.4 *gelten auch für kompakte normale Operatoren $T \in L(H)$ mit dem Unterschied, dass die Folge $(\mu_n)_{n=1}^N$ der Nicht-Null-Eigenwerte von T nun in $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ liegt.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu den Beweisen von Satz 14.3 und Folgerung 14.4.

14.2 Einige Konsequenzen

Satz 14.6 (Courant'sches Minimaxprinzip) *Sei $T \in L(H)$ kompakt, selbstadjungiert und positiv semidefinit. Seien weiter $M(T) = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ die der Größe nach und entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählten positiven Eigenwerte von T. Dann gilt*

$$\lambda_1 = \max\left\{\frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} : 0 \neq x \in H\right\}$$

und

$$\lambda_n = \min_{Y_{n-1} \in \mathcal{Y}_{n-1}} \max\left\{\frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} : 0 \neq x \in H \text{ und } x \perp Y_{n-1}\right\},$$

wobei $\mathcal{Y}_{n-1}$ für die Menge aller $(n-1)$-dimensionalen Unterräume von H steht.

Im Beweis wird klar werden, dass obiges Minimum tatsächlich angenommen wird.

Beweis. Wieder lässt sich ein Orthonormalsystem $\{e_m\}_{m=1}^M$ von H aus Eigenvektoren bilden, wobei $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und e_m ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_m ist. Für $x \in H$ gibt es dann ein $y \in \ker(T)$ mit $x = y + \sum_{m=1}^M \langle x, e_m\rangle e_m$ und folglich $Tx = \sum_{m=1}^M \lambda_m \langle x, e_m\rangle e_m$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\langle Tx, x\rangle = \sum_{m=1}^M \lambda_m |\langle x, e_m\rangle|^2 \quad \text{sowie} \quad \langle x, x\rangle = \|y\|^2 + \sum_{m=1}^M |\langle x, e_m\rangle|^2.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $x \in H$ mit $x \neq 0$ und $x \perp e_m$ für alle $1 \leq m \leq n-1$ gewählt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} &= \frac{\sum_{m=n}^M \lambda_m |\langle x, e_m\rangle|^2}{\|y\|^2 + \sum_{m=n}^M |\langle x, e_m\rangle|^2} \\ &\leq \frac{(\max_{m \geq n} \lambda_m) \cdot \sum_{m=n}^M |\langle x, e_m\rangle|^2}{\sum_{m=n}^M |\langle x, e_m\rangle|^2} = \lambda_n, \end{aligned}$$

da $\lambda_m \leq \lambda_n$ für alle $m \geq n$. Sei $Y := \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Nach Wahl von x gilt dann insbesondere $\frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda_n$ für alle $0 \neq x \perp Y$. Da Y ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von H ist, folgt

$$\min_{Y_{n-1} \in \mathcal{Y}_{n-1}} \max_{0 \neq x \perp Y_{n-1}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \max_{0 \neq x \perp Y} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \leq \lambda_n.$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch die umgekehrte Ungleichung erfüllt ist, also der Wert λ_n wirklich angenommen wird. Sei dazu $Y \in \mathcal{Y}_{n-1}$ ein beliebiger $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von H. Wir behaupten, dass es ein

$$0 \neq x_0 \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} \quad \text{mit } x_0 \perp Y$$

gibt. Dazu sei $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ eine Basis von Y_{n-1}. Weiter sei $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, und es gelte

$$0 = \langle x_0, y_k \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, y_k \rangle \quad \text{für alle} 1 \leq k \leq n-1.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten $\alpha_j \in \mathbb{K}$ und $n-1$ Gleichungen, welches folglich eine nichttriviale Lösung besitzt.

Nun folgt ähnlich wie oben

$$\max_{0 \neq x \perp Y} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \frac{\langle Tx_0, x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j |\langle x_0, e_j \rangle|^2}{\sum_{j=1}^n |\langle x_0, e_j \rangle|^2} \geq \min_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = \lambda_n.$$

Da aber $Y \in \mathcal{Y}_{n-1}$ beliebig gewählt war, gilt sogar

$$\min_{Y_{n-1} \in \mathcal{Y}_{n-1}} \max_{0 \neq x \perp Y_{n-1}} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_n,$$

und es folgt die Behauptung. ∎

Folgerung 14.7 *Seien $T, S \in L(H)$ selbstadjungierte, kompakte und positiv semidefinite Operatoren mit $T \geq S$. Seien weiter $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq 0$ bzw. $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq 0$ die der Größe nach und ihrer Vielfachheit entsprechend aufgezählten nicht-negativen Eigenwerte von T bzw. S. Dann ist $\lambda_n \geq \nu_n$ für alle n.*

