Vorlesung Banach- und C^*-Algebren
SS 2023

Steffen Roch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Vorlesung soll eine Einführung in die Theorie der Banach- und C^*-Algebren gegeben werden. Diese Algebren werden seit ca. 80 Jahren intensiv untersucht. Mittlerweile verfügt man über eine tiefgehende und komplexe Theorie der C^*-Algebren, die ihre Stärke in zahlreichen und vielfältigen Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Mathematik (Operatortheorie, Maßtheorie, Topologie, Gruppentheorie, Geometrie, Zahlentheorie, etc.) unter Beweis gestellt hat. Meinen persönlichen Interessen entsprechend werde ich versuchen, den Anwendungsaspekt in der Operatortheorie stärker zu betonen.

Es gibt eine Reihe ausgezeichneter Bücher über Banach- und C^*-Algebren wie etwa

- Arveson: An Invitation to C^*-Algebras, Springer 1976 (recht knapp),
- Bonsall, Duncan: Complete Normed Algebras, Springer 1973,
- Bratteli, Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, I, Springer 1979 (leicht zu lesen, anwendungsorientiert),
- Davidson: C^*-Algebras by Example, AMS 1996 (zahlreiche konkrete Algebren und Anwendungen),
- Dixmier: C^*-Algebras, North Holland 1982 (ein Klassiker),
- Douglas: Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press 1972 (angenehm zu lesen, Anwendungen in Operatortheorie),
- Kadison, Ringrose: Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I-IV, Academic Press, AMS, Birkhäuser (umfassende Darstellung, zahlreiche Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungen),
- Murphy: C^*-Algebras and Operator Theory, Academic Press (gut lesbare Einführung),
- Pedersen: C^*-Algebras and their Automorphism Groups, Academic Press 1979 (anspruchsvoll, vielleicht DAS Buch über C^*-Algebren),

- Rickart: General Theory of Banach Algebras, van Nostrand 1960 (klassische Darstellung),
- Connes: Non-commutative Geometry, Academic Press 1994 (kein Lehrbuch, keine Monographie - eher eine Vision und eines der aufsehenerregendsten Bücher der letzten Jahre).

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Definitionen und Beispiele für Algebren

Wir betrachten in dieser Vorlesung ausschließlich Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Ein komplexer Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einer bilinearen Abbildung

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (a,\, b) \mapsto ab \tag{1.1.1}$$

heißt eine *Algebra*, wenn

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{für alle } a,\, b,\, c \in \mathcal{A}.$$

Wir nennen die Abbildung (1.1.1) *Multiplikation* und ab das *Produkt* von a und b. Eine Teilmenge einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt eine *Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, wenn sie bezüglich der in $\mathcal{A}$ erklärten Operationen ebenfalls eine Algebra ist. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, wenn $ab = ba$ für alle $a,\, b \in \mathcal{A}$.

Eine Algebra heißt *unital* (oder eine *Algebra mit Einselement*), wenn es ein Element $e \in \mathcal{A}$ gibt mit $ae = ea = a$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Wenn es ein solches Element gibt, so ist es eindeutig bestimmt und heißt das *Einselement* von $\mathcal{A}$. Wir werden meist verlangen, dass $e \neq 0$.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *normiert*, wenn auf dem unterliegenden Vektorraum eine Norm gegeben ist, die submultiplikativ in folgendem Sinn ist:

$$\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}.$$

Ist $\mathcal{A}$ bezüglich dieser Norm vollständig, so heißt $\mathcal{A}$ eine *Banachalgebra*.

Lemma 1.1.1 *In einer normierten Algebra ist die Multiplikation stetig.*

Beweis. Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - ab_n + ab_n - ab\| \leq \|a_n - a\|\,\|b_n\| + \|a\|\,\|b_n - b\|.$$

Da die Folge der $\|b_n\|$ beschränkt ist, folgt die Behauptung. ■

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Algebra mit Involution*, wenn sie mit einer Abbildung $a \mapsto a^*$ versehen ist, so dass für alle a, $b \in \mathcal{A}$ und alle λ, $\mu \in \mathbb{C}$ gilt:

- $(a^*)^* = a$,
- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$.

In einer involutiven Algebra gilt $0^* = 0$; in einer involutiven Algebra mit Eins e gilt $e^* = e$.

Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Involution heißt *Banach-$*$-Algebra*, wenn

$$\|a^*\| = \|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}. \tag{1.1.2}$$

Gilt in einer Banachalgebra mit Involution sogar

$$\|aa^*\| = \|a\|^2 \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}, \tag{1.1.3}$$

so heißt $\mathcal{A}$ eine *C^*-Algebra*.

Lemma 1.1.2 *Das C^*-Axiom* (1.1.3) *impliziert* (1.1.2).

Beweis. Für $a = 0$ ist die Behauptung offenbar richtig. Sei also $a \neq 0$. Dann folgt aus $\|a\|^2 = \|aa^*\| \le \|a\| \, \|a^*\|$, dass $\|a\| \le \|a^*\|$. Dann ist aber auch $\|a^*\| \le \|(a^*)^*\| = \|a\|$, also $\|a\| = \|a^*\|$. ∎

Das C^*-Axiom (1.1.3) kann auch in der Form

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}$$

formuliert werden. Aus (1.1.3) und Lemma 1.1.2 folgt nämlich

$$\|a^* a\| = \|a^*(a^*)^*\| = \|a^*\|^2 = \|a\|^2.$$

Beispiel 1.1.3 Ist X ein normierter linearer Raum über $\mathbb{C}$, so ist die Menge $L(X)$ der linearen beschränkten Operatoren auf X eine normierte Algebra bzgl. der üblichen Operationen und der durch die Norm auf X induzierten Operatornorm. Das Einselement von $L(X)$ ist die identische Abbildung I. Ist X ein Banachraum, so ist $L(X)$ eine Banachalgebra.

Im Falle $X = H$ eines Hilbertraums ist auf $L(H)$ eine Involution $A \mapsto A^*$ durch

$$\langle Ax, \, y \rangle = \langle x, \, A^* y \rangle \quad \text{für alle } x, \, y \in H$$

definiert, die $L(H)$ zu einer Banach-$*$-Algebra macht. Wir überlegen uns, dass $L(H)$ sogar eine C^*-Algebra ist. Für beliebiges $A \in L(H)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \sup\{\langle Ax, \, Ax \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\langle x, \, A^*Ax \rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &\le \sup\{\|A^*Ax\| : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \|A^*A\|. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Ungleichung $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$ gilt offenbar ebenso. Aus $\|A\| = \|A^*\|$ folgt somit das C^*-Axiom.

Ist X ein Banachraum, so ist mit $L(X)$ auch jede abgeschlossene Unteralgebra von $L(X)$ eine Banachalgebra. Ist H ein Hilbertraum, so ist mit $L(H)$ auch jede abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $L(H)$ eine C^*-Algebra (*symmetrisch* heißt: $b \in \mathcal{A} \Rightarrow b^* \in \mathcal{A}$). Wir werden später einen zentralen Satz beweisen, der besagt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist:

Jede C^*-Algebra ist im wesentlichen von dieser Gestalt.

Insbesondere bildet die Menge $K(X)$ der kompakten Operatoren auf einem Banach- bzw. Hilbertraum X eine Banach- bzw. C^*-Algebra. Falls X unendlichdimensional ist, besitzt $K(X)$ kein Einselement.

Beispiel 1.1.4 Zur Erinnerung: ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn sich aus jeder Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Überdeckung auswählen lässt. Der Raum X heißt *lokal-kompakt*, wenn jede Umgebung jedes Punktes $x \in X$ eine kompakte Umgebung von x enthält, d.h. wenn X eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Schließlich heißt X *Hausdorffsch* (oder ein *T_2-Raum*), wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen U_x, U_y von x bzw. y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$ gibt. Ist X Hausdorffsch und besitzt $x \in X$ eine kompakte Umgebung, so enthält jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung.

Sei nun X ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist jede stetige komplexwertige Funktion f auf X beschränkt, und die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ nimmt ihr Supremum auf X an. Die Menge $C(X)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen, versehen mit punktweisen Operationen, der Supremumsnorm (Maximumsnorm) und der Involution

$$f^*(x) := \overline{f(x)}, \quad x \in X, \tag{1.1.4}$$

bildet eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement $x \mapsto 1$.

Ist X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum, so bildet die Menge $C_0(X)$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden, bezüglich punktweiser Operationen, der Involution (1.1.4) und der Supremumsnorm ebenfalls eine C^*-Algebra. Diese besitzt kein Einselement, falls X nicht kompakt ist. (Man sagt, dass eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ *im Unendlichen verschwindet*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ so gibt, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$.)

Wir werden später sehen, dass jede kommutative C^*-Algebra von der Gestalt $C_0(X)$ mit einem lokal-kompakten Hausdorff Raum X und jede kommutative C^*-Algebra mit Einselement von der Gestalt $C(X)$ mit einem kompakten Hausdorff-Raum X ist.

Beispiel 1.1.5 Sei $l^1(\mathbb{Z})$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < \infty.$$

Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass $l^1(\mathbb{Z})$, versehen mit punktweiser Addition, skalarer Multiplikation sowie mit der Norm $\|\cdot\|_1$ einen Banachraum bildet. Man kann $l^1(\mathbb{Z})$ auf eine weniger offensichtliche Weise sogar zu einer Banachalgebra machen. Dazu ordnen wir zwei Funktionen f, $g \in l^1(\mathbb{Z})$ ein Produkt zu, welches in diesem Zusammenhang die *Faltung* von f und g heißt und mit $f * g$ bezeichnet wird:

$$(f * g)(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k).$$

Wir überlegen uns zunächst, dass diese Reihe für jedes n konvergiert und dass die resultierende Funktion $f * g$ wieder in $l^1(\mathbb{Z})$ liegt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f * g)(n)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k) \right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n-k)|\, |g(k)| \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(k)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n-k)| \\
&= \|f\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(k)| \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Also ist $f * g \in l^1(\mathbb{Z})$, und es gilt $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Um zu sehen, dass die Faltung $l^1(\mathbb{Z})$ zu einer Algebra macht, überprüfen wir beispielsweise das Assoziativgesetz. Die übrigen Algebra-Axiome folgen ebenso leicht. Für a, b, $c \in l^1(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist

$$((a * b) * c)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a * b)(n-k)c(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} a(n-k-l)b(l)c(k).$$

Eine Variablenverschiebung $l' = l + k$ in der inneren Summe führt zu

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l'\in\mathbb{Z}} a(n-l')b(l'-k)c(k),$$

und eine Vertauschung der Summationsreihenfolge (die wegen der absoluten Konvergenz der Reihe erlaubt ist) zeigt, dass $((a * b) * c)(n)$ übereinstimmt mit

$$(a * (b * c))(n) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a(n-l)(b * c)(l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(n-l)b(l-k)c(k).$$

Also ist $l^1(\mathbb{Z})$ eine Banachalgebra, die sogenannte *Wiener-Algebra*. Diese ist sogar kommutativ:

$$(a * b)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(n-k)b(k) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a(k')b(n-k') = (b * a)(n).$$

Weiter wird durch $a^*(n) := \overline{a(-n)}$ eine Involution auf $l^1(\mathbb{Z})$ erklärt, die $l^1(\mathbb{Z})$ zu einer kommutativen Banach-$*$-Algebra mit Einselement macht ($\nearrow$ Übung).

Ganz ähnlich lassen sich auch entsprechende Algebren von Funktionen einführen. Dazu definieren wir auf dem Raum $C_C(\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ein wieder *Faltung* genanntes Produkt durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

und eine Involution durch $f^*(x) := \overline{f(-x)}$. Diese Operationen machen $C_C(\mathbb{R}^n)$ zu einer kommutativen und involutiven Algebra. Weiter wird durch

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy$$

eine Norm auf $C_C(\mathbb{R}^n)$ erklärt, für die gilt

$$\|f^*\|_1 = \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{1.1.5}$$

Sei $L^1(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung des normierten Raums $C_C(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$. Wegen (1.1.5) lassen sich Involution und Faltung stetig auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen und machen $L^1(\mathbb{R}^n)$ zu einer kommutativen Banach-$*$-Algebra *ohne* Eins ($\nearrow$ Übung).

1.2 Homomorphismen, Ideale, Quotienten

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Algebren. Eine lineare Abbildung $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *Homomorphismus*, wenn

$$W(ab) = W(a)W(b) \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}.$$

Haben $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Einselemente $e_\mathcal{A}$ bzw. $e_\mathcal{B}$, so heißt ein Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *unital*, wenn $W(e_\mathcal{A}) = e_\mathcal{B}$. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ involutiv, so heißt ein Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *symmetrisch* oder **-Homomorphismus*, wenn $W(a^*) = W(a)^*$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Bijektive Homomorphismen heißen *Isomorphismen*; bijektive *-Homomorphismen heißen **-Isomorphismen*. Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Algebren.

Im Falle normierter Algebren interessiert man sich besonders für *stetige* Homomorphismen, d.h. für solche mit

$$\|W(a)\| \leq C\|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}$$

mit einer gewissen Konstanten C. Gibt es einen stetigen Isomorphismus einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ auf eine Banachalgebra $\mathcal{B}$, so nennen wir $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *topologisch isomorph* und schreiben $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Nach dem Satz von Banach ist die Inverse eines stetigen Isomorphismus wieder ein stetiger Isomorphismus. Topologische Isomorphie ist also eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Banachalgebren.

Ein linearer Teilraum $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt ein *Linksideal*, wenn

$$aj \in \mathcal{J} \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A},\ j \in \mathcal{J}.$$

Analog erklärt man *Rechtsideale*. Ein Teilraum, der sowohl Links- als auch Rechtsideal ist, heißt *Ideal*. Die Algebra $\mathcal{A}$ selbst sowie der Nullraum $\{0\}$ sind stets Ideale von $\mathcal{A}$. Diese heißen die *trivialen Ideale*. Besitzt $\mathcal{A}$ nur die trivialen Ideale, so heißt $\mathcal{A}$ *einfach*. Beispielsweise ist die Algebra $\mathbb{C}^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen einfach ($\nearrow$ Übung).

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Idealen und den Kernen

$$\ker W := \{a \in \mathcal{A} : W(a) = 0\}$$

von Homomorphismen $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von Algebren.

Lemma 1.2.1 *Der Kern jedes Homomorphismus ist ein Ideal, und jedes Ideal ist Kern eines gewissen Homomorphismus.*

Beweis. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass der Kern jeder linearen Abbildung ein linearer Raum ist. Ist nun $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und sind $a \in \mathcal{A}$, $j \in \ker W$, so ist

$$W(aj) = W(a)W(j) = 0 = W(j)W(a) = W(ja),$$

d.h. aj und ja liegen in $\ker W$, und $\ker W$ ist ein Ideal.

Für die zweite Aussage betrachten wir den Faktorraum $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ für ein Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$. Dieser lineare Raum kann zu einer Algebra (der sogenannten *Faktor*- oder *Quotientenalgebra* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{J}$) gemacht werden durch die Festlegung

$$(a + \mathcal{J}) \cdot (b + \mathcal{J}) := ab + \mathcal{J}.$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Definition korrekt ist, dass die Abbildung

$$W : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J},\ a \mapsto a + \mathcal{J}$$

ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist (der sog. *kanonische Homomorphismus*), und dass $\ker W = \mathcal{J}$. ■

Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$, so wird in der Faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ durch

$$\|a + \mathcal{J}\| := \inf \{\|a + j\| : j \in \mathcal{J}\}$$

eine Norm definiert, welche $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ zu einer Banachalgebra macht ($\nearrow$ Übung). Offensichtlich gilt $\|a + \mathcal{J}\| \le \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$, d.h. der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist stetig, und seine Norm ist nicht größer als 1. Mit diesen Aussagen erhält man sofort:

Lemma 1.2.2 *Der Kern eines stetigen Homomorphismus ist abgeschlossenes Ideal, und jedes abgeschlossene Ideal ist der Kern eines stetigen Homomorphismus.*

Für C^*-Algebren $\mathcal{A}$ und abgeschlossene Ideale $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$ entsteht die Frage, ob man $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ wieder zu einer C^*-Algebra machen kann. Diese werden wir erst später beantworten.

Beispiel 1.2.3 Für jeden Banachraum X ist die Menge $K(X)$ der linearen kompakten Operatoren auf X ein abgeschlossenes Ideal von $L(X)$. Falls X unendlichdimensional ist, ist dieses Ideal nicht trivial. Für jeden unendlich-dimensionalen Banachraum X heißt $L(X)/K(X)$ die *Calkinalgebra* von X.

Im Falle eines separablen unendlich-dimensionalen Hilbertraums H (wie etwa $l^2(\mathbb{N})$) kann man sogar zeigen, dass $K(H)$ das einzige nichttriviale abgeschlossene Ideal von $L(H)$ ist (während es sehr viele nichtabgeschlossene Ideale gibt wie z.B. das Ideal der Hilbert-Schmidt-Operatoren oder das der Operatoren mit endlichdimensionalem Bild). ■

Beispiel 1.2.4 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Unser Ziel ist es, alle *abgeschlossenen* Ideale von $C(X)$ zu beschreiben. Man überlegt sich sofort, dass für jede abgeschlossene Teilmenge K von X die Menge

$$\{f \in C(X) : f|_K = 0\}$$

ein abgeschlossenes Ideal von $C(X)$ bildet. Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung:

Theorem 1.2.5 *Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $C(X)$. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $K \subseteq X$, so dass*

$$\mathcal{J} = \{f \in C(X) : f|_K = 0\}. \tag{1.2.1}$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Menge $K := \bigcap_{f \in \mathcal{J}} f^{(-1)}(0)$ den Bedingungen des Satzes genügt. Als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist K wieder abgeschlossen, und die Inklusion $\mathcal{J} \subseteq \{f \in C(X) : f|_K = 0\}$ ist offensichtlich. Für den Beweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in C(X)$ eine Funktion, die auf K verschwindet. Wir müssen zeigen, dass $f \in \mathcal{J}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U_K von K so, dass $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in U_K$. Weiter wählen wir für jeden Punkt $x \in X \setminus K$ eine Funktion

$g_x \in \mathcal{J}$ mit $g_x(x) = 1$. Diese Funktion können wir als reellwertig und nichtnegativ annehmen (andernfalls ersetzen wir sie durch die Funktion $g_x\overline{g_x}$). Sei $U_x := \{y \in X : g_x(y) > 1/2\}$. Die offenen Mengen U_x, $x \in X \setminus K$, überdecken zusammen mit der offenen Menge U_K den Kompakt X. Es gibt folglich eine endliche Überdeckung durch solche Mengen, etwa

$$X = U_K \cup U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Sei $1 = f_K + f_1 + \cdots + f_n$ eine Zerlegung der Eins bzgl. dieser Überdeckung, d.h. f_K und alle f_i sind nichtnegative stetige Funktionen mit $\operatorname{supp} f_K \subset U_K$ sowie $\operatorname{supp} f_i \subseteq U_{x_i}$ für alle i. Auf der Abschließung $\overline{U_{x_i}}$ von U_{x_i} ist $g_{x_i} \geq 1/2$. Die Einschränkung von g_{x_i} auf $\overline{U_{x_i}}$ ist also invertierbar, und die inverse Funktion ist wieder stetig auf $\overline{U_{x_i}}$. Nach einem Satz von Uryson kann $(g_{x_i}|_{\overline{U_{x_i}}})^{-1}$ zu einer auf ganz X stetigen Funktion h_i fortgesetzt werden. Mit dieser gilt

$$f_i = f_i g_{x_i} h_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

(punktweise nachrechnen!). Wegen $g_{x_i} \in \mathcal{J}$ folgt $f_i \in \mathcal{J}$ für alle i. Nun ist wegen $f = f \cdot 1 = ff_K + ff_1 + \cdots + ff_n$ klar, dass

$$\|f - ff_1 - \cdots - ff_n\|_\infty = \|ff_K\|_\infty \leq \|f|_{U_K}\|_\infty < \varepsilon.$$

Die Funktion f kann also beliebig genau durch Funktionen aus $\mathcal{J}$ approximiert werden. Da $\mathcal{J}$ abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{J}$ und damit die Behauptung. ■

Wir haben also eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Teilmengen von X und den abgeschlossenen Idealen von $C(X)$.

