Vorlesung Funktionalanalysis II
Sommer 2021

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

1 Abgeschlossene Operatoren auf Banachräumen **3**
1.1 Definitionen und der Satz vom abgeschlossenen Bild 3
1.2 Spektrum und Resolvente abgeschlossener Operatoren 8

2 Abgeschlossene Operatoren auf Hilberträumen **11**
2.1 Der Hilbertraum-Adjungierte 11
2.2 Reguläre Werte 14
2.3 Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren 16

3 Der Rieszsche Darstellungssatz für positive lineare Funktionale auf $C_c(X)$ **23**
3.1 Topologische Präliminarien 23
3.2 Rieszscher Darstellungssatz für positive lineare Funktionale 26

4 Komplexe Maße und der Dualraum von $C_0(X)$ **35**
4.1 Komplexe Maße 35
4.2 Die Sätze von Lebesgue und von Radon-Nikodym 38
4.3 Der Dualraum von $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ 42
4.4 Der Rieszsche Darstellungssatz auf $C_0(X)$ 44

5 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren **48**
5.1 Die Spektraldarstellung für beschränkte Operatoren 48
5.2 Allgemeine Spektralintegrale 53
5.3 Die Spektraldarstellung für unbeschränkte Operatoren 61

6 Spektralkalkül selbstadjungierter Operatoren **63**
6.1 Einige Konsequenzen des Spektralsatzes 63
6.2 Zerlegungen der Eins$^{\diamond}$ 67

Das vorliegende Skript ist bis auf Kleinigkeiten identisch mit dem Skript von Herrn Prof. Farwig aus dem Sommersemester 2019. Ich danke Herrn Farwig recht herzlich für die Erlaubnis, sein Skript für diese Vorlesung nutzen zu dürfen und für das Überlassen der latex-Files.

Die mit $^\diamond$ gekennzeichneten Abschnitte wurden in der Vorlesung nicht besprochen und sind daher nicht prüfungsrelevant.

1 Abgeschlossene Operatoren auf Banachräumen

1.1 Definitionen und der Satz vom abgeschlossenen Bild

In diesem Abschnitt seien X und Y Banachräume über dem gleichen Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Den Definitionsbereich eines Operators T zwischen X und Y bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(T)\,(\subseteq X)$, seinen Kern $\{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}$ mit $\mathcal{N}(T)$ und seinen Wertebereich $T(\mathcal{D}(T))\,(\subseteq Y)$ mit $\mathcal{R}(T)$. Weiter schreiben wir

$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(T)\}$$

für den Graphen von T. Dabei wollen wir stets annehmen, dass $\mathcal{D}(T)$ ein linearer Raum und T ein linearer Operator ist. Dann sind offenbar auch $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{R}(T)$ und $\mathcal{G}(T)$ lineare Räume. Den Dualraum von X bezeichnen wir mit X'.

Definition 1.1 (a) *Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ heißt* abgeschlossen, *wenn sein Graph $\mathcal{G}(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$ ist. Äquivalent dazu ist die Formulierung: Für jede Folge (x_n) in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Tx_n \to y \in Y$ für $n \to \infty$ gilt $x \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = y$.*

(b) *Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ heißt eine* Erweiterung *eines linearen Operators $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \to Y$ (kurz: $S \subset T$), wenn $\mathcal{G}(S) \subseteq \mathcal{G}(T)$, d.h. wenn $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{D}(T)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in \mathcal{D}(S)$.*

(c) *Ein linearer Operator $S : \mathcal{D}(S) \subseteq X \to Y$ heißt* abschließbar, *wenn $\overline{\mathcal{G}(S)} \subset X \times Y$ der Graph eines abgeschlossenen Operators ist, d.h. wenn es einen abgeschlossener Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ gibt, so dass $\overline{\mathcal{G}(S)} = \mathcal{G}(T)$ ist. In diesem Fall heißt T der* Abschluss *von S, und wir schreiben $T = \overline{S}$.*

Für einen abschließbaren Operator S wie in Definition 1.1 (c) gilt also

$$\mathcal{G}(\overline{S}) = \overline{\mathcal{G}(S)}. \tag{1.1}$$

Beispiel 1.2 Sei $X = Y = C([0,1])$. Dann ist Operator T mit $\mathcal{D}(T) = C^1([0,1])$ und $Tf = f'$ abgeschlossen und dicht definiert, d.h. $\overline{\mathcal{D}(T)} = C([0,1])$.

Nun betrachten wir (mit gleichem X und Y) den Operator S mit $\mathcal{D}(S) = C^2([0,1])$ und $Sf = f'$. Offensichtlich ist S dicht definiert, jedoch nicht abgeschlossen. Ferner ist S abschließbar und $\overline{S} = T$ (Übung). ∎

Proposition 1.3 *Mit der Notation wie in Definition* 1.1 *gilt*

(a) *S ist genau dann abschließbar, wenn für jede Folge (x_n) in $\mathcal{D}(S)$ mit $x_n \to 0$ und $Sx_n \to y \in Y$ folgt, dass $y = 0$.*

(b) *Ist S abschließbar, so ist der Abschluss $T := \overline{S}$ eindeutig definiert, und es gilt*

$$\mathcal{D}(T) = \{x \in X : \exists (x_n) \subset \mathcal{D}(S),\ x_n \to x,\ (Sx_n) \textit{ konvergiert}\}$$

und $Tx = \overline{S}x := \lim_{n\to\infty} Sx_n$ *für alle* $x \in \mathcal{D}(T)$.

(*c*) *S ist genau dann abschließbar, wenn eine abgeschlossene Erweiterung T von S existiert. Für jede solche Erweiterung gilt* $\overline{S} \subset T$.

(*d*) *T ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{G}(T)$, versehen mit der Graphennorm*

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \quad x \in \mathcal{D}(T),$$

ein Banachraum ist.

Beweis. (*a*) Der Operator S ist genau dann abschließbar, wenn der abgeschlossene Unterraum

$$\overline{\mathcal{G}(S)} = \{(x,y) \in X \times Y : \exists (x_n) \subset \mathcal{D}(S),\ x_n \to x,\ Sx_n \to y\}$$

Graph eines linearen Operators T ist. In diesem Fall ist y eindeutig und linear durch x bestimmt, und es gilt $Tx = y$. Insbesondere liefert $x = 0$ den Wert $y = 0$, und es gilt die Äquivalenz

$$(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(S)} \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Umgekehrt folgt mit dieser Bedingung aus $(x,y), (x,y') \in \overline{\mathcal{G}(S)}$ sofort $y = y'$. Somit gilt für beliebige Folgen $(x_n), (x'_n) \subset \mathcal{D}(S)$ mit $x_n \to x$ und $x'_n \to x$ sowie $Sx_n \to y$ und $Sx'_n \to y'$ auch $y = y'$. Folglich ist die Abbildung $T : x \mapsto y$ wohldefiniert und linear, da $\overline{\mathcal{G}(S)}$ ein linearer Raum ist.

(*b*) Wegen $\mathcal{G}(T) = \overline{\mathcal{G}(S)}$ (vgl. (1.1)) ist T durch S eindeutig bestimmt.

(*c*) „$\Rightarrow$“ Offenbar ist $T = \overline{S}$ eine abgeschlossene Erweiterung von S.

„$\Leftarrow$“ Ist T abgeschlossen und $\mathcal{G}(S) \subseteq \overline{\mathcal{G}(S)} \subseteq \mathcal{G}(T)$, so ergibt sich aus $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(S)} \subseteq \mathcal{G}(T)$ auch $y = 0$, da $\mathcal{G}(T)$ ein Graph ist. Folglich ist S abschließbar, $\mathcal{G}(\overline{S}) = \overline{\mathcal{G}(S)} \subseteq \mathcal{G}(T)$ und $\overline{S} \subset T$.

(*d*) ist trivial. ∎

Anmerkungen. (*a*) Wenn S abschließbar ist, so ist $T = \overline{S}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung von S im Sinne der partiellen Ordnung $\mathcal{G}(S) \subseteq \mathcal{G}(\overline{S})$ auf $X \times Y$.

(*b*) Es gibt lineare Operatoren, die nicht abschließbar sind (Übung). ∎

Definition 1.4 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ ein dicht definierter Operator. Dann ist der adjungierte Operator $T' : D(T') \subseteq Y' \to X'$ definiert durch seinen Definitionsbereich*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T') \;:=\; & \{f \in Y' : \textit{die lineare Abbildung}\ \mathcal{D}(T) \subseteq X \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(Tx) \\ & \textit{läßt sich stetig auf } X \textit{ fortsetzen}\} \end{aligned}$$

und durch $T'f := g \in X'$, wobei $f(Tx) = (T'f)x = g(x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$.

In dieser Definition wird T nicht als abgeschlossen oder abschließbar vorausgesetzt (wohl aber, dass T dicht definiert ist).

Proposition 1.5 *Sei T dicht definiert in X. Dann gilt*

(a) T' ist wohldefiniert und ein linearer und abgeschlossener Operator.

(b) Ist T abschließbar, gilt $(\overline{T})' = T'$.

(c) Sind X und Y reflexiv, so ist T' genau dann dicht definiert, wenn T abschließbar ist. In diesem Fall gilt $\overline{T} = T''$.

Beweis. (a) Sei $f \in \mathcal{D}(T')$. Dann kann nach Definition die lineare Abbildung $\mathcal{D}(T) \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(Tx)$, zu einem Funktional auf $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$ erweitert werden. Folglich existiert genau ein $g \in X'$ mit $f(Tx) = (T'f)x = g(x)$, d.h. $g = T'f$. Offensichtlich ist T' linear.

Bevor wir fortfahren, führen wir noch einige Notationen ein. Wir identifizieren den Dualraum $(Y \times X)'$ mit $Y' \times X'$ vermöge

$$(f, g) \circ (y, x) := f(y) + g(x) \quad \text{für alle } (y, x) \in Y \times X \text{ und } (f, g) \in Y' \times X'.$$

Außerdem definieren wir einen Isomorphismus

$$U : X \times Y \to Y \times X, \quad (x, y) \mapsto (y, -x).$$

Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} (f, g) \in \mathcal{G}(T') \subseteq Y' \times X' \quad &\Leftrightarrow \quad f(Tx) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \\ &\Leftrightarrow \quad (f, g) \circ (Tx, -x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \\ &\Leftrightarrow \quad (f, g) \in \big(U\mathcal{G}(T)\big)^{\perp}, \end{aligned}$$

Demnach gilt

$$\mathcal{G}(T') = \big(U\mathcal{G}(T)\big)^{\perp} \quad \text{bzgl. } \circ; \tag{1.2}$$

insbesondere ist $\mathcal{G}(T')$ abgeschlossen. Also ist T' abgeschlossen.

(b) Zur Vorbereitung der folgenden Beweise leiten wir zwei Identitäten her: Mit Aussage (a) und einer einfachen Rechnung folgt

$$\mathcal{G}(T') \underset{(1.2)}{=} \big(U\mathcal{G}(T)\big)^{\perp} = U\big(\mathcal{G}(T)^{\perp}\big). \tag{1.3}$$

Nun gilt für jeden linearen Unterraum M eines Banachraums Z die Identität $(M^{\perp})_{\perp} = \overline{M}$ (die Inklusion $\overline{M} \subseteq (M^{\perp})_{\perp}$ ist trivial; die Umkehrung folgt aus dem Satz von Hahn-Banach). Damit erhält man

$$\mathcal{G}(T')_{\perp} \underset{(1.2)}{=} \Big(\big(U\mathcal{G}(T)\big)^{\perp}\Big)_{\perp} = \overline{U\mathcal{G}(T)} = U\,\overline{\mathcal{G}(T)}. \tag{1.4}$$

Sei nun T abschließbar. Dann folgt

$$\mathcal{G}(T') \underset{(1.2)}{=} \big(U\mathcal{G}(T)\big)^\perp = \big(U\overline{\mathcal{G}(T)}\big)^\perp \underset{(1.1)}{=} \big(U\mathcal{G}(\overline{T})\big)^\perp \underset{(1.2)}{=} \mathcal{G}\big((\overline{T})'\big)$$

und demnach $T' = (\overline{T})'$.

(c) „$\Rightarrow$“ Sei T' dicht definiert. Dann gilt mit (1.4)

$$\begin{aligned}(0,y) \in \overline{\mathcal{G}(T)} \quad &\Leftrightarrow \quad (y,-0) \in U\,\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(T')_\perp \\ &\Leftrightarrow \quad (f, T'f) \circ (y,0) = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(T') \\ &\Leftrightarrow \quad f(y) = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(T').\end{aligned}$$

Also ist $y = 0$, und T ist nach Proposition 1.3 (a) abschließbar.

„$\Leftarrow$“ Sei T abschließbar, und es gelte $f(y) = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}(T')$. Dann ergibt sich aus obiger Äquivalenz $(0,y) \in \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$ und folglich $y = 0$. Da Y reflexiv ist, liegt $\mathcal{D}(T')$ dicht in Y'.

Nun sei T abschließbar und somit T' dicht definiert. Dann ist auch T'' abgeschlossen und dicht definiert. Somit gilt

$$\mathcal{G}(T'') \underset{(1.3)}{=} U\left(\mathcal{G}(T')^\perp\right) \underset{\text{refl.}}{=} U\left(\mathcal{G}(T')_\perp\right) \underset{(1.4)}{=} \underbrace{U \circ U}_{=-\mathrm{id}}\overline{\mathcal{G}(T)} = -\mathcal{G}(\overline{T}) = \mathcal{G}(\overline{T}).$$

Nun folgt die Behauptung $T'' = \overline{T}$. ∎

Beispiel: Multiplikationsoperatoren. Sei $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Weiter sei $\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ messbar und fast überall endlich. Wir betrachten den Operator $M_\varphi : \mathcal{D}(M_\varphi) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ der Multiplikation $u \mapsto \varphi u$, wobei

$$\mathcal{D}(M_\varphi) := \{u \in L^p(\Omega) : u\varphi \in L^p(\Omega)\}.$$

Dann ist M_φ dicht definiert und abgeschlossen, und der adjungierte Operator M'_φ auf $L^q(\Omega)$ (mit $1/p + 1/q = 1$) ist wie M_φ auf $L^p(\Omega)$ definiert (Übung). ∎

Lemma 1.6 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ dicht definiert. Dann gilt*

$$\mathcal{N}(T') = \mathcal{R}(T)^\perp \quad \textit{und} \quad \overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T')_\perp.$$

Beweis. Die Gleichheit $\mathcal{N}(T') = \mathcal{R}(T)^\perp$ ist trivial. Die zweite Aussage folgt aus

$$\mathcal{N}(T')_\perp = \left(\mathcal{R}(T)^\perp\right)_\perp = \overline{\mathcal{R}(T)},$$

da für jeden Unterraum $M \subset Y$ die Identität $(M^\perp)_\perp = \overline{M}$ gilt. ∎

Das nächste Ziel ist der Satz vom abgeschlossenen Bild für abgeschlossene dicht definierte Operatoren, den wir mit Hilfe des entsprechenden Resultats für beschränkte Operatoren aus der Vorlesung Funktionalanalysis beweisen werden.

Dazu zwei Vorbemerkungen.

Vorbemerkung 1. Sei X ein Banachraum und G ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist der Operator

$$\Phi : X' \to G', \quad f \mapsto f|_G$$

der Einschränkung stetig (da $\|f|_G\| \le \|f\|$), surjektiv (Hahn-Banach) und offen (open mapping theorem). Für $M \subseteq X'$ und $N \subseteq G'$ definieren wir

$$M|_G := \{f|_G : f \in M\} \quad \text{und} \quad N|^G := \{f \in X' : f|_G \in N\},$$

d.h. das Bild von M bzw. das Urbild von N unter Φ. Da Φ stetig ist, ist $N|^G$ für jedes offene (abgeschlossene) N offen (abgeschlossen). Da Φ offen ist, ist $M|_G$ für jedes offene M offen, und für jedes abgeschlossene $N|^G$ ist auch $N = (N|^G)|_G$ abgeschlossen.

Vorbemerkung 2. Für jeden abgeschlossenen Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ ist sein Graph $\mathcal{G}(T) \subset X \times Y$ ein Banachraum, und der Operator

$$S : \mathcal{G}(T) \to Y, \quad (x, Tx) \mapsto Tx,$$

ist beschränkt. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T) \quad \text{und} \quad \mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(T) \times \{0\}. \tag{1.5}$$

Wir bestimmen den adjungierten Operator $S' : Y' \to (\mathcal{G}(T))'$. Für $x \in \mathcal{D}(T)$ und $f \in Y' = \mathcal{D}(S')$ erhält man

$$(S'f)(x, Tx) = f\big(S(x, Tx)\big) = f(Tx) = (0, f) \circ (x, Tx).$$

Somit gilt nach (1.3) für das Funktional $S'f \in (\mathcal{G}(T))'$

$$S'f - (0, f) \in \mathcal{G}(T)^\perp = -U\mathcal{G}(T')$$

(man beachte, dass $U^{-1} = -U$). Deshalb besitzt $S'f$ die Darstellung

$$S'f = (0, f) - (T'g, -g) = (-T'g, f + g) \quad \text{mit einem } g \in \mathcal{D}(T').$$

Nun gilt bei gegebenem $f \in Y'$ die Beziehung $(-T'g, f + g)|_{\mathcal{G}(T)} = S'f$ sogar für *alle* $g \in \mathcal{D}(T')$ (man beachte, dass genau die Funktionale $(T'g, -g)$ mit $g \in \mathcal{D}(T')$ auf $\mathcal{G}(T)$ verschwinden). Durchläuft nun zuerst g den Raum $\mathcal{D}(T')$ und anschließend f den Raum Y', liest man die Identität $\mathcal{R}(S')|^{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{R}(T') \times Y'$ ab.

Ferner liefert Lemma 1.6 $\mathcal{N}(S') = \mathcal{R}(S)^\perp = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T')$. Somit gilt

$$\mathcal{R}(S')|^{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{R}(T') \times Y' \quad \text{und} \quad \mathcal{N}(S') = \mathcal{N}(T'). \tag{1.6}$$

Satz 1.7 (Satz vom abgeschlossenen Bild) *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ dicht definiert und abgeschlossen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) $\mathcal{R}(T) \subset Y$ ist abgeschlossen,
(b) $\mathcal{R}(T') \subset X'$ ist abgeschlossen,
(c) $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T')_\perp$,
(d) $\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T)^\perp$.

Beweis. Wir benutzen den aus der Funktionalanalysis bekannten Fakt, dass der Satz vom abgeschlossenen Bild für beschränkte Operatoren gilt; insbesondere also für den oben definierten Operator $S : \mathcal{G}(T) \to Y$ und seinen Adjungierten $S' : Y' \to (\mathcal{G}(T))'$.

Wir zeigen zuerst die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$. Nach (1.5) und (1.6) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T) \text{ abgeschlossen} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(S) \text{ abgeschlossen} \\ &\underset{\text{FA}}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{R}(S') \text{ abgeschlossen} \\ &\underset{\text{Vorbem. 1}}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{R}(S')|^{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{R}(T') \times Y' \text{ abgeschlossen} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{R}(T') \text{ abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Gelten nun (a) und (b), so folgt (c) aus Lemma 1.6, da $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist. Ebenso folgt (d) aus den Identitäten

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(T') \times Y' &= \mathcal{R}(S')|^{\mathcal{G}(T)} \\ &\underset{\text{FA}}{=} \big(\mathcal{N}(S)^\perp\big)|^{\mathcal{G}(T)} \\ &= \mathcal{N}(S)^\perp \\ &= (\mathcal{N}(T) \times \{0\})^\perp = \mathcal{N}(T)^\perp \times Y', \end{aligned}$$

wobei sich der Annihilator in Zeile 2 auf $\mathcal{G}(T)$ und der in Zeile 3 auf $X \times Y$ bezieht. Umgekehrt folgen (a) aus (c) bzw. (b) aus (d), da nun $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T')_\perp$ bzw. $\mathcal{R}(T') = \mathcal{N}(T)^\perp$ abgeschlossen sind. ■

1.2 Spektrum und Resolvente abgeschlossener Operatoren

Definition 1.8 *Sei X ein komplexer Banachraum und $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann heißt*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to X \textit{ ist bijektiv}\}$$

die Resolventenmenge *und $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ das* Spektrum *von T.*

Wie für beschränkte Operatoren zerlegen wir $\sigma(T)$ in paarweise disjunkte Teilmengen $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$, also in Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum und Restspektrum.

Beispiel. Sei $X = \ell^p$ mit $1 \leq p < \infty$ und $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge. Dann ist der Operator $T : (x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$ mit

$$\mathcal{D}(T) := \{(x_n) \in \ell^p : T(x_n) \in \ell^p\}$$

ein abgeschlossener Operator in ℓ^p und dicht definiert. Offensichtlich gilt

$$\sigma(T) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}, \quad \sigma_p(T) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dies zeigt insbesondere, dass jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ das Spektrum eines abgeschlossenen Operators sein kann; insbesondere sind $\sigma(T) = \mathbb{C}$ und $\rho(T) = \emptyset$ möglich. Auch der Fall $\rho(T) = \mathbb{C}$ tritt auf; als Beispiel betrachte einen quasinilpotenten injektiven Operator S in X mit dichtem Bild und nehme $T = S^{-1}$ (Übung). ∎

Proposition 1.9 *Sei T ein abgeschlossener Operator mit $\mathcal{D}(T) \subsetneqq X$.*
(a) Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist der Operator $\lambda I - T$ abgeschlossen und $\mathcal{D}(\lambda I - T) = \mathcal{D}(T)$.
(b) Für jedes $\lambda \in \rho(T)$ ist die Resolvente $R_\lambda := (\lambda I - T)^{-1} : X \to \mathcal{D}(T) \subset X$ beschränkt.
(c) Für alle $\lambda, \mu \in \rho(\lambda)$ gilt die Resolventengleichung

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu.$$

(d) $\rho(T) \subseteq \mathbb{C}$ ist offen, $\sigma(T)$ ist abgeschlossen, und $R_\lambda : \rho(T) \to L(X)$ ist eine analytische Funktion.

Beweis. Aussage (a) is trivial. Wir zeigen (b). Sei $\lambda \in \rho(T)$. Dann gilt

$$\mathcal{G}(R_\lambda) = \{(y, R_\lambda y) : y \in X\} = V\mathcal{G}(\lambda I - T),$$

wobei V für den Isomorphismus (Vertauschungsoperator)

$$V : X \times X \to X \times X, \quad (x, y) \mapsto (y, x)$$

steht. Da $\lambda I - T$ abgeschlossen ist, sind $\mathcal{G}(\lambda I - T)$ und auch $\mathcal{G}(R_\lambda)$ abgeschlossen. Also ist $R_\lambda : X \to X$ ein auf dem ganzen Raum X definierter abgeschlossener Operator. Dann impliziert der Satz vom abgeschlossenen Graphen die Beschränktheit von R_λ.
Aussage (c) ist eine leichte Übungsaufgabe, und (d) wird mit Hilfe von Neumann-Reihen bewiesen. ∎

Proposition 1.10 *Sei T ein abgeschlossener und dicht definierter Operator auf X. Dann gilt*
(a) $(\lambda I - T)' = \lambda I - T'$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$,
(b) $\rho(T) = \rho(T')$ und $\big(R_\lambda(T)\big)' = R_\lambda(T')$ für alle $\lambda \in \rho(T)$.

Beweis. Aussage (a) ist offensichtlich. Wir zeigen (b). Wegen (a) darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = 0 \in \rho(T)$ angenommen werden. Es genügt also, die Aussagen

$$T^{-1} \in L(X) \text{ existiert } \Leftrightarrow (T')^{-1} \in L(X') \text{ existiert}$$

und $(T^{-1})' = (T')^{-1}$ zu beweisen.

„$\Rightarrow$" Sei $T^{-1} \in L(X)$. Dann gilt $(T^{-1})' \in L(X')$. Nun gilt für jedes $g \in \mathcal{D}(T')$ und alle $y \in X$

$$\big((T^{-1})'T'g\big)(y) \underset{\text{(FA)}}{=} (T'g)(\underbrace{T^{-1}y}_{\in\mathcal{D}(T)}) \underset{\text{Def.}}{=} g(TT^{-1}y) = g(y),$$

woraus man $(T^{-1})'T' = I$ auf $\mathcal{D}(T')$ abliest. Darüber hinaus gilt für jedes $f \in X'$ und alle $x \in \mathcal{D}(T) \subset X$

$$\big((T^{-1})'f\big)(Tx) \underset{\text{(FA)}}{=} f(T^{-1}Tx) = f(x),$$

woraus man auf $(T^{-1})'f \in \mathcal{D}(T')$ und $T'(T^{-1})' = I$ auf X' schließt. Folglich existiert $(T')^{-1}$ in $L(X')$, und es gilt die Identität

$$(T')^{-1} = (T^{-1})'. \tag{1.7}$$

„$\Leftarrow$" Seien $(T')^{-1} \in L(X')$, $f \in X'$ und $x \in \mathcal{D}(T)$. Dann gilt $(T')^{-1}f \in \mathcal{D}(T')$ und daher

$$\big((T')^{-1}f\big)(Tx) = \big(T'(T')^{-1}f\big)(x) = f(x).$$

Nun gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach zu jedem $x \in \mathcal{D}(T) \subset X$ ein $f \in X'$ mit den Eigenschaften $\|f\| = 1$ und $f(x) = \|x\|$. Damit folgt

$$\|x\| = f(x) = \big((T')^{-1}f\big)(Tx) \le \|(T')^{-1}\|\,\|f\|\,\|Tx\| = \|(T')^{-1}\|\|Tx\|,$$

d.h. es ist $\|Tx\| \ge \alpha\|x\|$ mit $\alpha := \|(T')^{-1}\|^{-1} > 0$. Folglich ist T injektiv, und die Inverse erfüllt $\|T^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha} = \|(T')^{-1}\|$; der Operator T^{-1} ist also beschränkt auf $\mathcal{R}(T)$ und abgeschlossen (da T abgeschlossen ist).

Ferner ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen: Wegen $\mathcal{R}(T') = \mathcal{D}\big((T')^{-1}\big) = X'$ ist $\mathcal{R}(T')$ abgeschlossen, und nach Theorem 1.7 dann auch $\mathcal{R}(T)$. Schließlich ist auf Grund von Lemma 1.6 und der Injektivität von T' nun $\mathcal{R}(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T') = \{0\}$, so dass sich $\mathcal{R}(T) = X$ ergibt. Folglich ist $T^{-1} \in L(X)$. ■

Anmerkung. Der Beweisteil (ii) "$\Rightarrow$" im Beweis von Proposition 1.10 impliziert die Identität (1.7) im Sinne abgeschlossener Operatoren, falls nur Folgendes vorausgesetzt wird: T^{-1} ist dicht definiert und T' ist invertierbar. Im Beweis verwendet man dann nur Elemente $y \in \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1})$ sowie $f \in \mathcal{D}\big((T^{-1})'\big)$.

2 Abgeschlossene Operatoren auf Hilberträumen

In diesem Abschnitt sind $(H, \langle ., . \rangle)$ bzw. $(H_i, \langle ., . \rangle_i)$ (mit $i = 1, 2$) Hilberträume über $\mathbb{C}$.

2.1 Der Hilbertraum-Adjungierte

Definition 2.1 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ linear und dicht definiert. Der adjungierte Operator T^* von T ist definiert durch seinen Definitionsbereich*

$$\mathcal{D}(T^*) := \{y \in H_2 : \exists\, u \in H_1 \text{ mit } \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, u \rangle_1 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T)\}$$

und $T^* y := u$; man beachte, dass u eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall gilt

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^* y \rangle_1 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T) \text{ und } y \in \mathcal{D}(T^*).$$

Anmerkungen. (a) Durch den Anti-Isomorphismus $\phi_j : H_j \to H_j'$ aus dem Rieszschen Darstellungssatz ist der adjungierte Operator T^* von T eng mit dem in Kapitel 1 definierten adjungierten Operator T' von T verwandt.