Wegen $T \geq S$ folgt dies direkt aus Satz 14.6; es ist ja

$$\lambda_n = \min_{Y_{n-1} \in \mathcal{Y}_{n-1}} \max_{0 \neq x \perp Y_{n-1}} \frac{\langle Tx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \min_{Y_{n-1} \in \mathcal{Y}_{n-1}} \max_{0 \neq x \perp Y_{n-1}} \frac{\langle Sx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \nu_n.$$

Folgerung 14.8 *Sei $T \in L(H)$ selbstadjungiert, kompakt und positiv semidefinit. Dann gibt es genau eine selbstadjungierte, kompakte und positiv semidefinite Quadratwurzel $S = T^{1/2}$ von T, also einen Operator S mit $S^2 = T$.*

Beweis. Seien $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > 0$ die paarweise verschiedenen positiven Eigenwerte von T. Nach Folgerung 14.4 gibt es Orthogonalprojektionen $P_1, \ldots, P_N$, so dass $T = \sum_{n=1}^N \mu_n P_n$. Wir definieren

$$S := \sum_{n=1}^N \sqrt{\mu_n} P_n.$$

Dann lässt sich wie im Beweis von Folgerung 14.4 zeigen, dass S bezüglich der Operatornorm konvergiert (mit (μ_n) ist ja auch $(\sqrt{\mu_n})$ eine Nullfolge). Also ist $S \in L(H)$. Weiter folgt mit $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$, dass

$$S^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \sqrt{\mu_n}\sqrt{\mu_m} P_n P_m = \sum_{n=1}^{N} \mu_n P_n = T.$$

Wegen $P_n^* = P_n$ ist S selbstadjungiert, und wegen $\sqrt{\mu_n} > 0$ auch positiv semidefinit. Auch ist S kompakt, da $S = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\mu_n} P_n$ in $L(H)$ konvergiert und jedes P_n einen endlichen Rang hat.

Der Beweis der Eindeutigkeit von S verbleibt als Übungsaufgabe. ∎

Satz 14.9 *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$ kompakt. Dann besitzt T eine* Polarzerlegung

$$T = U\,|T|$$

in einen kompakten selbstadjungierten Operator $0 \leq |T| \in L(H_1)$, genannt der Betrag *von T, und einen isometrischen Operator $U \in L(\overline{\operatorname{im}(|T|)}, \overline{\operatorname{im}(T)})$. Es gilt $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \overline{\operatorname{im}(|T|)}$ und $\||T|\,x\| = \|Tx\|$ für alle $x \in H_1$.*

Beweis. Mit T ist auch T^*T kompakt, und dieser Operator ist offenbar selbstadjungiert und positiv semidefinit, denn $\langle T^*Tx, x\rangle_{H_1} = \langle Tx, Tx\rangle_{H_2} = \|Tx\|^2 \geq 0$. Nach Folgerung 14.8 gibt es daher eine selbstadjungierte, kompakte und positiv semidefinite Quadratwurzel $S \in L(H_1, H_1)$ mit $S^2 = T^*T$.

Für $|T| := S = (T^*T)^{1/2}$ ergibt sich

$$\big\||T|x\big\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle |T|^2 x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Auf $\operatorname{im}(|T|) \subseteq H_1$ definieren wir einen Operator $\tilde{U}$ durch $\tilde{U}(|T|x) = Tx \in H_2$. Dieser Operator ist wohldefiniert: Zum Beweis seien $x, x' \in H_1$ mit $|T|x = |T|x'$, also $|T|(x - x') = 0$. Nach obiger Gleichung gilt dann $T(x - x') = 0$; folglich ist $Tx = Tx'$.

Außerdem ist $\tilde{U}$ linear und sogar isometrisch; es ist nämlich

$$\big\|\tilde{U}(|T|x)\big\| = \|Tx\| = \big\||T|x\big\|.$$

Schließlich definieren wir $U : \overline{\operatorname{im}(|T|)} \to \overline{\operatorname{im}(T)}$ als die eindeutige stetige Fortsetzung von $\tilde{U}$ auf $\overline{\operatorname{im}(|T|)}$. Mit $\tilde{U}$ ist dann auch U isometrisch, d.h. es ist $\|Ux\| = \|x\|$, und nach Definition gilt wie gewünscht $T = U\,|T|$. ∎

Satz 14.10 *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$ kompakt. Dann gibt es Orthonormalsysteme (e_m) von H_1 und (f_m) von H_2 sowie Zahlen $s_m \geq 0$, so dass die* Singulärwertzerlegung (singular value decomposition; SVD)

$$Tx = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \langle x, e_m\rangle f_m \quad \textit{für alle } x \in H_1$$

gilt. Dabei sind die Zahlen s_m^2 die Eigenwerte des Operators T^*T und die s_m sind die Eigenwerte von $|T| = (T^*T)^{1/2}$ (die auch Singulärwerte *von T genannt werden).*