1.3 Einselement

In einer Banachalgebra mit Eins e lässt sich bequemer arbeiten, wenn $\|e\| = 1$. Wir zeigen, dass dies immer erreicht werden kann. Dazu erinnern wir, dass zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ auf einem linearen Raum X *äquivalent* heißen, wenn es positive Konstanten c_1, c_2 so gibt, dass

$$c_1\|x\| \leq \|x\|_0 \leq c_2\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Theorem 1.3.1 *Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$ und Eins $e \neq 0$, so existiert auf $\mathcal{A}$ eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm $\|\cdot\|_0$ mit*

$$\|e\|_0 = 1 \quad \textit{und} \quad \|ab\|_0 \leq \|a\|_0\|b\|_0.$$

Beweis. Jedem $a \in \mathcal{A}$ ordnen wir den Operator $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ b \mapsto ab$ der Linksmultiplikation mit a zu und definieren

$$\|a\|_0 := \|L_a\|.$$

Aus $\|a\|_0 = 0$ folgt $L_a = 0$ und damit wegen $L_a e = a$, dass $a = 0$. Damit ist klar, dass $\|\cdot\|_0$ eine Norm auf $\mathcal{A}$ wird. Außerdem gilt $\|e\|_0 = 1$ (da L_e die identische Abbildung ist) und

$$\|ab\|_0 = \|L_{ab}\| = \|L_a L_b\| \leq \|L_a\| \, \|L_b\| = \|a\|_0 \|b\|_0.$$

Schließlich gilt für alle $a \in \mathcal{A}$

$$\|a\|_0 = \|L_a\| = \sup\{\|ab\| : \|b\| \leq 1\} \leq \|a\|$$

und

$$\|a\| = \|L_a e\| \leq \|L_a\| \, \|e\| = \|a\|_0 \|e\|,$$

woraus die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ folgt. ∎

Wichtige Vereinbarung: Von nun an nehmen wir für Banachalgebren mit Eins immer $e \neq 0$ und $\|e\| = 1$ an.

Hat eine Banachalgebra kein Einselement, so lässt sie sich in eine größere Banachalgebra mit Einselement einbetten:

Theorem 1.3.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, und $\tilde{\mathcal{A}}$ sei der lineare Raum $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$, versehen mit der Norm $\|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|$ und dem Produkt*

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}}$ Banachalgebra mit Eins $(0, 1)$, die Menge $\tilde{\mathcal{A}}_0$ aller Paare mit $(a, 0)$ mit $a \in \mathcal{A}$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\tilde{\mathcal{A}}$, und die Abbildung $a \mapsto (a, 0)$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\tilde{\mathcal{A}}_0$.

Beweis. Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ eine Banachalgebra mit Eins $(0, 1)$ und $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ein abgeschlossenes Ideal von $\tilde{\mathcal{A}}$ ist. Beispielsweise folgt die Submultiplikativität der Norm aus

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)(b, \mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| \\
&= \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|a\| \, \|b\| + |\lambda| \, \|b\| + |\mu| \, \|a\| + |\lambda| \, |\mu| \\
&= (\|a\| + |\lambda|) \, (\|b\| + |\mu|) = \|(a, \lambda)\| \, \|(b, \mu)\|.
\end{aligned}$$

Schließlich überprüft man schnell, dass

$$W : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}_0, \quad a \mapsto (a, 0)$$

ein Isomorphismus und wegen $\|a\| = \|(a, 0)\|$ sogar eine Isometrie ist. ∎

Wesentlich mehr Mühe macht es, eine C^*-Algebra mit einem Einselement zu versehen.

Theorem 1.3.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra.*
(a) Für den Operator $L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ b \mapsto ab$ der Linksmultiplikation mit a gilt:

$$\|L_a\| = \|a\|.$$

Hat insbesondere $\mathcal{A}$ ein Einselement e, so ist $\|e\| = 1$.
(b) Hat $\mathcal{A}$ kein Einselement, so ist die in Satz 1.3.2 eingeführte Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ eine C^*-Algebra bezüglich der Involution $(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda})$ und der Norm

$$\|(a,\, \lambda)\| := \|L_{(a,\,\lambda)}\|, \tag{1.3.1}$$

wobei $L_{(a,\,\lambda)} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ der Operator $b \mapsto ab + \lambda b$ ist. Die Algebra $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\tilde{\mathcal{A}}$, welches zu $\mathcal{A}$ isometrisch *-isomorph ist.

Beweis. (*a*) Für alle $b \in \mathcal{A}$ ist $\|L_a b\| = \|ab\| \le \|a\|\,\|b\|$, woraus $\|L_a\| \le \|a\|$ folgt. Andererseits hat man in C^*-Algebren

$$\|L_a a^*\| = \|aa^*\| = \|a\|^2 = \|a\|\,\|a^*\|,$$

was die Ungleichung $\|L_a\| \ge \|a\|$ nach sich zieht. Hat $\mathcal{A}$ schließlich eine Eins e, so ist L_e der identische Operator und demzufolge $1 = \|L_e\| = \|e\|$.

(*b*) Wegen $\|L_{(a,\,\lambda)} b\| = \|ab + \lambda b\| \le (\|a\| + |\lambda|)\|b\|$ ist der Operator $L_{(a,\,\lambda)}$ offenbar beschränkt. Wir zeigen zuerst, dass durch (1.3.1) eine Norm definiert wird. Sei $\|(a,\, \lambda)\| = 0$, d.h. $\|L_{(a,\lambda)}\| = 0$ bzw. $ab + \lambda b = 0$ für alle $b \in \mathcal{A}$. Ist $\lambda = 0$, so wählen wir $b = a^*$ und erhalten $aa^* = 0$, woraus mit dem C^*-Axiom $a = 0$ folgt. Falls $\lambda \ne 0$, setzen wir $\tilde{a} := -\lambda^{-1} a$ und erhalten $\tilde{a} b = b$ für alle $b \in \mathcal{A}$. Durch Adjungieren folgt $b\tilde{a}^* = b$ für alle $b \in \mathcal{A}$ und mithin

$$\tilde{a} = \tilde{a}\tilde{a}^* = \tilde{a}^*.$$

Das Element $e := \tilde{a}$ ist also selbstadjungiert, und aus dem bisher Gezeigten folgt, dass e Einselement in $\mathcal{A}$ im Widerspruch zu den Voraussetzung ist. Folglich ist $(a,\, \lambda) = 0$. Die übrigen Normeigenschaften überprüft man leicht.

Für die Elemente $(a,\, 0) \in \tilde{\mathcal{A}}_0$ gilt nach Aussage (*a*) insbesondere

$$\|(a,\, 0)\| = \|L_{(a,0)}\| = \|L_a\| = \|a\|.$$

Der Raum $\tilde{\mathcal{A}}_0$ ist also zu $\mathcal{A}$ isometrisch isomorph und mithin vollständig. Als vollständiger Raum ist $\tilde{\mathcal{A}}_0$ aber ein abgeschlossener Teilraum von $\tilde{\mathcal{A}}$. Das lineare Funktional $l : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C},\ (a,\, \lambda) \mapsto \lambda$ hat also einen abgeschlossenen Kern und ist demzufolge stetig. Mit l ist dann auch die Projektion

$$P : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}_0,\ x \mapsto x - l(x)(0,\, 1) \quad \text{bzw.} \quad (a,\, \lambda) \mapsto (a,\, 0)$$

stetig. Nunmehr ist klar, dass es eine Konstante C so gibt, dass

$$|\lambda| \le C\|(a,\, \lambda)\| \quad \text{und} \quad \|a\| = \|(a,\, 0)\| \le C\|(a,\, \lambda)\|$$

für alle $(a, \lambda) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Mit dieser Konstanten gilt

$$\|a\| + |\lambda| \leq 2C\|(a, \lambda)\| \leq 2C(\|a\| + |\lambda|),$$

d.h. die in (1.3.1) bzw. in Satz 1.3.2 eingeführten Normen auf $\tilde{\mathcal{A}}$ sind äquivalent. Aus Satz 1.3.2 folgt daher auch die Vollständigkeit von $\tilde{\mathcal{A}}$ bzgl. der Norm (1.3.1).
Wir zeigen noch, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ bzgl. der Norm (1.3.1) eine C^*-Algebra ist. Sei $(a, \lambda) \in \tilde{\mathcal{A}}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\|b\| = 1$ so, dass

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)\|^2 &= \|L_{(a,\lambda)}\|^2 \leq \varepsilon + \|L_{(a,\lambda)}b\|^2 = \varepsilon + \|ab + \lambda b\|^2 \\
&= \varepsilon + \|(ab + \lambda b)^*(ab + \lambda b)\| \\
&= \varepsilon + \|b^*(a^*ab + \lambda a^*b + \overline{\lambda}ab + \lambda\overline{\lambda}b)\| \\
&\leq \varepsilon + \|L_{(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda}a,\, \lambda\overline{\lambda})}b\| \\
&\leq \varepsilon + \|L_{(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda}a,\, \lambda\overline{\lambda})}\|.
\end{aligned}$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)\|^2 &\leq \|L_{(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda}a,\, \lambda\overline{\lambda})}\| = \|(a^*a + \lambda a^* + \overline{\lambda}a,\, \lambda\overline{\lambda})\| \\
&= \|(a^*, \overline{\lambda})\,(a, \lambda)\| = \|(a, \lambda)^*(a, \lambda)\|.
\end{aligned}$$

Mit Aufgabe 4 aus Übung 2 folgt die Behauptung. ■

1.4 Elementare Spektraltheorie

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement e. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt *invertierbar* in $\mathcal{A}$, wenn es Elemente $b, c \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $ab = ca = e$. Dann ist

$$c = ce = c(ab) = (ca)b = eb = b;$$

das Element $b = c$ ist also eindeutig bestimmt. Es heißt das *Inverse* zu a und wird mit a^{-1} bezeichnet. Für $a \in \mathcal{A}$ heißt

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

das *Spektrum* und $\varrho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ die *Resolventenmenge* von a.

Beispiel 1.4.1 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $a \in C(X)$. Ist a in $C(X)$ invertierbar, so gibt es eine Funktion $b \in C(X)$, so dass ab das Einselement ist, d.h.

$$a(x)b(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1.4.1}$$

Dann ist insbesondere $a(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so ist $b(x) := a(x)^{-1}$ eine stetige Funktion auf X, für die (1.4.1) gilt. Damit ist eine Funktion $a \in C(X)$ genau dann in $C(X)$ invertierbar, wenn sie keine Nullstellen in X besitzt. Hieraus folgt sofort, dass

$$\sigma(a) = a(X) := \{a(x) \in \mathbb{C} : x \in X\}.$$

Beispiel 1.4.2 Sei nun X ein Banachraum und $A \in L(X)$. Invertierbarkeit von A in $L(X)$ heißt: es gibt einen Operator B, so dass

$$AB = I \quad \text{und} \quad BA = I. \tag{1.4.2}$$

Die erste Identität in (1.4.2) zeigt, dass $\operatorname{Im} A = X$ und die zweite, dass $\ker A = \{0\}$ ist. Also ist A eine Bijektion. Umgekehrt wissen wir aus dem Satz von Banach, dass es für jede Bijektion $A \in L(X)$ einen Operator $B \in L(X)$ gibt, so dass (1.4.2) gilt. Invertierbarkeit von A in $L(X)$ bedeutet also gerade, dass $\operatorname{Im} A = X$ und $\ker A = \{0\}$.

Beispiel 1.4.3 Sei wieder X ein unendlichdimensionaler Banachraum und

$$\pi : L(X) \to L(X)/K(X), \; A \mapsto A + K(X)$$

der kanonische Homomorphismus von $L(X)$ auf die Calkinalgebra. Wir wollen uns überlegen, was Invertierbarkeit von $\pi(A)$ in $L(X)/K(X)$ für einen Operator A bedeutet. Genauer wollen wir folgenden Satz zeigen:

Theorem 1.4.4 *Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und $A \in L(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) $\pi(A)$ ist in $L(X)/K(X)$ invertierbar.
(b) $\operatorname{Im} A$ ist abgeschlossen und $\ker A$ sowie $X/\overline{\operatorname{Im} A}$ sind endlich-dimensional.

Operatoren mit der Eigenschaft (b) heißen *Fredholmoperatoren.* Diese sind "beinahe invertierbar" in dem Sinn, dass sich alles, was die Invertierbarkeit verhindern kann, auf einem endlich-dimensionalen Raum abspielt.

Für den Beweis wiederholen wir einige Begriffe aus der Funktionalanalysis. Sind M, N abgeschlossene lineare Teilräume von X, so schreiben wir $X = M \dot{+} N$, falls $M \cap N = \{0\}$ und $M + N = X$. In diesem Fall heißt X die *direkte Summe* von M und N, und N heißt ein *direktes Komplement* von M. Falls X nicht zu einem Hilbertraum isomorph ist, gibt es stets einen abgeschlossenen Teilraum von X, der kein direktes Komplement besitzt [Satz von Lindenstrauß/Tzafriri]. Es gilt jedoch:

- Jeder endlich-dimensionale Teilraum besitzt ein direktes Komplement.
- Sind M und N abgeschlossene Teilräume von X und ist einer dieser Räume endlich-dimensional, so ist $M + N$ abgeschlossen.

Beweis von Satz 1.4.4. $(a) \Rightarrow (b)$: Invertierbarkeit von $\pi(A)$ in $L(X)/K(X)$ heißt: Es gibt Operatoren $B \in L(X)$ und K_1, $K_2 \in K(X)$ so dass

$$BA = I + K_1, \quad AB = I + K_2. \tag{1.4.3}$$

Aus (1.4.3) und der Fredholmschen Alternative für Operatoren der Form $I +$ *kompakt* folgt

$$\dim\ker A \leq \dim\ker BA = \dim\ker(I + K_1) < \infty$$

sowie

$$\begin{aligned}\dim(X/\overline{\operatorname{Im} A}) &\leq \dim(X/\overline{\operatorname{Im} AB}) = \dim(X/\overline{\operatorname{Im}(I + K_2)}) \\ &= \dim(X/\operatorname{Im}(I + K_2)) < \infty.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch, dass $\operatorname{Im} A$ abgeschlossen ist. Sei $y_n = Ax_n$ und $y_n \to y$. Wir zerlegen X in eine direkte Summe $X = X_1 \dot{+} \ker A$ (beachte: $\dim\ker A < \infty$) und setzen o.E.d.A. $x_n \in X_1$ voraus.

Wir überlegen uns zuerst die Beschränktheit der Folge (x_n). Wäre diese Folge unbeschränkt, so gäbe es eine Teilfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ mit $1 \leq \|x_n\| \to \infty$. Für $x'_n := x_n/\|x_n\|$ (mit $n \in \mathbb{N}_1$) gilt dann $Ax'_n = y_n/\|x_n\| \to 0$. Da die Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ beschränkt ist, finden wir weiter eine Teilfolge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$, für die die Folge $(K_1x'_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ konvergiert. Aus $BA = I + K_1$ folgt dann, dass $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ eine konvergente Folge mit einem Grenzwert $x \in X_1$ mit $\|x\| = 1$ ist. Andererseits gilt $Ax = 0$ wegen $Ax'_n \to 0$. Also ist $x \in X_1 \cap \ker A = \{0\}$ im Widerspruch zu $\|x\| = 1$. Der Widerspruch zeigt, dass die Folge (x_n) beschränkt ist.

Dann können wir aber eine konvergente Teilfolge $(K_1x_n)_{n\in\mathbb{N}_3}$ aus $(K_1x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen. Da auch $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (gegen y), erhalten wir wieder aus $BA = I + K_1$ die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_3}$ gegen ein $x \in X_1$. Aus $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$ folgt schließlich $y = Ax$, d.h. $y \in \operatorname{Im} A$.

(b) $\Rightarrow$ *(a)*: Ist A ein Fredholmoperator, so gibt es abgeschlossene Teilräume X_1, X_2 von X, so dass

$$X = X_1 \dot{+} \ker A \quad \text{und} \quad X = X_2 \dot{+} \operatorname{Im} A = X_2 \dot{+} \overline{\operatorname{Im} A}.$$

Die Einschränkung von A auf X_1 ist eine Bijektion von X_1 auf $\operatorname{Im} A$. Da $\operatorname{Im} A$ abgeschlossen ist, gibt es einen Operator $B \in L(\operatorname{Im} A, X_1)$ mit $BA|_{X_1} = I|_{X_1}$ und $AB = I|_{\operatorname{Im} A}$. Wir setzen B durch 0 zu einem Operator C fort, der auf ganz X definiert ist. Mit diesem Operator rechnet man leicht nach:

- $I - CA$ ist der Projektor von X auf $\ker A$ parallel zu X_1, und
- $I - AC$ ist der Projektor von X auf X_2 parallel zu $\operatorname{Im} A$.

Da $\ker A$ und X_2 endlich-dimensional sind, sind beide Projektoren von endlichem Rang und insbesondere kompakt. ■

Nach diesen Beispielen kommen wir zurück zur Spektraltheorie in Banachalgebren und vermerken zunächst ein Resultat, welches aus der Funktionalanalysis wohlbekannt ist und in diesem neuen Kontext genauso wie früher bewiesen wird.