(b) Die Ergebnisse aus Kapitel 1 gelten fast wortwörtlich auch für den adjungierten Operator in Hilberträumen. Insbesondere ist T^* wohldefiniert und abgeschlossen. Allerdings ist $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ und $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Der Unterschied beruht darauf, dass das Skalarprodukt im Hilbertraum eine Sesquilinearform definiert, das Dualitätsprodukt im Banachraum aber eine Bilinearform.

(c) Es kann vorkommen, dass T^* nicht dicht definiert ist; sogar der Fall $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ ist möglich (Übung). ∎

Proposition 2.2 *Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann gilt*

(a) T ist genau dann abschließbar, wenn T^* dicht definiert ist.

(b) Wenn T abschließbar ist, dann ist $\overline{T} = T^{**}$.

(c) T ist genau dann abgeschlossen, wenn $T = T^{**}$.

(d) Wenn $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ und $\overline{\mathcal{R}(T)} = H_2$, dann ist T^* invertierbar und

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

(e) Sei T abschließbar und $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Dann ist die Inverse T^{-1} von T genau dann abschließbar, wenn $\mathcal{N}(\overline{T}) = \{0\}$. In diesem Fall gilt

$$(\overline{T})^{-1} = \overline{T^{-1}}.$$

(f) Sei T invertierbar. Dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

Beweis. Zu Aussagen (a) und (b) vergleiche man Proposition 1.5 (a), (b). Man beachte, dass Hilberträume reflexiv sind und nach Proposition 1.5 T^* und T^{**} abgeschlossen sind. Aussage (c) folgt aus (b).

(d) Aufgrund der zusätzlichen Voraussetzungen ist $T^{-1} : \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) \subset H_2 \to H_1$ dicht definiert. Somit ist auch $(T^{-1})^*$ definiert. Da nach Lemma 1.6 außerdem $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$ gilt, ist $T^* : \mathcal{D}(T^*) \subset H_2 \to H_1$ invertierbar.

Wir verfahren nun ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.10 (b); allerdings ist hier ggf. keiner der betrachteten Operatoren stetig. Die Aussage ergibt sich aber aus der Bemerkung im Anschluss an Proposition 1.10 und aus (1.7).

(e) Der Beweis der Äquivalenz der Abschließbarkeit von T^{-1} und der Injektivität von $\overline{T}$ ist eine leichte Übungsaufgabe. Mit diesem Ergebnis und dem Vertauschungsoperator $V((x,y)) := (y,x)$ folgt dann

$$\mathcal{G}\big(\overline{T^{-1}}\big) = \overline{\mathcal{G}(T^{-1})} = \overline{V\mathcal{G}(T)} = V\big(\overline{\mathcal{G}(T)}\big) = V\mathcal{G}(\overline{T}) = \mathcal{G}\big(\overline{T}^{\,-1}\big).$$

(f) $\mathcal{G}(T)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{G}(T^{-1})$ abgeschlossen ist. ∎

Beispiel Teil I. In diesem längeren Beispiel betrachten wir den Differentialoperator

$$Tf := \frac{1}{i} f'$$

auf dem Intervall $(0,1)$. Wie in der Vorlesung zur Funktionalanalysis definieren wir den Sobolev-Raum

$$H^1(0,1) := \left\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ hat eine schwache Ableitung } f' \in L^2(0,1) \right\}.$$

Dabei heißt $f' \in L^2(0,1)$ schwache Ableitung von f, wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ formal partielle Integration erlaubt ist, d.h.

$$\int_0^1 f\varphi'\,dx = -\int_0^1 f'\varphi\,dx.$$

Funktionen $f \in H^1(0,1)$ sind (absolut-)stetig, und es gilt (ohne Beweis)

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'\,dt \quad \text{für alle } x \in [0,1];$$

insbesondere sind Punktauswertungen wie $f(0)$ wohldefiniert. Offensichtlich ist $H^1(0,1)$ mit der Norm (die äquivalent zur Graphennorm von T ist)

$$\|f\|_{H^1} = \left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\right)^{1/2},$$

ein Hilbertraum mit dem definierenden Skalarprodukt $\langle f,g\rangle + \langle f',g'\rangle$, wobei $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}\,dt$ das übliche L^2-Skalarprodukt ist. Man beachte, dass für $f,g \in H^1(0,1)$ die Formel der partiellen Integration gilt:

$$\langle f,g'\rangle = \int_0^1 f\overline{g'}\,dt = -\int_0^1 f'\overline{g}\,dt + f\overline{g}\big|_0^1 = -\langle f',g\rangle + f\overline{g}\big|_0^1.$$

Ferner benötigen wir den Sobolevraum

$$H_0^1(0,1) := \overline{C_0^\infty(0,1)}^{\|\cdot\|_{H^1}} = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1) = 0\}$$

als abgeschlossenen Unterraum von $H^1(0,1)$; die zweite Identität beweist man mit einem Approximationsargument und der obigen Formel zur partiellen Integration.

Wir betrachten nun genauer den (abgeschlossenen) Operator $T : \mathcal{D}(T) \subseteq L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ mit

$$\mathcal{D}(T) := H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1) \quad \text{und} \quad Tf := \frac{1}{i} f'.$$

Man beachte, dass $\mathcal{D}(T) = H_0^1(0,1) \supset C_0^\infty(0,1)$ dicht in $L^2(0,1)$ ist. Das Ziel ist die genaue Charakterisierung des adjungierten Operators T^*. Dazu formulieren wir einige Eigenschaften von T und T^* separat.

Eigenschaft 1. *Es gilt $\mathcal{R}(T)^\perp \subseteq \mathbb{C} \cdot 1$, wobei $\mathbb{C} \cdot 1 \subset L^2(0,1)$ den Raum aller konstanten Funktionen bezeichnet.*

Beweis. Wir zeigen $(\mathbb{C} \cdot 1)^\perp \subseteq \mathcal{R}(T)$. Dazu sei $h \in L^2(0,1)$ und $h \perp 1$. Dann liegt die Stammfunktion $k : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$ von h in $H^1(0,1)$, und es gilt

$$k' = h, \quad k(0) = 0, \quad k(1) = \int_0^1 h\,dt = \langle h, 1 \rangle = 0.$$

Damit folgt $k \in H_0^1(0,1) = \mathcal{D}(T)$ und $T(ik) = k' = h$. Also ist $h \in \mathcal{R}(T)$. ■

Eigenschaft 2. *Es gilt $\mathcal{D}(T^*) = H^1(0,1)$ und $T^* g = \frac{1}{i} g'$ für alle $g \in \mathcal{D}(T^*)$.*

Beweis. „$\supseteq$“ Sei $g \in H^1(0,1)$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle Tf, g \rangle = \frac{1}{i} \langle f', g \rangle = -\frac{1}{i} \langle f, g' \rangle + \frac{1}{i} f\overline{g}\,\big|_0^1 = \big\langle f, \frac{1}{i} g' \big\rangle,$$

da $f(0) = f(1) = 0$. Somit kann die Abbildung $f \mapsto \langle Tf, g \rangle = \langle f, \frac{1}{i} g' \rangle$ zu einer beschränkten Abbildung auf $L^2(0,1)$ erweitert werden; folglich ist $g \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^* g = \frac{1}{i} g'$.

„$\subseteq$“ Sei $g \in \mathcal{D}(T^*) \subset L^2(0,1)$. Wir setzen $h := T^* g$ und $k(x) := \int_0^x h\,dt$. Dann ist $k \in H^1(0,1)$ sowie $k' = h$, und es folgt für alle $f \in \mathcal{D}(T)$

$$-\langle f', k \rangle = \langle f, k' \rangle = \langle f, h \rangle = \langle f, T^* g \rangle \underset{\text{Def}}{=} \langle Tf, g \rangle = \big\langle \frac{1}{i} f', g \big\rangle.$$

Somit ist $\langle -if', g - ik \rangle = 0$; also $g - ik \in \mathcal{R}(T)^\perp \subseteq \mathbb{C} \cdot 1$, und es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $g = ik + c1 \in H^1(0,1)$. ■

Eigenschaft 3. *Es gilt $T = T^{**}$. Insbesondere ist T abgeschlossen.*

Beweis. „$\subset$“ Da T und T^* dicht in $L^2(0,1)$ definiert sind, ist T nach Proposition 2.2 (a) abschließbar. Nach Proposition 2.2 (b) gilt weiterhin $T \subset \overline{T} = T^{**}$.

„$\supset$“ Aus $T \subset T^*$ folgt $T^{**} \subset T^*$. Nun sei $g \in \mathcal{D}(T^{**})$, so dass $g \in \mathcal{D}(T^*) = H^1(0,1)$ und $T^{**}g = T^*g = \frac{1}{i}g'$. Dann erhalten wir für $f \in \mathcal{D}(T^*)$ nach Definition

$$0 = \langle T^*f, g\rangle - \langle f, T^{**}g\rangle = -i\langle f', g\rangle - i\langle f, g'\rangle = -if\overline{g}\,\Big|_0^1.$$

Da dies für alle $f \in \mathcal{D}(T^*) = H^1(0,1)$ gilt, muss $g(0) = g(1) = 0$ sein, also ist $g \in H_0^1(0,1) = \mathcal{D}(T)$. ∎

Insbesondere sind weder T noch T^* selbstadjungiert im Sinne von $T = T^*$ bzw. $(T^*)^* = T^*$. Wir setzen dieses Beispiel später fort. ∎

2.2 Reguläre Werte

Definition 2.3 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H \to H$ ein linearer Operator auf einem Hilbertraum H. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt* regulärer Wert *für T, falls eine Zahl $\alpha_\lambda > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq \alpha_\lambda \|x\| \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{D}(T)$$

existiert. Die Menge aller regulären Werte von T wird mit $\hat{\rho}(T)$ bezeichnet.

Für $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ wird der Raum $\big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp \subset H$ als Defektraum *von T an der Stelle λ bezeichnet; seine Dimension*

$$d_\lambda(T) := \dim\big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp$$

heißt die Defektzahl *von T an der Stelle λ.*

Dabei ist mit „Dimension“ die Mächtigkeit (Kardinalität) einer Orthonormalbasis von H gemeint. Man beachte, dass diese Dimension im endlich-dimensionalen Fall mit der üblichen geometrischen Dimension übereinstimmt; diese Dimension kann aber auch abzählbar unendlich oder überabzählbar sein.

Wir bemerken weiter, dass gilt

- Ist $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, so ist $\lambda I - T$ injektiv, und der inverse Operator $(\lambda I - T)^{-1} : \mathcal{R}(\lambda I - T) \subseteq H \to H$ ist beschränkt mit $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq 1/\alpha_\lambda$.
- Ist T abgeschlossen, so ist $\rho(T) \subset \hat{\rho}(T)$.
- Ist T abgeschlossen und $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, so ist $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ abgeschlossen.

Proposition 2.4 *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H \to H$ ein linearer Operator. Dann gilt*
(a) $\hat{\rho}(T)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$; genauer gilt $B_{\alpha_\lambda}(\lambda) \subset \hat{\rho}(T)$ für $\lambda \in \hat{\rho}(T)$.
(b) Sei T abschließbar. Dann gilt für jedes $\lambda \in \hat{\rho}(T)$

$$\hat{\rho}(\overline{T}) = \hat{\rho}(T), \quad \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} \quad \textit{und} \quad d_\lambda(\overline{T}) = d_\lambda(T).$$

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ und $|\mu - \lambda| < \alpha_\lambda$. Dann gilt für jedes $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\|(\mu I - T)x\| \geq \|(\lambda I - T)x\| - |\lambda - \mu|\|x\| \geq (\alpha_\lambda - |\lambda - \mu|)\|x\| = \alpha_\mu \|x\| \quad (2.1)$$

mit $\alpha_\mu := \alpha_\lambda - |\lambda - \mu| > 0$. Somit gilt $\mu \in \hat{\rho}(T)$ und $B_{\alpha_\lambda}(\lambda) \subset \hat{\rho}(T)$.
(b) Wir zeigen zunächst, dass

$$\overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}). \quad (2.2)$$

Sei $y \in \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}$. Es gibt also $x_n \in \mathcal{D}(T)$ so, dass $y_n := (\lambda I - T)x_n \to y$. Wegen

$$\|x_n - x_k\| \leq \frac{1}{\alpha_\lambda}\|(\lambda I - T)x_n - (\lambda I - T)x_k\| = \frac{1}{\alpha_\lambda}\|y_n - y_k\|$$

ist (x_n) eine Cauchy-Folge in H; es gibt also ein $x \in H$ mit $x = \lim x_n$. Da mit T auch $\lambda I - T$ abschließbar ist, folgen die Aussagen $x \in \mathcal{D}(\overline{T})$ und $(\lambda I - \overline{T})x = y$, d.h. es ist $y \in \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T})$. Zusammen mit der offensichtlichen Inklusion $\mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) \subset \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}$ zeigt dies (2.2).

Nun folgt aus $\big(\mathcal{R}(\lambda I - \overline{T})\big)^\perp = \big(\overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}\big)^\perp = \big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp$ auch die Aussage $d_\lambda(\overline{T}) = d_\lambda(T)$ zu den Defektzahlen. Ferner gilt $\|(\lambda I - \overline{T})x\| \geq \alpha_\lambda \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{D}(\overline{T})$. ■

Satz 2.5 (M. A. Krasnosel'skii, M. G. Krein) *Sei $T : \mathcal{D}(T) \subseteq H \to H$ ein abschließbarer Operator. Dann ist $d_\lambda(T)$ auf jeder Zusammenhangskomponente der offenen Menge $\hat{\rho}(T)$ konstant.*

Wir bereiten den Beweis mit einem Lemma vor.

Lemma 2.6 *Seien F und G abgeschlossene Unterräume von H mit der Eigenschaft* $\dim F < \dim G$ (*wieder im Sinne der Kardinalitäten von Orthonormalbasen von F und G*). *Dann existiert ein Vektor*

$$0 \neq y \in G \cap F^\perp.$$

Beweis. *Fall 1.* Sei $k := \dim F < \infty$ und o.B.d.A. $\dim G = k + 1$. Ferner sei $P : H \to F$ die Orthogonalprojektion von H auf F mit $\ker P = F^\perp$. Dann ist $P|_G : G \to F$ linear und *nicht injektiv*. Folglich existiert ein Vektor $0 \neq y \in G$ mit $y \in \ker(P|_G) \subset F^\perp$.
Fall 2. Sei nun $\dim F = \infty$. Seien $\{f_k : k \in K\}$ und $\{g_l : l \in L\}$ Orthonormalbasen von F bzw. G mit gewissen Indexmengen K, L, für die nach Voraussetzung $\#K < \#L$ gilt. Für $k \in K$ definieren wir die Indexmenge $L_k := \{l \in L : \langle f_k, g_l \rangle \neq 0\}$. Aus der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{l \in L_k} |\langle f_k, g_l \rangle|^2 \leq \|f_k\|^2 = 1$$

für f_k bzgl. der Vektoren g_l mit $l \in L_k$ ergibt sich, dass jede Menge L_k höchstens abzählbar ist. Da K unendlich ist, erhalten wir hieraus für $L' := \bigcup_{k \in K} L_k$ die Aussage $\#L' \leq \#K < \#L$, also auch $L' \subsetneqq L$. Nun wählen wir ein beliebiges $l \in L \setminus L'$. Dann gilt nach Konstruktion $0 \neq g_l \perp f_k$ für alle $k \in K$, also $g_l \in G \cap F^\perp$. ∎

Beweis von Satz 2.5. Wegen Proposition 2.4 (b) können wir o.B.d.A. annehmen, T sei abgeschlossen. Somit ist $\mathcal{R}(\mu I - T)$ für alle $\mu \in \hat{\rho}(T)$ abgeschlossen. Sei $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ und $\mu \in B_{\alpha_\lambda}(\lambda) \subset \hat{\rho}(T)$ (vgl. Proposition 2.4 (a)). Wir wollen zeigen, dass $d_\mu(T) = d_\lambda(T)$ für alle $\mu \in B_{\alpha_\lambda/2}(\lambda)$ gilt.
Schritt 1: Wir zeigen, dass $d_\mu(T) \geq d_\lambda(T)$ für alle $\mu \in B_{\alpha_\lambda}(\lambda)$.
Angenommen, es wäre $d_\mu(T) < d_\lambda(T)$ für ein $\mu \in B_{\alpha_\lambda}(\lambda)$. Dann gibt es nach Lemma 2.6 ein $0 \neq y \in \mathcal{R}(\lambda I - T)^\perp$ mit

$$y \in \mathcal{R}(\mu I - T)^{\perp\perp} = \mathcal{R}(\mu I - T),$$

und dazu ein $0 \neq x \in \mathcal{D}(T)$ mit $y = (\mu I - T)x$. Daraus folgt

$$0 = \langle y, (\lambda I - T)x \rangle = \langle (\mu I - T)x, (\lambda I - T)x \rangle,$$

also

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = \big\langle (\mu I - T)x + (\lambda - \mu)x, (\lambda I - T)x \big\rangle \leq |\lambda - \mu| \|x\| \|(\lambda I - T)x\|.$$

Folglich ist $\|(\lambda I - T)x\| \leq |\lambda - \mu| \|x\| < \alpha_\lambda \|x\|$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \in \hat{\rho}(T)$.

Schritt 2: Wir zeigen, dass $d_\mu(T) \leq d_\lambda(T)$ für alle $\mu \in B_{\alpha_\lambda/2}(\lambda)$.
Wir betrachten ein μ mit $|\lambda - \mu| < \alpha_\lambda/2$. Dann gilt nach (2.1) im Beweis von Proposition 2.4, dass $\alpha_\mu = \alpha_\lambda - |\lambda - \mu| > \alpha_\lambda/2$, also $\alpha_\lambda/2 < \alpha_\mu$ und somit $|\lambda - \mu| < \alpha_\mu$, d.h. $\lambda \in B_{\alpha_\mu}(\mu)$. Dann folgt $d_\lambda(T) \geq d_\mu(T)$ mit Schritt 1, wenn man λ mit μ vertauscht.

Schritt 3: Nun zeigt ein Kompaktheitsargument (entlang einer Kurve, die zwei Werte λ, λ' in einer Zusammenhangskomponente von $\hat{\rho}(T)$ verbindet), dass $d_\lambda(T)$ auf jeder Komponente von $\hat{\rho}(T)$ konstant ist. ∎

2.3 Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Definition 2.7 *Ein linearer Operator $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$ auf einem Hilbertraum H heißt*

(a) symmetrisch, *falls $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Falls T dicht definiert ist, ist die Symmetrie von T äquivalent zur Bedingung $T \subset T^*$.*

(b) selbstadjungiert, *wenn T dicht definiert und $T = T^*$ ist (insbesondere ist dann $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$).*

(c) wesentlich selbstadjungiert, *wenn T dicht definiert und abschließbar und der Abschluss $\overline{T}$ von T selbstadjungiert ist, d.h. $\overline{T}^* = \overline{T}$.*

Beispiel Teil II. Wir setzen nun unser obiges Beispiel fort. Wir haben bereits gesehen, dass T und T^* nicht selbstadjungiert sind, dass aber T auf $H_0^1(0,1)$ und auch auf $C_0^\infty(0,1)$ symmetrisch ist. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt eine selbstadjungierte Fortsetzung S von T auf einem geeigneten Definitionsbereich $\mathcal{D}(S) \subset H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ gibt.

Für $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei $\mathcal{D}(S_\mu) := \{f \in H^1(0,1) : f(1) = \mu f(0)\}$ und $S_\mu f = \frac{1}{i} f'$ auf $\mathcal{D}(S_\mu)$.

Eigenschaft 4. *Für $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $(S_\mu)^* = S_{1/\overline{\mu}}$. Insbesondere ist S_μ genau dann selbstadjungiert, wenn $|\mu| = 1$, also $\mu = e^{i\alpha}$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Für $f \in \mathcal{D}(S_\mu)$ und $g \in H^1(0,1)$ ist

$$\langle S_\mu f, g\rangle - \left\langle f, \frac{1}{i} g'\right\rangle = -if\overline{g}\big|_0^1 = -if(0)(\mu\overline{g(1)} - \overline{g(0)}). \tag{2.3}$$

„$\supset$" Falls $g \in \mathcal{D}(S_{1/\overline{\mu}})$, so gilt $\mu\overline{g(1)} - \overline{g(0)} = 0$ und somit aufgrund von (2.3) $\langle S_\mu f, g\rangle = \left\langle f, \frac{1}{i} g'\right\rangle$. Damit folgt $g \in \mathcal{D}((S_\mu)^*)$ und $(S_\mu)^* g = \frac{1}{i} g'$.

„$\subset$" Sei $g \in \mathcal{D}((S_\mu)^*)$. Wir wählen $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $e^\lambda = \mu$. Dann folgt $f(x) := e^{\lambda x} \in \mathcal{D}(S_\mu)$. Wegen $T \subset S_\mu$ ist dann $(S_\mu)^* \subset T^*$; somit liegt g in $\mathcal{D}(T^*) = H^1(0,1)$, und es ist $(S_\mu)^* g = T^* g = \frac{1}{i} g'$. Aus (2.3) mit verschwindender *linker* Seite folgt wegen $f(0) \neq 0$ nun $\mu\overline{g(1)} - \overline{g(0)} = 0$, also $g \in \mathcal{D}(S_{1/\overline{\mu}})$.

Somit ist $S_{e^{i\alpha}}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ eine selbstadjungierte Fortsetzung von T. Der Operator $T = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ auf $\mathcal{D}(T) = H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ besitzt also unendlich viele verschiedene selbstadjungierte Fortsetzungen. ∎

Mit Hilfe der Polarisationsformel zeigt man leicht die Äquivalenz

$$T \text{ ist symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \ \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T).$$

Proposition 2.8 (a) *Sei T dicht definiert und symmetrisch. Dann ist T abschließbar, $\overline{T} \subset T^*$, $\overline{T}$ symmetrisch und*

$$\overline{T}^* = T^*.$$

Ferner gilt $T \subset \overline{T} = T^{**} \subset T^*$.
(b) *T ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $\overline{T} = T^*$.*

Beweis. (a) Wegen $\overline{\mathcal{D}(T)} = H$ existiert T^*, und nach Proposition 1.5 (a) ist T^* abgeschlossen. Da T symmetrisch ist, gilt $T \subset T^*$; somit ist T abschließbar und $T \subset \overline{T} \subset T^*$. Mit Proposition 1.5 ($b$) erhält man nun die erste Behauptung $T^* = (\overline{T})^*$. Die zweite Behauptung ist mit Proposition 2.2 (b) (oder Proposition 1.5 (c)) offensichtlich.
(b) Falls T wesentlich selbstadjungiert ist, sind $\overline{T}$ und auch T symmetrisch, und es gilt mit Teil (a) $T^* = (\overline{T})^* = \overline{T}$. Umgekehrt folgt aus $\overline{T} = T^*$ mit Proposition 2.2 (b), dass $\overline{T}^* = T^{**} = \overline{T}$. ∎

Proposition 2.9 *Sei T symmetrisch. Dann gilt*
(*a*) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \hat{\rho}(T)$.
(*b*) *Falls T dicht definiert ist und $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, dann ist $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*) = H$.*

Beweis. (*a*) Seien $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathcal{D}(T)$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - T)x\|^2 &= \|(\alpha I - T)x + i\beta x\|^2 \\ &= \|(\alpha I - T)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big((-i\beta)\langle(\alpha I - T)x, x\rangle\big) \\ &\geq \|\beta x\|^2, \end{aligned}$$

da $\langle(\alpha I - T)x, x\rangle$ aufgrund der Symmetrie von $\alpha I - T$ reell ist. Hieraus folgt die Abschätzung $\|(\lambda I - T)x\| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda|\|x\|$. Somit ist $\lambda \in \hat{\rho}(T)$ falls $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$.

(*b*) Nach Proposition 2.8 (*a*) ist T und mit Proposition 1.3 (*a*) auch $\lambda I - T$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ abschließbar. Dann liefert Proposition 2.4 (*b*) für $\lambda \in \hat{\rho}(T) = \hat{\rho}(\overline{T})$, dass $\mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) = \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}$ abgeschlossen ist. Wegen des Satzes vom abgeschlossenen Bild und Proposition 2.8 (*a*) ist dann auch $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - \overline{T}^*) = \mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*)$ abgeschlossen. Nun folgt mit Lemma 1.6

$$\{0\} = \mathcal{N}(\lambda I - \overline{T}) = \big(\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - \overline{T}^*)\big)^\perp = \big(\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*)\big)^\perp,$$

also $H = \mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T^*)$. ■

Definition 2.10 *Die* Defektindices *eines abschließbaren symmetrischen Operators T auf H sind die Kardinalzahlen*

$$\begin{aligned} d_+(T) &:= d_\lambda(T) = \dim\big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp \quad \textit{für } \mathrm{Im}\,\lambda > 0, \\ d_-(T) &:= d_\lambda(T) = \dim\big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp \quad \textit{für } \mathrm{Im}\,\lambda < 0. \end{aligned}$$

Anmerkungen. (*a*) Man beachte, dass die Größen $d_\pm(T)$ wegen Theorem 2.5 wohldefiniert sind.

(*b*) Ist T dicht definiert und symmetrisch (und folglich abschließbar), so gilt wegen $\overline{T}^* = T^*$ (vgl. Proposition 2.8) und mit Lemma 1.6

$$\begin{aligned} d_+(T) &= \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) = \dim \mathcal{N}(-iI - T^*) \quad \text{für } \mathrm{Im}\,\lambda > 0, \\ d_-(T) &= \dim \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) = \dim \mathcal{N}(iI - T^*) \quad \text{für } \mathrm{Im}\,\lambda < 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.11 *Sei T dicht definiert und symmetrisch. Falls $\hat{\rho}(T)$ eine reelle Zahl enthält, dann ist $d_+(T) = d_-(T)$.*

Beweis. Unter dieser Voraussetzung gehören $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ und $\{z : \mathrm{Im}\, z < 0\}$ zur gleichen Zusammenhangskomponente von $\hat{\rho}(T)$. ■

Satz 2.12 (Von Neumanns Formel) *Sei T ein dicht definierter und symmetrischer Operator. Dann ist*

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(\overline{T}) \oplus \mathcal{N}(\lambda I - T^*) \oplus \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

(*im Sinne einer direkten, i. allg. aber nicht orthogonalen Zerlegung*) *und folglich*

$$\dim \big(\mathcal{D}(T^*)/\mathcal{D}(\overline{T})\big) = d_+(T) + d_-(T).$$

Beweis. Wegen $\overline{T} \subset T^*$ ist die Inklusion $\supseteq$ offensichtlich. Wir zeigen $\subseteq$.
Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei $\mathcal{N}_\lambda := \mathcal{N}(\lambda I - T^*)$. Man beachte, dass wegen $\overline{T}^* = T^*$ die Zerlegung

$$H = \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) \oplus_\perp \big(\mathcal{R}(\lambda I - \overline{T})\big)^\perp = \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) \oplus_\perp \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$$

(hier schreiben wir $\oplus_\perp$ für eine *orthogonale* Zerlegung) gilt. Sei $x \in \mathcal{D}(T^*)$. Dann besitzt $(\lambda I - T^*)x \in H$ eine Zerlegung

$$(\lambda I - T^*)x = (\lambda I - \overline{T})x_0 + x'_- \quad \text{mit } x_0 \in \mathcal{D}(\overline{T}) \text{ und } x'_- \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}.$$

Wegen $\lambda \notin \mathbb{R}$ ist $x_- := (\lambda - \overline{\lambda})^{-1} x'_- \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ wohldefiniert. Dann gilt $\overline{T}x_0 = T^*x_0$ und $T^*x_- = \overline{\lambda}x_-$ und somit

$$(\lambda I - T^*)(x - x_0 - x_-) = 0.$$

Hieraus folgt $x_+ := x - x_0 - x_- \in \mathcal{N}_\lambda$ und $x = x_0 + x_+ + x_- \in \mathcal{D}(\overline{T}) + \mathcal{N}_\lambda + \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$. Wir zeigen, dass diese Zerlegung direkt ist.
Dazu sei $0 = x_0 + x_+ + x_-$ für $x_0 \in \mathcal{D}(\overline{T})$, $x_+ \in \mathcal{N}_\lambda$ und $x_- \in \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$. Damit folgt

$$0 = (\lambda I - T^*)(x_0 + x_+ + x_-) = (\lambda I - \overline{T})x_0 + (\lambda - \overline{\lambda})x_- \in \mathcal{R}(\lambda I - \overline{T}) + \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}.$$

Da die letztgenannten Räume orthogonal zueinander sind, muss $x_- = 0$ gelten. Analog erhält man $x_+ = 0$ und dann auch $x_0 = 0$. ∎

Folgerung 2.13 *Sei T dicht definiert und symmetrisch. Dann gilt*
(*a*) *T ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $d_+(T) = d_-(T) = 0$.*
(*b*) *Unter der Voraussetzung $\hat{\rho}(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ist T genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $d_+(T) = 0$.*

Beweis. (*a*) Nach Proposition 2.8 (*b*) ist T genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $\overline{T} = T^*$. Dieses ist aufgrund der zweiten Identität in Theorem 2.12 äquivalent zur Aussage $d_+(T) = d_-(T) = 0$. Aussage (*b*) folgt nun mit Proposition 2.11. ∎

Wir formulieren nun ein Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 2.14 *Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator, und seien* $\operatorname{Im}\lambda_+ > 0$ *und* $\operatorname{Im}\lambda_- < 0$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) T ist selbstadjungiert;
(b) $d_+(T) = d_-(T) = 0$;
(c) $\mathcal{R}(\lambda_+ I - T) = H = \mathcal{R}(\lambda_- I - T)$;
(d) $\lambda_+, \lambda_- \in \rho(T)$.