Beweis. Der Operator T besitzt nach Satz 14.9 eine Polarzerlegung $T = U\,|T|$. Da $|T| = (T^*T)^{1/2} \in L(H_1)$ kompakt und selbstadjungiert ist, gibt es nach Satz 14.3 ein ONS (e_m) von H_1 so, dass mit den entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführten Eigenwerten s_m von $|T|$

$$|T|x = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \langle x, e_m \rangle e_m$$

für alle $x \in H_1$ gilt. Hieraus folgt die Identität

$$Tx = U|T|x = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \langle x, e_m \rangle f_m$$

mit den Vektoren $f_m = Ue_m$. Da U isometrisch ist, erhält U aufgrund der Polarisierungsformel auch das Skalarprodukt, d.h. es ist $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$. Also bildet U das ONS (e_m) auf ein ONS (f_m) ab. ■

15 Der holomorphe Funktionalkalkül

15.1 Ergänzungen zur Complex Analysis

Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Wir benötigen den Begriff einer X-wertigen holomorphen Funktion. Zur Definition sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to X$ eine X-wertige holomorphe (komplex differenzierbare, analytische) Funktion auf D, d.h. f besitzt in jedem Punkt $z_0 \in D$ eine komplexe Ableitung

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{(in der Norm von } X\text{)},$$

die ebenfalls X-wertig ist.

Die aus der komplexen Funktionentheorie bekannten Sätze zur Potenzreihendarstellung, zur Cauchyschen Integralformel und zum Residuensatz gelten auch in diesem allgemeineren Kontext. Dabei ist es nicht erforderlich, die Beweise komplett neu zu führen, da sich viele Aussagen mit Hilfe von linearen Funktionalen $g \in X'$ und Abbildungen $z \mapsto g(f(z))$ auf den skalaren Fall zurückführen lassen. So gilt z.B. folgender Satz.

Satz 15.1 (Laurent-Entwicklung im Kreisring) *(a) Seien $0 \le r < R \le \infty$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, und f sei eine auf dem Kreisring*

$$A_{r,R}(\lambda_0) := \{\lambda \in \mathbb{C} : r < |\lambda - \lambda_0| < R\}$$

definierte X-wertige holomorphe Funktion. Dann besitzt f in $A_{r,R}(\lambda_0)$ eine Laurent-Entwicklung

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda - \lambda_0)^{-k}$$

mit Koeffizienten a_k, $b_k \in X$. Dabei gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}\, d\lambda, \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{k-1}\, d\lambda,$$

wobei Γ der mathematisch positiv durchlaufene Kreisrand für einen beliebigen Kreis $B_\rho(\lambda_0)$ mit $r < \rho < R$ ist.

(b) Für $0 \le r < R \le \infty$ und $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sei $A_{r,R}(\lambda_0)$ der größte Kreisring mit Mittelpunkt λ_0, so dass $f : A_{r,R}(\lambda_0) \to L(X)$ holomorph ist. Dann gelten für die Konvergenzradien r und R und für die Koeffizienten $A_k, B_k \in L(X)$ wie in (a) die Gleichungen

$$R = \frac{1}{\limsup_{k>0} \|A_k\|^{1/k}} \quad \text{und} \quad r = \limsup_{k>0} \|B_k\|^{1/k}.$$

Für Aussage (b) betrachten wir den Banachraum $L(X)$ mit der Operatornorm als Banachalgebra.

Beispiel 15.2 (Holomorphie der Resolventenfunktion) Sei $T \in L(X)$ und $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dann existiert nach Folgerung 4.13 die Resolvente $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ für alle λ in der Kreisscheibe $B_r(\lambda_0) \subset \rho(T)$ mit $r = \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$. Genauer gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} &= (\lambda_0 I - T)^{-1}(I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0})^{-1} \\ &= R_{\lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} \big(- (\lambda - \lambda_0)\big)^n R_{\lambda_0}^n. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$R_\lambda(T) : \rho(T) \to L(X), \quad \lambda \mapsto R_\lambda(T),$$

holomorph auf $\rho(T)$.

Ein zweiter Beweis der Holomorphie der Resolventenfunktion benutzt die *Resolventengleichung*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu. \tag{15.2}$$

Falls die lokale Beschränktheit von R_λ gezeigt ist, folgt aus (15.1) die Stetigkeit von R_λ und dann aus (15.2) die komplexe Differenzierbarkeit von R_λ in μ. Man erhält

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = -R_\lambda^2;$$

vergleichen Sie dies mit der klassischen Ableitung $\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda - t} = -\Big(\frac{1}{\lambda - t}\Big)^2$. ■

Der folgende Satz ergänzt die bisher bekannten Aussagen zum Spektrum wesentlich. Wir hatten darauf bereits mehrfach hingewiesen.