Theorem 1.4.5 (Neumann-Reihe) *Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Einselement e und $a \in \mathcal{A}$ ein Element mit $\|a\| < 1$. Dann ist $e - a$ invertierbar, die Inverse wird durch die Neumann-Reihe $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ dargestellt, und es gilt*

$$\|(e-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|a\|} \quad \textit{sowie} \quad \|(e-a)^{-1} - e\| \leq \frac{\|a\|}{1-\|a\|}.$$

Theorem 1.4.6 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e. Dann ist die Menge $G\mathcal{A}$ der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ offen, und $G\mathcal{A}$ ist eine topologische Gruppe, d.h. Multiplikation und Inversion sind stetige Abbildungen.*

Beweis. Sei $a \in G\mathcal{A}$ und $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $a - x = a(e - a^{-1}x)$ und $\|a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\|\,\|x\| < 1$. Nach Satz 1.4.5 ist $e - a^{-1}x$ und folglich auch $a - x$ invertierbar. Also ist $G\mathcal{A}$ offen. Die Stetigkeit der Multiplikation $G\mathcal{A} \times G\mathcal{A} \to G\mathcal{A}$ folgt sofort aus Lemma 1.1.1. Für den Beweis der Stetigkeit der Inversion $G\mathcal{A} \to G\mathcal{A},\ a \mapsto a^{-1}$, sei $a \in G\mathcal{A}$ und $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $a-x$ invertierbar und

$$(a-x)^{-1} = (e - a^{-1}x)^{-1}a^{-1}.$$

Um die Stetigkeit der Inversion in a zu zeigen, genügt es daher, die Stetigkeit der Inversion im Punkt e zu zeigen. Diese folgt sofort aus der letzten Abschätzung in Satz 1.4.5. ■

Die wesentlichen Eigenschaften des Spektrums werden in folgendem Satz beschrieben.

Theorem 1.4.7 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(a)$ eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) und nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Die Eigenschaft $\sigma(a) \neq \emptyset$ gilt i.allg. nicht mehr für Elemente von Banachalgebren über dem Körper $\mathbb{R}$. Für $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist beispielsweise $\sigma(a) = \emptyset$ bzgl. $\mathbb{R}$ (es ist aber $\sigma(a) = \{\pm i\}$, wenn wir a als Element der komplexen Algebra $\mathbb{C}^{2\times 2}$ betrachten). Dies ist ein wesentlicher Grund dafür, dass wir ausschließlich Algebren über $\mathbb{C}$ betrachten.

Beweis von Satz 1.4.7. Aus Satz 1.4.6 folgt sofort, dass die Resolventenmenge $\varrho(a)$ offen und folglich das Spektrum $\sigma(a)$ abgeschlossen ist. Für $|\lambda| > \|a\|$ ist außerdem

$$a - \lambda e = (-\lambda)\,(e - \lambda^{-1}a)$$

nach Satz 1.4.5 invertierbar. Also ist $\sigma(a)$ im Kreis $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$ enthalten und insbesondere beschränkt.

Der Beweis, dass $\sigma(a)$ nicht leer ist, wird mit Mitteln der komplexen Funktionentheorie geführt. Setzt man in der Identität $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y-x)y^{-1}$ für

$x = \lambda e - a$ und für $y = \mu e - a$ mit λ, $\mu \in \varrho(a)$, so gelangt man zur *Resolventengleichung*

$$(\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1} = (\mu - \lambda)\,(\lambda e - a)^{-1}\,(\mu e - a)^{-1}.$$

Hieraus und aus der Stetigkeit der Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda e - a)^{-1}$ (Satz 1.4.6) folgt sofort die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{(\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu e - a)^{-2}.$$

Die Funktion $\lambda \mapsto (\lambda e - a)^{-1}$ ist also auf der gesamten Resolventenmenge $\varrho(a)$ komplex differenzierbar, d.h. holomorph. Wäre nun $\sigma(a) = \emptyset$, so wäre die Funktion $\lambda \mapsto (\lambda e - a)^{-1}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Außerdem ist sofort klar, dass

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda e - a)^{-1} = \lim_{\lambda \to \infty} (\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}a)^{-1}) = 0, \tag{1.4.4}$$

woraus insbesondere die Beschränktheit der Funktion $\lambda \mapsto (\lambda e - a)^{-1}$ folgt. Nach dem Satz von Liouville, welcher auch für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Banachalgebren gilt, muss diese Funktion eine Konstante sein, und wegen (1.4.4) muss diese Konstante gleich 0 sein. Also ist $(\lambda e - a)^{-1} = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was natürlich nicht möglich ist. ■

Die kleinste Zahl $r \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(a)$ im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ liegt, heißt *Spektralradius* von a. Wir bezeichnen den Spektralradius mit $r(a)$. Im Beweis von Satz 1.4.7 haben wir gesehen, dass

$$r(a) \leq \|a\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}. \tag{1.4.5}$$

Man kann den Spektralradius wie folgt berechnen:

Theorem 1.4.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}. \tag{1.4.6}$$

(*Die Existenz des Grenzwertes ist Teil der Behauptung.*)

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Funktion $\lambda \mapsto (\lambda e - a)^{-1}$ auf der gesamten Resolventenmenge $\varrho(a)$ und damit insbesondere auf dem Ringgebiet $U := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)\}$ holomorph ist. Diese Funktion besitzt also eine Laurentreihenentwicklung um den Punkt 0, welche auf U konvergiert. Die Reihenentwicklung führt gerade auf

$$(\lambda e - a)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n.$$

Diese Reihe konvergiert also für $|\lambda| > r(a)$. Andererseits konvergiert nach dem Wurzelkriterium (was auch für Reihen in $\mathcal{A}$ gilt) die Potenzreihe $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n$ für $|z| < (\limsup \sqrt[n]{\|a^n\|})^{-1}$, und sie divergiert für $|z| > (\limsup \sqrt[n]{\|a^n\|})^{-1}$. Ein Vergleich mit dem vorher gewonnenen Resultat liefert

$$\limsup \sqrt[n]{\|a^n\|} \leq r(a). \tag{1.4.7}$$

Weiter: für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$ gilt

$$\lambda^n e - a^n = (a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} e)\,(\lambda e - a).$$

Ist also $\lambda \in \sigma(a)$, so ist $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. Mit (1.4.5) folgt daher

$$|\lambda^n| \leq \|a^n\| \quad \text{bzw.} \quad |\lambda| \leq \sqrt[n]{\|a^n\|}$$

für alle $\lambda \in \sigma(a)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber auch $|\lambda| \leq \liminf \sqrt[n]{\|a^n\|}$. Da dies für alle $\lambda \in \sigma(a)$ gilt, folgt

$$r(a) \leq \liminf \sqrt[n]{\|a^n\|}. \tag{1.4.8}$$

Zusammen mit (1.4.7) liefert (1.4.8) die Behauptung. ∎

Formel (1.4.6) ist bemerkenswert, da sie rein algebraische Größen (Spektralradien) mit metrischen Größen (Normen der Elemente a^n) verknüpft. Als erste Folgerung aus (1.4.6) vermerken wir einen Zusammenhang zwischen Norm und Spektralradius normaler Elemente.

Ein Element a einer involutiven Algebra $\mathcal{A}$ heißt *selbstadjungiert*, wenn $a = a^*$, und *normal*, wenn $aa^* = a^*a$.

Theorem 1.4.9 *Ist $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins und $a \in \mathcal{A}$ normal, so ist*

$$r(a) = \|a\|. \tag{1.4.9}$$

Auch dies ist bemerkenswert: In C^*-Algebren bestimmt die "Algebra" (genauer: der Spektralradius) die Norm (zunächst der selbstadjungierten und dann über das C^*-Axiom aller Elemente)! Es kann auf C^*-Algebren insbesondere nur *eine* C^*-Norm geben!

Beweis. Da a normal ist, haben wir mit dem C^*-Axiom

$$\|a^2\|^2 = \|a^2(a^2)^*\| = \|aa^*aa^*\| = \|(aa^*)(aa^*)^*\| = \|aa^*\|^2 = \|a\|^4.$$

Es ist also $\|a^2\| = \|a\|^2$. Da mit a auch alle Potenzen von a normal sind, erhalten wir mit vollständiger Induktion $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ für alle $n \geq 0$. Schließlich folgt

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|a^{2^n}\|} = \|a\|$$

mit der Formel für den Spektralradius. ∎

Einfache Beispiele zeigen, dass für nichtnormale Elemente die Beziehung (1.4.9) drastisch verletzt sein kann. So ist für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ zwar $\|A\| = 1$, aber $r(A) = 0$.

Wir illustrieren die Stärke und Nützlichkeit der Aussagen der Spektraltheorie durch einige zum Teil recht erstaunliche Folgerungen.

Theorem 1.4.10 (Satz von Gelfand/Mazur) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, in der jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist. Dann ist $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$. Nach Satz 1.4.7 ist $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei $\lambda \in \sigma(a)$. Da $a - \lambda e$ nicht invertierbar ist, muss $a - \lambda e = 0$ bzw. $a = \lambda e$ sein. ∎

Die nächsten Folgerungen bereiten wir durch ein einfaches Lemma vor, welches in der Übung bewiesen wird.

Lemma 1.4.11 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren mit Eins und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein unitaler Homomorphismus. Dann gilt*

$$\sigma(W(a)) \subseteq \sigma(a) \quad \textit{für jedes } a \in \mathcal{A}.$$

Wir zeigen nun, dass gewisse Homomorphismen *automatisch* stetig sind. Eine umfassende Darstellung dieses Problemkreises findet man in G. Dales: Banach algebras and automatic continuity. - Clarendon Press, Oxford 2001.

Theorem 1.4.12 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra, $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus. Dann ist W eine Kontraktion, d.h. $\|W(a)\| \leq \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist W stetig.*

Beweis. Wir überlegen zunächst, dass man alles auf den Fall zurückführen kann, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Einselemente besitzen und W unital ist. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement, so ersetzen wir $\mathcal{B}$ durch die C^*-Algebra $\operatorname{clos} W(\mathcal{A})$. Ist $e \in \mathcal{A}$ Einselement, so gilt

$$W(e)W(a) = W(a) = W(a)W(e) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}$$

und damit

$$W(e)b = b = bW(e) \quad \text{für alle } b \in \operatorname{clos} W(\mathcal{A}).$$

Also ist $W(e)$ Einselement in $\operatorname{clos} W(\mathcal{A})$, und $W : \mathcal{A} \to \operatorname{clos} W(\mathcal{A})$ ist unital. Besitzt $\mathcal{A}$ kein Einselement, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{A}}$ die Erweiterung von $\mathcal{A}$ zu einer Algebra mit Eins (Satz 1.3.2), und wir setzen $\tilde{\mathcal{B}} := \mathcal{B}$, falls $\mathcal{B}$ ein Einselement besitzt, und wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{B}}$ die Erweiterung von $\mathcal{B}$ zu einer C^*-Algebra mit Eins gemäß Satz 1.3.3, falls $\mathcal{B}$ kein Einselement besitzt. Durch einfaches Nachrechnen bestätigt man, dass dann durch

$$\tilde{W} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}, \quad (a, \lambda) \mapsto W(a) + \lambda e_{\tilde{\mathcal{B}}} \tag{1.4.10}$$

ein unitaler *-Homomorphismus definiert wird.

Seien also nun $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und W unital, und sei zunächst $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Da W symmetrisch ist, ist auch $W(a)$ selbstadjungiert, und mit Lemma 1.4.11 und Satz 1.4.9 folgt

$$\|W(a)\| = r(W(a)) \leq r(a) \leq \|a\|. \tag{1.4.11}$$

Für beliebiges $a \in \mathcal{A}$ ist nun

$$\|W(a)\|^2 = \|W(a)^*W(a)\| = \|W(a^*a)\| \overset{(1.4.11)}{\leq} \|a^*a\| \leq \|a^*\|\,\|a\| = \|a\|^2,$$

woraus die Behauptung folgt. (Man beachte, dass man für $\tilde{W}$ in (1.4.10) zunächst $\|\tilde{W}(a,\lambda)\| \leq \|(a,\lambda)\|$ erhält, woraus für $\lambda = 0$ dann $\|W(a)\| \leq \|a\|$ folgt). ■

Für Homomorphismen $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lässt sich sogar eine noch stärkere Stetigkeitsaussage beweisen.

Theorem 1.4.13 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $W : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein Homomorphismus. Dann ist W stetig und $\|W\| \leq 1$. Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e und ist $W \neq 0$, so ist $W(e) = 1$ und $\|W\| = 1$.*

Beweis. Angenommen, W ist unbeschränkt oder es ist $\|W\| > 1$. Dann gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$ und $W(a) = 1$. Die Reihe $b := \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konvergiert, und für b gilt $a + ab = b$. Wenden wir hierauf den Homomorphismus W an, so folgt

$$W(b) = W(a) + W(a)W(b) = 1 + W(b),$$

ein Widerspruch. Also ist $\|W\| \leq 1$.

Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e und ist $W \neq 0$, so ist $W(e) \neq 0$ (aus $W(e) = 0$ würde nämlich $W(a) = W(ea) = W(e)W(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$, d.h. $W = 0$ folgen). Aus $W(e)^2 = W(e)$ folgt $W(e) = 1$. Wegen $\|e\| = 1$ folgt $\|W\| \geq 1$. ■

1.5 Inverse Abgeschlossenheit

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$, welche e enthält. Offenbar (bzw. wegen Lemma 1.4.11, angewandt auf den Einbettungshomomorphismus von $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$) gilt dann

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}. \tag{1.5.1}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Spektren in der Regel nicht übereinstimmen.

Beispiel 1.5.1 Für $n \in \mathbb{Z}$ sei χ_n die durch $\chi_n(t) := t^n$ definierte stetige Funktion auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$. Die Menge

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n \chi_n : N \in \mathbb{N},\, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

der *trigonometrische Polynome* ist eine symmetrische Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$, und die Abschließung von $\mathcal{P}$ in $C(\mathbb{T})$ ist ganz $C(\mathbb{T})$ (Satz von Stone/Weierstrass). Auch die Menge

$$\mathcal{P}_+ := \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n : N \in \mathbb{N},\, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

der *analytischen trigonometrischen Polynome* ist eine Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$. Ihre Abschließung $\mathbb{A}$ in $C(\mathbb{T})$ ist die sog. *Diskalgebra*. Es ist an dieser Stelle nicht offensichtlich, dass $\mathbb{A} \neq C(\mathbb{T})$. Dies wird im Verlaufe dieses Beispiels gezeigt. Dazu benötigen wir

Lemma 1.5.2 *Ist $\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \in \mathcal{P}_+$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$, so gilt*

$$\sum_{n=0}^{N} a_n w^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \right) (e^{it})\, \frac{1}{1 - we^{-it}}\, dt. \tag{1.5.2}$$

Beweis. Das ist ein Spezialfall der Cauchyschen Integralformel. Ein direkter Beweis verläuft so: Die Reihe

$$\frac{1}{1 - we^{-it}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(we^{-it} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} w^k e^{-ikt}$$

konvergiert absolut und daher gleichmäßig bzgl. $t \in [0,\, 2\pi]$. Wir können somit auf der rechten Seite von (1.5.2) Summation und Integration vertauschen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \right) (e^{it}) \sum_{k=0}^{\infty} w^k e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{\infty} w^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, dt.$$

Nun ist $\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\, dt = 2\pi$ für $k = n$ und $= 0$ für $k \neq n$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. ∎

Für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$ definieren wir

$$F_w : \mathcal{P}_+ \to \mathbb{C}, \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n w^n.$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus. Aus Lemma 1.5.2 folgt, dass F_w sogar stetig ist:

$$\begin{aligned}\left|F_w\left(\sum_{n=0}^N a_n\chi_n\right)\right| &= \left|\sum_{n=0}^N a_n w^n\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^N a_n\chi_n\right)(e^{it})\frac{1}{1-we^{-it}}\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{n=0}^N a_n\chi_n\right\|_\infty \int_0^{2\pi}\frac{1}{|1-we^{-it}|}\,dt.\end{aligned}$$

(Man beachte, dass die Stetigkeit von F_w *nicht* aus Satz 1.4.13 folgt, da $\mathcal{P}_+$ keine vollständige Algebra ist.) Auf Grund dieser Stetigkeit können wir F_w zu einem stetigen Homomorphismus auf ganz $\mathbb{A}$ fortsetzen. Diesen bezeichnen wir wieder mit F_w. Offenbar ist F_w unital.

Wir betrachten die Funktion χ_1, welche sowohl in $C(\mathbb{T})$ als auch in der Diskalgebra $\mathbb{A}$ liegt. Betrachtet als Element von $C(\mathbb{T})$ ist offenbar

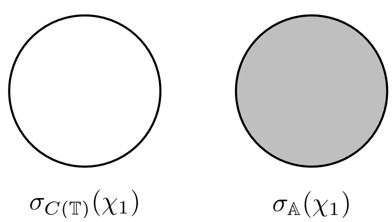
$$\sigma_{C(\mathbb{T})}(\chi_1) = \mathbb{T}, \tag{1.5.3}$$

dagegen werden wir uns überlegen, dass

$$\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}}, \tag{1.5.4}$$

wobei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wegen $\|\chi_1\|_\infty = 1$ ist zunächst klar, dass $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Außerdem folgt aus (1.5.1) und (1.5.3), dass $\mathbb{T} \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$. Ist schließlich $w \in \mathbb{D}$, so ist $F_w(\chi_1) = w$, und aus $\sigma_{\mathbb{C}}(w) = \{w\}$ und Lemma 1.4.11 folgt $w \in \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$. Damit ist auch $\mathbb{D} \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$.

Dies zeigt, dass das $\mathbb{A}$-Spektrum von χ_1 wesentlich größer als das $C(\mathbb{T})$-Spektrum dieser Funktion ist. Es zeigt aber auch, dass das $\mathbb{A}$-Spektrum "durch Ausfüllen der Löcher im $C(\mathbb{T})$-Spektrum" entsteht.



■

Die am Ende des vorigen Beispiels gemachte Beobachtung ist kein Zufall, sondern gilt allgemein, wie wir mit Hilfe des folgenden Resultats von Shilov zeigen werden.

Theorem 1.5.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$. Für jedes Element $b \in \mathcal{B}$ ist dann*

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)),$$

wobei ∂M für den Rand der Menge M in $\mathbb{C}$ steht.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}.$$

Wegen $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ ist dann nämlich

$$\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(b) = \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{A}}(b) \cup \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)) \subseteq \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{B}}(b) \cup \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b)),$$

und da $\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \cap \operatorname{int} \sigma_{\mathcal{B}}(b) = \emptyset$, muss $\partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b)) \subseteq \partial(\sigma_{\mathcal{A}}(b))$ gelten.

Sei also $\lambda^* \in \partial(\sigma_{\mathcal{B}}(b))$. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n) \subseteq \varrho_{\mathcal{B}}(b)$ mit $\lambda_n \to \lambda^*$. Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ wäre

$$\|(b - \lambda_n e)^{-1}\| < \frac{1}{|\lambda^* - \lambda_n|}.$$

Dann wäre wegen

$$\|(b - \lambda^* e) - (b - \lambda_n e)\| = |\lambda_n - \lambda^*| < \frac{1}{\|(b - \lambda_n e)^{-1}\|}$$

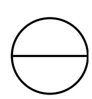
das Element $b - \lambda^* e$ invertierbar in $\mathcal{B}$ (Neumann-Reihe), was offenbar Unsinn ist. Also ist $\|(b - \lambda_n e)^{-1}\| \geq |\lambda^* - \lambda_n|^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere

$$\lim_{n \to \infty} \|(b - \lambda_n e)^{-1}\| = \infty. \tag{1.5.5}$$

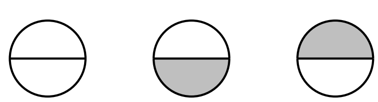
Wäre nun $\lambda^* \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, so wäre wegen Satz 1.4.6 $\|(b - \lambda e)^{-1}\|$ beschränkt für alle λ aus einer Umgebung von λ^*, was (1.5.5) widerspricht. ∎

Theorem 1.5.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$, und sei $b \in \mathcal{B}$. Dann ist $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ die Vereinigung aus $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ mit einer gewissen Anzahl beschränkter zusammenhängender (offener) Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(b)$.*

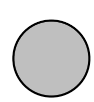
Hat beispielsweise $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ folgende Form:



so kann $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ nur so aussehen:



oder



Dieser Satz folgt sofort aus dem vorangegangenen Resultat und einfachen topologischen Überlegungen. ∎

Folgerung 1.5.5 *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, b wie in Satz* 1.5.3. *Besitzt $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ keine (bzgl. $\mathbb{C}$) inneren Punkte, so ist*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Besitzt nämlich $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ keine inneren Punkte, so ist es nicht durch Vereinigung von $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ mit offenen Mengen entstanden, fällt also mit $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ zusammen.