Beweis. Es stehe λ für $\lambda = \lambda_+$ oder $\lambda = \lambda_-$.
$(a) \Rightarrow (b), (c), (d)$: Da T selbstadjungiert ist, folgt $\lambda, \overline{\lambda} \in \hat{\rho}(T)$. Deshalb sind $\lambda I - T$ und $\overline{\lambda} I - T$ injektiv, es gilt $\mathcal{N}(\lambda I - T^*) = \mathcal{N}(\overline{\lambda} I - T^*) = \{0\}$ und somit $\big(\mathcal{R}(\lambda I - T)\big)^\perp = \big(\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T)\big)^\perp = \{0\}$. Ferner sind $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ und $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T)$ abgeschlossen und somit gleich H. Folglich liegt λ in $\rho(T)$.
$(b), (c), (d) \Rightarrow (a)$: Wir zeigen zuerst

$$\mathcal{D}(T) \text{ ist dicht in } H \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(\lambda I - T) = H. \tag{2.4}$$

Da in allen drei Fällen $d_\pm(T) = 0$ und $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ abgeschlossen und dicht in H ist, folgt $\mathcal{R}(\lambda I - T) = H$. Nun sei $y \perp \mathcal{D}(T)$. Dann gibt es ein $u \in \mathcal{D}(T)$ mit $y = (\lambda I - T)u$. Deshalb und wegen der Symmetrie von T gilt für alle $x \in \mathcal{D}(T)$

$$0 = \langle y, x \rangle = \big\langle (\lambda I - T)u, x \big\rangle = \big\langle u, (\overline{\lambda} I - T)x \big\rangle.$$

Da $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T) = H$, folgt $u = 0$ und damit $y = 0$, und (2.4) ist gezeigt.
Somit ist T^* wohldefiniert. Da T symmetrisch ist, also $T \subset T^*$ gilt, genügt es, $T^* \subset T$ zu beweisen.

Das folgende Argument benutzt die Surjektivität von $\lambda I - T$: Sei $w \in \mathcal{D}(T^*)$. Dann gibt es ein $v \in \mathcal{D}(T)$ mit $(\lambda I - T)v = (\lambda I - T^*)w$, so dass für alle $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\big\langle (\overline{\lambda} I - T)x, w \big\rangle = \big\langle x, (\lambda I - T^*)w \big\rangle = \big\langle x, (\lambda I - T)v \big\rangle = \big\langle (\overline{\lambda} I - T)x, v \big\rangle$$

folgt. Da $\mathcal{R}(\overline{\lambda} I - T) = H$, gilt also $w = v \in \mathcal{D}(T)$ und damit $\mathcal{D}(T^*) \subseteq \mathcal{D}(T)$. ∎

Folgerung 2.15 *Sei T ein symmetrischer Operator mit $\mathcal{R}(T) = H$. Dann ist T selbstadjungiert, $0 \in \rho(T)$ und T^{-1} ist selbstadjungiert.*

Beweis. Man argumentiert wie im letzten Teil des Beweises von Theorem 2.14 mit $\lambda_+ = \lambda_- = 0$, um die Dichtheit von $\mathcal{D}(T)$ in H und $\mathcal{D}(T^*) \subseteq \mathcal{D}(T)$ zu zeigen. Also ist $T = T^*$ abgeschlossen, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ und $0 \in \rho(T)$. Schließlich gilt nach Proposition 2.2 (d) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$. ∎

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem (C^2-)Rand. Wir betrachten den Operator $A := -\Delta$ auf dem Testfunktionenraum $C_c^\infty(\Omega)$ der C^∞-Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger. Mit zweifacher partieller Integration folgt

$$\int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma}_{=0} = \int_\Omega u(-\Delta) v \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u \, d\sigma}_{=0},$$

da u und v auf $\partial\Omega$ verschwinden; dabei bezeichnet ν den Normaleneinheitsvektor an $\partial\Omega$. Folglich ist der Operator A mit $\mathcal{D}(A) = C_c^\infty(\Omega)$ bzgl. des $L^2(\Omega)$-Skalarprodukts symmetrisch. Die analoge Aussage erhält man, falls die Normalableitungen $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ auf $\partial\Omega$ verschwinden. Mit einem Dichtheitsargument folgt, dass der Operator $A = -\Delta$ sowohl auf dem Sobolevraum

$$\mathcal{D}(-\Delta_D) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \subset L^2(\Omega)$$

als auch auf dem Raum

$$\mathcal{D}(-\Delta_N) := \Big\{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\Big\} \subset L^2(\Omega)$$

symmetrisch ist. Auf $\mathcal{D}(-\Delta_D)$ steht der Operator $-\Delta_D$ für den Dirichlet-Laplace-Operator und das elliptische Randwertproblem

$$-\Delta u = f \;\text{ in } \Omega, \quad u = 0 \;\text{ auf } \partial\Omega \tag{2.5}$$

mit der Dirichlet-Randbedingung $u = 0$, während $-\Delta_N$ auf $\mathcal{D}(-\Delta_N)$ der zugehörige Operator für das Neumannproblem

$$-\Delta u = f \;\text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\text{ auf } \partial\Omega \tag{2.6}$$

ist. Beide Operatoren sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich $\mathcal{D}(-\Delta_D)$ bzw. $\mathcal{D}(-\Delta_N)$ nicht nur symmetrisch, sondern auch selbstadjungiert.

Um die letzte Aussage zu beweisen, benötigen wir einige Ergebnisse über die elliptischen Randwertprobleme (2.5) und (2.6). Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ gibt es zum Dirichletproblem (2.5) genau eine Lösung $u \in \mathcal{D}(-\Delta_D)$, die zudem stetig von f abhängt und einer Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

genügt. Dann impliziert Korollar 2.15 wegen $\mathcal{R}(-\Delta_D) = L^2(\Omega)$, dass $-\Delta_D$ sogar selbstadjungiert ist.

Für das Neumannproblem (2.6) gilt $0 \in \sigma(-\Delta_N)$ (beachte, dass $u \equiv 1$ eine Lösung von (2.6) mit $f = 0$ ist), so dass eine *Spektralverschiebung* von $-\Delta_N$ zu $I - \Delta_N$ notwendig ist. Dieser Operator ist ebenfalls symmetrisch, und das zugehörige Randwertproblem $(I - \Delta)u = f$ in Ω, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial\Omega$ ist für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eindeutig lösbar mit der *a priori*-Abschätzung $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Wie für $-\Delta_D$ folgt nun, dass $I - \Delta_N$ selbstadjungiert ist. Dann ist auch $-\Delta_N$

selbstadjungiert. ∎

Im Allgemeinen existiert keine selbstadjungierte Fortsetzung eines abgeschlossenen symmetrischen Operators T im gleichen Hilbertraum H. Allerdings findet man stets eine selbstadjungierte Fortsetzung auf einem größeren Hilbertraum, falls T dicht definiert ist. Der folgende Satz besagt, dass eine selbstadjungierte Fortsetzung *in* H existiert, falls $\hat{\rho}(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Es ist jedoch i.allg. schwierig, den Definitionsbereich explizit zu charakterisieren.

Satz 2.16 *Sei T ein dicht definierter, abgeschlossener und symmetrischer Operator auf H, und sei $\mu \in \hat{\rho}(T) \cap \mathbb{R}$. Dann existiert eine selbstadjungierte Fortsetzung A von T auf H mit der Eigenschaft $\mu \in \rho(A)$.*

Beweis. O.E.d.A. sei $\mu = 0 \in \hat{\rho}(T)$, woraus $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ und nach Proposition 2.9 (b) $\mathcal{R}(T^*) = H$ folgt. Somit gibt es einen Unterraum $\mathcal{D}_0$ mit

$$\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(T^*) \quad \text{und} \quad T^*\mathcal{D}_0 = \mathcal{N}(T^*),$$

z.B. das Urbild $\mathcal{D}_0 = (T^*)^{-1}\mathcal{N}(T^*)$. Sei $P : H \to \mathcal{N}(T^*)$ die orthogonale Projektion auf (den abgeschlossenen Unterraum) $\mathcal{N}(T^*)$ und

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(T) + (I - P)\mathcal{D}_0, \quad A := T^*|_{\mathcal{D}(A)};$$

man beachte, dass $\mathcal{D}(A)$ ein Unterraum von $\mathcal{D}(T^*)$ ist. Folglich gilt $T \subset A \subset T^*$, $T^*P = 0$, $\mathcal{N}(T^*) \perp (I - P)H$ und $(I - P)\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}(T^*)$.

Wir zeigen im nächsten Schritt, dass A symmetrisch ist. Für $k = 1, 2$ seien $u_k = x_k + y_k \in \mathcal{D}(A)$ mit beliebigen $x_k \in \mathcal{D}(T)$ und $y_k \in (I - P)\mathcal{D}_0$ gewählt. Da $T^*(I - P)\mathcal{D}_0 = T^*\mathcal{D}_0 = \mathcal{N}(T^*) \perp (I - P)\mathcal{D}_0$, erhalten wir $\langle T^*y_j, y_k\rangle = 0$ für $j, k = 1, 2$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\langle Au_1, u_2\rangle &= \langle Tx_1 + T^*y_1, x_2 + y_2\rangle \\
&= \underbrace{\langle Tx_1, x_2\rangle}_{=\langle x_1, Tx_2\rangle} + \underbrace{\langle Tx_1, y_2\rangle}_{=\langle x_1, T^*y_2\rangle} + \underbrace{\langle T^*y_1, x_2\rangle}_{=\langle y_1, Tx_2\rangle} + \underbrace{\langle T^*y_1, y_2\rangle}_{=0} \\
&= \ldots = \langle u_1, Au_2\rangle,
\end{aligned}$$

d.h. A ist tatsächlich symmetrisch.

Da $0 \in \hat{\rho}(T)$ und T abgeschlossen ist, folgt $H = \mathcal{R}(T) \oplus_\perp \mathcal{N}(T^*)$. Ferner gilt

$$A(I - P)\mathcal{D}_0 = T^*(I - P)\mathcal{D}_0 = T^*\mathcal{D}_0 = \mathcal{N}(T^*),$$

da $T^*P = 0$. Nun sieht man, dass

$$\mathcal{R}(A) = A\mathcal{D}(A) = T\mathcal{D}(T) + A(I - P)\mathcal{D}_0 = \mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^*) = H,$$

und Folgerung 2.15 liefert die Selbstadjungiertheit von A sowie $0 \in \rho(A)$. ∎

3 Der Rieszsche Darstellungssatz für positive lineare Funktionale auf $C_c(X)$

3.1 Topologische Präliminarien

Definition 3.1 *Sei* (X, τ) *ein* topologischer Hausdorff-Raum, *d.h.* $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ *bezeichnet die Menge von offenen Teilmengen von* X*, und für beliebige Punkte* $p \neq q \in X$ *existieren Umgebungen* $U \in \tau$ *von* p *und* $V \in \tau$ *von* q *mit* $U \cap V = \emptyset$*.* X *heißt* lokalkompakt*, falls es zu jedem Punkt von* X *eine Umgebung* $U \in \tau$ *dieses Punktes gibt, deren Abschluß* $\overline{U}$ *kompakt ist.*

Beispiel. Eine beliebige Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der Relativtopologie ist ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Eine Kurve oder Fläche im $\mathbb{R}^n$ ist ein lokalkompakter Hausdorff-Raum bzgl. der Relativtopologie. Dagegen ist ein unendlich-dimensionaler Banachraum kein lokalkompakter Hausdorff-Raum. ■

Lemma 3.2 *Sei* (X, τ) *ein Hausdorff-Raum.*
(a) Für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ *und alle* $p \in X \setminus K$ *existieren offene Mengen* $U, W \in \tau$ *derart, dass*

$$p \in U, \quad K \subset W \quad \textit{und} \quad U \cap W = \emptyset.$$

(b) Sei $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ *eine Familie kompakter Teilmengen von* X *mit* $\cap_{\alpha \in A} K_\alpha = \emptyset$*. Dann gibt es eine endliche nichtleere Teilmenge von* (K_α)*, die ebenfalls eine leere Schnittmenge hat.*

Den Beweis werden Sie in der Übung führen.

Proposition 3.3 *Sei* X *ein lokalkompakter Hausdorff-Raum,* $U \subset X$ *offen und* $K \subset U$ *kompakt. Dann gibt es eine offene Menge* $V \subset X$ *mit der Eigenschaft*

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U \quad \textit{und} \quad \overline{V} \textit{ ist kompakt.}$$

Beweis. Jedes $k \in K$ hat eine Umgebung U_k, so dass $\overline{U}_k$ kompakt ist. Da K kompakt ist, existieren $k_1, \ldots, k_n \in K$ so, dass

$$K \subset U_{k_1} \cup \ldots \cup U_{k_n} =: G,$$

wobei G offen und $\overline{G}$ kompakt ist. Falls $U = X$, ist der Satz mit der Wahl $V := G$ bereits bewiesen.

Sei nun $U \neq X$ und $C := X \setminus U$. Nach Lemma 3.2 (a) gibt es zu jedem $p \in C$ eine offene Menge W_p, so dass $K \subset W_p$ und $p \notin \overline{W_p}$. Somit ist $(C \cap \overline{G} \cap \overline{W_p})_{p \in C}$ eine Familie kompakter Mengen mit *leerer* Schnittmenge. Aufgrund von Lemma 3.2 (b) existieren $p_1, \ldots, p_n \in C$ mit der Eigenschaft

$$C \cap \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap \ldots \cap \overline{W_{p_n}} = \emptyset.$$

Sei $V := G \cap W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_n}$. Dann ist V offen, $K \subset V$ (da $K \subset G$, $K \subset W_{p_j}$) und

$$\overline{V} \subset \overline{G} \cap \overline{W_{p_1}} \cap \ldots \cap \overline{W_{p_n}} \subset X \setminus C = U,$$

was zu zeigen war. ■

Definition 3.4 *Sei X ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ reellwertig oder sogar $f : X \to [-\infty, \infty]$, eine extended-real function. Ist $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ offen, so heißt f* unterhalbstetig *(kurz: l.s.c.). Ist dagegen $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ offen, so heißt f* oberhalbstetig *(kurz: u.s.c.).*

Wir vermerken einige Eigenschaften halbstetiger Funktionen:

- f ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist unter- und oberhalbstetig.
- $U \subset X$ ist offen $\Rightarrow$ χ_U ist l.s.c.
- $C \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ χ_C ist u.s.c.
- f_β ist l.s.c. für alle $\beta \Rightarrow \sup_\beta f_\beta$ ist l.s.c.
- f_β ist u.s.c. für alle $\beta \Rightarrow \inf_\beta f_\beta$ ist u.s.c.

Definition 3.5 *Sei X ein topologischer Raum.*
(a) $C_c(X)$ bezeichnet die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.
(b) Seien $K \subseteq X$ kompakt, $V \subseteq X$ offen und $f \in C_c(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$. Dann bedeutet die Notation $K \prec f$, dass $f = 1$ auf K, und wir schreiben $f \prec V$, falls $\operatorname{supp} f \subseteq V$.

Versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ wird $C_c(X)$ zu einem normierten Vektorraum (der i. allg. nicht vollständig ist). Weiter gilt für alle $f, g \in C_c(X)$

$$\operatorname{supp}(f+g) \subset \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g, \quad \operatorname{supp}(fg) \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g.$$

Satz 3.6 (Lemma von Urysohn)[1] *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und seien $K \subset X$ kompakt, $V \subset X$ offen sowie $K \subset V$. Dann gibt es eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit $K \prec f \prec V$ (insbesondere ist f gleich 1 auf K und verschwindet außerhalb von V).*

Offenbar erfüllen sowohl $f = \chi_K$ als auch $f = \chi_V$ die Abschätzungen $\chi_K \leq f \leq \chi_V$, sind aber jeweils nur u.s.c. bzw. l.s.c. Deshalb wird im folgenden Beweis versucht, die Differenzmenge $V \setminus K$ durch eine Folge von u.s.c. bzw l.s.c. Funktionen „auszufüllen“, welche im „Grenzwert“ die gesuchte Funktion $f \in C_c(X)$ liefern.

[1] Pawel Urysohn, russisch-ukrainischer Mathematiker, 1898 – 1924, Student von N.N. Lusin und D.F. Egorov in Moskau, ertrunken an der französischen Atlantikküste.

Beweis. Sei (r_n) eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit $r_1 = 0$ und $r_2 = 1$. Wegen Proposition 3.3 existieren offene Mengen V_0, $V_1 \subset X$ derart, dass

$$K \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V \quad \text{und} \quad \overline{V}_0 \text{ kompakt}$$

gilt. Angenommen, wir haben für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits offene Mengen $V_{r_1}, \ldots, V_{r_n} \subset X$ mit der Eigenschaft

$$r_i < r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_{r_j} \subset V_{r_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i \neq j \leq n$$

gefunden. Dann liefert Proposition 3.3 eine offene Menge $V_{r_{n+1}}$ mit

$$\overline{V}_{r_j} \subset V_{r_{n+1}} \subset \overline{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_i} \quad \text{für alle } r_i < r_{n+1} \text{ und } r_{n+1} < r_j,\ 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Somit existiert für alle $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine offene Menge V_r mit kompaktem Abschluss $\overline{V}_r$ und mit der Eigenschaft

$$s \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ s > r \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_s \subset V_r.$$

Wir definieren nun für alle r, $s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ Funktionen

$$f_r(x) := \begin{cases} r, & x \in V_r \\ 0, & x \notin V_r \end{cases} \quad \text{und} \quad g_s(x) := \begin{cases} 1, & x \in \overline{V}_s \\ s, & x \notin \overline{V}_s \end{cases}$$

sowie

$$f := \sup_r f_r \quad \text{und} \quad g := \inf_s g_s.$$

Mit f_r ist auch f l.s.c., und mit g_s ist auch g u.s.c. Ferner gilt $f = 1$ auf K sowie $\operatorname{supp} f \subset \overline{V}_0 \subset V$. Wir zeigen, dass $f = g$.

"$\leq$" Falls $r > s$, ergibt sich $\overline{V}_r \subset V_s$ und damit $f_r \leq g_s$. Falls $r < s$, so folgt direkt $f_r \leq g_s$. Zusammengefasst erhält man $f \leq g$.

"$\geq$" Wäre $f(x) < g(x)$ für ein $x \in X$, so gäbe es $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit $f(x) < r < s < g(x)$. Dann gilt $\overline{V}_s \subset V_r$, und aufgrund der Definitionen von f_r, f, g_s, g folgt $x \notin V_r$ und $x \in \overline{V}_s$. Das ist ein Widerspruch. ∎

Folgerung 3.7 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, $K \subset X$ kompakt, und $V_1, \ldots, V_n$ eine (endliche) offene Überdeckung von K. Dann existiert eine* stetige Zerlegung der Eins *auf K bzgl. $V_1, \ldots, V_n$, d.h. es gibt Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in C_c(X)$ mit*

$$h_i \prec V_i \quad \text{und} \quad h_1 + \cdots + h_n = 1 \text{ auf } K.$$

Beweis. Nach Proposition 3.3 existiert für jedes $x \in K$ (mit $x \in V_i$ für mindestens ein i) eine offene Menge W_x, so dass

$$x \in W_x, \quad \overline{W_x} \text{ kompakt}, \quad \overline{W_x} \subset V_i.$$

Da K kompakt ist, gilt sogar $K \subseteq W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei nun H_i gleich der Vereinigung aller Kompakta $\overline{W_{x_j}}$ mit $W_{x_j} \subset V_i$. Nach Theorem 3.6 gibt es $g_i \in C_c(X)$ mit $H_i \prec g_i \prec V_i$. Schließlich definieren wir $h_1 := g_1$ und

$$h_i := (1 - g_1)(1 - g_2) \ldots (1 - g_{i-1})g_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n.$$

Da $0 \leq g_i \leq 1$ und $\operatorname{supp} g_i \subset V_i$, schließt man auf $0 \leq h_i \leq 1$ und $h_i \prec V_i$. Außerdem folgt mittels Induktion

$$h_1 + \cdots + h_n = 1 - (1 - g_1) \ldots (1 - g_n).$$

Nun sei $x \in K$, also $x \in H_i$ für mindestens ein i. Dann folgt $g_i(x) = 1$, also $(h_1 + \cdots + h_n)(x) = 1$. ■

3.2 Rieszscher Darstellungssatz für positive lineare Funktionale

Zur Erinnerung: Für einen beliebigen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und einem (nicht-negativen) Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ können wir das Integral

$$\int_X f \, d\mu \in [0, \infty]$$

für eine beliebige messbare Funktion $f : X \to [0, \infty)$ definieren. Dabei bedeutet messbar, dass $\{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Davon ausgehend definieren wir $\int_X f \, d\mu \in \mathbb{C}$ für komplexwertiges $f \in L^1(\mu)$ mit Hilfe von $(\operatorname{Re} f)_\pm$ und $(\operatorname{Im} f)_\pm$, falls alle Integrale $\int_X (\operatorname{Re} f)_\pm \, d\mu$ und $\int_X (\operatorname{Im} f)_\pm \, d\mu$ endlich sind.

Der Sätze von Lebesgue von der monotonen Konvergenz und der dominierten Konvergenz gelten auch in diesem allgemeinen Rahmen; ebenso gilt das Lemma von Fatou.

Auf einem topologischen Raum X bezeichnet $\mathcal{B}(X)$ die *Borelsche σ-Algebra*, d.h. die kleinste σ-Algebra in $\mathcal{P}(X)$, die alle offenen Teilmengen von X enthält.

Definition 3.8 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Eine lineare Abbildung $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ heißt* positives lineares Funktional*, falls*

$$\Lambda f \geq 0 \quad \textit{für alle } f \in C_c(X) \textit{ mit } f \geq 0.$$

Anmerkungen. (a) Jedes Borel-Maß μ auf X definiert ein positives lineares Funktional Λ vermöge $\Lambda f := \int_X f \, d\mu$.

(b) Jedes positive lineare Funktional Λ auf X ist im folgenden Sinn *lokal beschränkt*: Sei $K \subset X$ kompakt, $V \subseteq X$ offen und $K \prec h \prec V$. Dann gilt für alle

$f \in C_c(X)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq K$ die Abschätzung $-h\|f\|_\infty \le f \le h\|f\|_\infty$, aus der wir $-\|f\|_\infty \Lambda h \le \Lambda f \le \|f\|_\infty \Lambda h$ und

$$|\Lambda f| \le (\Lambda h)\,\|f\|_\infty$$

erhalten. Jedoch muss Λ nicht stetig (oder beschränkt) auf ganz $C_c(X)$ sein. So ist z.B. das Lebesgue-Maß auf $C_c(\mathbb{R}^n)$ als linearer Operator unbeschränkt. ■

Der folgende Satz beschreibt die positiven linearen Funktionale auf $C_c(X)$.

Satz 3.9 (Riesz) *Seien X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und Λ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$. Dann existieren eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ und ein eindeutig bestimmtes positives Maß μ auf $\mathcal{A}$, so dass*

$$\Lambda f = \int_X f\,d\mu \quad \text{für alle } f \in C_c(X) \tag{3.1}$$

gilt und μ die folgenden Eigenschaften hat:
(a) $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq X$;
(b) für beliebige $E \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : V \supseteq E \text{ offen}\},$$

d.h. jedes $E \in \mathcal{A}$ ist regulär von außen*;*
(c) für beliebige offene Mengen $E \in \mathcal{A}$ und beliebige $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$ gilt

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ kompakt}\},$$

d.h. jedes $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$ ist regulär von innen*;*
(d) μ ist vollständig*, d.h. für jedes $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = 0$ ist auch jede Teilmenge von E in $\mathcal{A}$ enthalten.*

Beweis. I. Eindeutigkeit. Nach Eigenschaften (b) und (c) ist μ bereits durch die Werte $\mu(K)$ für alle kompakten $K \subset X$ eindeutig bestimmt. Seien nun μ_1 und μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit (3.1), die (a) - (d) erfüllen. Dann gibt es zu gegebenem K und $\varepsilon > 0$ nach (a) und (b) eine offene Menge $V \supseteq K$, so dass

$$\mu_2(V) \le \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Mit dem Lemma von Urysohn finden wir ein $f \in C_c(X)$ mit $K \prec f \prec V$, so dass

$$\begin{aligned} \mu_1(K) &= \int_X \chi_K\,d\mu_1 \le \int_X f\,d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f\,d\mu_2 \\ &\le \int_X \chi_V\,d\mu_2 = \mu_2(V) \le \mu_2(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $\mu_1(K) \le \mu_2(K)$. Analog erhält man $\mu_2(K) \le \mu_1(K)$.

II. Existenz. Für alle offenen Mengen $V \subseteq X$ sei

$$\mu(V) := \sup\{\Lambda f : f \prec V\}, \tag{μV}$$

und für beliebiges $E \subseteq X$ sei

$$\mu(E) := \inf\{\mu(V) : V \text{offen},\ E \subseteq V\}. \tag{μE}$$

Die Definitionen (μV) und (μE) sind für offene Mengen konsistent, da μ nach (μV) auf offenen Mengen und nach (μV), (μE) auf allen Mengen monoton ist. Mit diesen Definitionen gilt Aussage (b), d.h. die Regularität von außen, bereits definitionsgemäß.

Weiter definieren wir die Mengensysteme[2]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F &:= \{E \subseteq X : \mu(E) < \infty, \text{ und } E \text{ ist von innen regulär}\}, \\ \mathcal{A} &:= \{E \subseteq X : E \cap K \in \mathcal{A}_F \text{ für alle kompakten } K\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Falls $\mu(E) = 0$, so gilt $E \in \mathcal{A}_F$ und damit $E \in \mathcal{A}$. Die Funktion μ ist also vollständig im Sinne von (d). Wir gliedern den Nachweis der Eigenschaften von μ und $\mathcal{A}$ in eine Reihe von Schritten.