Satz 15.3 *Sei X ein komplexer Banachraum und $T \in L(X)$. Dann ist $\sigma(T) \neq \emptyset$, und für den Spektralradius $r(T) = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ gilt die Gleichung*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beweis. Sei $\widehat{r} := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. Da R_λ auf dem Außengebiet $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\widehat{r}}(0)}$ holomorph ist und dort nach Folgerung 4.13 die Laurentreihendarstellung

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{\lambda} T\Big)^n$$

besitzt, folgt mit Satz 15.1 (b) und $B_n = T^{n-1}$

$$\widehat{r} = \limsup_{n\to\infty} \|B_n\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = r(T).$$

Dies zeigt die zweite Aussage. Für den Beweis der ersten nehmen wir an, es sei $\sigma(T) = \emptyset$. Da aus der obigen Reihendarstellung von R_λ die Konvergenz $\|R_\lambda\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$ folgt, wäre unter dieser Annahme R_λ eine ganze und beschränkte Funktion. Dann folgt aus dem Satz von Liouville, dass R_λ die Nullfunktion ist. Es gilt aber stets $R_\lambda \neq 0$. ■

Definition 15.4 *Im Kontext von Satz* 15.1 *mit* $r = 0$ *(d.h.* $A_{r,R}(\lambda_0)$ *ist die punktierte Kreisscheibe* $B_R(\lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$*) heißt* λ_0

(*a*) *ein* Pol n-ter Ordnung*, falls* $b_n \neq 0$ *und* $b_k = 0$ *für alle* $k > n$*;*

(*b*) *eine* wesentliche Singularität*, falls* $b_k \neq 0$ *für unendlich viele* $k \in \mathbb{N}$ *gilt;*

(*c*) *eine* hebbare Singularität*, falls* $b_k = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*.*

Der Anteil $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda - \lambda_0)^{-k}$ *heißt* Hauptteil *der Laurentreihe von* f *um* 0.

15.2 Der Dunford-Kalkül

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist der holomorphe Funktionalkalkül: Wir möchten Operatoren $T \in L(X)$ in holomorphe Funktionen f einsetzen und neue Operatoren $f(T)$ definieren, und wir möchten eine Beziehung zwischen den Spektren von T und $f(T)$ herstellen (Spektralsatz). Ein besonders einfaches und wohlbekanntes Beispiel liegt vor, wenn f ein algebraisches Polynom p ist. Für $p(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ definiert man den Operator $p(T) := \sum_{k=0}^{N} a_k T^k$ (mit $T^0 := I$). Für die Spektren zeigt man leicht, dass

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) := \{p(\lambda) \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Eine allgemeine Theorie, die auf der Cauchyschen Integralformel aufbaut, liefert der sogenannte *Dunford-Kalkül*.

Definition 15.5 (*a*) *Für* $T \in L(X)$ *sei*

$$\mathcal{H}(T) := \{f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph} : \sigma(T) \subset D,\ D \subseteq \mathbb{C} \text{ offen}\},$$

d.h. $\mathcal{H}(T)$ *ist die Menge aller Funktionen, die auf einer offenen Umgebung von* $\sigma(T)$ *holomorph sind.*

(*b*) *Eine Menge* $B \subset \mathbb{C}$ *heißt ein* zulässiger Bereich *zu* T, $f \in \mathcal{H}(T)$ *und* D*, falls* B *offen und beschränkt ist,* $\sigma(T) \subset B \subset \overline{B} \subset D$ *gilt, und der Rand* ∂B *aus endlich vielen geschlossenen, paarweise disjunkten, bzgl.* $\sigma(T)$ *positiv orientierten, rektifizierbaren Jordankurven* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ *besteht. Letztere fassen wir im Folgenden zu einem Weg* $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_k$ *zusammen. Besitzt* $\sigma(T)$ *ein „Loch“* O*, so wird also eine geschlossene Kurve* $\Gamma_j \subset O$ *im Uhrzeigersinn durchlaufen.*

(*c*) *Ist* $f \in \mathcal{H}(T)$ *und* B *ein zulässiger Bereich für* f*, so definieren wir einen Operator* $f(T) : X \to X$ *durch*

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda)\, R_\lambda(T)\, d\lambda.$$

Zunächst ist nicht klar, ob diese Definition von $f(T)$ sinnvoll ist.

Lemma 15.6 *Seien $T \in L(X)$ und $f \in \mathcal{H}(T)$. Dann gilt:*
(a) $f(T)$ hängt nicht von der Wahl des zulässigen Bereiches B ab.
(b) $f(T) \in L(X)$.
(c) Die Abbildung $\Phi : \mathcal{H}(T) \to L(X),\ f \mapsto f(T)$, ist linear.