Folgerung 1.5.6 *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, b wie in Satz* 1.5.3. *Falls $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(b)$ zusammenhängend ist, so ist $\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b)$.*

Die Voraussetzung in dieser Folgerung ist beispielsweise erfüllt, wenn $\mathcal{A} = L(H)$ und b ein kompakter Operator auf H ist.

Eine Unteralgebra $\mathcal{B}$ einer unitalen Algebra $\mathcal{A}$ heißt *invers abgeschlossen* in $\mathcal{A}$, falls

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}.$$

So ist die Diskalgebra $\mathbb{A}$ *nicht* invers abgeschlossen in $C(\mathbb{T})$. Wir werden nun zeigen, dass C^*-Unteralgebren von C^*-Algebren stets invers abgeschlossen sind. Dazu verschaffen wir uns zunächst Informationen über Spektren gewisser Elemente.

Ein Element a einer unitalen Algebra mit Involution heißt

- *isometrisch*, wenn $a^*a = e$,
- *selbstadjungiert*, wenn $a^* = a$,
- *unitär*, wenn $a^*a = aa^* = e$.

Theorem 1.5.7 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins. Dann gilt:*
(a) ist $a \in \mathcal{A}$ isometrisch, so ist $r(a) = 1$.
(b) ist $a \in \mathcal{A}$ unitär, so ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$.
(c) ist $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert, so ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Wir haben

$$\|a^n\|^2 = \|(a^n)^*a^n\| = \|(a^{n-1})^* \underbrace{a^*a}_{e} a^{n-1}\| = \|(a^{n-1})^*a^{n-1}\|.$$

Durch Wiederholung dieser Überlegungen folgt $\|a^n\| = 1$ für alle n. Die Formel für den Spektralradius liefert die Behauptung.

(b) Nach (a) ist $\sigma(a) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Da a^{-1} ebenfalls unitär ist, gilt auch $\sigma(a^{-1}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Nun gilt aber für beliebige invertierbare Elemente in unitalen Algebren

$$\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1})$$

($\nearrow$ Übung), woraus $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T}$ (sowie $\sigma(a^{-1}) \subseteq \mathbb{T}$) folgt.

(c) Da selbstadjungierte Elemente normal sind, ist $r(a) = \|a\|$. Zu zeigen ist, dass $a - \lambda e$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \leq \|a\|$ invertierbar ist. Wegen $\sigma(\mu a) = \mu\sigma(a)$ für $\mu > 0$ dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass $\|a\| < 1$. Dann ist $e + ia$ invertierbar, und wir definieren

$$u := (e - ia)(e + ia)^{-1}.$$

Dieses Element ist unitär. Wegen $|(1 - i\lambda)(1 + i\lambda)^{-1}| \neq 1$ ist nach (b) das Element $u - (1 - i\lambda)(1 + i\lambda)^{-1}e$ invertierbar. Da aber

$$\begin{aligned} & u - (1 - i\lambda)(1 + i\lambda)^{-1}e \\ &\quad = (e - ia)(e + ia)^{-1} - (1 - i\lambda)(1 + i\lambda)^{-1}e \\ &\quad = (1 + i\lambda)^{-1}\left[(1 + i\lambda)(e - ia) - (1 - i\lambda)(e + ia)\right](e + ia)^{-1} \\ &\quad = (1 + i\lambda)^{-1}\left[2i(\lambda e - a)\right](e + ia)^{-1}, \end{aligned}$$

ist auch $\lambda e - a$ invertierbar. ■

Theorem 1.5.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e und $\mathcal{B}$ eine symmetrische und abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{B}$ invers abgeschlossen in $\mathcal{A}$.*

Dies ist einer der Sätze, die das Arbeiten mit C^*-Algebren so angenehm machen. Will man die Invertierbarkeit eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ untersuchen, so genügt es, diese Invertierbarkeit in irgendeiner C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die e und a (und damit auch a^*) enthält, zu untersuchen, z.B. in der kleinsten abgeschlossenen Unteralgebra von $\mathcal{A}$, welche e, a und a^* enthält.

Beweis von Satz 1.5.8. Ist $b \in \mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$ invertierbar, so ist auch b^*b in $\mathcal{A}$ invertierbar. Nach Satz 1.5.7(iii) ist $\sigma_{\mathcal{B}}(b^*b) \subseteq \mathbb{R}$, und nach Folgerung 1.5.5 ist dann $\sigma_{\mathcal{A}}(b^*b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b^*b)$. Also ist b^*b auch in $\mathcal{B}$ invertierbar. Analog sieht man, dass auch bb^* in $\mathcal{B}$ invertierbar ist. Dann ist aber b in $\mathcal{B}$ invertierbar. ■

Wir kommen noch einmal auf das Problem zurück, wie sich das Spektrum $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ eines Elementes $a \in \mathcal{B}$ in Abhängigkeit von der Unteralgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ verhält. Klar ist: je "kleiner" $\mathcal{B}$ ist, desto größer wird $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ werden, wobei sich wegen Satz 1.5.4 $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ und $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ nur um beschränkte zusammenhängende Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ unterscheiden. Was passiert, wenn man $\mathcal{B}$ minimal wählt?

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Die kleinste Algebra, die a und e enthält, besteht offenbar aus allen Polynomen $p(a)$, wobei man für $p(t) := \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ setzt $p(a) := \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n$.

Die kleinste abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{A}(a)$ von $\mathcal{A}$, welche a und e enthält, ist dann

$$\mathcal{A}(a) := \operatorname{clos}\{p(a) : p \text{ Polynom}\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{A}(a)$ stets kommutativ. Allgemein heißt eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e *einfach erzeugt* (singly generated), wenn es ein Element a in $\mathcal{A}$ gibt, so dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a)$. Insbesondere ist also $\mathcal{A}(a)$ einfach erzeugt.

Theorem 1.5.9 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ zusammenhängend.*

$\sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ entsteht also aus $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ durch Hinzunahme *aller* beschränkter zusammenhängender Komponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ (d.h. durch *Ausfüllen aller Löcher in* $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$). Sehen wir uns in diesem Lichte noch einmal die Diskalgebra $\mathbb{A}$ an. Diese ist einfach erzeugt durch die Funktion χ_1. Also ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ zusammenhängend. Außerdem wissen wir, dass $\sigma_{C(\mathbb{T})}(\chi_1) = \chi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$. Nach Satz 1.5.4 ist daher $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ gleich $\mathbb{T}$ oder gleich $\overline{\mathbb{D}}$. Da $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1)$ zusammenhängend sein muss, bleibt nur $\sigma_{\mathbb{A}}(\chi_1) = \overline{\mathbb{D}}$.

Beweis von Satz 1.5.9. Angenommen, die offene Menge $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$ besitzt eine nichtleere beschränkte zusammenhängende Komponente G. Sei $z_0 \in G$, und sei $\mathcal{A}_0(a)$ die kleinste (nicht notwendig abgeschlossene) Unteralgebra von $\mathcal{A}(a)$, welche e und a enthält. Weiter sei p ein Polynom. Dieses können wir als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ auffassen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|p(z_0)| &\leq \max\{|p(z)| : z \in \partial G\} && \text{(Maximumprinzip)} \\
&\leq \max\{|p(z)| : z \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)\} && (\text{da } \partial G \subseteq \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)) \\
&= \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(p(a))\} && \text{(Aufg: 3(b), 2. Übung)} \\
&= r(p(a)) \leq \|p(a)\|.
\end{aligned}$$

Sei nun $b \in \mathcal{A}_0(a)$. Dann gibt es ein Polynom p so, dass $b = p(a)$. Dieses ist nicht unbedingt eindeutig bestimmt. Gibt es aber zwei Polynome p_1, p_2 mit $b = p_1(a) = p_2(a)$, so ist wegen der Abschätzung $|p(z_0)| \leq \|p(a)\|$ auch $p_1(z_0) = p_2(z_0)$. Wir können daher eine Abbildung

$$W_0 : \mathcal{A}_0(a) \to \mathbb{C}, \quad b \mapsto p(z_0)$$

definieren, wobei p irgendein Polynom mit $p(a) = b$ ist. Offenbar ist W_0 ein Homomorphismus. Wegen $\|W_0(b)\| = |p(z_0)| \leq \|p(a)\| = \|b\|$ ist dieser stetig und kann daher zu einem stetigen Homomorphismus $W : \mathcal{A}(a) \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Für diesen gilt

$$W(a) = W_0(a) = p(z_0) = z_0 \quad \text{mit } p(z) = z.$$

Nach Lemma 1.4.11 ist $z_0 \in \sigma_{\mathcal{A}(a)}(a)$; ein Widerspruch. ∎

Anmerkung 1.5.10 Durch Satz 1.5.9 wird das Spektrum der Erzeugerelemente in einfach erzeugten Banachalgebren komplett charakterisiert. Genauer:

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, nicht leer, und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Dann gibt es eine einfach erzeugte Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Einselement und ein Erzeugerelement $a \in \mathcal{A}$ (d.h. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a)$) so, dass $\sigma_{\mathcal{A}(a)}(a) = K$.

1.6 Maximale Ideale und Radikal

Ein linkes, rechtes oder zweiseitiges Ideal $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *echt*, wenn es nicht mit ganz $\mathcal{A}$ übereinstimmt. Ein echtes linkes, rechtes oder zweiseitiges Ideal $\mathcal{J}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ heißt *maximal*, wenn es kein echtes linkes, rechtes bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ gibt, welches streng größer ist als $\mathcal{J}$.

Theorem 1.6.1 (Krull's Lemma) *Jedes echte linke (rechte, zweiseitige) Ideal einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e ist enthalten in einem maximalen linken (rechten, zweiseitigen) Ideal von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$. Mit Λ bezeichnen wir die Menge aller echten Linksideale von $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{J}$ enthalten. Diese Menge ist nicht leer (da $\mathcal{J} \in \Lambda$), und sie ist bzgl. $\subseteq$ *partiell geordnet*, d.h.

- $A \subseteq B,\ B \subseteq C \ \Rightarrow\ A \subseteq C$,
- $A \subseteq A$,
- $A \subseteq B,\ B \subseteq A \ \Rightarrow\ A = B$.

Weiter sei $\Lambda' \subseteq \Lambda$ *linear geordnet*, d.h.

- $A, B \in \Lambda' \ \Rightarrow\ A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$.

Dann ist $\mathcal{J}' := \bigcup_{K \in \Lambda'} K$ wieder ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ enthält, und $\mathcal{J}'$ ist ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$, da e nicht in $\mathcal{J}'$ liegt. Also ist $\mathcal{J}' \in \Lambda$, und Λ' hat eine obere Schranke in Λ.

Nach dem Zornschen Lemma enthält Λ ein maximales Element $\mathcal{J}_{\max}$ (d.h. $\mathcal{J}_{\max}$ enthält jedes mit $\mathcal{J}_{\max}$ vergleichbare Ideal). $\mathcal{J}_{\max}$ ist offenbar ein maximales Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ enthält. ∎

Nach diesem rein algebraischen Resultat gehen wir über zur Betrachtung maximaler Ideale in Banachalgebren.

Theorem 1.6.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, und sei $\mathcal{J}$ ein echtes linkes (rechtes, zweiseitiges) Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist die Abschließung von $\mathcal{J}$ ebenfalls ein* echtes *linkes (rechtes, zweiseitiges) Ideal von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis für Linksideale. Sei also $\mathcal{J}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$. Dann ist offenbar $\operatorname{clos} \mathcal{J}$ ebenfalls ein Linksideal von $\mathcal{A}$, und wir müssen zeigen, dass $\operatorname{clos} \mathcal{J}$ ein echtes Ideal ist. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{B} := \{e - k : \|k\| < 1\}$. Diese ist offen und enthält nur invertierbare Elemente (Neumann-Reihe). Keines der Elemente von $\mathcal{B}$ kann also in $\mathcal{J}$ liegen, d.h. $\mathcal{B}$ liegt im Komplement von $\mathcal{J}$. Da $\mathcal{B}$ offen ist, liegt $\mathcal{B}$ auch im Komplement von $\operatorname{clos} \mathcal{J}$. Insbesondere ist $\operatorname{clos} \mathcal{J} \neq \mathcal{A}$. ∎

Folgerung 1.6.3 *Maximale linke (rechte, zweiseitige) Ideale unitaler Banachalgebren sind abgeschlossen.*

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins. Unter dem *Radikal* von $\mathcal{A}$ (Bezeichnung: $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$) versteht man den Durchschnitt aller maximalen Linksideale von $\mathcal{A}$. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt *halbeinfach*, wenn $\operatorname{Rad}\mathcal{A} = \{0\}$.

Offenbar ist $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ wieder ein Linkideal von $\mathcal{A}$. Der folgende Satz liefert äquivalente Beschreibungen von $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ und zeigt, warum $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ z.B. im Zusammenhang mit Invertierbarkeitsproblemen von Interesse ist.

Theorem 1.6.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent für ein Element $r \in \mathcal{A}$:*
(a) $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$;
(b) $e - ar$ ist von links invertierbar für jedes $a \in \mathcal{A}$;
(c) $e - arb$ ist invertierbar für alle $a, b \in \mathcal{A}$;
(d) $e - rb$ ist von rechts invertierbar für jedes $b \in \mathcal{A}$;
(e) r liegt im Durchschnitt der maximalen Rechtsideale von $\mathcal{A}$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$. Angenommen, es gibt ein $a \in \mathcal{A}$ so, dass $e - ar$ nicht von links invertierbar ist. Dann ist $\mathcal{A}(e - ar)$ ein echtes (da e nicht enthalten ist) Linksideal von $\mathcal{A}$. Nach dem Lemma von Krull ist $\mathcal{A}(e - ar)$ in einem maximalen Linksideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$ enthalten. Wegen $e \in \mathcal{A}$ ist insbesondere $e - ar \in \mathcal{J}$. Außerdem ist $ar \in \mathcal{J}$, da $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$. Folglich muss auch $e \in \mathcal{J}$ sein, woraus $\mathcal{J} = \mathcal{A}$ folgt; ein Widerspruch.

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei $e - ar$ von links invertierbar für alle $a \in \mathcal{A}$. Angenommen, $r \notin \operatorname{Rad}\mathcal{A}$. Dann gibt es ein maximales Linksideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$, welches r nicht enthält. Die Menge $\mathcal{L} := \{j + ar : j \in \mathcal{J},\, a \in \mathcal{A}\}$ ist dann ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ echt enthält (da $r \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{J}$). Da $\mathcal{J}$ maximal ist, muss $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ sein. Es gibt also Elemente $j \in \mathcal{J}$, $a \in \mathcal{A}$ so, dass $j + ar = e$. Hieraus folgt, dass $j = e - ar$ von links invertierbar ist. Dies widerspricht der Tatsache, dass j im *echten* Linksideal $\mathcal{J}$ liegt.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$ und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $e - ar$ von links invertierbar. Wir zeigen zuerst, dass dieses Element auch von rechts invertierbar ist. Sei $e + b$ eine Linksinverse von $e - ar$:

$$(e + b)(e - ar) = e \quad \text{bzw.} \quad b = ar + bar. \tag{1.6.1}$$

Da $r \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$ und $\operatorname{Rad}\mathcal{A}$ ein Linksideal ist, ist auch $b \in \operatorname{Rad}\mathcal{A}$. Insbesondere ist $e + b = e - (-e)b$ von links invertierbar, während aus (1.6.1) die Invertierbarkeit von $e + b$ von rechts folgt. Also ist $e + b$ (zweiseitig) invertierbar. Wieder wegen (1.6.1) folgt die zweiseitige Invertierbarkeit von $e - ar$. Nunmehr ist klar, dass für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ das Element $e - bar$ invertierbar ist. Aus Aufgabe 2 der 2. Übung folgt die Invertierbarkeit von $e - arb$.

Die Implikation $(c) \Rightarrow (b)$ ist offensichtlich. Die restlichen Implikationen folgen auf Grund der Links-Rechts-Symmetrie von (c) wie zuvor. ∎

Folgerung 1.6.5 (a) *Das Radikal einer Algebra mit Eins ist ein zweiseitiges Ideal dieser Algebra.*

(b) *Das Radikal einer Banachalgebra mit Eins ist ein abgeschlossenes Ideal dieser Algebra.*

Folgerung 1.6.6 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Dann ist $\sigma(r) = \{0\}$.*

Man beachte, dass die Umkehrung dieser Aussage i.allg. *nicht* gilt. Sie gilt jedoch in kommutativen Banachalgebren (vgl. Übung 3, Aufgabe 3, und machen Sie sich klar, dass die dort gegebene Definition des Radikals im Falle kommutativer Banachalgebren mit der hier formulierten allgemeinen Definition übereinstimmt).

Im Falle von C^*-Algebren wird die Situation wieder besonders einfach.

Theorem 1.6.7 *C^*-Algebren mit Einselement sind halbeinfach.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, und sei $r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. Dann ist auch $r^*r \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$, und nach Folgerung 1.6.6 ist der Spektralradius von r^*r gleich 0. Da r^*r selbstadjungiert ist, ist wegen Satz 1.4.9 auch $\|r^*r\| = 0$. Das C^*-Axiom liefert nun $r = 0$. ∎

Kapitel 2

Die Gelfandsche Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt werden wir einen besonders schönen und nützlichen Teil der Spektraltheorie kennenlernen. Wir haben schon mehrfach die Algebra $C(X)$ der stetigen Funktion auf einem kompakten Hausdorff-Raum als Beispiel betrachtet. Eines der Hauptergebnisse dieses Abschnittes wird sein, dass jede kommutative C^*-Algebra mit Eins zu einer C^*-Algebra der Gestalt $C(X)$ isometrisch *-isomorph ist.