II.1 Wir zeigen: $\mathcal{A}_F$ *enthält jedes Kompaktum* $K \subseteq X$, *und es gilt*

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda f : K \prec f\}.$$

Zu gegebenem K wähle man f mit $K \prec f$ und definiere $V_\alpha := \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ für $0 < \alpha < 1$. Dann ist $K \subseteq V_\alpha$, und für beliebige $g \prec V_\alpha$ gilt $\alpha g \leq f$. Damit ist

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) \underset{(\mu V)}{=} \sup\{\Lambda g : g \prec V_\alpha\} \leq \frac{1}{\alpha}\Lambda f < \infty.$$

Für $\alpha \to 1-$ folgt daraus $\mu(K) \leq \Lambda f < \infty$ und somit $K \in \mathcal{A}_F$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach (μE) eine offene Menge $V \supseteq K$ mit $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$. Dann existiert nach dem Lemma von Urysohn ein $f \in C_c(X)$ mit $K \prec f \prec V$. Mit (μV) folgt $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$. Hieraus folgt II.1.

II.2 *Jede offene Menge V ist von innen regulär; insbesondere enthält $\mathcal{A}_F$ jedes offene $V \subseteq X$ mit $\mu(V) < \infty$.*

Sei V offen und $0 \leq \alpha < \mu(V)$. Aus Definition (μV) folgt die Existenz einer Funktion $f \prec V$ mit $\alpha < \Lambda f$. Sei $K := \operatorname{supp} f$. Für jedes offene W mit $K \subseteq W$ gilt dann $f \prec W$, nach (μV) also $\Lambda f \leq \mu(W)$. Schließlich folgt aus (μE), angewandt auf K, auch $\Lambda f \leq \mu(K)$. Damit haben wir ein Kompaktum $K \subseteq V$ mit $\alpha < \mu(K)$ gefunden. Folglich ist V von innen regulär.

[2] Der Buchstabe „F" in $\mathcal{A}_F$ steht für endliches (*finites*) Maß. Tatsächlich zeigen wir in II.8, dass $\mathcal{A}_F = \{E \in \mathcal{A} : \mu(E) < \infty\}$; damit erweist sich $\mathcal{A}$ als die gesuchte σ-Algebra.

II.3 *μ ist σ-subadditiv auf $\mathcal{P}(X)$, d.h. für alle $E_i \subseteq X$, $i \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{3.3}$$

Wir zeigen vorab, dass μ (endlich) subadditiv auf den offenen Mengen ist. Seien V_1 und V_2 offen und $g \prec V_1 \cup V_2$ beliebig gewählt. Nach Folgerung 3.7 existiert eine Zerlegung der Eins $h_1 + h_2 = 1$ auf $K = \operatorname{supp} g$ bzgl. V_i, d.h. mit $h_i \prec V_i$. Dann gilt auch $h_i g \prec V_i$, $g = h_1 g + h_2 g$ und somit $\Lambda g = \Lambda(h_1 g) + \Lambda(h_2 g) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$. Nach Definition (μV) ergibt sich nun $\mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2)$.

Nun zeigen wir die σ-Subadditivität (3.3). Ist $\mu(E_i) = \infty$ für ein $i \in \mathbb{N}$, ist (3.3) offensichtlich. Wir nehmen daher $\mu(E_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ an.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren dann nach (μE) offene Mengen $V_i \supseteq E_i$ mit $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Sei $V := \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ und $f \prec V$. Es ist also $\operatorname{supp} f$ kompakt, $\operatorname{supp} f \subseteq V$ und damit sogar $\operatorname{supp} f \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Mit der endlichen Subadditivität auf den offenen Mengen folgt nun

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \ldots \cup V_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Also gilt mit (μV) definitionsgemäß $\mu(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon$ und folglich

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Hieraus folgt die σ-Subadditivität.

II.4 *μ ist σ-additiv auf $\mathcal{A}_F$, d.h. für alle $E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit paarweise disjunkten $E_i \in \mathcal{A}_F$ gilt*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Im Fall $\mu(E) < \infty$ gilt sogar $E \in \mathcal{A}_F$.

Wegen II.3 muß nur die Ungleichung $\mu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ gezeigt werden.

II.4.1 *Wir zeigen $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ für disjunkte Kompakta K_i.*

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Proposition 3.3 gibt es zu K_1 und $U_1 := K_2^c$ bzw. zu K_2 und $U_2 := K_1^c$ disjunkte offene Mengen V_1, V_2 mit $K_i \subseteq V_i$. Ferner existieren nach (μE) eine offene Menge $W \supseteq K_1 \cup K_2$ mit $\mu(W) < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$ und nach (μV) Funktionen $f_i \prec W \cap V_i$ mit $\Lambda f_i > \mu(W \cap V_i) - \varepsilon$. Wegen $K_i \subset W \cap V_i$

ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\mu(K_1)+\mu(K_2) &\leq \mu(W\cap V_1)+\mu(W\cap V_2)\\
&< \Lambda f_1+\Lambda f_2+2\varepsilon\\
&= \Lambda(f_1+f_2)+2\varepsilon\\
&\underset{(\mu V)}{\leq} \mu(W)+2\varepsilon \quad (\text{da } V_1\cap V_2=\emptyset \text{ und } f_1+f_2\prec W)\\
&< \mu(K_1\cup K_2)+3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Subadditivität aus II.3 liefert dies die Behauptung.

II.4.2 Ist $\mu(E)=\infty$, so folgt II.4 bereits mit II.3. Wir dürfen daher annehmen, dass $\mu(E)<\infty$. Sei $\varepsilon>0$. Wegen $E_i\in\mathcal{A}_F$ existieren Kompakta $H_i\subseteq E_i$ mit

$$\mu(H_i)>\mu(E_i)-\varepsilon\,2^{-i} \quad \text{für alle } i\in\mathbb{N}.$$

Für $K_n:=H_1\cup\ldots\cup H_n\subseteq E$ ergibt sich

$$\mu(E)\geq\mu(K_n)\underset{\text{II.4.1}}{=}\sum_{i=1}^{n}\mu(H_i)>\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)-\varepsilon.$$

Durch Grenzübergänge $\varepsilon\to 0$ und danach $n\to\infty$ folgt $\mu(E)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$.

II.4.3 *Wir zeigen, dass $E\in\mathcal{A}_F$ falls $\mu(E)<\infty$.*
Wegen $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)<\infty$ gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n\in\mathbb{N}$, so dass mit dem Kompaktum $K_n\subseteq E$ wie in Schritt 2 gilt

$$\mu(E)\leq\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i)+\varepsilon<\mu(K_n)+2\varepsilon.$$

Folglich gilt $E\in\mathcal{A}_F$, und der Beweis von II.4 ist beendet.

II.5 *Jedes $E\in\mathcal{A}_F$ ist regulär, d.h. zu jedem $\varepsilon>0$ existieren ein Kompaktum K und eine offene Menge V mit*

$$K\subseteq E\subseteq V \quad \text{und} \quad \mu(V\setminus K)<\varepsilon.$$

Aufgrund der Definition von μ und $\mathcal{A}_F$ existieren ein kompaktes K und ein offenes V mit $K\subseteq E\subseteq V$ und so, dass

$$\mu(V)-\frac{\varepsilon}{2}<\mu(E)<\mu(K)+\frac{\varepsilon}{2}<\infty.$$

Da $V\setminus K$ offen ist und $\mu(V\setminus K)<\infty$, folgt mit II.2, dass $V\setminus K\in\mathcal{A}_F$. Aussage II.4 liefert dann die Ungleichung $\mu(V\setminus K)=\mu(V)-\mu(K)<\varepsilon$.

II.6 *Mit A und B liegen auch $A\setminus B$, $A\cup B$ und $A\cap B$ in $\mathcal{A}_F$.*

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach II.5 geeignete Mengen K_i, V_i mit den Eigenschaften $K_1 \subseteq A \subseteq V_1$, $K_2 \subseteq B \subseteq V_2$ sowie $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$. Wegen

$$A \setminus B \subseteq V_1 \setminus K_2 \subseteq (V_1 \setminus K_1) \cup (K_1 \setminus V_2) \cup (V_2 \setminus K_2),$$

ergibt sich mit II.3

$$\mu(A \setminus B) \leq \varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2) + \varepsilon.$$

Da $K_1 \setminus V_2 \subseteq A \setminus B$ kompakt ist, folgt $A \setminus B \in \mathcal{A}_F$.

Weiter ergibt sich aus den Mengenidentitäten $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ wegen II.4 auch $A \cup B \in \mathcal{A}_F$ sowie $A \cap B \in \mathcal{A}_F$.

II.7 *$\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra über X und enthält $\mathcal{B}(X)$.*

II.7.1 Ist $A \in \mathcal{A}$ und K kompakt, so gilt $K \in \mathcal{A}_F$ und $A \cap K \in \mathcal{A}_F$, also auch $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K) \in \mathcal{A}_F$ nach II.6. Damit haben wir gezeigt, dass

$$A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{A}.$$

II.7.2 Sei $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$, und sei K kompakt. Dann sind die induktiv definierten Mengen $B_1 := A_1 \cap K$ und $B_n := A_n \cap K \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$ für $n \geq 2$ paarweise disjunkt und liegen nach II.6 in $\mathcal{A}_F$. Nun folgt mit II.4, dass $A \cap K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}_F$, also $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

II.7.3 Sei $C \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $C \cap K$ für jedes Kompaktum K kompakt, so dass mit II.1 $C \cap K \in \mathcal{A}_F$ und hieraus $C \in \mathcal{A}$ folgt. Insbesondere gilt $X \in \mathcal{A}$. Folglich ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X, die alle abgeschlossenen Teilmengen enthält. Damit ist auch $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ bewiesen.

II.8 *Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_F = \{E \in \mathcal{A} : \mu(E) < \infty\}$.* Wegen II.2 ist damit Aussage (c) des Satzes bewiesen.

„$\subseteq$“ Für $E \in \mathcal{A}_F$ ist $\mu(E) < \infty$ und nach II.6 $E \cap K \in \mathcal{A}_F$ für jedes Kompaktum K. Also gilt $E \in \mathcal{A}$.

„$\supseteq$“ Sei $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$, und sei $\varepsilon > 0$. Nach (μV) gibt es eine offene Menge $V \supseteq E$ mit $\mu(V) < \infty$; nach II.2 gilt zudem $V \in \mathcal{A}_F$.

Aufgrund von II.5 gibt es ein Kompaktum $K \subseteq V$ mit $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Da $E \cap K \in \mathcal{A}_F$ von innen regulär ist, existiert ein Kompaktum $H \subseteq E \cap K$ mit

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon.$$

Nun folgt aus $E \subseteq (E \cap K) \cup (V \setminus K)$ und II.3

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) < \mu(H) + 2\varepsilon,$$

d.h. E ist von innen regulär und somit $E \in \mathcal{A}_F$.

II.9 *μ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

Die σ-Additivität ist offensichtlich, falls $\mu(E_i) = \infty$ für ein $E_i \in \mathcal{A}$. Falls alle $\mu(E_i)$ endlich sind, folgt die σ-Additivität aus II.4.

II.10 *Für alle $f \in C_c(X)$ gilt $\Lambda f = \int_X f\,d\mu$.*

O.E.d.A. dürfen wir annehmen, dass f reellwertig ist. Dann genügt es,

$$\Lambda f \leq \int_X f\,d\mu$$

zu beweisen, da aus der Linearität von Λ und der nun gültigen Ungleichung

$$-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_X (-f)\,d\mu = -\int_X f\,d\mu$$

die umgekehrte Abschätzung $\Lambda f \geq \int_X f\,d\mu$ folgt.

Sei also $f \in C_c(X)$ reellwertig, $K := \operatorname{supp} f$ und $f(K) \subseteq [a,b]$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Zerlegung

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b \quad \text{mit } y_i - y_{i-1} < \varepsilon \text{ für alle } i$$

von $[a,b]$. Sei $E_i := \{x \in X : y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$. Wegen der Stetigkeit von f liegen die Mengen E_i in $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$; sie sind paarweise disjunkt, und es gilt $\cup_{i=1}^n E_i = K$ sowie $\mu(E_i) < \infty$.

Zu jedem E_i gibt es eine offene Menge $V_i \supseteq E_i$, so dass $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n$ und $f(x) < y_i + \varepsilon$ für alle $x \in V_i$ (gegebenenfalls schneide man V_i mit $f^{-1}(-\infty, y_i + \varepsilon)$). Ferner existiert nach Folgerung 3.7 auf K eine Zerlegung der Eins (h_i) bzgl. (V_i), d.h. $h_i \prec V_i$ mit $\sum_{i=1}^n h_i = 1$, also $f = \sum_{i=1}^n f h_i$ auf K. Nun folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum \Lambda(h_i f) \\
&\leq \sum (y_i + \varepsilon)\Lambda h_i && (\text{da } h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i) \\
&= \sum \underbrace{(|a| + y_i + \varepsilon)}_{\geq 0} \Lambda h_i - |a| \sum \Lambda h_i \\
&\underset{(\mu V)}{\leq} \sum (|a| + y_i + \varepsilon)\mu(V_i) - |a|\,\mu(K) \\
&\leq \sum (|a| + y_i + \varepsilon)\mu(E_i) + \sum (|a| + y_i + \varepsilon)\,\varepsilon/n - |a|\,\mu(K) \\
&\leq \sum y_{i-1}\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + (|a| + b + \varepsilon)\varepsilon && (\text{da } \textstyle\sum \mu(E_i) = \mu(K)).
\end{aligned}$$

Wegen $y_{i-1} < f|_{E_i}$ erhält man

$$\Lambda f \leq \sum \int_{E_i} f\,d\mu + \varepsilon C = \int_X f\,d\mu + \varepsilon C.$$

Damit ist Theorem 3.9 komplett bewiesen. ∎

Satz 3.10 *Sei X ein lokalkompakter und zudem σ-kompakter Hausdorff-Raum, d.h. es existieren Kompakta $K_n \subseteq X$ mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Dann haben die σ-Algebra $\mathcal{A}$ und das Maß μ aus Theorem 3.9 folgende Eigenschaften:*

(a) Für jedes $E \in \mathcal{A}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren eine abgeschlossene Menge F und eine offene Menge V mit $F \subseteq E \subseteq V$ und $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.
(b) Für jedes $E \in \mathcal{A}$ existieren eine F_σ-Menge[3] A und eine G_δ-Menge B mit den Eigenschaften $A \subseteq E \subseteq B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$.
(c) μ ist ein reguläres Borel-Maß, d.h. jedes $E \in \mathcal{A}$ ist regulär von außen und von innen.

Beweis. Sei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ mit kompakten Mengen K_n.

(a) Sei $E \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\mu(K_n \cap E) < \infty$, und es gibt offene Mengen $V_n \supseteq K_n \cap E$ mit

$$\mu\big(V_n \setminus (K_n \cap E)\big) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Für die offene Menge $V := \cup_n V_n$ gilt

$$\cup_n V_n \supseteq \cup_n (K_n \cap E) = (\cup_n K_n) \cap E = X \cap E = E,$$

also $E \subseteq V$, und aus $V \setminus E \subseteq \bigcup_n \big(V_n \setminus (K_n \cap E)\big)$ folgt $\mu(V \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mit Komplementärbildung gibt es zu $E^c \in \mathcal{A}$ eine offene Menge $W \supseteq E^c$ mit $\mu(W \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $F := W^c$ abgeschlossen, $F \subseteq E$ und $E \setminus F = W \setminus E^c$, also $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$ und somit

$$\mu(V \setminus F) \leq \mu(V \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon.$$

(b) ergibt sich wegen der σ-Additivität von μ aus (a).

(c) Zu $E \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ sei $F \subseteq E$ eine abgeschlossene Menge wie in Aussage (a) mit $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. Wegen $F = \cup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap K_n)$ und

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} (F \cap K_n)}_{\text{kompakt}}\Big) \nearrow \mu(F) \quad \text{für } N \to \infty$$

sieht man, dass E auch von innen regulär ist. Folglich ist $E \in \mathcal{A}$ regulär, und μ ist regulär. ∎

Satz 3.11 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, in dem jede offene Menge σ-kompakt ist (z.B. der Euklidsche Raum $X = \mathbb{R}^n$). Weiter sei λ ein positives Borel-Maß auf X derart, dass λ auf allen kompakten Teilmengen endlich ist. Dann ist λ regulär.*

[3] Eine Menge heißt *F_σ-Menge*, falls sie Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist. Analog heißt eine Menge *G_δ-Menge*, falls sie Durchschnitt höchstens abzählbar vieler offener Mengen ist.

Beweis. Wir betrachten das lineare Funktional

$$\Lambda f := \int_X f \, d\lambda, \quad f \in C_c(X).$$

Da $\lambda(K) < \infty$ für alle Kompakta K, ist Λ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$. Nach Satz 3.9 und Satz 3.10 existiert ein reguläres Borel-Maß μ, so dass

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\lambda \quad \text{für alle } f \in C_c(X).$$

Wir zeigen, dass $\lambda = \mu$, woraus die Regularität von λ folgt.

Zuerst betrachten wir eine offene Menge V. Nach Voraussetzung gibt es Kompakta K_n mit $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Dann existieren wegen des Lemmas von Urysohn Funktionen $f_n \in C_c(X)$ mit $K_n \prec f_n \prec V$. Sei $g_n := \max(f_1, \ldots, f_n) \in C_c(X)$. Da die Folge (g_n) monoton und punktweise gegen χ_V konvergiert, liefert der Satz von der monotonen Konvergenz, angewandt auf die Maße μ und λ, die Gleichung

$$\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \mu(V).$$

Nun sei $E \in \mathcal{B}(X)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da μ nach Satz 3.10 regulär ist, gibt es eine abgeschlossene Menge $F \subseteq E$ sowie eine offene Menge $V \supseteq E$ mit $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$. Somit gilt $\mu(V) \le \mu(F) + \varepsilon \le \mu(E) + \varepsilon$. Da $V \setminus F$ offen ist, gilt $\lambda(V \setminus F) = \mu(V \setminus F) < \varepsilon$, also auch $\lambda(V) \le \lambda(E) + \varepsilon$. Damit sind die Abschätzungen

$$\lambda(E) \le \lambda(V) = \mu(V) \le \mu(E) + \varepsilon$$

und

$$\mu(E) \le \mu(V) = \lambda(V) \le \lambda(E) + \varepsilon$$

bewiesen. Aus ihnen folgt $|\lambda(E) - \mu(E)| < \varepsilon$, falls $\lambda(E)$ und $\mu(E)$ endlich sind, sowie $\lambda(E) = \infty \iff \mu(E) = \infty$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

4 Komplexe Maße und der Dualraum von $C_0(X)$

4.1 Komplexe Maße

Definition 4.1 *Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt* komplexes Maß, *wenn μ σ-additiv ist, d.h. wenn für jedes $E \in \mathcal{A}$ und jede Zerlegung $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von E in paarweise disjunkte Mengen $E_n \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu(E) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Anmerkungen. (a) Für jedes komplexe Maß μ gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Es kann aber $\mu(X) = 0$ für ein komplexes Maß $\mu \neq 0$ sein.

(b) Für jedes komplexe Maß μ konvergiert nach Definition die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ für jede Anordnung der Mengen E_n in $\mathbb{C}$; insbesondere ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)| < \infty$.

(c) Jedes positive Maß μ auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(X) < \infty$ ist ein komplexes Maß.

Definition 4.2 *Sei μ ein komplexes Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist die* totale Variation $|\mu|$ *von μ definiert durch*

$$|\mu|(E) := \sup \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(E_n)|, \quad E \in \mathcal{A},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen (E_n) von E in paarweise disjunkte Mengen $E_n \in \mathcal{A}$ gebildet wird.

Mit *Zerlegung* meinen wir im weiteren stets eine Zerlegung in abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$.

Satz 4.3 *Die totale Variation $|\mu|$ eines komplexen Maßes μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist ein* endliches positives Maß *auf $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die σ-Additivität von $|\mu|$. Sei (E_n) eine Zerlegung von $E \in \mathcal{A}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert für jeses $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $(A_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ von E_n mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(A_{nk})| > |\mu|(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Damit folgt

$$\sum_{n,k\in\mathbb{N}} |\mu(A_{nk})| \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n) - \varepsilon$$

und hieraus die Abschätzung $|\mu|(E) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n)$.

Für den Beweis der umgekehrten Abschätzung sei (A_k) eine Zerlegung von E. Dann ist $(A_k \cap E_n)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von E_n und $(A_k \cap E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegung von A_k. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(A_k)| &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_k \cap E_n) \Big| \\ &\leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} |\mu(A_k \cap E_n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n). \end{aligned}$$

Da (A_k) beliebig gewählt war, folgt nun $|\mu|(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(E_n)$, d.h. $|\mu|$ ist ein positives Maß.

Wir zeigen noch $|\mu|(X) < \infty$ und formulieren einen Teil des Beweises als separates Lemma.

Lemma 4.4 *(a) Seien $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Teilmenge S von $\{1, \ldots, N\}$ mit*

$$\Big|\sum_{k\in S} z_k\Big| \geq \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

(b) Für jede Menge $E \in \mathcal{A}$ gilt die Abschätzung

$$\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E\} \leq |\mu|(E) \leq 6\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E\}.$$

Beweis von Lemma 4.4. (a) Sei $s := \sum_{k=1}^{N} |z_k|$. Wir teilen $\mathbb{C}$ in 4 Quadranten, die durch die Geraden $y = \pm x$ berandet sind. Unter diesen gibt es einen Quadranten, etwa $Q := \{z = x + iy : x \geq 0,\ |y| \leq x\}$, so dass

$$\sum_{z_j\in Q} |z_j| \geq \frac{s}{4}.$$

Da für $z \in Q$ stets $\operatorname{Re} z \geq |z|/\sqrt{2}$ gilt, erhalten wir

$$\Big|\sum_{z_j\in Q} z_j\Big| \geq \sum_{z_j\in Q} \operatorname{Re} z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{z_j\in Q} |z_j| \geq \frac{s}{4\sqrt{2}} \geq \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} |z_k|.$$

(b) Für $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq E$ gilt $|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(E)$. Sei nun (E_j) eine beliebige paarweise disjunkte Zerlegung von E. Dann gibt es nach Teil (a) zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge S von $\{1, \ldots, N\}$ so, dass

$$\sum_{j=1}^{N} |\mu(E_j)| \leq 6\Big|\sum_{j\in S} \mu(E_j)\Big| = 6\Big|\mu\Big(\bigcup_{j\in S} E_j\Big)\Big| \leq 6\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E\}.$$

Ein Grenzübergang $N \to \infty$ liefert die obere Schranke von $|\mu|(E)$. ∎

Abschluß des Beweises von Satz 4.3. Wir werden den Beweis der Endlichkeit indirekt führen und zeigen dazu zunächst: *Ist $|\mu|(E) = \infty$, so existiert eine disjunkte Zerlegung $E = A \cup B$ in $\mathcal{A}$ mit $|\mu(A)| > 1$ und $|\mu|(B) = \infty$.*

Wegen $|\mu|(E) = \infty$ erhalten wir nach Definition für $t := 6(1 + |\mu(E)|) < |\mu|(E)$ eine Zerlegung (E_j) von E mit $\sum_{j=1}^{N} |\mu(E_j)| > t$ für genügend große N. Mit Lemma 4.4 finden wir eine Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, N\}$ so, dass für $A := \cup_{j\in S} E_j$ die Abschätzung $|\mu(A)| > \frac{t}{6} \geq 1$ folgt. Dann gilt für $B := E \setminus A$

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{6} - |\mu(E)| = 1.$$

Da nun einerseits $|\mu(A)| > 1$ und $|\mu(B)| > 1$ ist und andererseits $\infty = |\mu|(E) = |\mu|(A) + |\mu|(B)$ wegen der disjunkten Zerlegung $E = A \cup B$ gilt, dürfen wir o.E.d.A. $|\mu|(B) = \infty$ annehmen.

Nun zum eigentlichen indirekten Beweis. Angenommen, es wäre $|\mu|(X) = \infty$. Dann existiert nach dem soeben gezeigten eine disjunkte Zerlegung $X = A_1 \cup B_1$ mit $|\mu(A_1)| > 1$ und $|\mu|(B_1) = \infty$. Aus dem gleichen Grund gibt es eine disjunkte Zerlegung $B_1 = A_2 \cup B_2$ mit $|\mu(A_2)| > 1$ und $|\mu|(B_2) = \infty$. Induktiv findet man also paarweise disjunkte Mengen A_j mit $|\mu(A_j)| > 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Da μ als komplexes Maß σ-additiv ist, konvergiert die Reihe $\mu(\cup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$, obwohl $|\mu(A_j)| > 1$ für alle j. Das ist offenbar unmöglich. ∎

Proposition 4.5 *Die Menge $\mathcal{M} := \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ der komplexen Maße auf einer Menge X mit σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist, versehen mit der Totalvariation $\|\mu\|_{\mathcal{M}} := |\mu|(X)$ von X als Norm, ein Banachraum.*

Den Beweis sollen Sie in der Übung führen. Dazu folgenden Hinweis: Die σ-Additivität einer (endlich) additiven Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ist äquivalent zur Aussage: Für jede Folge (F_n) in $\mathcal{A}$ mit $F_n \supseteq F_{n+1}$ und $\cap_n F_n = \emptyset$ gilt $\mu(F_n) \to 0$ für $n \to \infty$. ∎

Definition 4.6 *Für reellwertiges $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ heißen die Maße $\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ bzw. $\mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ die* positive *bzw.* negative Variation *von μ.*

Offenbar sind μ^+ und μ^- positive endliche Maße auf $\mathcal{A}$, und es gilt

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{sowie} \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^- \quad (\textit{Jordan-Zerlegung} \text{ von } \mu).$$

Definition 4.7 *Sei μ ein positives Maß auf $\mathcal{A}$ (hier ist $\mu(X) = +\infty$ erlaubt), und seien $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$.*

(a) Das Maß λ heißt absolut stetig *bzgl. μ, kurz $\lambda \ll \mu$, falls mit $\mu(E) = 0$ auch $\lambda(E) = 0$ gilt.*

(b) Das Maß λ heißt auf der Menge $A \in \mathcal{A}$ konzentriert*, falls $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$ für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt.*

(c) Zwei auf disjunkten Mengen konzentrierte Maße λ_1 und λ_2 heißen zueinander singulär*, kurz $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

Beispiele. (*a*) Sei μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und λ das Dirac-Maß δ_0, d.h. $\delta_0(E) = 0$ falls $0 \notin E$ und $\delta_0(E) = 1$ falls $0 \in E$. Dann ist λ *nicht absolut stetig* bzgl. μ.

(*b*) Sei μ wie in (*a*), $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda(E) := \int_E f\, d\mu$. Dann ist $\lambda \ll \mu$.

(*c*) δ_0 ist konzentriert auf jeder Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in A$, insbesondere auf $A = \{0\}$. Es gilt $\delta_x \perp \delta_y$ genau dann, wenn $x \neq y$. ∎

Proposition 4.8 *Seien μ ein positives Maß auf $\mathcal{A}$ und $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist λ auf A konzentriert, dann auch $|\lambda|$.*

(b) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.

(c) $\lambda_1 \perp \mu$ *und* $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$.

(d) $\lambda_1 \ll \mu$ *und* $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$.

(e) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$.

(f) $\lambda_1 \ll \mu$ *und* $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$.

(g) $\lambda \ll \mu$ *und* $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$.

Beweis. Wir zeigen nur einige dieser einfachen Aussagen.

(a) Ist $E \cap A = \emptyset$ und (E_j) eine Zerlegung von E, so ergibt sich $\lambda(E_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und somit $|\lambda|(E) = 0$. Also ist $|\lambda|$ auf A konzentriert.