Aussage (c) (und ähnliche Aussagen im weiteren Text) ist wie folgt zu verstehen: Sind $f, g \in \mathcal{H}(T)$ mit Definitionsgebieten D_f, D_g, so verstehen wir unter $f + g$ die auf $D_{f+g} := D_f \cap D_g$ durch $(f+g)(z) := f(z) + g(z)$ definierte holomorphe Funktion. Für diese Funktion ist dann $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$.

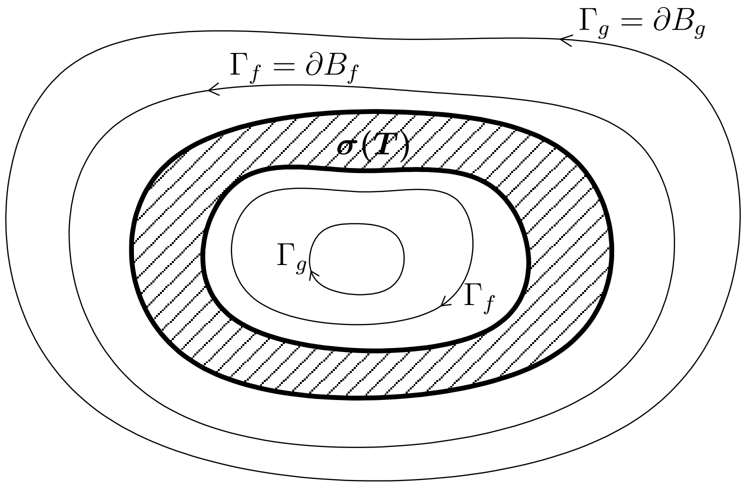

Abb. 1: Zulässige Bereiche

Beweis. (a) folgt aus der Cauchyschen Integralformel. Zum Beweis kann man die Aussage zuerst für beliebige Funktionale $x' \in X'$ und Vektoren $x \in X$ und die komplexwertige holomorphe Funktion $z \mapsto \langle x', f(z)R_z x\rangle$ beweisen und anschließend aufgrund der Linearität x' vor und x hinter das Integralzeichen ziehen.
(b) Es ist $f(\lambda)\, R_\lambda : D \cap \rho(T) \to L(X)$ holomorph und folglich auf dem Kompaktum Γ stetig und beschränkt. Somit ist $f(T)$ wohldefiniert als Element in $L(X)$.
(c) folgt aus der Linearität von $h \mapsto \int_\Gamma h(z)\, dz$. ■

Satz 15.7 *Sei $T \in L(X)$.*
(a) Für $f, g \in \mathcal{H}(T)$ gilt $f(T)g(T) = (fg)(T)$, d.h. $\Phi : \mathcal{H}(T) \to L(X)$ ist ein Algebrahomomorphismus. Insbesondere gilt $f(T)g(T) = g(T)f(T)$.
(b) Für $f_n(\lambda) := \lambda^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f_n(T) = T^n$. Insbesondere ist $f_0(T) = I$ für die konstante Funktion $f_0 = 1$ und $f_1(T) = T$ für die identische Abbildung $f_1(\lambda) = \lambda$.
(c) Ist $f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$, so ist $f(T)$ invertierbar, und es gilt

$$f(T)^{-1} = (1/f)(T).$$

Insbesondere folgt für $\mu \in \rho(T)$

$$R_\mu(T) = \left(\frac{1}{\mu - \cdot}\right)(T).$$

Beweis. (a) Wir wählen $B_f, B_g \subset \mathbb{C}$ mit $\sigma(T) \subset B_f \subset \overline{B_f} \subset B_g \subset \overline{B_g} \subset D_f \cap D_g$ und setzen $\Gamma_f := \partial B_f$ und $\Gamma_g := \partial B_g$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)R_\lambda\, d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(\mu)R_\mu\, d\mu\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)R_\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(\mu)R_\mu\, d\mu\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(\mu)R_\lambda R_\mu\, d\mu\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Mit der Resolventengleichung 15.2 folgt

$$\begin{aligned} f(T)g(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} g(\mu)\left(\frac{R_\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{R_\mu}{\mu-\lambda}\right) d\mu\right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)R_\lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_g} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\, d\mu\right) d\lambda \\ &\qquad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_g} g(\mu)R_\mu \int_{\Gamma_f} \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda\, d\mu. \end{aligned}$$