2.1 Kommutative Banachalgebren

Die Grundidee der Gelfandschen Darstellungstheorie für kommutative Banachalgebren ist die folgende. Sei X Banachraum und X' sein dualer Raum. Jedem Element $x \in X$ ordnen wir auf natürliche Weise eine Funktion $\widehat{x}$ auf der Einheitskugel $B(X') := \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ zu:

$$\widehat{x} : B(X') \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(x). \tag{2.1.1}$$

Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt für jedes $x \in X$ die Existenz eines $f \in B(X')$ mit $f(x) = \|x\|$. Daher ist

$$\|\widehat{x}\|_\infty := \sup\{|f(x)| : f \in B(X')\} = \|x\|. \tag{2.1.2}$$

Wir versehen $B(X')$ mit der schwächsten Topologie, die alle Funktionen (2.1.1) mit $x \in X$ stetig macht. Dies ist die sogenannte *-schwache Topologie. Aus dem Satz von Alaoglu weiß man, dass $B(X')$ bezüglich dieser Topologie ein kompakter Hausdorff-Raum ist. Wegen (2.1.2) wird also durch

$$X \to C(B(X')), \quad x \mapsto \widehat{x}$$

eine lineare und sogar isometrische Einbettung des Banachraumes X in den Banachraum $C(B(X'))$ der (bzgl. der *-schwachen Topologie) stetigen komplexwertigen Funktionen auf $B(X')$ gegeben.

Einschub zur *-schwachen Topologie. Eine Umgebungsbasis für $f \in B(X')$ bzgl. der *-schwachen Topologie wird durch die Mengen

$$U_{x_1,\ldots,x_k,\varepsilon}(f) := \{g \in B(X') : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ für alle } i = 1, \ldots, k\}$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ und $\varepsilon > 0$ geliefert. Diese Topologie ist Hausdorffsch: Sind $f, g \in B(X')$ mit $f \neq g$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Für $\varepsilon := \frac{1}{3}|f(x) - g(x)|$ sind dann die Mengen

$$U_{x,\varepsilon}(f) := \{h \in B(X') : |f(x) - h(x)| < \varepsilon\}$$

bzw.

$$U_{x,\varepsilon}(g) := \{h \in B(X') : |g(x) - h(x)| < \varepsilon\}$$

disjunkte offene Umgebungen von f bzw. g.

Eine äquivalente Beschreibung der *-schwachen Topologie durch konvergente Netze lautet wie folgt: *Ein Netz $(f_t)_{t \in T}$ konvergiert genau dann *-schwach gegen $f \in B(X')$, wenn $f_t(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$.* ■

Zurück zum Hauptthema. Ist der Banachraum X sogar eine Banachalgebra $\mathcal{A}$, so hätte man gern eine homomorphe Einbettung von $\mathcal{A}$ als eine Unteralgebra von $C(B(X'))$. Den Elementen a, b und ab von $\mathcal{A}$ entsprechen die Funktionen

$$\widehat{a} : f \mapsto f(a), \quad \widehat{b} : f \mapsto f(b), \quad \widehat{ab} : f \mapsto f(ab).$$

Um den gewünschten Einbettungshomomorphismus zu bekommen, muss wenigstens

$$\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{ab} \quad \text{bzw.} \quad f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{für alle } a, b \in \mathcal{A}$$

sein. Wir sollten also nicht mehr alle Elemente aus $B(\mathcal{A}')$ betrachten, sondern nur die Algebra-Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}$. Dies erweist sich in der Regel jedoch als wenig hilfreich. Z.B. gibt es im Fall $N > 1$ für die Algebra $\mathbb{C}^{N \times N}$ nur einen Homomorphismus $\mathbb{C}^{N \times N} \to \mathbb{C}$, die Nullabbildung. Für $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ist also $\widehat{A}$ eine Funktion, die auf einer einelementigen Menge definiert und dort 0 ist. Wir werden aber sehen, dass *kommutative* Banachalgebren mit Eins stets (in einem gewissen Sinn) ausreichend viele Homomorphismen in $\mathbb{C}$ besitzen. Nach diesen Vorüberlegungen beginnen wir mit einer genaueren Betrachtung kommutativer Banachalgebren.

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Ein *Charakter* von $\mathcal{A}$ ist ein nichttrivialer Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{C}$. Die Menge aller Charakter von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $M(\mathcal{A})$ (man beachte, dass $M(\mathcal{A}) = \emptyset$ sein kann). Nach Satz 1.4.13 sind Charaktere kontraktiv. Es ist also $M(\mathcal{A}) \subseteq B(\mathcal{A}')$, und wir können die Menge $M(\mathcal{A})$ mit der *-schwachen Topologie versehen.

Theorem 2.1.1 (*a*) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Dann ist $M(\mathcal{A})$ kompakt, und die Abbildung $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$, $x \mapsto \widehat{x}$ mit $\widehat{x}(f) = f(x)$ ist ein*

kontraktiver Homomorphismus.
(b) *Ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ohne Eins, so ist $M(\mathcal{A})$ lokalkompakt, und $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C_0(M(\mathcal{A}))$, $x \mapsto \widehat{x}$ ist ein kontraktiver Homomorphismus.*

Beweis. (a) Aus Satz 1.4.13 wissen wir, dass

$$M(\mathcal{A}) \subseteq B(\mathcal{A}') = \{f \in \mathcal{A}' : \|f\| \leq 1\}.$$

Da $B(\mathcal{A}')$ ein Hausdorff-Raum und nach Alaoglu kompakt ist, haben wir für die Kompaktheit von $M(\mathcal{A})$ nur die Abgeschlossenheit von $M(\mathcal{A})$ in $B(\mathcal{A}')$ zu zeigen. Seien dazu a, $b \in \mathcal{A}$. Dann ist die Menge

$$M_{a,b} := \{f \in B(\mathcal{A}') : f(ab) = f(a)f(b)\} = \{f \in B(\mathcal{A}') : \widehat{ab}(f) = \widehat{a}(f)\widehat{b}(f)\}$$

abgeschlossen in $B(\mathcal{A}')$, da $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ und $\widehat{ab}$ stetige Funktionen auf $B(\mathcal{A}')$ sind. Aus dem gleichen Grund ist auch

$$M_e := \{f \in B(\mathcal{A}') : f(e) = \widehat{e}(f) = 1\}$$

abgeschlossen. Damit ist aber auch

$$M(\mathcal{A}) := \bigcap_{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}} M_{a,b} \cap M_e$$

abgeschlossen und mithin kompakt. Der Rest der Behauptung folgt aus

$$\|\widehat{a}\|_\infty = \sup \left\{|\widehat{a}(f)| : f \in M(\mathcal{A})\right\} \leq \sup \left\{|\widehat{a}(f)| : f \in B(\mathcal{A}')\right\} = \|a\|$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ (vgl. (2.1.2)).

(b) Hat $\mathcal{A}$ kein Einselement, so definieren wir $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ wie in Satz 1.3.2. Jeder Homomorphismus $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig zu einem unitalen Homomorphismus $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ fortsetzen, indem man $\tilde{f}(a, \lambda) := f(a) + \lambda$ setzt (Nachrechnen!). Der einzige Charakter von $\tilde{\mathcal{A}}$, für den die Einschränkung auf $\mathcal{A}$ trivial ist, ist gerade $\varphi : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$, $(a, \lambda) \mapsto \lambda$. Wir haben daher $M(\tilde{\mathcal{A}}) = M(\mathcal{A}) \cup \{\varphi\}$. Wegen

$$\widehat{(a, \lambda)}(f) = \begin{cases} \widehat{a}(f) + \lambda & \text{falls } f \in M(\mathcal{A}), \\ \lambda & \text{falls } f = \varphi, \end{cases}$$

stimmt die *-schwache Topologie bzgl. $\mathcal{A}$ auf $M(\mathcal{A})$ mit der Teilraumtopologie bzgl. $M(\tilde{\mathcal{A}})$ überein. $M(\mathcal{A})$ ist daher ein lokalkompakter Raum. ■

Die nächsten Schritte bereiten wir vor, indem wir einen Zusammenhang herstellen zwischen maximalen Idealen und den Kernen von Charakteren.

Lemma 2.1.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann ist der Kern jedes Charakters von $\mathcal{A}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$. Ist umgekehrt $\mathcal{J}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}/\mathcal{J} \cong \mathbb{C}$, d.h. $\mathcal{J}$ ist Kern eines Charakters von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $f \in M(\mathcal{A})$. Dann ist wegen $\mathcal{A}/\ker f \cong \operatorname{Im} f = \mathbb{C}$ die Kodimension des Unterraumes $\ker f$ von $\mathcal{A}$ gleich 1. Es kann also kein Ideal geben, welches echt zwischen $\ker f$ und $\mathcal{A}$ liegt. Daher ist $\ker f$ ein maximales Ideal.

Sei umgekehrt $\mathcal{J}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ sogar ein Körper ist. Sei $a \notin \mathcal{J}$. Dann ist die Menge $\mathcal{A} \cdot a + \mathcal{J}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, welches $\mathcal{J}$ umfaßt, aber echt größer ist als $\mathcal{J}$. Da $\mathcal{J}$ maximal ist, folgt $\mathcal{A} \cdot a + \mathcal{J} = \mathcal{A}$. Dann gibt es aber Elemente $b \in \mathcal{A}$ und $j \in \mathcal{J}$ so, dass $ab + j = e$. Folglich ist $a + \mathcal{J}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ invertierbar, d.h. $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ ist ein Körper. Nach dem Satz von Gelfand-Mazur (Satz 1.4.10) ist $\mathcal{A}/\mathcal{J} \cong \mathbb{C}$. Ist π der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ und ξ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ auf $\mathbb{C}$, so ist $\xi \circ \pi$ ein Charakter von $\mathcal{A}$, dessen Kern gerade $\mathcal{J}$ ist. ∎

Man nennt $M(\mathcal{A})$ daher auch den *Raum der maximalen Ideale* der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$. Weiter nennen wir für $x \in \mathcal{A}$ die Funktion $\widehat{x} \in C(M(\mathcal{A}))$ die *Gelfandtransformierte* von x, und die Abbildung

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A})), \quad x \mapsto \widehat{x}$$

heißt die *Gelfandtransformation* auf $\mathcal{A}$. Wir formulieren nun die zentralen Aussagen der Gelfandtheorie.

Theorem 2.1.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Dann ist der Raum der maximalen Ideale $M(\mathcal{A})$ nicht leer. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist*

$$\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a) \quad \textit{und} \quad \|\widehat{a}\|_\infty = r(a),$$

und die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to C(M(\mathcal{A}))$ ist ein unitaler kontraktiver Homomorphismus. Der Kern von $\mathcal{G}$ ist das Radikal von $\mathcal{A}$. Insbesondere ist $\mathcal{G}$ genau dann injektiv, wenn $\mathcal{A}$ halbeinfach ist.

Beweis. Zunächst ist $M(\mathcal{A})$ nicht leer. Die Algebra $\mathcal{A}$ besitzt nämlich wenigstens ein echtes Ideal (z.B. $\{0\}$). Dieses ist nach dem Krull'schen Lemma (Satz 1.6.1) in einem maximalen Ideal enthalten. Dieses maximale Ideal ist wegen Lemma 2.1.2 der Kern eines Charakters von $\mathcal{A}$.

Wir zeigen als nächstes, dass $\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a)$. Sei zunächst $\lambda \in \sigma(a)$. Dann ist $a - \lambda e$ nicht invertierbar, und $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ ist ein echtes Ideal von $\mathcal{A}$, da es die Eins nicht enthält. Aus dem Krull'schen Lemma wissen wir, dass $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ in einem maximalen Ideal von $\mathcal{A}$ enthalten ist, welches Kern eines Charakters f von $\mathcal{A}$ ist. Da $\mathcal{A}$ eine Eins besitzt, liegt $a - \lambda e$ im Ideal $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ und folglich im Kern von f. Es ist also $0 = f(a - \lambda e) = f(a) - \lambda$ und daher $\lambda = f(a) = \widehat{a}(f) \in \widehat{a}(M(\mathcal{A}))$.

Sei umgekehrt $\lambda \in \widehat{a}(M(\mathcal{A}))$, d.h. $\lambda = f(a)$ für ein $f \in M(\mathcal{A})$. Dann ist $\lambda \in \sigma(f(a))$, und mit Lemma 1.4.11 folgt $\lambda \in \sigma(a)$. Somit ist tatsächlich $\widehat{a}(M(\mathcal{A})) = \sigma(a)$, und die Beziehung $\|\widehat{a}\|_\infty = r(a)$ ist eine offensichtliche Konsequenz hieraus. Insbesondere ist $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|$, d.h. die Gelfandtransformation ist eine Kontraktion.

Schließlich sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $a \in \ker \mathcal{G}$;
- $f(a) = 0$ für alle $f \in M(\mathcal{A})$;
- a liegt in jedem maximalen Ideal von $\mathcal{A}$;
- $a \in \operatorname{Rad} \mathcal{A}$. ■

Anmerkung 2.1.4 Die Aussage $M(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ gilt i.allg. nicht mehr, wenn $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra ohne Eins ist. Ein einfaches Beispiel ist die Unteralgebra von $\mathbb{C}^{2\times 2}$, welche aus allen Matrizen der Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ besteht ($\nearrow$ Übung). Unter der Annahme $M(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ kann man jedoch auch im nicht-unitalen Fall ein zu Satz 2.1.3 analoges Resultat beweisen. Zunächst definieren wir für jede kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ ohne Eins und für jedes $a \in \mathcal{A}$

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) := \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}((a,\, 0)),$$

wobei $\tilde{\mathcal{A}}$ die in Abschnitt 1.3 diskutierte Erweiterung von $\mathcal{A}$ zu einer Banachalgebra mit Eins ist. Wir haben bereits im Beweis von Satz 2.1.1 bemerkt, dass $M(\tilde{\mathcal{A}}) = M(\mathcal{A}) \cup \{\varphi\}$ mit $\varphi : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C},\ (a,\, \lambda) \mapsto \lambda$ ist. Folglich ist

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\tilde{\mathcal{A}}}((a,\, 0)) = \widehat{(a,\, 0)}(M(\tilde{\mathcal{A}})) = \widehat{a}(M(\mathcal{A})) \cup \{0\}$$

und

$$\|\widehat{a}\|_\infty := \sup_{f \in M(\mathcal{A})} |\widehat{a}(f)| = r(a).$$

Anmerkung 2.1.5 Aus Satz 2.1.3 folgt, dass für jede kommutative Banachalgebra mit Eins die Abbildung $a \mapsto r(a)$ eine semimultiplikative Halbnorm ist und sogar eine Norm, falls die Algebra halbeinfach ist.

Beispiel 2.1.6 Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A} = C(X)$. Wir kennen bereits die echten abgeschlossenen Ideale von $C(X)$ aus Satz 1.2.5: Sie sind von der Gestalt $\{f \in C(X) : f|_K = 0\}$ mit einer nichtleeren kompakten Teilmenge K von X. Da sich diese Ideale vergrößern, wenn K kleiner wird, sind die maximalen Ideale von $C(X)$ gerade durch die einelementigen Mengen $\{x\}$ mit $x \in X$ gegeben. Für jedes $x \in X$ ist also $\{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ ein maximales Ideal, und jedes maximale Ideal ist von dieser Gestalt. Mit Lemma 2.1.2 folgt hieraus: Für jedes $x \in X$ ist die Punktauswertung $\delta_x(f) := f(x)$ ein Charakter von $C(X)$, und jeder Charakter ist von dieser Gestalt. Wir haben also eine Bijektion

$$X \to M(C(X)), \quad x \mapsto \delta_x \tag{2.1.3}$$

zwischen den Mengen X und $M(C(X))$. Wir überlegen uns noch, dass (2.1.3) sogar ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen X und $M(C(X))$ ist. Aus der Definition der Topologie auf $M(C(X))$ folgt, dass die Abbildung (2.1.3) stetig ist, denn alle Abbildungen $x \mapsto \widehat{f(\delta_x)} = f(x)$ sind auf X (per Definition) stetig. Außerdem ist - wie bereits bemerkt - (2.1.3) eine Bijektion und X kompakt und somit (2.1.3) ein Homöomorphismus. Halten wir fest:

Theorem 2.1.7 *Sei X ein Hausdorffscher Kompakt und $\mathcal{A} = C(X)$. Dann ist $M(C(X))$ homöomorph zu X, und ein Homöomorphismus von X auf $M(C(X))$ ist durch $x \mapsto \delta_x$ gegeben.*

Wenn wir also $M(C(X))$ und X identifizieren, so ist die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : C(X) \to C(X)$ gerade die identische Abbildung.

Beispiel 2.1.8 Hier bestimmen wir den Raum der maximalen Ideale der Disk-Algebra $\mathbb{A}$ aus Abschnitt 1.5. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{A} \subseteq C(\mathbb{T})$. Für jedes $z \in \mathbb{T}$ wird durch $\delta_z : \mathbb{A} \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(z)$ ein Charakter von $\mathbb{A}$ definiert. Außerdem wissen wir aus Lemma 1.5.2, dass sich für jedes $w \in \mathbb{D}$ das durch $\delta_w : \mathcal{P}_+ \to \mathbb{C},\ p \mapsto p(w)$ definierte Funktional stetig zu einem Charakter von $\mathbb{A}$ fortsetzen lässt, den wir wieder mit δ_w bezeichnen. Wir zeigen

Theorem 2.1.9 *Die Abbildung*

$$\varphi : \overline{\mathbb{D}} \to M(\mathbb{A}),\ z \mapsto \delta_z \tag{2.1.4}$$

ist ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{D}}$ auf $M(\mathbb{A})$.

Beweis. Nach obigen Bemerkungen ist φ korrekt definiert. Sind $z_1,\ z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ Punkte mit $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, so ist

$$z_1 = \delta_{z_1}(\chi_1) = \delta_{z_2}(\chi_1) = z_2,$$

d.h. φ ist injektiv. Wir zeigen, dass φ auch surjektiv ist. Sei $f \in M(\mathbb{A})$ und $z := f(\chi_1)$. Wegen $\|f\| = 1$ ist $|z| \leq 1$, d.h. $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Die Identität

$$f\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n f(\chi_1)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \delta_z \left(\sum_{n=0}^{N} a_n \chi_n\right)$$

zeigt dann, dass f und δ_z auf der dichten Teilmenge $\mathcal{P}_+$ von $\mathbb{A}$ übereinstimmen. Da f und δ_z auf $\mathbb{A}$ stetig sind, stimmen sie auf ganz $\mathbb{A}$ überein, d.h. φ ist surjektiv.

Da $\overline{\mathbb{D}}$ kompakt ist und φ eine Bijektion, genügt es für die Homöomorphie von φ zu zeigen, dass φ stetig ist. Da $\overline{\mathbb{D}}$ ein metrischer Raum ist, reicht es außerdem, Folgen zu betrachten. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{D}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \overline{\mathbb{D}}$. Für jedes analytische trigonometrische Polynom gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{z_n}\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \chi_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k z_n^k = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k = \delta_z \left(\sum_{k=0}^{N} a_k \chi_k\right).$$

Da $\mathcal{P}_+$ in $\mathbb{A}$ dicht liegt und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_{z_n}\| = 1$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{z_n}(f) = \delta_z(f) \quad \text{für alle } f \in \mathbb{A},$$

d.h. die Folge $(\delta_{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *-schwach gegen δ_z. Das ist aber die Stetigkeit von φ. ∎

Im Weiteren werden wir $M(\mathbb{A})$ mit $\overline{\mathbb{D}}$ vermöge der Abbildung (2.1.4) identifizieren. Für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}_+$ ist dann die Gelfand-Transformierte $\widehat{p}$ analytisch auf $\mathbb{D}$ und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Nach dem Maximumprinzip gilt also

$$\sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\widehat{p}(z)| = \sup_{z\in\partial(\overline{\mathbb{D}})} |\widehat{p}(z)| = \sup_{z\in\mathbb{T}} |p(z)|,$$

d.h. $\|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{P}_+$ und folglich für alle $a \in \mathbb{A}$. In diesem Fall ist die Gelfandtransformation $\mathcal{G} : \mathbb{A} \to C(M(\mathbb{A})) = C(\overline{\mathbb{D}})$ also eine Isometrie, jedoch nicht surjektiv.