(f) Die Voraussetzung $\lambda_2 \perp \mu$ bedeutet, dass λ_2 auf einer Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ konzentriert ist. Da $\lambda_1 \ll \mu$, gilt $\lambda_1(E) = 0$ für alle $E \subseteq A$ (es ist ja $\mu(E) \leq \mu(A) = 0$). Also ist λ_1 auf A^c konzentriert, und es folgt $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(g) Aus (f) folgt $\lambda \perp \lambda$, also $\lambda = 0$. ∎

4.2 Die Sätze von Lebesgue und von Radon-Nikodym

Ein positives Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge (E_j) in $\mathcal{A}$ mit $X = \cup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ und $\mu(E_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gibt.

Satz 4.9 *Sei μ ein positives σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, und sei $\lambda \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) **(Lebesgue)** *Es gibt eindeutig bestimmte Maße $\lambda_a, \lambda_s \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ mit*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu,$$

die sog. Lebesgue-Zerlegung *von λ relativ zu μ. Ist λ positiv und endlich, so gilt dies auch für λ_a und λ_s.*

(b) **(Radon-Nikodym)** *Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in L^1(\mu)$ so, dass*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathcal{A};$$

die Funktion h heißt die Radon-Nikodym-Ableitung *von λ_a, und man schreibt $d\lambda_a = h \, d\mu$ oder $h = \frac{d\lambda_a}{d\mu}$. Insbesondere hat jedes $\lambda \ll \mu$ die Darstellung $\lambda(E) = \int_E h \, d\mu$ mit einer eindeutig bestimmten Funktion $h \in L^1(\mu)$.*

Beweis. *Eindeutigkeit in* (a). Ist $\lambda = \lambda_a + \lambda_s = \lambda_a' + \lambda_s'$, so ergibt sich mit Proposition 4.8 (c), (d) sowohl $\lambda_a - \lambda_a' = \lambda_s' - \lambda_s \ll \mu$ als auch $\lambda_a - \lambda_a' = \lambda_s' - \lambda_s \perp \mu$. Aufgrund von Proposition 4.8 (g) gilt dann $\lambda_a - \lambda_a' = \lambda_s' - \lambda_s = 0$.

Eindeutigkeit in (b). Ist $\int_E h\,d\mu = 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$, so ist auch $\int_E \operatorname{Re} h\,d\mu = 0$, insbesondere für $E := \{x \in X : \operatorname{Re} h \geq 0\}$. Nun folgt aus $\int_E (\operatorname{Re} h)_+\,d\mu = 0$ aber $(\operatorname{Re} h)_+ = 0$ μ-f.ü. in X. Analog zeigt man $(\operatorname{Re} h)_- = 0$ und $(\operatorname{Im} h)_\pm = 0$ μ-f.ü. Folglich ist $h \equiv 0$ μ-f.ü.

Für den Rest des Beweises unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: Sei $\mu \geq 0$ *endlich und* $\lambda \geq 0$.
Wir definieren ein Maß $\varphi := \lambda + \mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Wegen $\lambda, \mu \geq 0$ ist $\varphi \geq 0$ und endlich. Also gilt für alle charakteristischen Funktionen $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{A}$

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\lambda + \int_X f\,d\mu \geq 0; \tag{4.1}$$

dieses gilt auch für nichtnegative einfache Funktionen f, also $f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j}$ mit $E_j \in \mathcal{A}$ und $0 \leq \alpha_j < \infty$, und daher auch für beliebige messbare Funktionen $f \geq 0$ (vgl. die Definition des Lebesgue-Integrals für nichtnegative messbare Funktionen).

Für Funktionen $f \in L^2(\varphi)$ erhält man

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,d\lambda \leq \int_X |f|\,d\varphi \leq \left(\int_X |f|^2\,d\varphi\right)^{1/2} \varphi(X)^{1/2}.$$

Folglich ist die Abbildung $f \mapsto \int_X f\,d\lambda$ ein beschränktes lineares Funktional auf $L^2(\varphi)$. Nun liefert der Rieszsche Darstellungssatz für den Hilbertraum $L^2(\varphi)$ die Existenz einer Funktion $g \in L^2(\varphi)$ mit der Eigenschaft

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\varphi \quad \text{für alle } f \in L^2(\varphi). \tag{4.2}$$

Für $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{A}$ und $\varphi(E) > 0$ erhält man $0 \leq \lambda(E) = \int_E d\lambda = \int_E g\,d\varphi$ und folglich

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\,d\varphi = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \leq 1$$

(man beachte, dass $0 \leq \lambda \leq \varphi$). Daraus schließt man mit einem Widerspruchsargument auf die Ungleichung

$$0 \leq g \leq 1 \quad \varphi\text{-f.ü. auf } X,$$

und wir können dies o.E.d.A. sogar für alle $x \in X$ annehmen (sonst ändern wir g auf einer Nullmenge ab). Schließlich ergibt sich aus (4.1) und (4.2), dass $\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\varphi = \int_X fg\,d\lambda + \int_X fg\,d\mu$, also

$$\int_X (1-g)f\,d\lambda = \int_X fg\,d\mu. \tag{4.3}$$

Mit Hilfe der Mengen

$$A := \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\} \quad \text{und} \quad S := \{x \in X : g(x) = 1\}$$

definieren wir nun die Maße

$$\lambda_a(E) := \lambda(A \cap E) \quad \text{sowie} \quad \lambda_s(E) := \lambda(S \cap E), \quad E \in \mathcal{A},$$

für die offenbar $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ gilt.

Wir zeigen, dass $\lambda_s \perp \mu$. Dazu setzen wir $f := \chi_S$ in (4.3) ein. Dann folgt $0 = \int_S d\mu = \mu(S)$. Andererseits ist λ_s auf S konzentriert. Somit folgt $\lambda_s \perp \mu$.

Wir zeigen noch, dass $\lambda_a \ll \mu$ und $d\lambda_a = h\,d\mu$ mit $h := \frac{g}{1-g}$. Dazu setzen wir $f := (1 + g + \ldots + g^n)\chi_E$ mit $E \in \mathcal{A}$ in (4.3) ein und erhalten

$$\int_E (1 - g^{n+1})\,d\lambda = \int_E g(1 + g + \ldots + g^n)\,d\mu.$$

Der Integrand $1 - g^{n+1}$ auf der linken Seite verschwindet auf S und konvergiert auf A punktweise und monoton wachsend gegen 1. Somit konvergiert das linke Integral nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für $n \to \infty$ gegen $\int_{E \cap A} d\lambda = \lambda(A \cap E) = \lambda_a(E)$. Der Integrand auf der rechten Seite konvergiert punktweise und monoton wachsend gegen

$$h = \frac{g}{1-g} \quad \text{mit} \quad h(x) \in [0, \infty].$$

Somit konvergiert das rechte Integral gegen $\int_E h\,d\mu$. Im Grenzwert erhält man für alle $E \in \mathcal{A}$ die Gleichung

$$\lambda_a(E) = \int_E h\,d\mu.$$

Insbesondere gilt für $E = X$ nunmehr $\int_X h\,d\mu = \lambda_a(X) = \lambda(A) < \infty$, d.h. $h \in L^1(\mu)$. Hieraus folgt $\lambda_a \ll \mu$, was den Beweis des Satzes in Fall 1 abschließt.

Fall 2: Sei μ σ-endlich und $\lambda \geq 0$.

Wir schreiben X als Vereinigung $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ paarweise disjunkter Mengen $X_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X_n) < \infty$. Fall 1, angewandt auf X_n, $\lambda|_{X_n}$ und $\mu|_{X_n}$, liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $h_n \in L^1(\mu|_{X_n})$ sowie ein Maß $\lambda_{a,n} \ll \mu|_{X_n}$ auf X_n mit

$$\lambda_{a,n}(E \cap X_n) = \int_{E \cap X_n} h_n\,d(\mu|_{X_n}) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{A}.$$

Insbesondere gilt $\lambda_{a,n} \leq \lambda|_{X_n}$. Nun definieren wir h auf X durch $h := h_n$ auf X_n, und wir definieren λ_a auf $\mathcal{A}$ durch $\lambda_a(E) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_{a,n}(E \cap X_n)$. Dann ist

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E\cap X_n} h_n\,d(\mu|_{X_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_{a,n}(E \cap X_n) = \lambda_a(E) \leq \lambda(X) < \infty.$$

Somit ist $h \in L^1(\mu)$, und das oben definierte Maß λ_a sowie $\lambda_s := \lambda - \lambda_a$ haben die gewünschten Eigenschaften.

Fall 3: Sei μ σ-endlich und $\lambda \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ komplexwertig.

Dazu schreiben wir λ als $\lambda_1 + i\lambda_2$ mit reellwertigen Maßen λ_1 und λ_2 und wenden die Ergebnisse aus Fall 1 und 2 auf $\lambda_1^\pm$ sowie $\lambda_2^\pm$ an. ∎

Anmerkungen. (a) Die Sätze von Lebesgue und Radon-Nikodym lassen sich auf den Fall erweitern, wenn sowohl μ als auch λ positiv und σ-endlich sind. Man schreibt dazu X in der Form $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit Mengen $X_n \in \mathcal{A}$, so dass $\mu(X_n) < \infty$ und $\lambda(X_n) < \infty$. Satz 4.9, angewandt auf X_n und $\lambda|_{X_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liefert dann die Existenz einer Funktion $h \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$ mit $\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu$ für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $E \subseteq X_n$.

(b) Falls μ nicht σ-endlich ist, kann Satz 4.2 seine Gültigkeit verlieren. Beispielsweise sei μ_0 das Zählmaß auf der Lebesgueschen σ-Algebra $\mathcal{L}_1([0,1])$ und λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Dann gilt $\lambda \ll \mu_0$, es existiert jedoch kein $h \in L^1(\mu_0)$ mit $\lambda(E) = \int_E h\, d\mu_0$.

(c) Seien $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ und $\mu \geq 0$. Dann gilt $\lambda \ll \mu$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\lambda(E)| < \varepsilon.$$

Diese Äquivalenz erklärt den Begriff "absolute Stetigkeit" ($\nearrow$ Übung). ∎

Satz 4.10 *Sei $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Dann gibt es eine Funktion $h \in L^1(|\mu|)$ mit*

$$|h(x)| = 1 \text{ für alle } x \in X \quad \text{und} \quad d\mu = h\, d|\mu| \quad (\text{polare Zerlegung}),$$

d.h. es ist $\mu(E) = \int_E h\, d|\mu|$ für alle $E \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wegen $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ist X σ-endlich (sogar endlich) bzgl. des Maßes $|\mu|$, und es gilt $\mu \ll |\mu|$. Nach Theorem 4.9 (b) existiert dann ein $h \in L^1(|\mu|)$ mit $d\mu = h\, d|\mu|$. Wir zeigen, dass h so gewählt werden kann, dass $|h(x)| = 1$ auf X.

Für $r > 0$ sei $A_r := \{x \in X : |h(x)| < r\}$. Dann gilt für jede disjunkte Zerlegung $(E_j) \subset \mathcal{A}$ von A_r

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(E_j)| = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left| \int_{E_j} h\, d|\mu| \right| \leq r \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r).$$

Hieraus folgt $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$. Für $r < 1$ ergibt sich $|\mu|(A_r) = 0$; also ist $|h| \geq 1$ $|\mu|$-fast überall auf X.

Wir betrachten nun beliebige Mengen $E \in \mathcal{A}$ mit $|\mu|(E) > 0$. Dann gilt

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\, d|\mu| \right| = \left| \frac{\mu(E)}{|\mu|(E)} \right| \leq 1.$$

Mit einem Widerspruchsargument folgt $|h| \leq 1$ $|\mu|$-fast überall auf X. Zusammengefasst erhalten wir $|h| = 1$ $|\mu|$-f.ü. auf X. Ersetzen wir h auf der Nullmenge $\{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$ durch 1, so erhalten wir ein h wie in der Behauptung. ∎

Proposition 4.11 *Sei μ ein positives Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sowie $g \in L^1(\mu)$. Dann gilt für $d\lambda = g\,d\mu$ die Identität $d|\lambda| = |g|\,d\mu$, d.h. es ist*

$$|\lambda|(E) = \int_E |g|\,d\mu \quad \textit{für alle } E \in \mathcal{A}.$$

Beweisidee. Wendet man Theorem 4.10 auf $\lambda \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ an, so erhält man eine messbare Funktion h mit $|h(x)| = 1$ auf X und $d\lambda = h\,d|\lambda|$. Da gleichzeitig $d\lambda = g\,d\mu$ ist, gilt $h\,d|\lambda| = g\,d\mu$. Daraus folgt als „offensichtliche" Aussage $d|\lambda| = g\overline{h}\,d\mu$. Tatsächlich beweist man $\int fh\,d|\lambda| = \int fg\,d\mu$ zuerst für charakteristische Funktionen, dann für einfache Funktionen und schließlich für beliebige beschränkte messbare Funktionen.

Wegen $|\lambda| \geq 0$ und $\mu \geq 0$ gilt $g\overline{h} \geq 0$ μ-f.ü. und damit sogar $g\overline{h} = |g|$ μ-f.ü. ∎

Proposition 4.12 (Hahnscher Zerlegungssatz) *Sei $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ein reellwertiges Maß. Dann existiert eine Zerlegung $X = A^+ \cup A^-$ in disjunkte Mengen $A^+, A^- \in \mathcal{A}$ so, dass die positive und negative Variation μ^+, μ^- der Jordan-Zerlegung von μ die folgende Gestalt haben:*

$$\mu^+(E) = \mu(A^+ \cap E), \quad \mu^-(E) = -\mu(A^- \cap E) \quad \textit{für alle } E \in \mathcal{A}.$$

Zum Beweis benutze man Theorem 4.10 (Übung). ∎

4.3 Der Dualraum von $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$

Satz 4.13 *Sei $1 \leq p < \infty$, q der zu p konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/q = 1$, μ ein σ-endliches positives Maß auf X und $\Phi \in (L^p(\mu))'$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmtes $g \in L^q(\mu)$ mit*

$$\Phi(f) = \int_X fg\,d\mu \quad \textit{für alle } f \in L^p(\mu)$$

und $\|\Phi\|_{(L^p(\mu))'} = \|g\|_{L^q(\mu)}$.

Beweis$^\diamond$. *Eindeutigkeit von g.* Ist $\int_X fg\,d\mu = 0$ für alle $f \in L^p(\mu)$, so ist auch $\int_E g\,d\mu = 0$ für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$. Wir schreiben X als $X = \cup_n X_n$ mit $\mu(X_n) < \infty$. Weiter sei $E_k := \{x \in X : g(x) > \frac{1}{k}\}$. Dann ist $\mu(E_k \cap X_n) < \infty$ und

$$0 = \int_{E_k \cap X_n} g\,d\mu \geq \frac{1}{k}\mu(E_k \cap X_n).$$

Damit folgt $\mu(E_k \cap X_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\mu(E_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit muss $g \leq 0$ μ-f.ü. gelten. Ebenso zeigt man $g \geq 0$ μ-f.ü. Also gilt $g = 0$.

Existenz von g im Fall $\mu(X) < \infty$. Wir definieren eine (zunächst nur endlich) additive Mengenfunktion λ durch

$$\lambda(E) := \Phi(\chi_E) \quad \text{für } E \in \mathcal{A}.$$

Man zeigt leicht, dass μ wegen $1 \leq p < \infty$ sogar σ-additiv auf $\mathcal{A}$ ist. Außerdem ist $\lambda(E) = \Phi(\chi_E) = 0$ falls $\mu(E) = 0$; es gilt also $\lambda \ll \mu$.

Aufgrund des Satzes von Radon-Nikodym existiert zu μ und λ eine Funktion $g \in L^1(\mu)$ mit

$$\lambda(E) = \Phi(\chi_E) = \int_E g\, d\mu = \int_X \chi_E g\, d\mu \quad \text{für alle } E \in \mathcal{A}.$$

Wegen der Linearität von Φ und der Dichtheit der Menge der einfachen Funktionen in $L^\infty(\mu)$ folgt

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\mu \quad \text{für alle } f \in L^\infty(\mu); \tag{4.4}$$

dabei wurde ausgenutzt, dass aus $f_k \to f$ in $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$ die Konvergenz $\Phi(f_k) \to \Phi(f)$ folgt. Wir haben noch zu zeigen, dass

$$g \in L^q(\mu) \quad \text{und} \quad \|\Phi\| = \|g\|_{L^q(\mu)}. \tag{4.5}$$

Offensichtlich gilt mit der Hölder-Ungleichung $\|\Phi\| \leq \|g\|_{L^q(\mu)}$ für alle $1 \leq p < \infty$. Der Einfachheit halber sei im Folgenden $\|\Phi\| = 1$.

Wir zeigen zuerst (4.5) für $p = 1$. Für $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{A}$ gilt mit (4.4)

$$\Big| \int_E g\, d\mu \Big| = \Big| \int_X \chi_E g\, d\mu \Big| \leq \|\Phi\|\, \|\chi_E\|_{L^1(\mu)} = \mu(E),$$

also die Integralmittelabschätzung $\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g\, d\mu \right| \leq 1$. Dann folgt mit einem Widerspruchsargument $|g(x)| \leq 1$ μ-f.ü und somit $g \in L^\infty(\mu)$ und $\|g\|_\infty \leq 1$.

Als nächstes zeigen wir (4.5) für $1 < p < \infty$. Dazu benötigen wir eine Testfunktion f mit $fg = |g|^q$, also $f = |g|^{q-2}\,\overline{g}$, die zusätzlich in $L^\infty(\mu)$ liegt. Mit dieser sei $E_n := \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$ und $f_n = |g|^{q-2}\,\overline{g}\chi_{E_n}$. Dann gilt $f_n g = |f_n|^p = |g|^q \chi_{E_n}$ und $f_n \in L^\infty(\mu)$. Nun ergibt sich aus (4.4)

$$\int_{E_n} |g|^q\, d\mu = \int_X f_n g\, d\mu \underset{(4.4)}{=} \Phi(f_n) \leq \|f_n\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_{E_n} |g|^q\, d\mu \right)^{1/p},$$

woraus $\int_{E_n} |g|^{p'}\, d\mu \leq 1$ folgt. Für den Grenzübergang $n \to \infty$ benutzt man den Satz von der monotonen Konvergenz und erhält die Abschätzung $\|g\|_{L^q(\mu)} \leq 1$, insbesondere also $g \in L^q(\mu)$.

Da beide Seiten von (4.4) stetig bzgl. $f \in L^p(\mu)$ $(\cap L^\infty(\mu))$ in der $L^p(\mu)$-Norm sind und $L^\infty(\mu)$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt, folgt (4.4) sogar für alle $f \in L^p(\mu)$.

Existenz von g im Fall $\mu(X) = \infty$. Wir schreiben X in der Form $X = \cup_n X_n$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und so, dass $X_n \subset X_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu vorgegebenem $\Phi \in (L^p(\mu))'$ definieren wir $\Phi_n \in (L^p(\mu, X_n))'$ durch $\Phi_n(f) := \Phi(\tilde{f})$, wobei $\tilde{f}$ für die Erweiterung von $f \in L^p(\mu, X_n)$ auf X durch 0 steht. Da $\mu(X_n) < \infty$, liefert der obige Teil des Beweises ein eindeutig bestimmtes $g_n \in L^q(\mu, X_n)$ mit

$$\Phi_n(f) = \Phi(\tilde{f}) = \int_{X_n} f g_n \, d\mu, \quad \text{für alle } f \in L^p(\mu, X_n)$$

und $\|g_n\|_{L^q(\mu,X_n)} = \|\Phi_n\| \leq \|\Phi\| = 1$. Wegen der Monotonie $X_n \subset X_{n+1}$ und der Eindeutigkeit von g_n ergibt sich $g_{n+1}|_{X_n} = g_n$. Deshalb ist die Funktion g mit $g(x) = g_n(x)$ für $x \in X_n$ wohldefiniert. Dann ergibt der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\|g_n\|^q_{L^q(\mu,X_n)} = \int \chi_{X_n} |g|^q \, d\mu \nearrow \int |g|^q \, d\mu \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da alle Folgenglieder durch 1 beschränkt sind, gilt $g \in L^q(\mu)$ und $\|g\|_{L^q(\mu)} \leq 1$. Schließlich verifiziert man für $f \in L^p(\mu)$ die Identität

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f\chi_{X_n}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(f|_{X_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X f g_n \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

Damit ist Satz 4.13 bewiesen. ■

4.4 Der Rieszsche Darstellungssatz auf $C_0(X)$

Ziel dieses Abschnittes ist der Rieszsche Darstellungssatz zur Beschreibung *beschränkter* linearer Funktionale auf $C_0(X)$. Das wesentliche Hilfsmittel wird der Rieszsche Darstellungssatz 3.9 für *positive* lineare Funktionale auf $C_c(X)$ sein.

Definition 4.14 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Wir sagen, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$* im Unendlichen verschwindet*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset X$ mit $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$ existiert. Die Menge der Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwinden, bezeichnen wir mit $C_0(X)$, und wir versehen diesen Raum mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

Proposition 4.15 *$(C_0(X), \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum, und $C_c(X)$ liegt dicht in $C_0(X)$.*

Den Beweis sollen Sie in der Übung führen.

Definition 4.16 *Sei $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ ein komplexes Borelmaß, und sei $h : X \to \mathbb{C}$ die messbare Funktion aus Theorem* 4.10 *mit $|h(x)| = 1$ auf X und $d\mu = h\, d|\mu|$. Für $f \in L^\infty(|\mu|)$ definiert dann*

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f h \, d|\mu|$$

das Integral von f *bzgl. des komplexen Maßes μ. Wir nennen μ* regulär*, falls $|\mu|$ ein reguläres positives Maß ist.*

Anmerkungen. (a) Seien $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Da für $E \in \mathcal{A}$ nach Definition 4.16 $\mu(E) = \int_X \chi_E \, d\mu$ ist, gilt

$$\int_X \chi_E \, d(\mu + \lambda) = (\mu + \lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E) = \int_X \chi_E \, d\mu + \int_X \chi_E \, d\lambda$$

und infolgedessen $\int_X f \, d(\mu+\lambda) = \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\lambda$ für alle beschränkten messbaren Funktionen f. Folglich ist $(f, \mu) \mapsto \int_X f \, d\mu$ eine bilineare Abbildung.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$. Dann ist die lineare Abbildung $f \mapsto \int_X f \, d\mu$ ein beschränktes lineares Funktional auf $C_0(X)$, und es gilt

$$\Big| \int_X f \, d\mu \Big| = \Big| \int_X fh \, d|\mu| \Big| \leq \|f\|_\infty \, |\mu|(X).$$

(c) Ein komplexes Borelmaß μ ist genau dann regulär, wenn es zu jeder Menge $E \in \mathcal{B}(X)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $C \subseteq E$ und eine offene Menge $U \supseteq E$ gibt, so dass für jedes Borel-messbare $A \subseteq U \setminus C$ die Abschätzung $|\mu(A)| < \varepsilon$ gilt. Zum Beweis benutze man Lemma 4.4.

(d) Sind $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ regulär, so ist auch $\lambda + \mu$ regulär ($\nearrow$ Übung).

(e) Die Menge aller regulären komplexen Borelmaße, versehen mit der Norm $\|\mu\|_{\mathcal{M}} := |\mu|(X)$, ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ und somit ein Banachraum. ■

Satz 4.17 *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\Phi \in (C_0(X))'$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes reguläres Borel-Maß μ mit*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu \quad \textit{für alle } f \in C_0(X)$$

und $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Beweis. *Eindeutigkeit von μ.* Angenommen, für ein reguläres Borel-Maß μ und für alle $f \in C_0(X)$ gilt $\int_X f \, d\mu = 0$ bzw. $\int_X fh \, d|\mu| = 0$ mit der Funktion $h \in L^\infty(\mu)$ aus Definition 4.16. Dann wählen wir eine Folge (f_n) in $C_c(X)$ mit $f_n \to \overline{h}$ in $L^1(|\mu|)$; dieses Argument benötigt die *Regularität* von $|\mu|$ sowie das Lemma von Urysohn (Satz 3.6). Dann gilt wegen $\overline{h}h = 1$ und $\int_X f_n \, d\mu = 0$

$$|\mu|(X) = \int_X (\overline{h} - f_n) h \, d|\mu| \leq \int_X |\overline{h} - f_n| \, d|\mu| = \|\overline{h} - f_n\|_{L^1(|\mu|)} \to 0$$

für $n \to \infty$, also $|\mu|(X) = 0$, $|\mu| = 0$ und somit $\mu = 0$.

Existenz von μ. Sei $\Phi \in (C_0(X))'$, und o.E.d.A. gelte $\|\Phi\| = 1$. Unser Ziel ist die Konstruktion eines positiven linearen Funktionals Λ auf $C_c(X)$, so dass

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty \quad \text{für alle } f \in C_c(X). \tag{4.6}$$

Angenommen wir hätten bereits ein Λ gefunden, welches (4.6) erfüllt. Dann liefert der Satz von Riesz (Satz 3.9) ein positives Borel-Maß λ mit

$$\Lambda f = \int_X f\, d\lambda \quad \text{für alle } f \in C_c(X).$$

Nach Konstruktion von λ in Satz 3.9 gilt für die offene Menge X

$$\begin{aligned} \lambda(X) &= \sup\{\Lambda f : f \in C_c(X),\ f \prec X\} \\ &\leq \sup\{\|f\|_\infty : f \in C_c(X),\ f \prec X\} = 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

und folglich $\lambda(X) \leq 1$. Somit ist λ nach Theorem 3.9 (b), (c) λ regulär.

Aus (4.6) folgt weiter die Abschätzung

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\, d\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)} \quad \text{für alle } f \in C_c(X).$$

Also ist Φ auf $C_c(X)$ bzgl. der Norm $\|.\|_{L^1(\lambda)}$ durch 1 beschränkt. Dann existiert nach dem Satz von Hahn-Banach eine Erweiterung des Funktionals Φ von $C_c(X)$ auf $L^1(\lambda)$ mit der gleichen Norm, $\|\Phi\|_{(L^1(\lambda))'} \leq 1$. Satz 4.13, angewandt auf $L^1(\lambda)'$, impliziert die Existenz einer Funktion $g \in L^\infty(\lambda)$ mit $\|g\|_{L^\infty(\lambda)} \leq 1$, so dass $\Phi(f) = \int_X fg\, d\lambda$ für alle $f \in C_c(X)$ und somit für $f \in C_0(X)$ gilt. Aufgrund dieser Gleichung definieren wir das Maß μ durch $d\mu = g\, d\lambda$. Dann ist

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\lambda =: \int_X f\, d\mu \quad \text{für alle } f \in C_0(X),$$

wobei gilt

$$1 = \|\Phi\|_{(C_0(X))'} = \sup\{|\Phi(f)| : f \in C_0(X),\ \|f\|_\infty \leq 1\} \leq \int_X |g|\, d\lambda.$$

Da aber nach (4.7) $\lambda(X) \leq 1$ und $|g| \leq 1$ ist, schließen wir auf $|g| = 1$ λ-f.ü. und $\lambda(X) = 1$. Proposition 4.11 und $d\mu = g\, d\lambda$ sowie $|g| = 1$ implizieren nun

$$|\mu|(E) = \int_E |g|\, d\lambda = \lambda(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{A};$$

also ist $|\mu| = \lambda$ und μ ist regulär. Ferner gilt $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|$. Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch die Existenz eines Λ mit den gewünschten Eigenschaften zeigen.

Konstruktion von Λ, *Beweis von* (4.6). Zu $f \in C_c^+(X) := \{h \in C_c(X) : h \geq 0\}$ definieren wir

$$\Lambda f := \sup\big\{|\Phi(h)| : h \in C_c(X),\ |h| \leq f\big\}. \tag{4.8}$$

Offensichtlich ist Λf monoton auf $C_c^+(X)$ (d.h. $f \leq g$ impliziert $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$) und $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ für alle $c \geq 0$.