Da die Funktion $\frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}$ im Innern B_f von Γ_f holomorph ist, verschwindet der zweite Summand aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes. Im ersten Summanden nutzen wir die Cauchysche Integralformel

$$\int_{\Gamma_g} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\, d\mu = g(\lambda)$$

und erhalten

$$f(T)g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_f} f(\lambda)\, R_\lambda\, g(\lambda)\, d\lambda = (fg)(T).$$

(b) Wir wählen $R > r(T)$ so, dass $\sigma(T) \subset B_R(0) \subset \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{C} = D_f$ und $\|T\| < R$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f_n(T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R} \lambda^n R_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R} \lambda^n(\lambda - T)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R} \lambda^{n-1}\Big(\sum_{k=0}^\infty \lambda^{-k}T^k\Big)\, d\lambda = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R} \lambda^{n-k-1}\, d\lambda\right) T^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \delta_{nk}T^k = T^n. \end{aligned}$$

(c) Wir wählen eine offene Menge $\tilde{D} \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $\sigma(T) \subset \tilde{D} \subseteq D$ und $f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \tilde{D}$. Dann ist $\frac{1}{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, also $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(T)$. Da $\frac{1}{f} f = f \frac{1}{f} = 1$ in $\tilde{D}$ gilt, ist $\frac{1}{f}(T) f(T) = f(T) \frac{1}{f}(T) = I$, d.h. $f(T)$ ist invertierbar mit $f(T)^{-1} = \frac{1}{f}(T)$.
■

Beispiel 15.8 Für $T \in L(X)$ und $f_z(\lambda) := e^{z\lambda}$ stimmen die Definitionen

$$e^{zT} := f_z(T) \quad \text{und} \quad e^{zT} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} T^n$$

überein und definieren eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $L(X)$. Für $x_0 \in X$ ist $x(z) := e^{zT} x_0$ eine Lösung der komplexen Differentialgleichung $x'(z) = Tx(z)$ mit Anfangswert $x(0) = x_0$. ■

15.3 Spektralsätze für holomorphe Funktionen

Satz 15.9 (Spektraler Abbildungssatz) *Ist $T \in L(X)$, so gilt für alle $f \in \mathcal{H}(T)$*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)) := \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Beweis. $\subseteq$: Sei $\mu \in \sigma(f(T))$. Angenommen, es wäre $\mu \notin f(\sigma(T))$. Dann ist $\mu - f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$. Aufgrund der Stetigkeit von f gibt es dann eine offene Umgebung U von $\sigma(T)$ mit $\mu - f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in U$. Nach Satz 15.7 ist $\mu - f(T)$ invertierbar, also $\mu \in \rho(f(T))$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mu \in f(\sigma(T))$.

$\supseteq$: Sei $\mu \in f(\sigma(T))$. Dann ist $\mu = f(\xi)$ für ein $\xi \in \sigma(T)$. Man macht sich leicht klar, dass die Funktion

$$g(\lambda) := \begin{cases} \frac{f(\lambda) - f(\xi)}{\lambda - \xi}, & \lambda \neq \xi, \\ f'(\xi), & \lambda = \xi, \end{cases} \qquad \lambda \in D,$$

in $\mathcal{H}(T)$ liegt (wobei D der Definitionsbereich von f ist). Da nun $g(\lambda)(\xi - \lambda) = f(\xi) - f(\lambda)$ für alle $\lambda \in D$ gilt, folgt nach Satz 15.7

$$g(T)(\xi I - T) = (\xi I - T) g(T) = f(\xi) - f(T) = \mu I - f(T).$$

Da $\xi I - T$ nicht invertierbar ist, kann auch $\mu I - f(T)$ nicht invertierbar sein. Damit ist $\mu \in \sigma(f(T))$. ■

Definition 15.10 *Sei $T \in L(X)$.*

(a) Zwei abgeschlossene Teilmengen $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq \sigma(T)$ mit den Eigenschaften $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ und $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ heißen (komplementäre) Spektralmengen *von T. (Dabei müssen σ_1 und σ_2 nicht zusammenhängend sein, sondern können wiederum in kleinere Spektralmengen von T zerfallen).*

(*b*) *Sind* $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(T)$ *durch* $f_j = \delta_{jk}$ *auf Umgebungen* U_k *von* σ_k, $1 \leq j, k \leq 2$ *definiert, so sei*

$$P_1 := f_1(T),\ P_2 := f_2(T) \quad \textit{und} \quad X_1 := P_1 X,\ X_2 := P_2 X.$$