Beispiel 2.1.10 Wir betrachten nun eine Algebra, für die die Gelfandtransformation keine Isometrie ist: die bereits in Abschnitt 1.1 eingeführte Algebra $l^1(\mathbb{Z})$ mit der Faltung als Multiplikation.

Für jedes $z \in \mathbb{T}$ definieren wir eine Abbildung

$$\varphi_z : l^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n. \tag{2.1.5}$$

Man macht sich sofort klar, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und einen Charakter von $l^1(\mathbb{Z})$ liefert.

Theorem 2.1.11 *Die Abbildung*

$$\psi : \mathbb{T} \to M(l^1(\mathbb{Z})), \quad z \mapsto \varphi_z \tag{2.1.6}$$

ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{T}$ *auf* $M(l^1(\mathbb{Z}))$.

Beweis. Seien z_1, $z_2 \in \mathbb{T}$ und $\varphi_{z_1} = \varphi_{z_2}$. Dann ist

$$z_1 = \varphi_{z_1}(e_1) = \varphi_{z_2}(e_1) = z_2,$$

wobei wir im weiteren für $n \in \mathbb{Z}$ mit $e_n \in l^1(\mathbb{Z})$ die Funktion bezeichnen, die 1 an der Stelle n und 0 an allen anderen Stellen ist. Die Abbildung ψ ist also injektiv.

Wir zeigen als nächstes die Surjektivität von ψ. Sei $\varphi \in M(l^1(\mathbb{Z}))$ und $z := \varphi(e_1)$. Dann ist

$$1 = \|e_1\| \geq |\varphi(e_1)| = |z| = \frac{1}{|z^{-1}|} = \frac{1}{|\varphi(e_{-1})|} \geq \frac{1}{\|e_{-1}\|} = 1,$$

d.h. es ist $|z| = 1$ bzw. $z \in \mathbb{T}$. Weiter folgt aus

$$\varphi(e_n) = (\varphi(e_1))^n = z^n = \varphi_z(e_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z},$$

dass die Charaktere φ und φ_z auf einer in $l^1(\mathbb{Z})$ dichten Teilmenge und folglich auf ganz $l^1(\mathbb{Z})$ übereinstimmen. Es ist also $\varphi = \varphi_z$, d.h. ψ ist surjektiv.

Wie in den vorangegangen Beispielen ist noch die Stetigkeit von ψ zu zeigen, und wieder genügt es, Folgen zu betrachten. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{T}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{T}$. Dann ist für jedes $f \in l^1(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} |\varphi_{z_n}(f) - \varphi_z(f)| &\leq \sum_{|m|\leq N} |f(m)|\,|z_n^m - z^m| + \sum_{|m|>N} |f(m)|\,|z_n^m - z^m| \\ &\leq \|f\|_{l^1(\mathbb{Z})} \max_{|m|\leq N} |z_n^m - z^m| + 2 \sum_{|m|>N} |f(m)|. \end{aligned}$$

Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun N so, dass $\sum_{|m|>N} |f(m)| < \varepsilon/4$ und anschließend $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\max_{|m|\leq N} |z_n^m - z^m| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|} \quad \text{für alle } n > n_0.$$

Für alle $n > n_0$ ist dann $|\varphi_{z_n}(f) - \varphi_z(f)| < \varepsilon$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \varphi_{z_n}(f) = \varphi_z(f)$. Dies gilt auch für $f = 0$, also für jedes $f \in l^1(\mathbb{Z})$; somit ist ψ stetig. ∎

Wir identifizieren wieder $M(l^1(\mathbb{Z}))$ und $\mathbb{T}$ unter der Abbildung (2.1.6). Dann können wir die Gelfandtransformation $\mathcal{G}$ für $l^1(\mathbb{Z})$ auffassen als Abbildung von $l^1(\mathbb{Z})$ in $C(\mathbb{T})$, die jeder Funktion $f \in l^1(\mathbb{Z})$ die durch

$$(\mathcal{G}f)(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^n$$

definierte Funktion $\mathcal{G}f$ auf $\mathbb{T}$ zuordnet (die Reihe konvergiert absolut). Das ist die "diskrete Fouriertransformation".

Offenbar ist die Abbildung $\mathcal{G}$ keine Isometrie. Ist beispielsweise $f \in l^1(\mathbb{Z})$ durch $f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = i$ und $f(n) = 0$ für $n \notin \{-1, 0, 1\}$ gegeben, so ist $\|f\| = 3$, aber

$$\|\mathcal{G}f\|_\infty = \max_{z\in\mathbb{T}} |z^{-1} + i + z| = \max_{z\in\mathbb{T}} |i + 2\mathrm{Re}\, z| = \sqrt{5}.$$

Umgekehrt kann man die Werte der Funktion f auf $\mathbb{Z}$ aus denen der Funktion $\mathcal{G}f$ auf $\mathbb{T}$ zurückbestimmen, da erstere gerade mit den Fourierkoeffizienten von $\mathcal{G}f$ übereinstimmen. Genauer gilt für jedes $f \in l^1(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mathcal{G}f)(e^{it}) e^{-int}\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) e^{i(m-n)t}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\, dt = f(n), \end{aligned}$$

wobei die Vertauschung von Integration und Summation wegen der absoluten und folglich gleichmäßigen Konvergenz der Reihe gerechtfertigt ist. Dies zeigt insbesondere, dass eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{T})$ genau dann im Bild der Gelfandtransformation von $l^1(\mathbb{Z})$ liegt, wenn die Folge ihrer Fourierkoeffizienten absolut summierbar ist, d.h. wenn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) e^{-int} \, dt \right| < \infty.$$

Nun besitzt aber nicht jede stetige Funktion eine absolut konvergente Fourierreihe. Das folgende Resultat, welches auf Wiener zurückgeht, ist daher keineswegs offensichtlich:

Theorem 2.1.12 *Die Funktion $\varphi \in C(\mathbb{T})$ besitze eine absolut konvergente Fourierreihe, und es sei außerdem $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Dann besitzt auch $1/\varphi$ eine absolut konvergente Fourierreihe.*

Der Wienersche Beweis für diesen Satz ist höchst technisch und aufwändig. Es war einer der ersten Triumphe der Gelfandschen Darstellungstheorie, für Satz 2.1.12 einen eleganten und durchsichtigen Beweis zu liefern, den wir uns nun ansehen.

Beweis des Satzes von Wiener nach Gelfand. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion $f \in l^1(\mathbb{Z})$ mit $\mathcal{G}f = \varphi$. Wegen $\mathbb{T} = M(l^1(\mathbb{Z}))$ impliziert die Voraussetzung $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, dass f invertierbar in $l^1(\mathbb{Z})$ ist (Satz 2.1.3). Sei $g := f^{-1} \in l^1(\mathbb{Z})$. Dann ist

$$1 = \mathcal{G}e_0 = \mathcal{G}(g * f) = \mathcal{G}(g) \cdot \mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g) \cdot \varphi \quad \text{bzw.} \quad 1/\varphi = \mathcal{G}(g).$$

Folglich besitzt $1/\varphi$ eine absolut konvergente Fourierreihe. ∎

Analoge Resultate lassen sich auch im Kontinuierlichen, d.h. für die Algebra $L^1(\mathbb{R})$, ableiten. Genauer: für jedes $t \in \mathbb{R}$ wird durch

$$\varphi_t(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixt} \, dx$$

ein Charakter von $L^1(\mathbb{R})$ definiert, und umgekehrt ist jeder Charakter von $L^1(\mathbb{R})$ von dieser Gestalt mit einem gewissen $t \in \mathbb{R}$. Hieraus lässt sich ableiten, dass der Raum der maximalen Ideale von $L^1(\mathbb{R})$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist und dass die Gelfandtransformation auf $L^1(\mathbb{R})$ nichts anderes als die Fouriertransformation ist:

$$(\mathcal{G}f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} \, dx.$$

Bekanntlich bildet die Fouriertransformation $L^1(\mathbb{R})$ in $C_0(\mathbb{R})$ ab, was die Tatsache widerspiegelt, dass $L^1(\mathbb{R})$ kein Einselement besitzt. ∎

Als nächstes überlegen wir uns, wie man den Raum der maximalen Ideale einer einfach erzeugten Banachalgebra beschreiben kann.

Theorem 2.1.13 *Sei $\mathcal{A}$ eine einfach erzeugte Banachalgebra mit Eins, und a sei ein Erzeuger von $\mathcal{A}$. Dann ist die Abbildung*

$$T : M(\mathcal{A}) \to \sigma(a), \quad f \mapsto f(a)$$

ein Homöomorphismus von $M(\mathcal{A})$ auf $\sigma(a)$.

Beweis. Aus Satz 2.1.3 wissen wir, dass die Abbildung T korrekt definiert sowie surjektiv ist. Nach der Definition der *-schwachen Topologie auf $M(\mathcal{A})$ ist auch die Stetigkeit von T sofort klar: Ist $(f_t) \subseteq M(\mathcal{A})$ ein Netz, welches gegen $f \in M(\mathcal{A})$ *-schwach konvergiert, so konvergiert natürlich $(Tf_t) = (f_t(a))$ gegen $f(a) = T(f)$.

Für den Beweis der Injektivität von T seien $f_1,\ f_2 \in M(\mathcal{A})$ mit $T(f_1) = T(f_2)$. Dann ist $f_1(a) = f_2(a)$, und da f_1 und f_2 Charaktere sind, folgt

$$f_1(p(a)) = f_2(p(a)) \quad \text{für jedes Polynom } p.$$

Da die Polynome $p(a)$ dicht in $\mathcal{A}$ liegen und f_1 und f_2 stetig sind, stimmen f_1 und f_2 auf ganz $\mathcal{A}$ überein, d.h. es ist $f_1 = f_2$. Die Behauptung folgt nun wie in den vorausgegangenen Sätzen. ■

Identifiziert man $M(\mathcal{A})$ mit $\sigma(a)$ vermöge der Abbildung T, so überführt die Gelfandtransformation das Element a gerade in die identische Abbildung auf $\sigma(a)$.

Satz 2.1.13 liefert auch einen alternativen Zugang zu den Resultaten aus Beispiel 2.1.8 (beachte, dass $\mathbb{A}$ einfach erzeugt und χ_1 ein Erzeuger ist).

Abschließend zeigen wir ein weiteres Resultat über "automatische Stetigkeit".

Theorem 2.1.14 *$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien kommutative Banachalgebren mit Eins, $\mathcal{B}$ sei darüber hinaus halbeinfach, und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei ein unitaler Homomorphismus. Dann ist W stetig.*

Im Spezialfall $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ ist das gerade die Aussage von Satz 1.4.13. Wir werden im Beweis davon Gebrauch machen.

Beweis. Sei $a_n \to a$ in $\mathcal{A}$ und $W(a_n) \to b$ in $\mathcal{B}$. Wir zeigen, dass $b = W(a)$. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Sei $f \in M(\mathcal{B})$ beliebig gewählt. Dann ist $g := f \circ W$ ein Charakter von $\mathcal{A}$. Nach Satz 1.4.13 sind f und g stetig. Daher ist

$$f(b) = \lim f(W(a_n)) = \lim g(a_n) = g(a) = f(W(a)).$$

Da diese Beziehung für jedes $f \in M(\mathcal{B})$ gilt, muss $b - W(a)$ im Radikal von $\mathcal{B}$ liegen, welches nach Voraussetzung nur aus der 0 besteht. Also ist in der Tat $b = W(a)$. ■

Folgerung 2.1.15 *Jeder Isomorphismus zwischen halbeinfachen kommutativen Banachalgebren mit Eins ist ein Homöomorphismus.*

2.2 Kommutative C^*-Algebren

Wir kommen nun zur bereits mehrfach angekündigten Beschreibung kommutativer C^*-Algebren.

Theorem 2.2.1 (Gelfand, 1941) *Es sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra mit Eins. Dann ist die Gelfandtransformation ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{A}$* auf *$C(M(\mathcal{A}))$; insbesondere gilt also*

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \|a\| \quad \textit{und} \quad \mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}a} \quad \textit{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Hat $\mathcal{A}$ kein Einselement, so ist $\mathcal{G}$ ein isometrischer *-Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $C_0(M(\mathcal{A}))$.

Für den Beweis der Surjektivität benötigen wir eine Verallgemeinerung des klassischen Weierstraßschen Resultates, dass sich jede stetige Funktion auf einem beschränkten Intervall gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt. Dazu nennen wir eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $C(X)$ *symmetrisch*, wenn für jedes $f \in \mathcal{A}$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\overline{f}$ in $\mathcal{A}$ liegt, und wir sagen, dass $\mathcal{A}$ *die Punkte von X trennt*, wenn es für beliebige Punkte x, $y \in X$ mit $x \neq y$ ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt.

Theorem 2.2.2 (Stone/Weierstraß) *Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, und $\mathcal{A}$ sei eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $C(X)$, welche die Punkte von X trennt und die konstante Funktion $x \mapsto 1$ enthält. Dann ist $\mathcal{A} = C(X)$.*

Wir bereiten den Beweis dieses Satzes mit einem Satz und einem Lemma vor.

Theorem 2.2.3 (Dini) *Sei X ein kompakter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge von Funktionen aus $C(X, \mathbb{R})$. Wenn (f_n) punktweise gegen ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ konvergiert, dann sogar gleichmäßig.*

Beweis. O.E.d.A. sei die Folge (f_n) monoton fallend (andernfalls ersetzen wir f_n durch $-f_n$) und $f \equiv 0$ (andernfalls ersetzen wir f_n durch $f_n - f$).

Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in X$ gibt es wegen $f_n(x) \to 0$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq f_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Da f_{n_x} stetig ist, gibt es eine Umgebung U_x von x mit

$$|f_{n_x}(x) - f_{n_x}(y)| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Wegen $0 \leq f_{n_x}(y) \leq |f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x)| + f_{n_x}(x)$ ist dann

$$0 \leq f_{n_x}(y) < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Aus der offenen Überdeckung $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ wählen wir eine endliche Überdeckung $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$ und setzen $n_0 := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}$.

Sei nun $y \in X$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y \in U_{x_j}$. Wegen der Monotonie der Folge (f_n) ist für alle $n \geq n_0$

$$0 \leq f_n(y) \leq f_{n_0}(y) \leq f_{n_{x_j}}(y) < \varepsilon.$$

Fazit: Für alle $y \in X$ und $n \geq n_0$ ist $0 \leq f_n(y) < \varepsilon$. Somit konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion. ■

Lemma 2.2.4 *Es gibt eine Folge reeller Polynome, die auf* $[0, 1]$ *gleichmäßig gegen die Funktion* $x \mapsto \sqrt{x}$ *konvergiert.*

Beweis. Wir starten mit dem Polynom $p_1 \equiv 0$ und definieren p_{n+1} für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$p_{n+1}(x) := p_n(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_n(x)^2\big). \tag{2.2.1}$$

Mit vollständiger Induktion zeigen wir zunächst, dass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]: \quad 0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1.$$

Das ist klar für $n = 1$. Sei die Aussage für ein $n \geq 1$ richtig. Dann ist

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - p_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - p_n(x) - \frac{1}{2}\big(x - p_n(x)^2\big) \\ &= \big(\sqrt{x} - p_n(x)\big)\Big(1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + p_n(x)\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Die Induktionsannahme $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ liefert für alle $x \in [0, 1]$

$$0 \leq \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} + p_n(x)\big) \leq \sqrt{x} \leq 1,$$

woraus mit (2.2.2) folgt

$$0 \leq \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} - p_n(x).$$

Es ist also $p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ und $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ für $x \in [0, 1]$. Die Folge (p_n) ist somit monoton wachsend und beschränkt. Sie konvergiert daher punktweise gegen eine Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Vollziehen wir den Grenzübergang $n \to \infty$ in (2.2.1), folgt $f(x)^2 = x$ bzw. $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$. Da diese Funktion stetig ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz von (p_n) gegen f aus dem Satz von Dini (Satz 2.2.3). ■

Beweis des Satzes von Stone/Weierstraß. Wir bezeichnen die Menge der reellwertigen Funktionen aus $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_r$ und definieren $C_r(X)$ analog. Man macht sich leicht klar, dass $\mathcal{A}_r$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_r(X)$ ist, welche ebenfalls die Punkte von X trennt und die Einsfunktion enthält. Wir zeigen $\mathcal{A}_r = C_r(X)$, woraus die Behauptung folgt. Ist nämlich $f \in C(X)$, so sind $\operatorname{Re} f := (f + \overline{f})/2$ und $\operatorname{Im} f := (f - \overline{f})/(2i)$ reellwertige Funktionen aus $C(X)$, also in $C_r(X)$. Aus $\mathcal{A}_r = C_r(X)$ folgt dann, dass $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}_r$, und hieraus schließlich $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}$.

Schritt 1. Wir zeigen, dass aus $f \in \mathcal{A}_r$ auch $|f| \in \mathcal{A}_r$ folgt. Das ist klar, falls $f \equiv 0$. Sei also f nicht die Nullfunktion, und sei (p_n) eine Folge von Polynomen wie in Lemma 2.2.4. Da $\mathcal{A}_r$ die Funktion f und die Einsfunktion enthält und da $\mathcal{A}_r$ eine Algebra ist, liegt auch jede Funktion $p_n(f^2/\|f\|_\infty^2)$ in $\mathcal{A}_r$. Nach Lemma 2.2.4 konvergieren diese Funktionen gleichmäßig gegen $\sqrt{f^2/\|f\|_\infty^2} = |f|/\|f\|_\infty$. Da $\mathcal{A}_r$ abgeschlossen ist, liegt $|f|/\|f\|_\infty$ und folglich $|f|$ in $\mathcal{A}_r$.

Schritt 2. Wir zeigen, dass mit zwei Funktionen f und g aus $\mathcal{A}_r$ auch die Funktionen $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ in $\mathcal{A}_r$ liegen. Dies folgt sofort aus dem soeben Bewiesenen und aus den Identitäten

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g + |f - g|\big), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big),$$

die man leicht punktweise nachrechnet.

Schritt 3. Wir zeigen, dass es für beliebige verschiedene Punkte $x, y \in X$ und Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ stets eine Funktion $g \in \mathcal{A}_r$ mit $g(x) = a$ und $g(y) = b$ gibt. Auch das ist einfach: Da $\mathcal{A}_r$ die Punkte trennt, gibt es ein $f \in \mathcal{A}_r$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann leistet die Funktion

$$g(z) := a + (b - a)\frac{f(z) - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

das Gewünschte.