Wir zeigen als nächstes, dass Λ *additiv* auf $C_c^+(X)$ ist, d.h. dass $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda f_1 + \Lambda f_2$ für alle $f_1, f_2 \in C_c^+(X)$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ und $j = 1, 2$ existieren Funktionen $h_j \in C_c(X)$ mit $|h_j| \leq f_j$ und $\Lambda f_j \leq |\Phi(h_j)| + \varepsilon$. Wir definieren weiter $\alpha_j \in \mathbb{C}$ durch $|\alpha_j| = 1$ und $\alpha_j \Phi(h_j) = |\Phi(h_j)|$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Lambda f_1 + \Lambda f_2 &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon \\ &= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(f_1 + f_2) + 2\varepsilon \qquad \text{(Monotonie von } \Lambda). \end{aligned}$$

Somit gilt $\Lambda f_1 + \Lambda f_2 \leq \Lambda(f_1 + f_2)$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung auf $C_c^+(X)$ betrachten wir Funktionen $g \in C_c(X)$ mit $|g| \leq f_1 + f_2$. Sei $V := \{x \in X : f_1(x) + f_2(x) > 0\}$, so dass $\operatorname{supp} g \subseteq \operatorname{supp}(f_1 + f_2) = \overline{V}$. Dann definieren wir Funktionen h_1, h_2 durch

$$h_1 := \frac{f_1 g}{f_1 + f_2}, \quad h_2 := \frac{f_2 g}{f_1 + f_2} \text{ auf } V \quad \text{und} \quad h_1 = h_2 = 0 \text{ auf } V^c.$$

Offensichtlich hat jedes h_j einen kompakten Träger in $\operatorname{supp} g$ und ist wegen der auf X gültigen Abschätzung $|h_j(x)| \leq |g(x)|$ und der Stetigkeit von g stetig auf X. Also liegt h_j in $C_c(X)$. Offenbar gilt weiter $h_1 + h_2 = g$ sowie $|h_j| \leq f_j$ und folglich

$$|\Phi(g)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leq \Lambda f_1 + \Lambda f_2.$$

Jetzt liefern die Definitionen von Λ und g die Ungleichung $\Lambda(f_1 + f_2) \leq \Lambda f_1 + \Lambda f_2$. Somit ist Λ „linear“ auf $C_c^+(X)$ in dem Sinn, dass

$$\Lambda(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \Lambda f_1 + c_2 \Lambda f_2 \quad \text{für alle } f_1, f_2 \in C_c^+(X) \text{ und } c_1, c_2 \geq 0.$$

Ist $f \in C_c(X)$ reellwertig, so liegen $f^\pm := (|f| \pm f)/2$ in $C_c^+(X)$, und man setzt

$$\Lambda f = \Lambda(f^+ - f^-) := \Lambda f^+ - \Lambda f^-.$$

Man zeigt leicht, dass damit Λ auf allen reellwertigen Funktionen in $C_c(X)$ wohldefiniert und dort linear ist. Ist schließlich $f = u + iv \in C_c(X)$ mit reellwertigen Funktionen u und v, so setzen wir $\Lambda(u + iv) := \Lambda u + i\Lambda v$. Damit wird Λ zu einer linearen Abbildung von $C_c(X)$ nach $\mathbb{C}$.

Die Abschätzungen in (4.6) sind nun offensichtlich: Mit $f \in C_c(X)$ ist auch $h = |f| \in C_c(X)$; also gelten die Abschätzungen $|\Phi(h)| \underset{(4.8)}{\leq} \Lambda(|f|)$ und $\Lambda(|f|) \underset{(4.8)}{\leq} \|\Phi\| \, \|f\|_\infty$. ∎

5 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

5.1 Die Spektraldarstellung für beschränkte Operatoren

Unser Ziel ist es, zu jedem selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ ein sog. Spektralmaß E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ zu definieren. Dieses ordnet jeder Menge $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Orthogonalprojektion $E(M)$ zu und erlaubt für A eine Darstellung als Integral

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dE(\lambda)$$

in einem geeigneten Sinn.

Definition 5.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge Ω, und sei H ein Hilbertraum. Ein* Spektralmaß *auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung E von $\mathcal{A}$ in die Menge der Orthogonalprojektionen auf H mit folgenden Eigenschaften:*
(a) $E(\Omega) = I$,
(b) E ist σ-additiv, d.h. für beliebige paarweise disjunkte Mengen $M_n \in \mathcal{A}$ gilt

$$E\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(M_n).$$

Dabei ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(M_n)$ im Sinne der starken oder punktweisen Konvergenz zu verstehen, d.h.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E(M_n)x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} E(M_n)x \quad \text{für alle } x \in H.$$

*Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heißt E-*Nullmenge*, falls $E(N) = 0$, und für eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sagen wir, dass eine Eigenschaft E-*fast überall *gilt, falls es eine E-*Nullmenge *$N \in \mathcal{A}$ gibt, so dass die besagte Eigenschaft für alle $t \in \Omega \setminus N$ gilt.*

Beispiele. (a) Sei $A \in L(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator mit Spektrum $\{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei λ_n die Menge der paarweise verschiedenen Eigenwerte ungleich 0 von A durchläuft. Ferner seien $P_n \in L(H)$ die zugehörigen Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume $\mathcal{N}(\lambda_n I - A)$ sowie P_0 die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}(A)$, falls $\lambda_0 := 0$ Eigenwert von A ist. Dann definiert

$$E(M) := \sum_{\lambda_n \in M} P_n, \quad M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ein Spektralmaß auf H. Mit anderen Worten: $E(M)$ ist die orthogonale Projektion auf die orthogonale Summe

$$\oplus_{\lambda_n \in M} \mathcal{N}(\lambda_n I - A).$$

Die Summe $\sum_{\lambda_n \in M} P_n$ konvergiert stark (falls M unendlich viele λ_n enthält), da für jede abzählbare Familie zueinander orthogonaler Projektionen (Q_k) die Reihe $\sum_k Q_k x$ wegen $\| \sum_k Q_k x\|^2 = \sum_k \|Q_k x\|^2$ für alle $x \in H$ konvergiert. Mit diesem Argument folgt auch die σ-Additivität von E.

(b) Sei μ ein positives reguläres Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Dann definiert

$$E(M)f := \chi_M f, \quad M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ein Spektralmaß aus Multiplikationsoperatoren auf $L^2(\mu)$. Dieses Spektralmaß steht in Beziehung zum dicht definierten abgeschlossenen Multiplikationsoperator $f \mapsto tf(t)$ auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. ∎

Lemma 5.2 *Sei E eine endlich additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $E(\Omega) = I$ und Werten in der Menge der Orthogonalprojektionen in $L(H)$. Dann gilt $E(\emptyset) = 0$ sowie $E(M)E(N) = E(M \cap N)$ für alle $M, N \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Aus $E(\emptyset) = E(\emptyset) + E(\emptyset)$ folgt $E(\emptyset) = 0$. Sind zunächst $M, N \in \mathcal{A}$ disjunkt, so folgt wegen $E(M) \leq E(M) + E(N) = E(M \cup N)$ aus Lemma 13.15 der Vorlesung FunkAna

$$E(M) = E(M)E(M \cup N) = E(M)\big(E(M) + E(N)\big) = E(M) + E(M)E(N),$$

also $E(M)E(N) = 0$. Sind nun $M, N \in \mathcal{A}$ beliebig, so gilt mit $M_0 := M \cap N$ und dem vorherigen Ergebnis

$$E(M \setminus M_0)\, E(N \setminus M_0) = E(M_0)\, E(N \setminus M_0) = E(M \setminus M_0)\, E(M_0) = 0$$

(die vorkommenden Mengen sind jeweils paarweise disjunkt). Somit folgt

$$\begin{aligned} E(M)\, E(N) &= \big(E(M \setminus M_0) + E(M_0)\big)\, \big(E(N \setminus M_0) + E(M_0)\big) \\ &= E(M_0)\, E(M_0) = E(M_0) = E(M \cap N), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ∎

Lemma 5.3 *Für E wie in Lemma 5.2 mit $E(\Omega) = I$ sind äquivalent:*

(a) E ist ein Spektralmaß auf $\mathcal{A}$;

(b) für alle $x, y \in H$ ist die Abbildung $M \mapsto \langle E(M)x, y\rangle$ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$, d.h. σ-additiv.

Beweis. Wir zeigen nur die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$ (die Umkehrung ist klar). Dazu seien paarweise disjunkte Mengen $M_n \in \mathcal{A}$ gegeben. Nach Lemma 5.2 gilt mit $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ und $M^N := \bigcup_{k=1}^N M_k$

$$E(M)E(M^N) = E(M^N)$$

und folglich für jedes $x \in H$

$$\begin{aligned}\big\|\big(E(M) - E(M^N)\big)x\big\|^2 &= \|E(M)x\|^2 - 2\|E(M^N)x\|^2 + \|E(M^N)x\|^2 \\ &= \langle E(M)x, x\rangle - \langle E(M^N)x, x\rangle \to 0\end{aligned}$$

für $N \to \infty$. Somit konvergiert $E(M^N)$ für $N \to \infty$ stark gegen $E(M)$. ■

Satz 5.4 (Spektralsatz) *Sei $A \in L(H)$ selbstadjungiert und $J \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $\sigma(A) \subseteq J$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\mathcal{B}(J)$ mit*

$$A = \int_J \lambda \, dE(\lambda).$$

Dieses Integral ist zu verstehen im Sinne von

$$\langle Ax, y\rangle = \int_J \lambda \, d\langle E(\cdot)x, y\rangle \quad \textit{für alle } x, y \in H$$

bzgl. der komplexen Maße $M \mapsto \langle E(M)x, y\rangle \in \mathcal{M}(J, \mathcal{B}(J))$. Insbesondere gilt für $x = y$

$$\langle Ax, x\rangle = \int_J \lambda \, d\|E(\cdot)x\|^2$$

mit den Maßen $\|E(\cdot)x\|^2 \in \mathcal{M}(J, \mathcal{B}(J))$.

Satz 5.4 kann auch mit der kompakten Menge $\sigma(A)$ an Stelle des Intervalls J formuliert werden. Da aber in konkreten Fällen $\sigma(A)$ oft nicht explizit bekannt ist, sondern nur mittels der unteren bzw. oberen Schranken $m(A) = \inf \sigma(A)$ bzw. $M(A) = \sup \sigma(A)$ eingeschlossen werden kann, wird Satz 5.4 meist mit einem kompakten Intervall $J \supseteq \sigma(A)$ formuliert.

Zur Vorbereitung des Beweises wiederholen wir einige Fakten. Sei Π die Menge aller Polynome $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Für den selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ definieren wir $p(A)$ direkt durch

$$p(A) := \sum_{k=0}^n a_k A^k \quad \text{mit } A^0 := I$$

oder durch den analytischen Funktionalkalkül aus Kapitel 14 der Vorlesung Funktionalanalysis. Dann gilt für alle $p, q \in \Pi$:

- $\sigma\big(p(A)\big) = p\big(\sigma(A)\big)$ (Spektraler Abbildungssatz 15.7 aus FunkAna);
- $p(A)q(A) = (pq)(A)$;
- $p(A)^* = \overline{p}(A^*) = \overline{p}(A) := \sum_{k=0}^n \overline{a_k} A^k$; insbesondere ist $p(A)$ normal;
- $\|p(A)\| = \sup \big\{|p(t)| : t \in \sigma(A)\big\}$ (Satz 14.1 (a) aus FunkAna);

- Vertauscht $T \in L(H)$ mit A, so vertauscht T mit $p(A)$.

Beweis von Satz 5.4. Für $x, y \in H$ erklären wir ein lineares Funktional $F_{x,y}$ auf Π durch

$$F_{x,y}(p) := \langle p(A)x, y\rangle, \quad p \in \Pi. \tag{5.1}$$

Wegen der Abschätzung

$$|F_{x,y}(p)| \leq \|p(A)\| \, \|x\| \, \|y\| \leq \|p\|_\infty \|x\| \, \|y\|$$

mit der Norm $\|p\|_\infty := \sup\{|p(t)| : t \in J\}$ und wegen der Dichtheit von Π in $C(J)$ lässt sich $F_{x,y}$ eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional $F_{x,y} \in C(J)'$ fortsetzen. Für dieses gilt $\|F_{x,y}\| \leq \|x\| \, \|y\|$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz 4.17 gibt es eindeutig bestimmte Maße $\mu_{x,y} \in \mathcal{M}(J, \mathcal{B}(J))$ so, dass

$$F_{x,y}(f) = \int_J f \, d\mu_{x,y} \quad \text{für alle } f \in C(J), \tag{5.2}$$

mit der Totalvariation

$$\|\mu_{x,y}\|_{\mathcal{M}} = \|F_{x,y}\| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Da $F_{x,y}$ in x linear und in y antilinear ist (dies ist offensichtlich für $F_{x,y}(p)$ für alle $p \in \Pi$ und gilt dann für $F_{x,y}(f)$ für alle $f \in C(J)$), liefert die Eindeutigkeitsaussage[4] von Satz 4.17, dass auch $\mu_{x,y}$ linear in x und antilinear in y ist. Somit ist für jede Menge $M \in \mathcal{B}(J)$ die Abbildung

$$H \times H \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \mu_{x,y}(M),$$

eine Sesquilinearform mit Norm ≤ 1. Folglich gibt es zu jedem solchen M einen Operator $E(M) \in L(H)$ mit $\|E(M)\| \leq 1$ und

$$\mu_{x,y}(M) = \langle E(M)\, x, y\rangle. \tag{5.3}$$

Mit $p = 1$ folgt $\langle x, y\rangle = F_{x,y}(1) = \int_J d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(J)$, also $\langle E(J)\, x, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$, d.h. $E(J) = I$, und offensichtlich gilt $E(\emptyset) = 0$. Wir zeigen weitere Eigenschaften von E.

Eigenschaft 1: $E(M)$ ist selbstadjungiert für alle $M \in \mathcal{B}(J)$.

Für alle $p \in \Pi$ gilt

$$\int_J p \, d\mu_{x,y} = \langle p(A)\, x, y\rangle = \overline{\langle \overline{p}(A)y, x\rangle} = \overline{\int_J \overline{p} \, d\mu_{y,x}} = \int_J p \, d\overline{\mu}_{y,x}.$$

[4] Die Eindeutigkeit in Satz 4.17 kann wie folgt formuliert werden: Gilt für Maße $\mu, \nu \in \mathcal{M}(J, \mathcal{B}(J))$ die Gleichung $\int_J p \, d\mu = \int_J p \, d\nu$ für alle $p \in \Pi$, so ist $\mu = \nu$.

Also ist $\mu_{x,y}(M) = \overline{\mu_{y,x}(M)}$ für alle $M \in \mathcal{B}(J)$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.17, und wir erhalten

$$\langle E(M)x, y\rangle = \mu_{x,y}(M) = \overline{\mu_{y,x}(M)} = \overline{\langle E(M)y, x\rangle} = \langle x, E(M)y\rangle$$

und daraus $E(M)^* = E(M)$.

Eigenschaft 2: $E(M)$ ist für alle $M \in \mathcal{B}(J)$ eine Projektion.

Für alle Polynome p, q gilt mit (5.1), (5.2)

$$\int_J pq \, d\mu_{x,y} = \big\langle (pq)(A)x, y\big\rangle = \big\langle p(A)q(A)x, y\big\rangle = \int_J p \, d\mu_{q(A)x,y},$$

und die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Riesz liefert

$$q \, d\mu_{x,y} = d\mu_{q(A)x,y},$$

also mit (5.3) auch $\langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_M q \, d\mu_{x,y}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_J q \, d\mu_{x,E(M)y} &= \langle q(A)x, E(M)y\rangle = \langle E(M)q(A)x, y\rangle \\ &= \int_M q \, d\mu_{x,y} = \int_J q\chi_M \, d\mu_{x,y} \end{aligned}$$

und somit wegen der Eindeutigkeit $d\mu_{x,E(M)y} = \chi_M \, d\mu_{x,y}$; insbesondere gilt

$$\mu_{x,E(M)y}(M) = \int_M d\mu_{x,E(M)y} = \int_M \chi_M \, d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(M).$$

Mit (5.3) folgt $\langle E(M)x, E(M)y\rangle = \langle E(M)x, y\rangle$, d.h. $E(M)^2 = E(M)$.

Nun können wir den Nachweis der Existenz von E abschließen. Da $\mu_{x,y}$ ein Maß ist, erhält man mit (5.3) die endliche Additivität von E und mit Lemma 5.3 sogar die σ-Additivität, denn $E(M)$ ist für jedes $M \in \mathcal{B}(J)$ eine Orthogonalprojektion. Mit (5.1) - (5.3) ergibt sich dann

$$\langle p(A)x, y\rangle = F_{x,y}(p) = \int_J p \, d\mu_{x,y} = \int_J p \, d\langle E(\cdot)x, y\rangle, \tag{5.4}$$

also kurz

$$p(A) = \int_J p(\lambda) \, dE(\lambda) \quad \text{für alle } p \in \Pi.$$

Insbesondere ist $A = \int_J \lambda \, dE(\lambda)$.

Die Eindeutigkeit des Spektralmaßes wird erst am Ende von Abschnitt 5.2 bewiesen, da hierfür noch einige Eigenschaften von Spektralmaßen und Spektralintegralen hergeleitet werden müssen. ∎

Folgerung 5.5 *Seien $A, B \in L(H)$ selbstadjungierte Operatoren mit Spektralmaßen E bzw. F auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

(a) $T \in L(H)$ vertauscht genau dann mit A, wenn T mit $E(M)$ für jedes $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vertauscht.

(b) A und B vertauschen genau dann, wenn $E(M)$ für jedes $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $F(N)$ für jedes $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vertauscht.

Beweis. (a) Gilt $TA = AT$, folgt für $p \in \Pi$ und $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\int_J p(\lambda)\, d\langle E(\lambda)Tx, y\rangle &\underset{(5.4)}{=} \langle p(A)Tx, y\rangle = \langle p(A)x, T^*y\rangle \\ &\underset{(5.4)}{=} \int_J p(\lambda)\, d\langle E(\lambda)x, T^*y\rangle \\ &= \int_J p(\lambda)\, d\langle TE(\lambda)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Dann liefert die Eindeutigkeitsaussage $\langle E(\cdot)Tx, y\rangle = \langle TE(\cdot)x, y\rangle$; also $E(M)T = TE(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Sind umgekehrt E und T vertauschbar, so folgt mit $p(\lambda) = \lambda$ wie oben

$$\begin{aligned}\langle TAx, y\rangle = \langle Ax, T^*y\rangle &= \int_J \lambda\, d\langle E(\lambda)x, T^*y\rangle \\ &= \int_J \lambda\, d\langle E(\lambda)Tx, y\rangle = \langle ATx, y\rangle,\end{aligned}$$

d.h. $TA = AT$.

(b) Sei $AB = BA$. Dann folgt mit Teil (a) $E(M)B = BE(M)$ für alle $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und anschließend wieder mit (a) sogar $E(M)F(N) = F(N)E(M)$ für alle $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Die Umkehrung wird analog bewiesen. ■

5.2 Allgemeine Spektralintegrale

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Definition und Analysis von Operatoren

$$\Phi(f) = \int_\Omega f\, dE$$

für messbare beschränkte und auch unbeschränkte Funktionen f mit Hilfe eines Spektralmaßes E. Dieses kann das Spektralmaß eines selbstadjungierten Operators A sein; wir setzen jedoch die Kenntnis von A nicht voraus.

Lemma 5.6 *Sei E Spektralmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ in einem Hilbertraum H, und seien $E_{x,y}(M) := \langle E(M)x, y\rangle$ sowie $E_x(M) := E_{x,x}(M) = \|E(M)x\|^2$ für $x, y \in H$ und $M \in \mathcal{A}$. Dann gilt*

(a) $|E_{xy}|(M) \le E_x(M)^{1/2} E_y(M)^{1/2}$ *für alle* $M \in \mathcal{A}$,
(b) für alle $f \in L^2(\Omega, E_x)$ *und* $g \in L^2(\Omega, E_y)$

$$\Big| \int_\Omega fg \, dE_{x,y} \Big| \le \int_\Omega |fg| \, d|E_{x,y}| \le \|f\|_{L^2(\Omega,E_x)} \|g\|_{L^2(\Omega,E_y)}.$$

Beweis. (a) Sei $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit paarweise disjunkten $M_n \in \mathcal{A}$. Wegen

$$\begin{aligned} |E_{x,y}(M_n)| &= \big|\langle E(M_n)x, y\rangle\big| = \big|\langle E(M_n)x, E(M_n)y\rangle\big| \\ &\le \|E(M_n)x\| \, \|E(M_n)y\| = E_x(M_n)^{1/2} E_y(M_n)^{1/2}, \end{aligned}$$

folgt mit der σ-Additivität von E und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $\ell^2(\mathbb{N})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |E_{x,y}(M_n)| &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} E_x(M_n)^{1/2} E_y(M_n)^{1/2} \\ &\le \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_x(M_n) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} E_y(M_n) \Big)^{1/2} \\ &= E_x(M)^{1/2} E_y(M)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit der Definition der Totalvariation $|E_{xy}|(M)$ folgt hieraus die Behauptung.

(b) Da Treppenfunktionen dicht in $L^2(\Omega, E_x)$ liegen, genügt es, solche Funktionen zu betrachten. Seien also $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{M_k}$ und $g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{M_k}$ mit paarweise disjunkten Mengen $M_k \in \mathcal{A}$. Dann gilt nach (a)

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega fg \, dE_{x,y} \Big| &= \Big| \sum_{k=1}^n \int_\Omega a_k b_k \chi_{M_k} \, dE_{x,y} \Big| \\ &\le \sum_{k=1}^n |a_k| \, |b_k| \, |E_{x,y}|(M_k) \\ &\le \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 E_x(M_k) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 E_y(M_k) \Big)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega,E_x)} \, \|g\|_{L^2(\Omega,E_y)}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Das Ziel ist nun, die Definition des Integrals $\Phi(f) = \int_J f \, dE$ für stetige Funktionen f bzgl. des Spektralmaßes E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ aus Abschnitt 5.1 auf beschränkte und sogar unbeschränkte messbare Funktionen und allgemeine Spektralmaße zu erweitern. Wir beginnen mit beschränkten Funktionen.

Definition 5.7 *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra auf* Ω *und* $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A})$ *die Menge aller beschränkten messbaren Funktionen von* Ω *nach* $\mathbb{C}$*, versehen mit der*

Supremumsnorm. Ist E ein Spektralmaß auf $\mathcal{A}$, so definieren wir für jede Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{M_k}$ mit paarweisen disjunkten Mengen $M_k \in \mathcal{A}$ den Operator $\Phi(f) \in L(H)$ durch

$$\Phi(f) = \int_\Omega f\, dE := \sum_{k=1}^n a_k E(M_k).$$

Lemma 5.8 *Sind f, g messbare Treppenfunktion auf Ω, so gilt*

$$\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg), \quad \Phi(f)^* = \Phi(\overline{f}) \quad \textit{und} \quad \|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty.$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste und die letzte Aussage. Seien $f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{M_k}$ und $g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{M_k}$ Treppenfunktionen mit paarweise disjunkten Mengen $M_k \in \mathcal{A}$. Dann gilt $fg = \sum_{k=1}^n a_k b_k \chi_{M_k}$ und folglich wegen $E(M_k)E(M_j) = 0$ für $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
\Phi(fg) &= \sum_{k=1}^n a_k b_k E(M_k) = \sum_{k=1}^n a_k b_k E(M_k)^2 \\
&= \sum_{j,k=1}^n a_j b_k E(M_j) E(M_k) = \Phi(f)\Phi(g).
\end{aligned}$$

Da die Orthogonalprojektionen $E(M_k)$ paarweise orthogonal zueinander stehen, gilt weiter für $x \in H$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f)x\|^2 &= \Big\| \sum_{k=1}^n a_k E(M_k)x \Big\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|E(M_k)x\|^2 \\
&\leq \|f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^n \|E(M_k)x\|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

nach Lemma 5.2. ∎

Proposition 5.9 *Es gibt eine eindeutige Fortsetzung der Abbildung Φ von der Menge der messbaren Treppenfunktionen auf Ω zu einem stetigen linearen Operator $\Phi : \mathcal{L}^\infty(\Omega) \to L(H)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ und $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$, d.h. Φ ist ein symmetrischer Algebrahomorphismus,

(b) $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f\, dE_{x,y}$ für alle $x, y \in H$,

(c) $\|\Phi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2\, dE_x$ für alle $x \in H$,

(d) $\|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty$,

(e) ist $(f_n) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ eine gleichmäßig beschränkte und punktweise E-fast überall gegen $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ konvergente Folge, so konvergiert $\Phi(f_n)$ stark gegen $\Phi(f)$.

Beweis. Wir beginnen mit der Konstruktion von $\Phi(f)$. Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, und sei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Nach Lemma 5.8 ist $\big(\Phi(f_n)\big)$ eine Cauchy-Folge in $L(H)$ und daher konvergent gegen einen Operator $\Phi(f) \in L(H)$. Mit Lemma 5.8 zeigt man auch, dass $\Phi(f)$ nicht von der Wahl der f approximierenden Folge (f_n) abhängt. Die Eigenschaften $(a) - (d)$ gelten für Treppenfunktionen und somit auch für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Wir zeigen noch (e). Für alle $x \in H$ gilt mit (c) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\big\|\big(\Phi(f_n) - \Phi(f)\big)x\big\|^2 = \int_\Omega |f_n - f|^2 \, dE_x \to 0$$

für $n \to \infty$; dabei ist $4 \sup_t \sup_n |f_n(t)|^2 < \infty$ eine Majorante des obigen Integranden. ∎

Definition 5.10 *Sei E ein Spektralmaß auf H für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(\Omega)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die auf Ω E-fast überall endlich sind, d.h. $E\big(\{t \in \Omega : f(t) = \infty\}\big) = 0$.*

Zu jedem $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ assoziieren wir eine Folge (M_n) in $\mathcal{A}$ mit $M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $E(\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n) = I$, von der wir außerdem annehmen, dass $f|_{M_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist.

Anmerkungen. (a) Für jede zu f assoziierte Folge $(M_n) \subset \mathcal{A}$ wie in Definition 5.10 gilt $E(M_n) \le E(M_{n+1})$ und $E(M_n)x \to x$ für $n \to \infty$ für alle $x \in H$; insbesondere ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)H$ dicht in H.

(b) Für $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ hat die Folge (M_n) mit $M_n := \{t \in \Omega : |f(t)| \le n\}$ die Eigenschaften aus Definition 5.10.

(c) Für endlich viele Funktionen f_j findet man analog eine Folge (M_n), die zu allen f_j gleichzeitig assoziiert ist. ∎

Das nächste Ziel ist, den Kalkül Φ von $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ auf $\mathcal{L}(\Omega)$ zu erweitern. Dabei wird der Operator $\Phi(f)$ für $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ im Allgemeinen ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf H sein, so dass eine Charakterisierung des Definitionsbereichs $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ erforderlich ist.

Proposition 5.11 *Für $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ sei*

$$\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big) := \left\{ x \in H : \int_\Omega |f|^2 \, dE_x < \infty \right\}.$$

Ferner sei $(M_n) \subset \mathcal{A}$ eine zu f assoziierte Folge. Dann gilt

(a) $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big) \Leftrightarrow$ die Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ die Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ ist beschränkt;

(b) für $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ hängt der Grenzwert der Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ nicht von der zu f assoziierten Folge (M_n) ab. Daher definiert

$$\Phi(f)x := \lim_{n\to\infty} \Phi(f\chi_{M_n})x$$

einen linearen Operator $\Phi(f) : \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big) \to H$.

(c) Für $\mathcal{D}_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)H$ gilt $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ für jedes $f \in \mathcal{L}$; insbesondere ist der Operator $\Phi(f)$ dicht definiert (vgl. obige Anmerkung (a)).