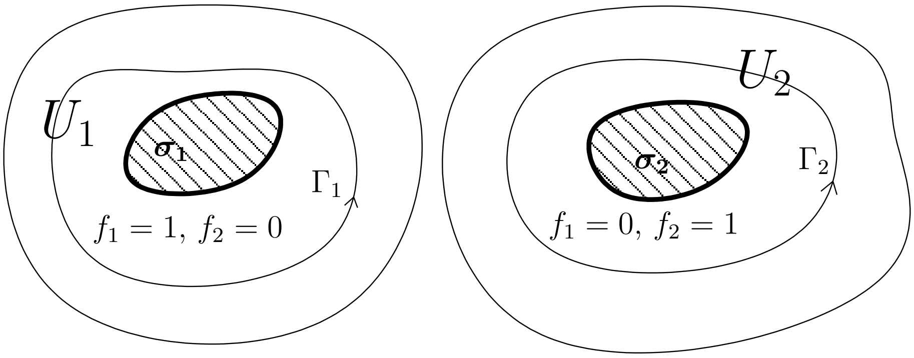

Abb. 2: Spektralmengen

Satz 15.11 (Spektraler Zerlegungssatz) *Seien* $T \in L(X)$ *und* σ_1, σ_2 *Spektralmengen von* T. *Dann gilt*

(*a*) *Die Operatoren* $P_1 := f_1(T)$ *und* $P_2 := f_2(T)$ *sind komplementäre Projektionen (d.h. es ist* $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, $P_1 + P_2 = I$*), und* X_1 *und* X_2 *definieren eine topologische direkte Summenzerlegung* $X = X_1 \oplus X_2$ *aus* T*-invarianten abgeschlossenen Unterräumen von* X.

(*b*) *Für die Operatoren* $T_j := T|_{X_j}$ *gilt* $\sigma(T_j) = \sigma_j$.

Beweis. (*a*) Wegen $f_j^2 = f_j$, $f_1 + f_2 = 1$ und $f_1 f_2 = 0$ in $\mathcal{H}(T)$ folgt mit Satz 15.7 $P_j^2 = P_j$, $I = P_1 + P_2$ und $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, also auch $\ker(P_1) = \operatorname{im}(P_2)$ etc. Daher sind X_j abgeschlossene Unterräume von X mit $X = X_1 \oplus X_2$. Da nach Satz 15.7 alle Operatoren der Gestalt $f(T)$, $f \in \mathcal{H}(T)$, miteinander kommutieren, folgt $TP_j = P_jT$, also $TX_j = TP_jX = P_jTX \subset X_j$.

(*b*) Offensichtlich gilt $\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$ und damit

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2).$$

Es verbleibt also, $\sigma(T_j) \subset \sigma_j$ für $j = 1, 2$ zu zeigen. Wir tun dies für $j = 1$.

Sei $\mu \notin \sigma_1$ und sei U_1 eine offene Umgebung von σ_1 mit $\mu \notin \overline{U_1}$ und $\overline{U_1} \cap \sigma_2 = \emptyset$. Ferner sei

$$g_1(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\mu - \lambda}, & \lambda \in U_1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\widetilde{g_1}(\lambda) := \mu - \lambda$ auf $\mathbb{C}$. Dann gilt $g_1 \widetilde{g_1} = f_1$ in $\mathcal{H}(T)$, so dass

$$P_1 = f_1(T) = g_1(T)\widetilde{g_1}(T) = g_1(T)(\mu I - T) = (\mu I - T) g_1(T).$$

Da $P_1|_{X_1} = I_{X_1}$ und X_1 bzgl. $g_1(T)$ invariant ist, ist $\mu I - T$ auf X_1 invertierbar; es gilt also $\mu \notin \sigma(T_1)$. ∎

Satz 15.12 *Sei $T \in L(X)$ und $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ein isolierter Punkt. Ferner sei P_0 die Projektion zur Spektralmenge $\sigma_0 := \{\lambda_0\}$ von $\sigma(T)$ und $X_0 := P_0 X$. Dann gilt*
(*a*) *Der Operator $\lambda_0 I - T_0 := \lambda_0 I - T|_{X_0}$ ist* quasinilpotent, *d.h.*

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - T_0)^n\|_{L(X_0)}^{1/n} = 0.$$

(*b*) *In der punktierten Kreisscheibe $A_{0,R}(\lambda_0)$ mit $R = \operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(T) \setminus \{\lambda_0\})$ besitzt R_λ die Laurentreihendarstellung*

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\lambda - \lambda_0)^{-k}$$

mit den Operatoren

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\ B_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda (\lambda - \lambda_0)^{k-1}\, d\lambda = (T - \lambda_0 I)^{k-1} P_0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dabei ist Γ ein einfach geschlossener und positiv orientierter Weg um λ_0 in der Kreisscheibe $B_R(\lambda_0)$.
(*c*) *Für $x \in X$ gilt $x \in X_0$ genau dann, wenn*

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - T)^n x\|^{1/n} = 0.$$

Ist X_0 endlich-dimensional, so ist λ_0 wegen $\sigma(T|_{X_0}) = \{\lambda_0\}$ der einzige Eigenwert von T_0 und $\lambda_0 I - T_0$ ist sogar nilpotent, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(\lambda_0 I - T_0)^n = 0$. Vergleichen Sie dies mit den aus der Linearen Algebra ebkannten Jordanblöcken.