Nach diesen Vorüberlegungen nun zum eigentlichen Beweis. Sei $f \in C_r(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir fixieren ein $x_0 \in X$. Für jedes $x \in X$ finden wir ein $g_x \in \mathcal{A}_r$ so, dass $g_x(x_0) = f(x_0)$ und $g_x(x) = f(x)$ (ist $x = x_0$, so wählen wir g_x einfach als Konstante). Da f und g_x stetig sind, finden wir eine offene Umgebung U_x von x so, dass

$$g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in U_x.$$

Die offenen Mengen $\{U_x\}_{x \in X}$ überdecken X. Da X kompakt ist, lässt sich aus ihnen eine endliche Überdeckung von X auswählen, etwa $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Sei

$$h_{x_0} := \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_n}\}.$$

Dann liegt h_{x_0} in $\mathcal{A}_r$, und es ist $h_{x_0}(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$. Auf diese Weise finden wir für jeden Punkt $x_0 \in X$ eine Funktion h_{x_0} in $\mathcal{A}_r$ mit $h_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ und $h_{x_0}(y) \leq f(y) + \varepsilon$ für alle $y \in X$.

Weiter: da h_{x_0} und f stetig sind, gibt es eine offene Umgebung V_{x_0} von x_0, so dass

$$h_{x_0}(y) \geq f(y) - \varepsilon \quad \text{für alle } y \in V_{x_0}.$$

Da $\{V_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ eine offene Überdeckung von X ist, lässt sich daraus wieder eine endliche Überdeckung von X, etwa $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ (mit möglicherweise anderen Punkten x_i als oben) auswählen. Es sei

$$k := \max\{h_{x_1}, h_{x_2}, \ldots, h_{x_n}\}.$$

Dann liegt k in $\mathcal{A}_r$, und es ist

$$f(y) - \varepsilon \leq k(y) \leq f(y) + \varepsilon \quad \text{für alle } y \in X$$

bzw. $\|f - k\|_\infty \leq \varepsilon$. Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man also ein $k \in \mathcal{A}_r$ mit $\|f - k\|_\infty \leq \varepsilon$. Die Behauptung folgt nun aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_r$. ■

Beweis des Satzes von Gelfand. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{G}$ ein *-Homomorphismus ist. Sei $a \in \mathcal{A}$. Dann sind $m := \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $n := \frac{1}{2i}(a - a^*)$ selbstadjungierte Elemente aus $\mathcal{A}$, und es gilt $a = m + in$ und $a^* = m - in$.

Aus der Selbstadjungiertheit von m und n folgt, dass die Spektren $\sigma(m)$ und $\sigma(n)$ in $\mathbb{R}$ enthalten sind (Satz 1.5.7). Nach Satz 2.1.3 müssen daher $\mathcal{G}m$ und $\mathcal{G}n$ reellwertige Funktionen sein (beachte, dass $(\mathcal{G}m)(M(\mathcal{A})) = \sigma(m)$). Folglich ist

$$\overline{\mathcal{G}a} = \overline{\mathcal{G}m + i\mathcal{G}n} = \mathcal{G}m - i\mathcal{G}n = \mathcal{G}(m - in) = \mathcal{G}(a^*).$$

Man sieht auch leicht, dass $\mathcal{G}$ eine Isometrie ist. Da für $a \in \mathcal{A}$ das Element a^*a selbstadjungiert ist, folgt nämlich

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\mathcal{G}(a^*a)\|_\infty = \|(\mathcal{G}a)^*\mathcal{G}a\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2,$$

wobei die mittlere Gleichheit wieder aus Satz 2.1.3 folgt.

Da $\mathcal{G}$ isometrisch ist, ist $\mathcal{G}\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(M(\mathcal{A}))$, und aus der Tatsache, dass $\mathcal{G}$ ein *-Homomorphismus ist, folgt die Symmetrie von $\mathcal{G}\mathcal{A}$. Das Einselement von $\mathcal{A}$ wird durch $\mathcal{G}$ auf die Funktion $x \mapsto 1$ abgebildet (Satz 1.4.13); es ist also $1 \in \mathcal{G}\mathcal{A}$. Schließlich trennt $\mathcal{G}\mathcal{A}$ die Punkte von $M(\mathcal{A})$: Sind nämlich f, g zwei verschiedene Charaktere von $\mathcal{A}$, so müssen diese sich wenigstens in einem Punkt $a \in \mathcal{A}$ unterscheiden, d.h. es ist $f(a) \neq g(a)$ bzw. $(\mathcal{G}a)(f) \neq (\mathcal{G}a)(g)$. Der Satz von Stone-Weierstraß liefert nun $\mathcal{G}\mathcal{A} = C(M(\mathcal{A}))$. ■

Anmerkung 2.2.5 Wir können jedem kompakten Hausdorff-Raum X die C^*-Algebra $C(X)$ zuordnen und jeder kommutativen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins den kompakten Hausdorff-Raum $M(\mathcal{A})$. Man kann C also betrachten als Funktor von der Kategorie der kompakten Hausdorffräume (mit Homöomorphismen als Abbildungen) in die Kategorie der kommutativen C^*-Algebren mit Eins (mit *-Isomorphismen als zugehörige Abbildungen), und man kann M auffassen als

Funktor, der zwischen diesen Kategorien in umgekehrter Richtung wirkt. Die Sätze 2.2.1 sowie 2.1.7 lassen sich so zusammenfassen:

$$C(M(\mathcal{A})) \cong \mathcal{A} \quad \text{und} \quad M(C(X)) \cong X;$$

hier steht das linke $\cong$ für *-Isomorphie; das rechte für Homöomorphie. M und C sind also "invers" zueinander.

Ein kompakter Hausdorff-Raum wird also vollständig durch die zugehörige C^*-Algebra bestimmt und umgekehrt. Fassen wir das ganze noch etwas weiter, lässt sich folgendes "Wörterbuch" aufmachen:

Topologie	*C^*-Algebren*
lokalkompakter Hausdorff-Raum	kommutative C^*-Algebra
Kompaktheit	Einselement
Homöomorphismus	*-Isomorphismus
stetige Abbildung	*-Homomorphismus
abgeschlossene Teilmenge	abgeschlossenes Ideal
nicht zusammenhängend	$\exists$ Projektoren
$\vdots$	$\vdots$

Diese und weitere Entsprechungen bilden den Ausgangspunkt für zahlreiche fruchtbare Verallgemeinerungen vom "kommutativen" auf den "nichtkommutativen" Fall; vgl. hierzu A. Connes, Non-commutative Geometry. ∎

Anmerkung 2.2.6 Ist X ein topologischer Raum und $BC(X)$ die C^*-Algebra der beschränkten stetigen Funktionen auf X, so gibt es nach Satz 2.2.1 einen kompakten Hausdorff-Raum $\tilde{X}$ so, dass

$$BC(X) \cong C(\tilde{X}).$$

Man kann zeigen, dass jeder vollständig reguläre Raum X auf natürliche Weise stetig und dicht in $\tilde{X}$ abgebildet werden kann (genauer: die Abbildung $T : X \to \tilde{X},\ x \mapsto \delta_x$ ist stetig und $\operatorname{clos}(TX) = \tilde{X}$). Der Raum $\tilde{X}$ (oft als βX bezeichnet) heißt *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X. ∎

Wir überlegen uns abschließend, wie sich die Aussage von Satz 2.2.1 präzisieren lässt, wenn $\mathcal{A}$ von einem einzigen Element erzeugt wird.

Theorem 2.2.7 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, $a \in \mathcal{A}$ sei normal, und $C^*(a)$ sei die kleinste abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die e und a enthält. Dann ist $C^*(a)$ eine kommutative C^*-Algebra, und*

$$C^*(a) \cong C(\sigma(a)).$$

Wir können uns hier nicht unmittelbar auf die Resultate für einfach erzeugte Banachalgebren berufen. Als Banachalgebra wird $C^*(a)$ natürlich durch e und die *beiden* Elemente a und a^* erzeugt.

Beweis. Aus $aa^* = a^*a$ folgt, dass $C^*(a)$ eine kommutative C^*-Algebra ist. Wegen Satz 2.2.1 ist also

$$C^*(a) \cong C(X) \quad \text{mit } X := M(C^*(a)).$$

Da a die Algebra $C^*(a)$ erzeugt, erzeugt die Gelfandtransformierte $\hat{a}$ von a die Algebra $C(X)$ (im Sinne von C^*-Algebren). Wir zeigen, dass

$$\hat{a} : X \to \hat{a}(X) = \sigma_{C^*(a)}(a)$$

ein Homöomorphismus ist. Die Stetigkeit und Surjektivität von $\hat{a}$ sind klar. Die Injektivität erhalten wir wie folgt: Da $C(X)$ die Punkte von X trennt und $\hat{a}$ diese Algebra erzeugt, muss bereits $\hat{a}$ die Punkte von X trennen. Somit ist die Abbildung $\hat{a}$ eine stetige Bijektion. Da X kompakt ist, folgt die Behauptung.

Schließlich verwenden wir noch, dass $\sigma_{C^*(a)}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ist (inverse Abgeschlossenheit von C^*-Algebren). ■

Identifiziert man $M(C^*(a))$ mit $\sigma(a)$, so ist die Gelfandtransformierte des erzeugenden Elementes a gerade die identische Abbildung auf $\sigma(a)$.

2.3 Stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente

Wir haben in der Übung bereits eine rudimentäre Fassung des Funktionalkalküls kennengelernt. Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Eins e und $p(t) = a_0t^0 + a_1t^1 + \ldots + a_nt^n$ ein Polynom, so wird für jedes $a \in \mathcal{A}$ durch $p(a) = a_0e + a_1a + \ldots + a_na^n$ ein Element aus $\mathcal{A}$ definiert. Dabei gilt

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\},$$

und die Abbildung $p \mapsto p(a)$ ist ein Homomorphismus von der Algebra der Polynome in $\mathcal{A}$.

In Banachalgebren ist man bestrebt, $f(a)$ auch für größere Klassen von Funktionen zu erklären. Es ist leicht einzusehen, dass man für jede ganze Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ das Element $f(a)$ durch $f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_na^n$ mit $a^0 := e$ definieren kann. Da f eine ganze Funktion ist, konvergiert nämlich für jedes $a \in \mathcal{A}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_na^n$ absolut. Man kann auf diese Weise z.B. Elemente wie $\exp a$ oder $\sin a$ einführen. Auch gilt der *Spektralsatz*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} \tag{2.3.1}$$

für beliebige ganze Funktionen.

Dieses Resultat lässt sich weiter verallgemeinern, wobei hier nur überblicksartig die wesentlichen Resultate angegeben werden. In Kurzfassung lautet die Verallgemeinerung: Man kann mittels der Cauchyschen Integralformel $f(a)$ für jede Funktion erklären, welche in einer Umgebung von $\sigma(a)$ holomorph ist. Für $f(a)$ gilt dann der Spektralsatz (2.3.1).

Theorem 2.3.1 *Seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, $a \in \mathcal{A}$, G eine offene Umgebung von $\sigma(a)$, und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine offene Menge W mit*

$$\sigma(a) \subset W \subset \overline{W} \subset G,$$

deren Rand aus endlich vielen paarweise disjunkten, einfachen, geschlossenen und stückweise stetig differenzierbaren Wegen besteht, die so orientiert sind, dass W links vom Weg liegt. Unabhängig von W wird durch

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(z)(ze - a)^{-1}\, dz$$

ein Element von $\mathcal{A}$ definiert.

Der Beweis der Unabhängigkeit dieser Definition von W erfolgt mit dem Cauchyschen Integralsatz.

Sind G_1, G_2 offene Umgebungen von $\sigma(a)$ und $f_i : G_i \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, so sind $f_1 + f_2$, $f_1 f_2 : G_1 \cap G_2 \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, und es gilt

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a), \quad (f_1 f_2)(a) = f_1(a) f_2(a).$$

Schließlich gilt wieder der Spektralsatz

Theorem 2.3.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, $a \in \mathcal{A}$, und sei f auf einer offenen Umgebung G von $\sigma(a)$ holomorph. Dann gilt*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) := \big\{ f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a) \big\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\supseteq$. Für $\lambda \in \sigma(a)$ definieren wir $g : G \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{falls } z \neq \lambda, \\ f'(\lambda) & \text{falls } z = \lambda. \end{cases}$$

Die Funktion g ist holomorph auf G, und es gilt

$$g(z)(z - \lambda) = f(z) - f(\lambda) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Mit dem holomorphen Funktionalkalkül folgt

$$g(a)(a - \lambda e) = f(a) - f(\lambda) e. \tag{2.3.2}$$

Wäre nun $f(\lambda) \notin \sigma(f(a))$, so würde aus (2.3.2) die Invertierbarkeit von $a - \lambda e$ folgen. Dieser Widerspruch zeigt, dass $f(\sigma(a)) \subseteq \sigma(f(a))$.

Ist umgekehrt $\mu \notin f(\sigma(a))$, so ist die Funktion $h(z) := (f(z) - \mu)^{-1}$ holomorph in einer Umgebung $\tilde{G}$ von $\sigma(a)$, und $h(a)$ ist erklärt. Wir haben dann $h(a)(f(a) - \mu e) = e$, d.h. $\mu \notin \sigma(f(a))$. ■

Mit Satz 2.3.1 kann man beispielsweise $a^{1/2}$ definieren, falls $\sigma(a) \subseteq [1, \infty)$ ist, nicht jedoch im Falle $\sigma(a) = [0, 1]$.

Wir schließen die Betrachtung des allgemeinen Falles mit Aussagen zu Projektoren ab.

Theorem 2.3.3 (Shilov) *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, $a \in \mathcal{A}$, und sei $\sigma(a) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit abgeschlossenen, nichtleeren und disjunkten Mengen σ_1, σ_2. Dann existiert ein Projektor p in $\mathcal{A}$ (d.h. ein Element mit $p^2 = p$) so, dass*
(a) $ab = ba \quad \Rightarrow \quad bp = pb$,
(b) für $a_1 := ap$, $a_2 := a(e - p)$ gilt $a = a_1 + a_2$ und $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$,
(c) $\sigma(a_i) = \sigma_i \cup \{0\}$.

Für den Beweis sucht man sich offene Umgebungen G_1 von σ_1 und G_2 von σ_2 mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und wählt für $f : G_1 \cup G_2 =: G \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in G_1, \\ 0 & \text{falls } z \in G_2. \end{cases}$$

Diese ist holomorph auf G, und das Element $p := f(a)$ ist das Gesuchte. ■

Wesentlich stärker ist folgendes Resultat, das ebenfalls auf Shilov zurückgeht.

Theorem 2.3.4 (Shilovscher Idempotentensatz) *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra und C eine kompakte offene Teilmenge von $M(\mathcal{A})$. Dann gibt es einen Idempotenten p in $\mathcal{A}$ (d.h. ein Element mit $p^2 = p$) so, dass $\hat{p}$ die charakteristische Funktion von C ist.*

Insbesondere kann man $C = M(\mathcal{A})$ wählen, falls $M(\mathcal{A})$ kompakt ist. Dann folgt: Ist $\mathcal{A}$ eine halbeinfache kommutative Banachalgebra und $M(\mathcal{A})$ kompakt, so hat $\mathcal{A}$ ein Einselement.

Alle bekannten Beweise von Satz 2.3.4 benutzen den holomorphen Funktionalkalkül für Funktionen *mehrerer* komplexer Veränderlicher; siehe z.B. Kaniuth: A Course in Commutative Banach Algebras, Springer 2009. ■

Wesentlich verallgemeinern lässt sich dieses Funktionalkalkül für normale Elemente in C^*-Algebren. Ein einfaches Umschreiben von Satz 2.2.7 liefert sofort:

Theorem 2.3.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins, und $a \in \mathcal{A}$ sei normal. Dann existiert ein isometrischer *-Isomorphismus*

$$\Phi : C(\sigma(a)) \xrightarrow{auf} C^*(a) \subseteq \mathcal{A}.$$

Die Abbildung Φ ist gerade die Inverse zur Gelfandtransformation $\mathcal{G} : C^*(a) \to C(\sigma(a))$. Man kann dieses Resultat so interpretieren, dass man für jede stetige Funktion f auf $\sigma(a)$ ein Element $f(a) := \Phi(f) \in C^*(a)$ so definieren kann, dass die Zuordnung $f \mapsto f(a)$ ein *-Isomorphismus wird. Insbesondere gilt also

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (fg)(a) = f(a)g(a), \quad \overline{f}(a) = f(a)^*. \tag{2.3.3}$$

Weiter erhält man sofort den *Spektralsatz*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) := \big\{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\big\} \quad \text{für alle } f \in C(\sigma(a)). \tag{2.3.4}$$

Man beachte, dass man nun beispielsweise $a^{1/2}$ auch dann definieren kann, wenn a normal und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$ ist. Elemente a mit diesen Eigenschaften besitzen also eine Quadratwurzel. Wir sehen uns noch zwei einfache Anwendungen des stetigen Funktionalkalküls in C^*-Algebren an.

Beispiel 2.3.6 Sei $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Dann ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R}$ (und damit auf $\sigma(a)$) sind die Funktionen

$$f_1(x) := \max\{0, x\}, \quad f_2(x) := -\min\{0, x\}, \quad f_3(x) := |x|$$

stetig. Wir definieren

$$a_+ := f_1(a), \quad a_- := f_2(a), \quad |a| := f_3(a).$$

Dann ist $a = a_+ - a_-$, $|a| = a_+ + a_-$ und $a_+ a_- = 0$. Diese Elemente heißen *positiver* und *negativer Teil* bzw. *Betrag* von a. ■

Beispiel 2.3.7 Wir wollen uns folgende Aussage überlegen: *Jedes Element einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins e ist eine Linearkombination von höchstens vier unitären Elementen.*

Beweis. Jedes Element $a \in \mathcal{A}$ ist Linearkombination zweier selbstadjungierter Elemente:

$$a = \frac{1}{2}(a + a^*) + \frac{1}{2i}(i(a - a^*)).$$

Durch Wahl der Koeffizienten lässt sich außerdem erreichen, dass die Normen dieser selbstadjungierten Elemente kleiner oder gleich 1 sind.

Wir zeigen, dass sich jedes selbstadjungierte Element a mit $\|a\| \le 1$ als Linearkombination zweier unitärer Elemente schreiben lässt. Aus $a = a^*$ und $\|a\| \le 1$ folgt $\sigma(a) \subseteq [-1, 1]$, und der Spektralsatz (2.3.1) liefert $\sigma(e - a^2) \subseteq [0, 1]$. Da $x \mapsto x^{1/2}$ auf $[0, 1]$ stetig ist, ist das Element $u := a + i(e - a^2)^{1/2}$ wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass $u^* = a - i(e - a^2)^{1/2} = u^{-1}$ und demzufolge a eine Linearkombination zweier unitärer Elemente ist: $a = \frac{1}{2}(u + u^*)$. ■

So elegant der stetige Funktionalkalkül für normale Elemente ist, so lässt er dennoch Wünsche offen, vor allem im Hinblick auf den Spektralsatz für selbstadjungierte oder normale Operatoren. Um dies kurz anzudeuten, sei H ein separabler unendlich-dimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, und $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei eine beschränkte Folge. Dann wird durch

$$Ax := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \langle x,\, e_i\rangle e_i, \quad x \in H,$$

ein linearer beschränkter und normaler Operator definiert, dessen Spektrum mit $\operatorname{clos} a(\mathbb{N})$ übereinstimmt.