(d) Für jedes $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ gibt es eine Folge (x_k) in $\mathcal{D}_0$ mit $x_k \to x$ und $\Phi(f)x_k \to \Phi(f)x$ für $k \to \infty$, d.h. die Menge $\{(x, \Phi(f)x) : x \in \mathcal{D}_0\}$ liegt dicht im Graphen $\mathcal{G}(\Phi(f))$; man nennt $\mathcal{D}_0$ auch ein „core" (Kern) für $\Phi(f)$.

Beweis. (a) Sei $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$. Da $f\chi_{M_n} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, folgt mit Proposition 5.9 (c)

$$\begin{aligned} \|\Phi(f\chi_{M_n})x - \Phi(f\chi_{M_k})x\|^2 &= \|\Phi(f\chi_{M_n} - f\chi_{M_k})x\|^2 \\ &= \|f\chi_{M_n} - f\chi_{M_k}\|^2_{L^2(\Omega,E_x)}. \end{aligned}$$

Da $f \in L^2(\Omega, E_x)$ nach Definition von $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$, konvergiert die rechte Seite nach dem Satz über dominierte Konvergenz gegen 0, d.h. die Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ konvergiert in H. Insbesondere ist diese Folge in H beschränkt.

Sei nun die Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ beschränkt durch ein $c > 0$. Da die Funktionen $|f\chi_{M_n}(t)|^2$ monoton wachsend gegen $|f(t)|^2$ konvergieren, folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\int_\Omega |f|^2\, dE_x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2\, dE_x = \lim_{n\to\infty} \|\Phi(f\chi_{M_n})x\|^2 \le c^2,$$

d.h. $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$.

(b) Man sieht leicht, dass die Definition von $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ nicht von der Wahl der Folge (M_n) zu f abhängt. Die Charakterisierung von $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ in Teil (a) zeigt, dass $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ ein linearer Raum in H und $\Phi(f)$ linear auf $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ ist.

(c) Jedes Element von $\mathcal{D}_0$ ist von der Form $E(M_k)x$ mit $x \in H$ und $k \in \mathbb{N}$. Mit Proposition 5.9 (a) folgt für alle $n \ge k$

$$\Phi(f\chi_{M_k})\Phi(\chi_{M_n})x = \Phi(f\chi_{M_n})\Phi(\chi_{M_k})x = \Phi(f\chi_{M_n}\chi_{M_k})x = \Phi(f\chi_{M_k})x, \quad (5.5)$$

so dass für festes $k \in \mathbb{N}$ wegen $E(M_k) = \Phi(\chi_{M_k})$ die Folge $\big(\Phi(f\chi_{M_n})E(M_k)x\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in H beschränkt ist. Somit gilt nach Teil (a) $E(M_k)x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$.

(d) Nach (c) ist $x_k := E(M_k)x \in \mathcal{D}_0$, und nach Voraussetzung an E konvergiert x_k gegen x für $k \to \infty$ (vgl. wieder obige Anmerkung (a)). Für $n \to \infty$ folgt aus (5.5) mit Teil (b)

$$\Phi(f)E(M_k)x = \Phi(f\chi_{M_k})x = E(M_k)\Phi(f)x \quad \text{für } x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big). \quad (5.6)$$

Für später vermerken wir noch, dass aus (5.6) die Inklusion

$$E(M_k)\Phi(f) \subset \Phi(f\chi_{M_k}) = \Phi(f)E(M_k) \tag{5.7}$$

folgt. Weiter ergibt sich aus (5.6) $\Phi(f)x_k \to \Phi(f)x$ für $k \to \infty$. Der lineare Raum $\mathcal{D}_0$ ist also ein „core" für $\Phi(f)$. ■

Folgerung 5.12 *Seien $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ sowie $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$, $y \in \mathcal{D}\big(\Phi(g)\big)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f)x, \Phi(g)y\rangle &= \int_\Omega f\overline{g}\, dE_{x,y},\\ \|\Phi(f)x\|^2 &= \int_\Omega |f|^2\, dE_x.\end{aligned}$$

Beweis. Es genügt, die erste Gleichung zu beweisen. Dazu sei $(M_n) \subset \mathcal{A}$ eine monotone Folge, die sowohl zu f als auch zu g assoziiert ist; vgl. Definition 5.10. Dann gilt mit Proposition 5.9 (a)

$$\langle \Phi(f\overline{g}\chi_{M_n})x, y\rangle = \langle \Phi(\overline{g}\chi_{M_n})\Phi(f\chi_{M_n})x, y\rangle = \langle \Phi(f\chi_{M_n})x, \Phi(g\chi_{M_n})y\rangle.$$

Nach Voraussetzung an x, y ist $f \in L^2(\Omega, E_x)$ und $g \in L^2(\Omega, E_x)$, und die Folgen $\big(\Phi(f\chi_{M_n})x\big)$ und $\big(\Phi(g\chi_{M_n})y\big)$ konvergieren in H gegen $\Phi(f)x$ bzw. $\Phi(g)y$. Somit ist nach Lemma 5.6 (b) das Integral $\int_\Omega |f\overline{g}|\, d|E_{x,y}|$ endlich, d.h. $|f\overline{g}|$ ist eine integrierbare Majorante für die Funktionen $f\overline{g}\chi_{M_n}$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert daher die gesuchte Identität. ■

Satz 5.13 *Für alle $f, g \in \mathcal{L}(\Omega)$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$; insbesondere ist $\Phi(f)$ abgeschlossen;

(b) $\alpha\Phi(f)+\beta\Phi(g)$ ist abschließbar, und $\overline{\alpha\Phi(f) + \beta\Phi(g)} = \Phi(\alpha f+\beta g)$; dabei ist für abgeschlossene Operatoren B, C auf H per Definition $\mathcal{D}(C+B) := \mathcal{D}(B)\cap\mathcal{D}(C)$.

(c) $\Phi(f)\Phi(g)$ ist abschließbar, und $\overline{\Phi(f)\Phi(g)} = \Phi(fg)$; dabei ist für abgeschlossene Operatoren B, C auf H per Definition $\mathcal{D}(CB) := \big\{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(C)\big\}$. Weiter gilt folgende Charakterisierung der Definitionsbereiche

$$\mathcal{D}\big(\Phi(f)\Phi(g)\big) = \mathcal{D}\big(\Phi(g)\big) \cap \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big).$$

Insbesondere ist $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, falls $\Phi(g) \in L(H)$.

(d) $\Phi(f)$ ist ein normaler Operator auf H, d.h. $\Phi(f)\Phi(f)^* = \Phi(f)^*\Phi(f)$. Dieser Operator stimmt mit $\Phi(f\overline{f})$ überein.

Beweis. Sei $(M_n) \subset \mathcal{A}$ eine monotone und zu f und g assoziierte Folge. Dann ist (M_n) auch assoziiert zu $\overline{f}$, $f+g$ und fg. Ferner ist $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)H$ ein „core" zu $\Phi(f)$, $\Phi(f+g)$ und $\Phi(fg)$; d.h. insbesondere, dass es zu jedem $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big)$ eine Folge (x_k) in $\mathcal{D}_0$ mit $x_k \to x$ und $\Phi(fg)x_k \to \Phi(fg)x$ gibt.

(a) Seien $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ und $y \in \mathcal{D}\big(\Phi(\overline{f})\big)$. Dann folgt mit Proposition 5.9 (a) und (5.6)

$$\big\langle E(M_k)\Phi(f)x, y\big\rangle = \big\langle \Phi(f\chi_{M_k})x, y\big\rangle = \big\langle x, \Phi(\overline{f\chi_{M_k}})y\big\rangle = \big\langle x, E(M_k)\Phi(\overline{f})y\big\rangle.$$

Für $k \to \infty$ erhält man $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \langle x, \Phi(\overline{f})y\rangle$, also $\Phi(\overline{f}) \subset \Phi(f)^*$.

Nun sei $y \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)^*\big)$ und $x \in H$ beliebig. Dann gilt wieder mit Proposition 5.9 (a)

$$\big\langle x, E(M_n)\Phi(f)^*y\big\rangle = \big\langle \Phi(f)E(M_n)x, y\big\rangle = \big\langle \Phi(f\chi_{M_n})x, y\big\rangle = \big\langle x, \Phi(\overline{f}\chi_{M_n})y\big\rangle,$$

woraus $E(M_n)\Phi(f)^*y = \Phi(\overline{f}\chi_{M_n})y$ folgt. Da wegen $y \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)^*\big)$ die Folge $\big(E(M_n)\Phi(f)^*y\big)$ beschränkt ist, gilt dieses auch für die Folge $\big(\Phi(\overline{f}\chi_{M_n})y\big)$. Also liegt y in $\mathcal{D}\big(\Phi(\overline{f})\big)$, d.h. es ist $\Phi(f)^* \subset \Phi(\overline{f})$.

(b) Wir beschränken uns auf den Beweis für Summen (d.h. für $\alpha = \beta = 1$) und zeigen zunächst, dass $\Phi(f) + \Phi(g)$ abschließbar ist. Sei $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)$ und

$$y \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)^* + \Phi(g)^*\big) = \mathcal{D}\big(\Phi(\overline{f}) + \Phi(\overline{g})\big) = \mathcal{D}\big(\Phi(\overline{f})\big) \cap \mathcal{D}\big(\Phi(\overline{g})\big).$$

Dann impliziert die Gleichheit

$$\big\langle x, \big(\Phi(f)^* + \Phi(g)^*\big)y\big\rangle = \big\langle (\Phi(f) + \Phi(g))x, y\big\rangle,$$

dass $y \in \mathcal{D}\left(\big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)^*\right)$ und $\big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)^*y = \Phi(f)^*y + \Phi(g)^*y$, d.h.

$$\mathcal{D}\big(\Phi(f)^* + \Phi(g)^*\big) \subseteq \mathcal{D}\left(\big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)^*\right).$$

Ferner ist $\mathcal{D}\left(\big(\Phi(f) + \Phi(g)\big)^*\right)$ dicht in H, da $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}\big(\Phi(\overline{f}) + \Phi(\overline{g})\big)$ dicht in H liegt. Nun folgt mit Proposition 2.2 die Abschließbarkeit von $\Phi(f) + \Phi(g)$.

Nun benutzen wir (5.7), um mit $E_n := E(M_n)$ und $\chi_n := \chi_{M_n}$ die Identitäten

$$(\Phi(f) + \Phi(g))E_n = \Phi(f\chi_n) + \Phi(g\chi_n) = \Phi(f\chi_n + g\chi_n) = \Phi(f + g)E_n, \tag{5.8}$$

$$E_n(\Phi(f) + \Phi(g)) = E_n\Phi(f) + E_n\Phi(g) \subset (\Phi(f) + \Phi(g))E_n = \Phi(f + g)E_n \tag{5.9}$$

zu erhalten. Da $\mathcal{D}_0 = \cup_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)H$ ein core für den abgeschlossenen Operator $\Phi(f + g)$ ist, erhalten wir aus (5.8) durch ein Approximationsargument, dass $\Phi(f + g)x = \overline{(\Phi(f) + \Phi(g))}x$ für alle $x \in \mathcal{D}(\Phi(f + g))$; folglich ist $\Phi(f + g) \subset \overline{\Phi(f) + \Phi(g)}$.

Ein weiteres Approximationsargument liefert unter Benutzung von $\mathcal{D}_0$ in (5.9) für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $E(M_n)\,\overline{\Phi(f) + \Phi(g)} \subset \Phi(f + g)E(M_n)$ (man beachte, dass $\Phi(f + g)E(M_n) \in L(H)$). Ein Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt schließlich $\overline{\Phi(f) + \Phi(g)} \subset \Phi(f + g)$. Damit ist die Identität $\overline{\Phi(f) + \Phi(g)} = \Phi(f + g)$ gezeigt.

(c) Die erste Identität wird wie in (b) bewiesen. Also ist $\Phi(f)\Phi(g)$ abschließbar mit

Abschluß $\Phi(fg)$, und es gelten $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\Phi(g)\big) \subset \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big)$ sowie per Definition $\mathcal{D}\big(\Phi(f)\Phi(g)\big) \subseteq \mathcal{D}\big(\Phi(g)\big)$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big)$, wobei auch $E(M_k)x \in \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big)$ und $E(M_k)\Phi(g)x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$ gelten. Dann benutzen wir (5.6) sowie die für $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(g)\big) \cap \mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big)$ gültige Identität

$$\Phi(fg)E(M_k)x = \Phi(fg\chi_{M_k})x = \Phi(f\chi_{M_k})\Phi(g\chi_{M_k})x = \Phi(f)\Phi(g)E(M_k)x.$$

Für $k \to \infty$ folgt $\Phi(g)E(M_k)x \to \Phi(g)x$ und $\Phi(fg)E(M_k)x \to \Phi(fg)x$. Da $\Phi(f)$ abgeschlossen ist, folgt $\Phi(g)x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\big)$, also $x \in \mathcal{D}\big(\Phi(f)\Phi(g)\big)$.

Im Fall $\Phi(g) \in L(H)$ ist $\mathcal{D}(\Phi(g)) = H$, also $\mathcal{D}\big(\Phi(fg)\big) = \mathcal{D}\big(\Phi(f)\Phi(g)\big)$ und folglich $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

(d) Nach (a) und (c) gilt $\Phi(f)^*\Phi(f) = \Phi(\overline{f})\Phi(f) \subset \Phi(\overline{f}f)$. Dabei ist $\Phi(f\overline{f})$ nach (a) selbstadjungiert, und $\Phi(f)^*\Phi(f)$ ist wegen Lemma 5.14 in Abschnitt 5.3 ebenfalls selbstadjungiert. Daraus folgt $\Phi(\overline{f}f) = \Phi(\overline{f}f)^* \subset \big(\Phi(f)^*\Phi(f)\big)^* = \Phi(f)^*\Phi(f)$, also $\Phi(\overline{f}f) = \Phi(f)^*\Phi(f)$. Ebenso gilt $\Phi(f\overline{f}) = \Phi(f)\Phi(f)^*$. Folglich ist $\Phi(f)$ normal. ∎

Beweis der Eindeutigkeitsaussage in Satz 5.4. Es gelte

$$A = \Phi_E(\mathrm{id}) := \int_J \lambda \, dE(\lambda)$$

für ein Intervall $J = [a,b] \supseteq \sigma(A)$, und mit einem Spektralmaß F auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gelte ebenfalls

$$A = \Phi_F(\mathrm{id}) := \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dF(\lambda).$$

Wir zeigen zuerst, dass auch letzteres Integral nur auf J betrachtet werden muss. Aufgrund der allgemeinen Eigenschaften des Spektralmaßes F und des zugehörigen Operators Φ_F (vgl. Definition 5.7 und Folgerung 5.12) gilt für die Mengen $N_n := [b+1/n, \infty)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und ihre charakteristischen Funktionen χ_n einerseits

$$\begin{aligned}\big\langle AF(N_n)x, F(N_n)x\big\rangle &= \big\langle \Phi_F(\mathrm{id})\Phi_F(\chi_n)x, \Phi_F(\chi_n)x\big\rangle \\ &= \big\langle \Phi_F(\mathrm{id}\,\chi_n)x, x\big\rangle = \int_{N_n} \lambda \, d\langle F(\lambda)x, x\rangle \\ &\geq (b+1/n) \int_{N_n} d\langle F(\lambda)x, x\rangle = (b+1/n)\,\|F(N_n)x\|^2,\end{aligned}$$

während andererseits wegen $\sigma(A) \subseteq [a,b]$ gilt $\langle Ay, y\rangle \leq b\|y\|^2$ und folglich

$$\big\langle AF(N_n)x, F(N_n)x\big\rangle \leq b\|F(N_n)x\|^2.$$

Hieraus folgt $F(N_n)x = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in H$, und die starke Stetigkeit von F impliziert, dass $F\big((b,\infty)\big) = 0$. Analog zeigt man $F\big((-\infty,a)\big) = 0$.

Somit gilt wegen $A = \Phi(\mathrm{id})$ und Folgerung 5.12 für jedes Polynom p

$$\langle p(A)x, x\rangle = \int_J p(\lambda)\, d\langle F(\lambda)x, x\rangle,$$

vgl. (5.1). Nun liefert die Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz 4.17, dass die Maße $d\langle F(\lambda)x, x\rangle$ und $d\langle E(\lambda)x, x\rangle$ für alle $x \in H$ übereinstimmen. Mit der Polarisierungsformel folgt schließlich $E = F$. ∎

5.3 Die Spektraldarstellung für unbeschränkte Operatoren

Zur Vorbereitung des Beweises der Spektraldarstellung für unbeschränkte Operatoren beginnen wir mit einem Hilfsmittel zur Übertragung der bisherigen Ergebnisse auf den Fall unbeschränkter Operatoren.

Lemma 5.14 *Sei T ein dicht definierter abgeschlossener, linearer Operator auf dem Hilbertraum H. Dann gilt*
(a) der Operator $I + T^*T : \mathcal{D}(T^*T) \to H$ ist bijektiv;
(b) die Inverse $C := (I + T^*T)^{-1} : H \to \mathcal{D}(T^*T)$ ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit $0 \le C \le I$;
(c) T^*T ist positiv semidefinit und selbstadjungiert;
(d) C besitzt eine eindeutige positive Quadratwurzel $C^{1/2}$, und für $B := TC^{1/2} \in L(H)$ ist $\|B\| \le 1$.

Beweis. (a) Wegen $\mathcal{G}(T^*) = \big(U\mathcal{G}(T)\big)^\perp$ (mit $U(x, y) = (-y, x)$; vgl. (1.2)), gilt

$$H \times H = \mathcal{G}(T^*) \oplus_\perp U\mathcal{G}(T).$$

Daher gibt es zu jedem $u \in H$ ein $x \in \mathcal{D}(T)$ und ein $y \in \mathcal{D}(T^*)$ mit

$$(0, u) = (y, T^*y) + U(x, Tx) = (y - Tx, T^*y + x).$$

Hieraus folgt $y = Tx$ und somit $u = T^*y + x = x + T^*Tx$; außerdem gilt $x \in \mathcal{D}(T^*T)$. Der Operator $I + T^*T : \mathcal{D}(T^*T) \to H$ ist also surjektiv. Ferner erhält man

$$\|(I + T^*T)x\|^2 = \|x\|^2 + \|T^*Tx\|^2 + 2\|Tx\|^2, \tag{5.10}$$

so dass $I + T^*T$ auf $\mathcal{D}(T^*T)$ auch injektiv ist.

(b) Sei $u := (I + T^*T)x$ mit $x \in \mathcal{D}(T^*T)$. Dann ist $x = Cu$, und mit (5.10) folgt $\|Cu\| = \|x\| \le \|(I + T^*T)x\| = \|u\|$. Also ist C beschränkt und $\|C\| \le 1$. Außerdem gilt

$$\langle Cu, u\rangle = \langle x, (I + T^*T)x\rangle = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \underset{(5.10)}{\le} \|u\|^2;$$

der Operator $C \in L(H)$ ist also symmetrisch, somit selbstadjungiert, und es gilt $0 \le C \le I$.

(c) Da C selbstadjungiert ist, gilt dies mit Folgerung 2.15 auch für $C^{-1} = I + T^*T$ und für T^*T. Außerdem ist $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \ge 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(T^*T)$.

(d) Der Operator C ist positiv semi-definit und sogar positiv definit, da er injektiv ist. Mit Hilfe seiner Spektralzerlegung $\int_{[0,\infty)} \lambda \, dF_C(\lambda)$ mit dem Spektralmaß F_C definieren wir seine eindeutig bestimmte positiv definite Quadratwurzel durch $C^{1/2} := \int_{[0,\infty)} \lambda^{1/2} \, dF_C(\lambda)$; d.h. es gilt $C^{1/2}C^{1/2} = C$.

Sei $x \in H$. Dann ist $Cx \in \mathcal{D}(T^*T)$ und

$$\begin{aligned} \|TC^{1/2}C^{1/2}x\|^2 &= \langle T^*TCx, Cx\rangle = \langle (I + T^*T)Cx, Cx\rangle - \|Cx\|^2 \\ &= \langle x, Cx\rangle - \|Cx\|^2 \le \langle x, Cx\rangle = \|C^{1/2}x\|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|BC^{1/2}x\| \le \|C^{1/2}x\|$ für alle $x \in H$. Da C und folglich auch $C^{1/2}$ injektiv und selbstadjungiert sind, liegt das Bild $\mathcal{R}(C^{1/2})$ dicht in H nach Lemma 1.6. Folglich lässt sich B zu einem beschränkten Operator auf H mit $\|B\| \le 1$ erweitern. ∎

Satz 5.15 (Spektralsatz) *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf H. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, so dass*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda).$$

Beweisidee. Wir führen das Problem auf den in Satz 5.4 behandelten Fall $B \in L(H)$ zurück.

Dazu sei $T := A$, $C := (I + A^2)^{-1}$ und $B := A(I + A^2)^{-1/2}$ wie in Lemma 5.14. Da B selbstadjungiert und $\|B\| \le 1$ ist, besitzt B ein Spektralmaß F auf $\mathcal{B}([-1, 1])$, so dass $B = \int_{[-1,1]} t \, dF(t)$. Dann ist formal $A = B(I - B^2)^{-1/2}$ und daher

$$A = \int_{[-1,1]} \varphi(t) \, dF(t) \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := \frac{t}{(1 - t^2)^{1/2}}.$$

Nun wird das Spektralmaß E von A auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch

$$E(M) := F\big(\varphi^{-1}(M)\big), \quad M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

definiert, so dass $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda)$ gilt.

Die Eindeutigkeitsaussage wird mit der gleichen Methode auf die Eindeutigkeit im Fall $B \in L(H)$ zurückgeführt. Details finden Sie bei Konrad Schmüdgen: *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Spaces*, Springer 2012. ∎

6 Spektralkalkül selbstadjungierter Operatoren

6.1 Einige Konsequenzen des Spektralsatzes

Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H und sei E das Spektralmaß zu A. Ferner sei für eine beliebige messbare Funktion $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ der abgeschlossene Operator $f(A)$ durch

$$f(A) := \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE(\lambda),$$

d.h. durch

$$\langle f(A)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\langle E(\lambda)x, y\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(f(A)),\ y \in H$$

definiert; dabei ist der Definitionsbereich

$$\mathcal{D}\big(f(A)\big) := \left\{ x \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty \right\},$$

von $f(A)$ dicht in H.

Unser Ziel ist die Untersuchung von Eigenschaften der Operatoren $f(A)$ mit Hilfe des Spektralkalküls und des Spektralmaßes E.

Proposition 6.1 *Seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Dann gilt*
(a) Ist $f = g$ E-f.ü., so ist $f(A) = g(A)$.
(b) Ist f E-f.ü. reellwertig, so ist $f(A)$ selbstadjungiert.
(c) Ist $f \geq 0$ E-f.ü., so ist $f(A)$ positiv semidefinit.
(d) Ist $f \geq 0$ E-f.ü., so ist $\sqrt{f}(A)$ die eindeutig bestimmte positiv semidefinite Quadratwurzel von $f(A)$, d.h. es gilt $\big(\sqrt{f}(A)\big)^2 = f(A)$.
(e) $f(A) \in L(H)$ genau dann, wenn f wesentlich E-beschränkt ist, d.h. genau dann, wenn

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}, E) := \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) : \|f\|_\infty := E\text{-ess sup}\,|f(t)| < \infty\}.$$

Beweis. Die Aussagen (a) - (c) folgen mit Proposition 5.9. Die Eigenschaften $\sqrt{f}(A) \geq 0$ und $\big(\sqrt{f}(A)\big)^2 = f(A)$ in (d) beruhen ebenfalls auf Proposition 5.9. Die Eindeutigkeitsaussage soll hier nicht bewiesen werden.
(e) Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$. Dann folgt aus der für alle $x \in H$ gültigen Abschätzung

$$\|f(A)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, dE_x \leq \|f\|_\infty^2 E_x(\mathbb{R}) = \|f\|_\infty^2 \|E(\mathbb{R})x\|^2 = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$$

die obere Normschranke $\|f\|_\infty$ für $f(A)$.

Nun sei $f(A) \in L(H)$ und $M_n := \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \geq \|f(A)\| + 1/n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit Theorem 5.13 (c) und mit $\mathcal{D}(f(A)) = H$ sowie $\Phi(\chi_{M_n}) = E(M_n)$ einerseits $(f\chi_{M_n})(A) = f(A)E(M_n)$, also

$$\int_{M_n} |f|^2 \, dE_x = \int_{\mathbb{R}} |f\chi_{M_n}|^2 \, dE_x = \|f(A)E(M_n)x\|^2 \leq \|f(A)\|^2 \, \|E(M_n)x\|^2$$

für alle $x \in H$ und andererseits

$$\int_{M_n} |f|^2 \, dE_x \geq \big(\|f(A)\| + 1/n\big)^2 \|E(M_n)x\|^2.$$

Hieraus liest man $\|E(M_n)x\| = 0$ für alle $x \in H$ ab, also $E(M_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $f \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$ und $\|f\|_\infty \leq \|f(A)\|$. ∎

Proposition 6.2 *Für $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ ist der Operator $f(A) : \mathcal{D}(f(A)) \to \mathcal{R}(f(A))$ genau dann invertierbar (mit abgeschlossener Inversen $f(A)^{-1} : \mathcal{R}(f(A)) \to \mathcal{D}(f(A))$), wenn $f \neq 0$ E-f.ü. In diesem Fall gilt*

$$f(A)^{-1} = (1/f)(A).$$

Beweis. Sei $N := \{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}$. Nach Satz 5.13 (c) gilt wegen $E(N) \in L(H)$

$$f(A)E(N) = (f\chi_N)(A) = 0(A) = 0.$$

Somit ist $E(N) = 0$ notwendig für die Invertierbarkeit von $f(A)$. Wir zeigen die Hinlänglichkeit.

Sei also $E(N) = 0$. Dann liegt mit $f \in \mathcal{L}(E)$ auch $1/f$ in $\mathcal{L}(E)$; es ist $1/f \cdot f = 1$ E-f.ü., und $(1/f)(A)$ ist ein abgeschlossener Operator nach Satz 5.13 (a). Ferner gilt $\mathcal{D}\big((1/f \cdot f)(A)\big) = \mathcal{D}(I) = H$, und mit Satz 5.13 (c) folgt

$$\mathcal{D}\big((1/f)(A)f(A)\big) = \mathcal{D}\big(f(A)\big) \cap \mathcal{D}\big((1/f \cdot f)(A)\big) = \mathcal{D}\big(f(A)\big).$$

Außerdem folgt aus Satz 5.13 (c), dass $(1/f)(A)f(A) \subset (1/f \cdot f)(A) = I$. Also ist $f(A)$ injektiv (damit auch invertierbar) und $\big(f(A)\big)^{-1} \subset (1/f)(A)$.

Vertauscht man die Rollen von f und $1/f$, erhält man $\big((1/f)(A)\big)^{-1} \subset f(A)$ und damit

$$\Big(\big((1/f)(A)\big)^{-1}\Big)^{-1} = (1/f)(A) \subset f(A)^{-1}.$$

Damit ist die Gleichheit $\big(f(A)\big)^{-1} = (1/f)(A)$ bewiesen. ∎

Satz 6.3 *Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

*(a) Das Spektrum von $f(A)$ ist der E-*wesentliche Bildbereich *von f, d.h.*

$$\sigma\big(f(A)\big) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : E\big(\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda| < \varepsilon\}\big) \neq 0 \quad \textit{für alle}\ \varepsilon > 0\big\}.$$

Umgekehrt ist

$$\rho\big(f(A)\big) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, \varepsilon_0 > 0 \textit{ mit } E\left(\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda| < \varepsilon_0\}\right) = 0\big\}.$$

Im Fall $\lambda \in \rho\big(f(A)\big)$ *gilt* $R_\lambda\big(f(A)\big) = \frac{1}{\lambda - f}(A)$.