Beweis. (*a*) Wegen $\sigma(T_0) = \sigma_0 = \{\lambda_0\}$ existiert die Resolvente $R_\lambda(T_0)$ in einer punktierten Kreisscheibe von λ_0 und ist dort analytisch in λ. Wegen

$$R_\lambda(T_0) = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T_0 - \lambda_0 I)^n}{(\lambda - \lambda_0)^n} \quad \text{auf } X_0$$

folgt mit Satz 15.1 (*b*) und $r = 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - T_0)^n\|^{1/n} = 0.$$

(*b*) Die Laurentreihe von R_λ folgt sofort aus Satz 15.1 (*b*), und die Aussage zu B_k ergibt sich aus dem Funktionalkalkül (Satz 15.7) und der Integraldarstellung von P_0.

(*c*) $\Rightarrow$: Für $x \in X_0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\lambda_0 I - T)^n x = (\lambda_0 I - T_0)^n x$ und folglich

$\limsup_{n\to\infty} \|(\lambda_0 I - T)^n x\|^{1/n} = 0.$
$\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist die Reihe

$$y(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda_0 I - T}{\lambda_0 - \lambda}\Big)^n x$$

für alle $\lambda \neq \lambda_0$ konvergent. Ferner gilt wegen der Teleskopsummeneigenschaft

$$\Big(I - \frac{\lambda_0 I - T}{\lambda_0 - \lambda}\Big) y(\lambda) = x,$$

also $(T - \lambda I) y(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) x$ und somit $R_\lambda(T)x = -\frac{y(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}$ für $|\lambda - \lambda_0| > 0$ genügend klein. Nun folgt mit der Reihendarstellung von $y(\lambda)$

$$\begin{aligned} P_0 x &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\lambda(T)\, x \, d\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\lambda_0 I - T)^n}{(\lambda_0 - \lambda)^{n+1}}\, x \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\, x \, d\lambda = x, \end{aligned}$$

d.h., $x \in \mathcal{R}(P_0) = X_0$. ∎

Satz 15.13 *Es sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein isolierter Punkt des Spektrums $\sigma(T)$ von $T \in L(X)$ und sei P_0 der zugehörige Projektor wie in Satz* 15.12. *Genau dann ist λ_0 ein Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ der Resolvente $R_\lambda(T)$, wenn*

$$\ker((T - \lambda_0 I)^{p-1}) \subsetneq \ker((T - \lambda_0 I)^p) = \ker((T - \lambda_0 I)^{p+1}) = \dots$$

In diesem Fall gilt auch

$$\mathrm{im}\,(P_0) = X_0 = \ker\,((T - \lambda_0 I)^p) \quad \textit{und} \quad \ker\,(P_0) = \mathrm{im}\,((T - \lambda_0 I)^p),$$

und $X = \ker\,((T - \lambda_0 I)^p) \oplus \mathrm{im}\,((T - \lambda_0 I)^p)$ ist eine topologische Zerlegung.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei o.E.d.A. $\lambda_0 = 0$ ein Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ von R_λ; vgl. dazu die Laurentreihenentwicklung von $R_\lambda(T)$ in Satz 15.12 (b)). Dann gilt

$$B_p = T^{p-1} P_0 \neq 0, \quad B_{p+1} = T^p P_0 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{im}\,(P_0) \subset \ker\,(T^p), \quad \mathrm{im}\,(P_0) \neq \ker\,(T^{p-1}).$$

Da nach Satz 15.12 (c)

$$\ker\,(T^p) \,\big(\subseteq \ker\,(T^{p+1}) \subseteq \dots\big) \quad \text{in } X_0 = \mathrm{im}\,(P_0)$$

liegt, erhält man

$$\ker\,(T^{p-1}) \subsetneq \ker\,(T^p) = \mathrm{im}\,(P_0) \,\big(= \ker\,(T^{p+1}) = \dots\,\big).$$

Jetzt kann man zeigen, dass auch die Bildräume die Eigenschaft

$$\mathrm{im}\,(T^{p-1}) \supsetneq \mathrm{im}\,(T^p) = \mathrm{im}\,(T^{p+1}) = \dots$$

haben sowie X die topologische Zerlegung $X = \ker(T^p) \oplus \mathrm{im}\,(T^p)$ besitzt. Zum Beweis dieser Aussagen und zum Beweis der Implikation $\Leftarrow$ verweisen wir auf Heuser: *Funktionalanalysis*. ■