(*b*) *Genau dann ist* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ein Eigenwert von* $f(A)$, *wenn*

$$E\big(\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\}\big) = E\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big) \neq 0.$$

In diesem Fall ist $E\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big)$ *die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum von* $f(A)$ *zum Eigenwert* λ, *d.h.*

$$\mathcal{N}\big(\lambda I - f(A)\big) = E\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big)H.$$

Beweis. Der Einfachheit halber sei $\lambda = 0$; andernfalls betrachte man $f - \lambda$ an Stelle von f.

(*a*) Nach Proposition 6.1 (*e*) und Proposition 6.2 ist $0 \in \rho(A)$ genau dann, wenn $f \neq 0$ E-f.ü. und $1/f \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$; nur in diesem Fall fällt $-\frac{1}{f}(A) \in L(H)$ mit der Resolvente $R_0(f(A))$ zusammen. Deshalb gilt $0 \in \rho(f(A))$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $E\big(\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| < \varepsilon_0\}\big) = 0$ gibt. Umgekehrt folgt daraus die Aussage für den Fall $0 \in \sigma(f(A))$.

(*b*) Sei $N := \{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}$ und $x \in H$. Offensichtlich gilt mit Folgerung 5.12

$$0 = \|f(A)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dE_x = \int_{\mathbb{R}\setminus N} |f|^2 \, dE_x$$

genau dann, wenn

$$0 = E(\mathbb{R} \setminus N)x = \big(E(\mathbb{R}) - E(N)\big)x = \big(I - E(N)\big)x$$

erfüllt ist. Es folgt $\mathcal{N}\big(f(A)\big) = \mathcal{N}\big(I - E(N)\big) = \mathcal{R}\big(E(N)\big)$. Also ist $\lambda = 0$ genau dann Eigenwert von $f(A)$, wenn $0 \neq E(N) = E\big(f^{-1}(\{0\})\big)$. ■

Für den Operator A sehen die Charakterisierungen von $\sigma(A)$ und $\rho(A)$ etwas einfacher aus, da dann ja $f(t) = t$ ist.

Folgerung 6.4 (*a*) *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \big\{\lambda \in \mathbb{R} : E\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big) \neq 0 \textit{ für alle } \varepsilon > 0\big\}, \\ \rho(A) &= \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, \varepsilon_0 > 0 \textit{ mit } E\big((\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0)\big) = 0\big\}. \end{aligned}$$

(*b*) *Genau dann ist* $\lambda \in \mathbb{R}$ *Eigenwert von* A, *wenn* $E(\{\lambda\}) \neq 0$. *In diesem Fall ist* $E(\{\lambda\})H = \mathcal{R}\big(E(\{\lambda\})\big)$ *der zugehörige Eigenraum.*

Beweis. Da A selbstadjungiert ist, gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Mit $f(t) = t$ folgen die Aussagen direkt aus Satz 6.3. ■

Folgerung 6.5 *Jeder isolierte Punkt im Spektrum eines selbstadjungierten Operators A ist Eigenwert von A.*

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ isolierter Punkt in $\sigma(A)$, und sei $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $[\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0] \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Dann gilt nach Folgerung 6.4 (a) $E\big((\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0)\big) \neq 0$. Andererseits gibt es zu jedem $\lambda' \in [\lambda-\varepsilon_0, \lambda+\varepsilon_0] \setminus \{\lambda\}$ ein $\varepsilon' > 0$ mit $E\big((\lambda'-\varepsilon', \lambda'+\varepsilon')\big) = 0$. Mit einem Kompaktheitsargument folgt daraus $E\big([\lambda-\varepsilon_0, \lambda-\varepsilon_1]\big) = E\big([\lambda+\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_0]\big) = 0$ für alle $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Also ist $E\big((\lambda-\varepsilon_1, \lambda+\varepsilon_1)\big) \neq 0$ unabhängig von $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$.

Nun schließt man mit der σ-Additivität von E auf $E\big(\{0 < |t-\lambda| < \varepsilon_0\}\big) = 0$, also $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Somit ist nach Folgerung 6.4 (b) λ ein Eigenwert von A. ∎

Der folgende Satz beschreibt eine Standardsituation für elliptische Differentialoperatoren auf beschränkten Gebieten, z.B. für den Laplace-Operator $A = -\Delta$ auf einem glattberandeten beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit verschwindenden Dirichlet- bzw. Neumannrandwerten. Hierbei ist $H = L^2(\Omega)$ und $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ bzw. $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$.

Satz 6.6 *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(a) *H besitzt eine Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ aus Eigenvektoren von A zu einer Folge von Eigenwerten (λ_n) mit $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.*

(b) *$\sigma(A)$ ist ein rein diskretes Punktspektrum, welches aus Eigenwerten* endlicher *Vielfachheit besteht.*

(c) *Die Resolvente $R_\lambda(A)$ ist für ein $\lambda \in \rho(A)$ und damit für alle $\lambda \in \rho(A)$ kompakt.*

(d) *Die Einbettung $\mathcal{D}(A) \to H$, wobei $\mathcal{D}(A) \subset H$ mit der Graphennorm $\|.\|_A$ versehen ist, ist kompakt.*

Beweis. Sei (λ_n) die Folge der entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählten Eigenwerte und (μ_k) die Folge der *paarweise verschiedenen* Eigenwerte von A. Ferner sei H_0 die Abschließung von $\operatorname{span} \cup_{k\in\mathbb{N}} E(\{\mu_k\})H$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Da die Folge (λ_n) nur die Häufungspunkte $\pm\infty$ haben kann, gilt für $M := \{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$ nach Voraussetzung die Gleichung $E(M) = \sum_{k\in\mathbb{N}} E(\{\mu_k\}) = I$; außerdem ist $\dim E(\{\mu_k\})H < \infty$. Somit ist $E(\mathbb{R} \setminus M) = 0$. Da $\mathbb{R} \setminus M$ offen ist, verschwindet für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus M$ das Spektralmaß $E\big((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)\big)$ mit einem $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$. Nach Folgerung 6.4 gilt dann $\lambda \in \rho(A)$; also ist $\sigma(A) = M$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \neq 0$. Dann ist $R_\lambda(A) \in L(H)$ selbstadjungiert mit

$$\sigma\big(R_\lambda(A)\big) \setminus \{0\} = \big\{(\lambda-\lambda_n)^{-1} : n \in \mathbb{N}\big\},$$

und $R_\lambda(A)$ ist sowohl auf H_0 als auch auf $H_0^\perp$ invariant.

Angenommen, es wäre $H_0^\perp \neq \{0\}$. Dann ist $R_\lambda(A)|_{H_0^\perp} \neq 0$ selbstadjungiert, und es gibt ein

$$0 \neq \mu \in \sigma\big(R_\lambda(A)|_{H_0^\perp}\big) \subseteq \sigma\big(R_\lambda(A)\big).$$

Folglich gibt es ein $\lambda_{n_0} \in \sigma(A)$ mit $\mu = (\lambda - \lambda_{n_0})^{-1}$. Nach Voraussetzung an $\sigma(A)$ ist $\mu \neq 0$ ein isolierter Punkt in $\sigma\big(R_\lambda(A)|_{H_0^\perp}\big)$ und deshalb nach Folgerung 6.5 ein Eigenwert. Ein zugehöriger Eigenvektor $u_\mu \neq 0$ liegt dann einerseits in $H_0^\perp$; andererseits stimmt u_μ mit einem Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_{n_0} überein und liegt in H_0. Folglich war die Annahme $H_0^\perp \neq \{0\}$ falsch, und es gilt $H_0 = H$. Mit anderen Worten, $H = H_0$ besitzt eine ONB aus Eigenvektoren zu A.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $\lambda \in \rho(A)$. Nach dem vorhergehenden Beweisteil $(b) \Rightarrow (a)$ besitzt H eine ONB aus Eigenvektoren zu A und damit auch zu $R_\lambda(A)$. Außerdem ist $\big((\lambda - \lambda_n)^{-1}\big)$ eine Nullfolge von Eigenwerten von $R_\lambda(A)$. Bezeichnet nun P_n die Orthogonalprojektion von H auf den Eigenraum $\mathcal{N}(\lambda_n I - A) = \mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n} I - R_\lambda(A)\right)$, so gilt $x = \sum_{n=1}^\infty P_n x$ für alle $x \in H$ und

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda - \lambda_n} P_n.$$

Da $\mathcal{R}(P_n)$ endlich-dimensional ist, lässt sich $R_\lambda(A)$ in der Operatornorm von $L(H)$ durch Operatoren von endlichem Rang, also durch kompakte Operatoren, approximieren. Folglich ist $R_\lambda(A)$ kompakt. Mit der Resolventengleichung $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$ ergibt sich schließlich, dass R_μ für jedes $\mu \in \rho(A)$ kompakt ist.

$(c) \Rightarrow (b)$: Dies folgt aus der Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren (Satz 14.3 der Vorlesung FA).

$(c) \Rightarrow (d)$: Sei $M \subset (\mathcal{D}(A), \|.\|_A)$ beschränkt. Dann ist $(\lambda I - A)M \subset H$ beschränkt. Da $R_\lambda(A)$ kompakt, ist $M = R_\lambda(A)(\lambda I - A)M$ präkompakt in H.

$(d) \Rightarrow (c)$: Sei $M \subset H$ beschränkt. Dann ist $R_\lambda(A)M$ in $(\mathcal{D}(A), \|.\|_A)$ beschränkt und wegen (d) präkompakt in H. Also ist $R_\lambda(A)$ kompakt. ■

6.2 Zerlegungen der Eins$^\diamond$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(H)$ die Menge der orthogonalen Projektionen auf einem Hilbertraum H.

Definition 6.7 *Eine* Zerlegung der Eins *auf einem Hilbertraum H ist eine einparametrige Familie $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:*
(a) $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$ für alle $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (Monotonie),
(b) $E(\lambda) \to E(\lambda_0)$ stark (= punktweise) für $\lambda \to \lambda_0^+$, d.h. für alle $x \in H$ gilt

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0^+} E(\lambda)x = E(\lambda_0)x \quad (\textit{starke Stetigkeit von rechts}),$$

(c) $E(\lambda) \to 0$ *stark für* $\lambda \to -\infty$*, and* $E(\lambda) \to I$ *stark für* $\lambda \to +\infty$*.*

Proposition 6.8 *Sei* $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(H)$ *ein Spektralmaß. Dann definiert*

$$E(\lambda) := F\big((-\infty, \lambda]\big), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Zerlegung der Eins. Weiter existiert für jedes $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *der starke Grenzwert*

$$E(\lambda_0^-) := \text{s-lim}_{\lambda \to \lambda_0^-} E(\lambda) = F\big((-\infty, \lambda_0)\big),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} E(\lambda_2) - E(\lambda_1) &= F\big((\lambda_1, \lambda_2]\big) \quad \textit{für } \lambda_1 < \lambda_2, \\ E(\lambda_2) - E(\lambda_1^-) &= F\big([\lambda_1, \lambda_2]\big) \quad \textit{für } \lambda_1 \leq \lambda_2. \end{aligned}$$

Beweis. Eigenschaft (a) einer Zerlegung der Eins E ist äquivalent zur Identität $E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_1)$ für $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Diese ist erfüllt, da der durch das Spektralmaß F erzeugte Homomorphismus Φ die Eigenschaft $\Phi(\chi_{(-\infty,\lambda_1]}) \cdot \Phi(\chi_{(-\infty,\lambda_2]}) = \Phi(\chi_{(-\infty,\lambda_1]})$ hat.
Die Eigenschaften (b), (c) aus Definition 6.7 sind erfüllt, da $F(\emptyset) = 0$ und $F(\mathbb{R}) = I$ und wegen der σ-Additivität von of F bzgl. der starken Konvergenz. ■

Wir werden später sehen, dass auch die Umkehrung von Proposition 6.8 gilt: Jede Zerlegung der Eins definiert ein eindeutiges Spektralmaß.

Sei E eine Zerlegung der Eins. Wegen der starken Stetigkeit von rechts ist dann $E(\lambda_0^+) = E(\lambda_0)$ für alle $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten nun eine Folge $(\lambda_n) \subset (-\infty, \lambda_0)$ mit $\lambda_n \nearrow \lambda_0$ für $n \to \infty$. Wegen $E(\lambda_n) \leq E(\lambda_{n+1}) \leq \ldots \leq E(\lambda_0)$ bilden die Räume $X_n := \mathcal{R}\big(E(\lambda_n)\big)$ eine aufsteigende Folge

$$X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} =: X_{0^-} \subset \mathcal{R}\big(E(\lambda_0)\big).$$

Zum abgeschlossenen Teilraum X_{0^-} von H gibt es einen komplementären Raum $X_{0^-}^{\perp}$ so dass $H = X_{0^-} \oplus_{\perp} X_{0^-}^{\perp}$ sowie eine Projektion $E(\lambda_0-) \in \mathcal{P}(H)$ so dass

$$\mathcal{R}\big(E(\lambda_0^-)\big) = X_{0^-}, \quad \mathcal{N}\big(E(\lambda_0^-)\big) = (X_{0^-})^{\perp}.$$

Offensichtlich gilt $E(\lambda_n) \leq E(\lambda_0^-) \leq E(\lambda_0)$ sowie (in der starken Topologie)

$$E(\lambda_0^-) = \text{s-lim}\, E(\lambda_n) \tag{6.1}$$

(man beachte, dass X_{0^-} auf der Abschließung von $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definiert ist).

Wir definieren nun die Spektralprojektionen für Intervalle durch

$$\begin{aligned} E\big([a,b]\big) &:= E(b) - E(a^-), & E\big((a,b]\big) &:= E(b) - E(a), \\ E\big([a,b)\big) &:= E(b^-) - E(a^-), & E\big((a,b)\big) &:= E(b^-) - E(a). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Insbesondere ist $E(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda^-)$.

Jede Zerlegung der Eins E gestattet die Definition von operatorwertigen Riemann-Stieltjes-Integralen

$$\int_I f(\lambda)\, dE,$$

wobei $I = [a,b]$ oder $I = \mathbb{R}$ und f eine stetige Funktion ist. Diese dienen uns als Werkzeug, mit dessen Hilfe wir der Zerlegung E ein Spektralmaß zuordnen.

Zur Definition des RS-Integrals sei $f \in C(I)$ mit $I = [a,b]$ für $a < b$. Ausgehend von einer Partition $P = \{a - \varepsilon < \lambda_0 < a \leq \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b\}$ und Punkten $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k] \cap [a,b]$ definieren wir die Riemannsumme

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\big). \tag{6.3}$$

Man kann zeigen, dass es dann einen beschränkten Operator gibt, den wir mit $\int_I f\, dE \in L(H)$ bezeichnen und der Unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen ξ_k ist, so dass

$$S(f,P) \to \int_I f\, dE \quad \text{stark in } L(H) \text{ falls} \quad \max_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \to 0.$$

Außerdem gilt für alle $x \in H$

$$\Big\langle \Big(\int_I f\, dE \Big) x, x \Big\rangle = \int_I f(\lambda)\, d\big\langle E(\lambda)x, x\big\rangle \tag{6.4}$$

$$\Big\| \Big(\int_I f\, dE \Big) x \Big\|^2 = \int_I |f(\lambda)|^2\, d\big\langle E(\lambda)x, x\big\rangle \tag{6.5}$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite gewöhnliche skalar-wertige Riemann-Stieltjes-Integrale bzgl. der beschränkten und von rechts stetigen BV-Funktionen $\lambda \mapsto \big\langle E(\lambda)x, x\big\rangle$ sind. Mit Hilfe der Polarisationsgleichung lässt sich aus (6.4) ableiten, dass

$$\Big\langle \Big(\int_I f\, dE \Big) x, y \Big\rangle = \int_I f(\lambda)\, d\big\langle E(\lambda)x, y\big\rangle \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Schließlich folgt wegen $\| \int_I 1\, dE\| = \|E(b) - E(a^-)\| \leq 1$ aus (6.5), dass für alle $f \in C(I)$ die Normabschätzung $\| \int_I f\, dE\| \leq \|f\|_\infty$ gilt. Folglich ist

$$\Big| \Big\langle \Big(\int_I f\, dE \Big) x, y \Big\rangle \Big| \leq \|f\|_\infty \|x\|\, \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Insbesondere gilt diese Abschätzung für jeden Polynom auf I.

Wir erhalten nun wie im Beweis von Satz 5.4 ein eindeutiges Spektralmaß F, so dass

$$\int_I f\, dE = \Phi(f) = \int_I f\, dF(\lambda).$$

Satz 6.9 *Sei $-\infty < a \leq b < \infty$ und sei E eine Zerlegung der Eins so, dass $E(\alpha) = 0$ für alle $\alpha < a$ und $E(\beta) = I$ für alle $\beta \geq b$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß F auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ so, dass*

$$\int_{[a,b]} f\,dE = \Phi(f) := \int_{\mathbb{R}} f\,dF(\lambda) \quad \textit{für alle } f \in C^0[a,b]$$

einen beschränkten Operator $\Phi(f) \in L(H)$ definiert. Dabei erweist sich F als das Spektralmaß des selbstadjungierten Operators

$$A = \Phi(\mathrm{id}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,dF(\lambda) \in L(H).$$

Schließlich ist $F(A) = 0$ für alle Borelmengen $A \subset (-\infty, a) \cup [b, \infty)$, und für alle $a \leq c < d \leq b$ gilt

$$F\big([c,d]\big) = E(d) - E(c^-), \qquad F\big((c,d]\big) = E(d) - E(c), \tag{6.6}$$

$$F\big([c,d)\big) = E(d^-) - E(c^-), \quad F\big((c,d)\big) = E(d^-) - E(c); \tag{6.7}$$

insbesondere ist $F\big(\{c\}\big) = E(c) - E(c^-)$.

Beweis. Es genügt, (6.6) and (6.7) zu beweisen. Sei $a \leq d < b$. Wie betrachten den Projektor $F([a,d]) = \Phi(\chi_{[a,d]})$. Die Funktion $\chi_{[a,d]} \notin C([a,b])$ wird approximiert durch die Folge $(f_n) \subset C([a,\infty))$ der Funktionen

$$f_n(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq \lambda \leq d, \\ 1 - n(\lambda - d) & \text{für } d < \lambda < d + 1/n, \\ 0 & \text{für } d + 1/n \leq \lambda. \end{cases}$$

Nach Proposition 5.9 (e) gilt offenbar

$$\Phi(f_n) = \int f_n\,dF(\lambda) \to \int \chi_{[a,d]}\,dF(\lambda), \quad n \to \infty,$$

im Sinne der starken Konvergenz. Andererseits wird $\Phi(f_n) = \int_{[a,b]} f_n\,dE$ approximiert durch die Riemannsummen

$$\sum_{j=1}^{N} 1 \cdot \big(E(\lambda'_j) - E(\lambda'_{j-1})\big) + \sum_{k=1}^{M} f_n(\xi_k)\big(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\big)$$

wobei $N, M \in \mathbb{N}$ und $\lambda'_0 < a \leq \lambda'_1 < \ldots < \lambda'_N = d$ bzw. $d = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_M = d + 1/n$, und mit Zwischenstellen $\xi_k \in [d, d+1/n]$, die von n abhängen können.

Die erste dieser Riemannsummen ist gleich $E(d) - E(a^-) = E(d)$, während die zweite Riemannsumme stark gegen 0 konvergiert falls $\max_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \to 0$ für $n \to \infty$: In der Tat, mit $E_k := E(\lambda_k)$ und der Identität

$$(E_k - E_{k-1})(E_l - E_{l-1}) = (E_k - E_{k-1})\,\delta_{kl},$$

erhalten wir für alle $x \in H$, dass

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_k f_n(\xi_k)(E_k - E_{k-1})x \right\|^2 &= \sum_k f_n(\xi_k)^2 \underbrace{\langle (E_k - E_{k-1})x, x\rangle}_{\geq 0} \\
&\leq \sum_k \big\langle \big(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\big)x, x\big\rangle \\
&= \Big\langle \sum_k \big(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})\big)x, x\Big\rangle \\
&= \big\| \big(E(d+1/n) - E(d)\big)x \big\|^2
\end{aligned}$$

wegen der starken Stetigkeit von E von rechts gegen 0 konvergiert. Die übrigen Fälle werden ähnlich behandelt. ■

Im weiteren bezeichnen wir für einen beschränkten selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ mit $E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, die Zerlegung der Eins und mit $E(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, das Spektralmaß von A; man beachte den Unterschied zwischen $E(\lambda) = E((-\infty, \lambda])$ und $E(\{\lambda\})$.

In der Sprache der Zerlegungen der Eins nehmen die Resultate aus Folgerung 6.4 zum Spektrum und zur Resolventenmenge von A eine besonders einfache Form an. Zur Erinnerung: das Spektrum von A besteht aus dem Punktspektrum $\sigma_p(A)$ (= Menge der Eigenwerte von A) und dem kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c(A)$; das Restspektrum $\sigma_r(A)$ ist leer.

Folgerung 6.10 *Unter den obigen Annahmen gilt*

(a) $\lambda \in \sigma(A)$ *genau dann, wenn* $E(\lambda - \varepsilon) \neq E(\lambda + \varepsilon)$ *für alle* $\varepsilon > 0$*;*

(b) $\lambda \in \rho(A)$ *genau dann, wenn es ein* $\varepsilon > 0$ *so gibt, dass* $E(.)$ *konstant auf* $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ *ist;*

(c) $\lambda \in \sigma_p(A)$ *genau dann, wenn* $E(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda^-) \neq 0$*; in diesem Fall ist* $\mathcal{R}\big(E(\{\lambda\})\big)$ *der zugehörige Eigenraum;*

(d) $\lambda \in \sigma_c(A)$ *genau dann, wenn* $E(.)$ *auf keinem Intervall* $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ *konstant und stark stetig in* λ *ist;*

(e) Sei $c < d$*. Ist* $E(d) \neq E(c)$*, so ist* $(c, d] \cap \sigma(A) \neq \emptyset$*;*

(f) $(c, d) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ *genau dann, wenn* $E(d^-) \neq E(c)$*.*

Beweis. Wir zeigen nur die letzten beiden Aussagen. Für (e) nehmen wir an, dass $(c, d] \subset \rho(A)$. Dann impliziert (b), dass E für jedes $\lambda \in (c, d]$ konstant in einer Umgebung von λ ist. Dann ist E konstant auf ganz $(c, d]$, und es gilt $E(d) - E(c) = \text{s-lim}_{\lambda \to c^+}(E(d) - E(\lambda)) = 0$.

Aussage (6) folgt leicht aus (e). ■

Der folgende Satz liefert explizite Formeln zur Bestimmung von $E(.)$ in Abhängigkeit von den Resolventen $R_{t \pm i\varepsilon} := \big((t \pm i\varepsilon)I - A\big)^{-1}$, wobei $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \to 0^+$.

Die Herleitung dieser Formeln beruht auf der Identität

$$\frac{1}{2\pi i}\left((t-i\varepsilon-\lambda)^{-1}-(t+i\varepsilon-\lambda)^{-1}\right)=\frac{\varepsilon/\pi}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2},\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{6.8}$$

den Integralen

$$\int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{b-\lambda}{\varepsilon}\right)-\arctan\left(\frac{a-\lambda}{\varepsilon}\right)\right] \tag{6.9}$$

und der Tatsache, dass diese Integrale für $\varepsilon\to 0^+$ gegen $\chi:=\frac{1}{2}\left(\chi_{[a,b]}+\chi_{(a,b)}\right)$, also gegen

$$\chi(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{für } \lambda<a \text{ oder } \lambda>b,\\ 1/2 & \text{für } \lambda=a \text{ oder } \lambda=b,\\ 1 & \text{für } \lambda\in(a,b)\end{cases} \tag{6.10}$$

konvergieren.

Satz 6.11 (Formeln von Stone) *Ist $A\in L(H)$ selbstadjungiert, so genügen das Spektralmaß und die Zerlegung der Eins für A für alle $a<b$ den Identitäten*

$$E\big((a,b]\big) = \lim_{\delta\to0^+}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b+\delta}(R_{t-i\varepsilon}-R_{t+i\varepsilon})\,dt, \tag{6.11}$$

$$E(b) = \lim_{\delta\to0^+}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{b+\delta}(R_{t-i\varepsilon}-R_{t+i\varepsilon})\,dt, \tag{6.12}$$

wobei die Grenzübergänge $\varepsilon\to0^+$ und $\delta\to0^+$ jeweils im Sinne der starken Topologie auf $L(H)$ zu verstehen sind.

Beweis. Für $\varepsilon>0$ sei (g_n) eine Folge von Riemannsummen für das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\left((t-i\varepsilon-\lambda)^{-1}-(t+i\varepsilon-\lambda)^{-1}\right)\,dt. \tag{6.13}$$

Wegen der Identität (6.8) ist $|g_n(\lambda)|\le\frac{b-a}{\varepsilon\pi}$ gleichmäßig bzgl. λ und n, und die $(g_n(\lambda))$ konvergieren gegen das Integral (6.13). Nach Proposition 5.9 (e) konvergieren dann die operatorwertigen Riemannsummen $g_n(A)=\Phi(g_n)$ stark gegen den beschränkten Operator

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b(R_{t-i\varepsilon}-R_{t+i\varepsilon})\,dt.$$

Andererseits gilt wegen (6.8), (6.9)

$$g_n(\lambda)\to\frac{\varepsilon}{\pi}\int_a^b\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2}=:G_\varepsilon(\lambda)\quad\text{für } n\to\infty, \tag{6.14}$$

so dass $g_n(A) \to G_\varepsilon(A)$ stark für $n \to \infty$. Wegen (6.9) ist $|G_\varepsilon(\lambda)| \leq 1$ gleichmäßig bzgl. $\varepsilon > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und da $G_\varepsilon(\lambda) \to \chi(\lambda)$ für $\varepsilon \to 0$ (vgl. (6.10)), erhalten wir mit Proposition 5.9 (e) und (6.10), dass

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(A) = \Phi(G_\varepsilon) \to \Phi(\chi) &= \chi(A) = \frac{1}{2}\big(\chi_{[a,b]}(A) + \chi_{(a,b)}(A)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(E\big([a,b]\big) + E\big((a,b)\big)\big) \end{aligned}$$

im Sinne der starken Konvergenz. Zusammengefasst haben wir damit gezeigt, dass

$$\frac{1}{2}\big(E\big([a,b]\big) + E\big((a,b)\big)\big) = \text{s-lim}_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b (R_{t-i\varepsilon} - R_{t+i\varepsilon})\,dt. \tag{6.15}$$

Diese Identität gilt für alle $a < b$. Wir ersetzen nun a durch $a+\delta$ und b durch $b+\delta$ mit $\delta > 0$. Da das Spektralmaß σ-additiv bzgl. der starken Konvergenz ist, folgt

$$\frac{1}{2}E\big([a+\delta, b+\delta]\big) + E\big((a+\delta, b+\delta)\big)\Big) \to E\big((a,b]\big) \quad \text{für } \delta \to 0^+.$$

Folglich konvergiert auch die (modifizierte) rechte Seite von (6.15) stark für $\delta \to 0^+$. Damit ist der Beweis von (6.11) vollständig.

Um (6.12) für $E(b) = E((-\infty, b])$ zu zeigen, benutzen wir (6.14). Mittels Proposition 5.9 (e) vollziehen wir in (6.14) den Grenzübergang $a \to -\infty$ (und lassen anschließend $\varepsilon \to 0^+$ streben) und erhalten

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^b \frac{dt}{(t-\lambda)^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{b-\lambda}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2}\big(\chi_{(-\infty,b]} + \chi_{(-\infty,b)}\big).$$

Eine Anwendung von Φ liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(E(b) + E(b-)\big) &= \frac{1}{2}\big(E\big((-\infty,b]\big) + E\big((-\infty,b)\big)\big) \\ &= \text{s-lim}_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^b (R_{t-i\varepsilon} - R_{t+i\varepsilon})\,dt. \end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin b durch $b+\delta$ mit $\delta > 0$, dann ergibt die starke Konvergenz von E im Grenzwert für $\delta \to 0^+$ die Identität (6.12). ∎