Ist $E \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, so heißt der Operator

$$P_E x := \sum_{i:a_i\in E} \langle x,\, e_i\rangle e_i, \quad x \in H,$$

der *Spektralprojektor* zur Menge E. Dies ist ein orthogonaler Projektor auf H, der mit A vertauscht, und für ihn gilt:

$$\sigma(A|_{\operatorname{Im} P_E}) = \operatorname{clos}(E \cap a(\mathbb{N})) \subseteq E.$$

P_E filtert also aus H den Teil heraus, auf dem das Spektrum von A in E liegt. Man kann P_E in der Regel nicht als $f(A)$ mit einer stetigen Funktion f auf $\sigma(A)$ darstellen. Da P_E ein Projektor ist, ist sein Spektrum in $\{0,\, 1\}$ enthalten. Eine Funktion $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$, die die beiden Werte 0 und 1 und nur diese annimmt, kann aber nicht stetig sein, falls $\sigma(A)$ zusammenhängend ist. Möchte man also (alle) Spektralprojektoren von A als Funktionen von A schreiben, muss man die Einschränkung auf stetige Funktionen fallenlassen. Dies gelingt im Rahmen der von Neumann-Algebren, wo man einen Borelschen Funktionalkalkül zur Verfügung hat.

Wir schauen uns noch eine weitere Stetigkeitseigenschaft des Funktionalkalküls an, nämlich die der Abbildung $a \mapsto f(a)$ (in Satz 2.3.5 haben wir die Abbildung $f \mapsto f(a)$ betrachtet).

Theorem 2.3.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $M \subseteq \mathbb{C}$ und*

$$\mathcal{A}_M := \{a \in \mathcal{A} : a \text{ ist normal und } \sigma(a) \subseteq M\}.$$

Dann ist für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ die durch den stetigen Funktionalkalkül gegebene Abbildung

$$\mathcal{A}_M \to \mathcal{A},\ a \mapsto f(a)$$

stetig.

Beweis. Sei (a_n) eine Folge in $\mathcal{A}_M$, die gegen ein Element $a \in \mathcal{A}_M$ konvergiert. Wir zeigen zuerst, dass dann die Menge

$$K := \sigma(a) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(a_n) \subseteq M$$

kompakt ist. Als konvergente Folge ist (a_n) beschränkt. Es gibt also ein $r > 0$ so, dass $\|a_n\| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dann auch $\|a\| \leq r$. Dann ist K in einem Kreis um die Null mit Radius r enthalten, also beschränkt.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von K. Sei (λ_m) eine Folge in K, die gegen ein $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergiert. Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folge (λ_m) komplett in der endlichen Vereinigung

$$\sigma(a) \cup \bigcup_{n=1}^{N} \sigma(a_n) \subseteq K$$

liegt, dann folgt sofort $\lambda \in K$ (endliche Vereingungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen). Andernfalls finden wir Teilfolgen (λ_{m_k}) und (a_{n_k}) mit $\lambda_{m_k} \in \sigma(a_{n_k})$ für alle k. Die Elemente $a_{n_k} - \lambda_{m_k} e$ sind also nicht invertierbar, und sie konvergieren für $k \to \infty$ gegen $a - \lambda e$. Da die Menge der invertierbaren Elemente offen ist, kann $a - \lambda e$ nicht invertierbar sein, d.h. es ist $\lambda \in \sigma(a) \subseteq K$.

Nun zeigen wir, dass für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ die Elemente $f(a_n)$ gegen $f(a)$ konvergieren. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (Theorem 2.2.2) liegt die Menge der Polynome in den Variablen z und $\bar{z}$ dicht in $C(K)$. Insbesondere finden wir ein derartiges Polynom p mit

$$\sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon/3.$$

Die durch das Polynom p induzierte Abbildung $b \mapsto p(b)$ ist stetig, da sie sich aus den stetigen Operationen Addition, Multiplikation und Involution zusammensetzt. Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\|p(a_n) - p(a)\| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq n_0$. Nun folgt

$$\begin{array}{rcl} \|f(a_n) - f(a)\| & \leq & \|f(a_n) - p(a_n)\| + \|p(a_n) - p(a)\| + \|p(a) - f(a)\| \\ & = & \sup\limits_{z \in \sigma(a_n)} |f(z) - p(z)| + \|p(a_n) - p(a)\| + \sup\limits_{z \in \sigma(a)} |p(z) - f(z)| \\ & < & \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{array}$$

für alle $n \geq n_0$. Also konvergiert $f(a_n)$ tatsächlich gegen $f(a)$. ∎

2.4 Fredholmtheorie von Toeplitzoperatoren

Wir führen nun eine Klasse von Operatoren ein, die sich gut untersuchen lässt und die uns im weiteren oft als Illustration dienen wird.

Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$a_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{ix}) e^{-ikx}\, dx$$

der k. Fourierkoeffizient von a. Wir definieren den durch a erzeugten *Laurentoperator* $L(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z})$, den *Toeplitzoperator* $T(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$ und den *Hankeloperator* $H(a)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$ über ihre Matrixdarstellungen bzgl. der Standardbasen von $l^2(\mathbb{Z})$ bzw. $l^2(\mathbb{Z}^+)$:

$$L(a) := \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$T(a) := \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad H(a) := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Bei $L(a)$ und $T(a)$ sind die Einträge konstant entlang von Parallelen zur Hauptdiagonalen, bei $H(a)$ auf Parallelen zur "Nebendiagonalen".

Am einfachsten ist die Untersuchung der Laurentoperatoren. Jede Funktion $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ definiert wegen

$$\|af\|_2 \le \|a\|_\infty \|f\|_2 \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{T})$$

einen stetigen Multiplikationsoperator aI auf $L^2(\mathbb{T})$. Die Matrixdarstellung von aI bezüglich der Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $e_n(t) := t^n$, von $L^2(\mathbb{T})$ ist gerade $L(a)$:

$$\begin{aligned} \langle ae_k,\, e_j\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{ix}) e^{ikx} e^{-ijx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{ix}) e^{-i(j-k)x}\, dx = a_{j-k}. \end{aligned}$$

Da Laurentoperatoren somit nichts anderes als Matrixdarstellungen von Multiplikationsoperatoren sind, folgt sofort

$$L(a+b) = L(a) + L(b), \quad L(ab) = L(a)L(b), \quad L(a)^* = L(\overline{a}) \tag{2.4.1}$$

für beliebige Funktionen a, $b \in L^\infty(\mathbb{T})$ sowie

$$\|L(a)\|_{L(l^2(\mathbb{Z}))} = \|aI\|_{L(L^2(\mathbb{T}))} \le \|a\|_\infty. \tag{2.4.2}$$

Toeplitz- und Hankeloperatoren lassen sich als "Bausteine" von Laurentoperatoren auffassen. Dazu sei $l_2^2(\mathbb{Z}^+)$ die Menge aller Paare (x, y) von Elementen aus $l^2(\mathbb{Z}^+)$, versehen mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}.$$

Die Abbildung $J : l^2(\mathbb{Z}) \to l_2^2(\mathbb{Z}^+)$,

$$(\ldots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto \big((x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \ldots), (x_0, x_1, x_2, \ldots)\big)$$

ist eine bijektive Isometrie, und es gilt

$$JL(a)J^{-1} = \begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tilde{a}(t) := a(1/t). \tag{2.4.3}$$

Lemma 2.4.1 *Für $a, b \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt*
(a) $T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\tilde{b})$ und $H(ab) = T(a)H(b) + H(a)T(\tilde{b})$,
(b) $T(a)^* = T(\overline{a})$ und $H(a)^* = H(\tilde{\overline{a}})$.

Bewei. Nach (2.4.3) ist einerseits

$$JL(ab)J^{-1} = \begin{pmatrix} T(\widetilde{ab}) & H(\widetilde{ab}) \\ H(ab) & T(ab) \end{pmatrix}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} JL(ab)J^{-1} &= JL(a)J^{-1} \cdot JL(b)J^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\tilde{b}) & H(\tilde{b}) \\ H(b) & T(b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T(\tilde{a})T(\tilde{b}) + H(\tilde{a})H(b) & T(\tilde{a})H(\tilde{b}) + H(\tilde{a})T(b) \\ H(a)T(\tilde{b}) + T(a)H(b) & H(a)H(\tilde{b}) + T(a)T(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der entsprechenden Einträge liefert Aussage (a), und (b) folgt analog aus

$$JL(a)^*J^{-1} = \begin{pmatrix} T(\tilde{a}) & H(\tilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} T(\tilde{a})^* & H(a)^* \\ H(\tilde{a})^* & T(a)^* \end{pmatrix},$$

und

$$JL(\overline{a})J^{-1} = \begin{pmatrix} T(\tilde{\overline{a}}) & H(\tilde{\overline{a}}) \\ H(\overline{a}) & T(\overline{a}) \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Für die Normen hat man wegen (2.4.2) und (2.4.3)

$$\|T(a)\| \le \|L(a)\| \le \|a\|_\infty \quad \text{sowie} \quad \|H(a)\| \le \|L(a)\| \le \|a\|_\infty. \tag{2.4.4}$$

Diese Abschätzungen genügen zwar für viele Anwendungen. Andererseits lassen sich diese Normen exakt bestimmen.

Theorem 2.4.2 *Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$. Dann ist*
(a) $\|L(a)\| = \|a\|_\infty$;
(b) (Brown/Halmos) $\|T(a)\| = \|a\|_\infty$;
(c) (Nehari) $\|H(a)\| = \mathrm{dist}_{L^\infty(\mathbb{T})}(a, \overline{H^\infty})$.

Hier steht $\overline{H^\infty}$ für die Menge aller Funktionen aus $L^\infty(\mathbb{T})$, die sich analytisch in das Äußere des Einheitskreises fortsetzen lassen (Beispiel: $f(t) = t^{-1}$). Beweise findet man in [Böttcher/Silbermann], Analysis of Toeplitz operators, Theoreme 2.7 und 2.11.

Unser Ziel sind Fredholmeigenschaften von Toeplitzoperatoren $T(f)$ mit *stetiger* Erzeugerfunktion f, d.h. uns interessiert die Frage, wann die Nebenklasse $T(f)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ in der Calkinalgebra $L(l^2(\mathbb{Z}^+))/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ invertierbar ist. Dazu untersuchen wir die kleinste abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{T}(C)$ von $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$, welche alle Toeplitzoperatoren $T(f)$ mit $f \in C(\mathbb{T})$ enthält. Wegen $T(f)^* = T(\overline{f})$ und da mit f auch $\overline{f}$ stetig ist, ist $\mathcal{T}(C)$ bereits eine C^*-Algebra.

Wir bereiten die Untersuchung von $\mathcal{T}(C)$ mit zwei Kompaktheitsaussagen vor. Die erste dieser Aussagen unterstreicht zudem die völlig unterschiedliche Natur von Toeplitz- bzw. Hankeloperatoren.

Theorem 2.4.3 *(a) Für alle $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $K \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ gilt*

$$\|T(a)\| \le \|T(a) + K\|.$$

Insbesondere ist $T(a)$ genau dann kompakt, wenn $a = 0$.
(b) Für alle $a \in C(\mathbb{T})$ ist $H(a)$ kompakt.

Beweis. *(a)* Wir betrachten die Verschiebungsoperatoren V_1 und V_{-1} auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$ mit

$$V_1 : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots), \quad V_{-1} : (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $V_n := (V_1)^n$ und $V_{-n} := (V_{-1})^n$ und $V_0 := I$. Wegen $\|V_n\| = \|V_{-n}\| = 1$ ist dann

$$\|V_{-n}(T(a) + K)V_n\| \le \|T(a) + K\|. \tag{2.4.5}$$

Nun ist $V_{-n}T(a)V_n = T(a)$, und man überprüft leicht, dass $V_{-n} \to 0$ stark für $n \to \infty$ und $V_n^* = V_{-n}$. Folglich konvergiert $V_{-n}KV_n$ in der Norm gegen 0. Lassen wir also in (2.4.5) $n \to \infty$ laufen, folgt sofort die erste Behauptung von *(a)*. Die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Konsequenz der ersten.

(b) Ist $a(t) = a_{-n}t^{-n} + \ldots + a_n t^n$ ein trigonometrisches Polynom, so ist $H(a)$ offenbar ein Operator mit endlich-dimensionalem Bild und folglich kompakt. Nun kann jede stetige Funktion a auf $\mathbb{T}$ gleichmäßig durch trigonometrische Polynome p_n approximiert werden (Stone/Weierstraß). Aus

$$\|H(a) - H(p_n)\| \le \|a - p_n\|_\infty \to 0,$$

der Kompaktheit von $H(p_n)$ und der Abgeschlossenheit von $K(l^2)$ folgt die Behauptung. ■

Theorem 2.4.4 *Es ist* $K(l^2(\mathbb{Z}^+)) \subseteq \mathcal{T}(C)$.

Beweis. Sei $P_n : l^2(\mathbb{Z}^+) \to l^2(\mathbb{Z}^+),\ (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots)$. Offenbar gilt $P_n = P_n^* \to I$ stark und daher $\|P_nKP_n - K\| \to 0$ für jeden kompakten Operator K. Es genügt daher zu zeigen, dass $P_nKP_n \in \mathcal{T}(C)$ für jedes $K \in K(l^2)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $(k_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ die Matrixdarstellung von $P_nKP_n|_{\mathrm{Im}\,P_n}$ bzgl. der Standardbasis von $l^2(\mathbb{Z}^+)$, so ist

$$P_nKP_n = \sum_{i,j=0}^{n-1} k_{ij} V_i P_1 V_{-j}$$

(Nachrechnen!). Nun ist aber $P_1 = I - V_1V_{-1}$, und V_1 bzw. V_{-1} sind Toeplitzoperatoren mit den erzeugenden Funktionen $\chi_1(t) = t$ bzw. $\chi_{-1}(t) = t^{-1}$. Hieraus folgt sofort die Behauptung. ■

Mit diesen Resultaten erhält man leicht eine komplette Beschreibung der Algebra $\mathcal{T}(C)$.

Theorem 2.4.5 $\mathcal{T}(C) = \{T(a) + K : a \in C(\mathbb{T}),\ K \in K(l^2(\mathbb{Z}^+))\}$.

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite der zu beweisenden Identität mit $\mathcal{A}$. Aus Satz 2.4.4 folgt sofort $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(C)$. Für die umgekehrte Inklusion zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist. Seien a, b stetig und K, L kompakt. Dann ist

$$(T(a) + K) + (T(b) + L) = T(a + b) + (K + L) \in \mathcal{A}$$

und

$$\begin{aligned} &(T(a) + K)(T(b) + L) \\ &\quad = T(a)T(b) + KT(b) + T(a)L + KL \\ &\quad = T(ab) - H(a)H(\tilde{b}) + KT(b) + T(a)L + KL \in \mathcal{A}, \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

da die letzten vier Summanden in (2.4.6) nach Satz 2.4.3 (b) kompakt sind. Also ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. Sei nun $(T(a_m) + K_m)_{m\ge1}$ eine normkonvergente Folge von Operatoren aus $\mathcal{A}$. Aus Satz 2.4.3 (a) schliessen wir, dass $(T(a_m))_{m\ge1}$ eine Cauchyfolge in $L(l^2)$ ist, und aus Satz 2.4.2 (b), dass $(a_m)_{m\ge1}$ Cauchyfolge in $C(\mathbb{T})$ ist. Da $C(\mathbb{T})$ vollständig ist, gibt es eine Funktion $a \in C(\mathbb{T})$ mit $\|a_n - a\|_\infty \to 0$. Aus der Abschätzung $\|T(a_n - a)\| \le \|a_n - a\|_\infty$ folgt dann $\|T(a_n) - T(a)\| \to 0$, und aus

$$\|K_n - K_m\| \le \|T(a_n) + K_n - T(a_m) - K_m\| + \|T(a_n) - T(a_m)\|$$

folgt, dass (K_n) eine Cauchyfolge in $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ ist. Diese Folge konvergiert, und ihr Grenzwert K ist kompakt, da $K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ abgeschlossen ist. Nunmehr ist klar, dass

$$\|(T(a_n)+K_n)-(T(a)+K)\| \to 0,$$

d.h. $\lim(T(a_n)+K_n) \in \mathcal{A}$, und $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen. ∎

Wie angekündigt, interessieren wir uns für die Fredholmeigenschaften von Operatoren aus $\mathcal{T}(C)$, d.h. dafür, wann die Nebenklasse $A + K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ im Quotienten $L(l^2(\mathbb{Z}^+))/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ invertierbar ist. Da $K(l^2(\mathbb{Z}^+)) \subseteq \mathcal{T}(C)$, können wir den Quotienten $\mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ bilden. Dieser ist eine abgeschlossene Unteralgebra der Calkinalgebra $L(l^2(\mathbb{Z}^+))/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$. Diese Unteralgebra ist wieder eine C^*-Algebra (dies haben wir noch nicht allgemein bewiesen; wir werden dies aber schnell nachholen). Wegen der inversen Abgeschlossenheit von C^*-Algebren ist $A \in \mathcal{T}(C)$ also genau dann ein Fredholmoperator, wenn $A + K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ in $\mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ invertierbar ist.

Diese Algebra ist aber kommutativ! Dies folgt sofort aus (2.4.6): Für alle $a, b \in C(\mathbb{T})$ ist

$$\begin{aligned}
&\big(T(a)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\big)\big(T(b)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\big)\\
&\quad = T(ab)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\\
&\quad = T(ba)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\\
&\quad = \big(T(b)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\big)\big(T(a)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\big).
\end{aligned}$$

Wir können daher $\mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ komplett beschreiben, wenn wir ihren Raum der maximalen Ideale und die Wirkung der Gelfandtransformation identifizieren können. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\pi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+)), \quad f \mapsto T(f)+K(l^2(\mathbb{Z}^+)).$$

Man rechnet sofort nach, dass π ein *-Homomorphismus ist (dies ist im wesentlichen wieder (2.4.6)). Aus Satz 2.4.5 folgt die Surjektivität von π, und die Injektivität bekommen wir aus Satz 2.4.3 (a). Dieser liefert nämlich

$$\|T(a)\| = \|T(a)+K(l^2(\mathbb{Z}^+))\| \qquad (\text{sogar für alle } a \in L^\infty(\mathbb{T})).$$

Ist also $\pi(f) = T(f)+K(l^2(\mathbb{Z}^+)) = 0$, so ist $T(f) = 0$, und nach Satz 2.4.2 (b) ist $f = 0$. Die Abbildung π ist also ein *-Isomorphismus. Aus Satz 1.4.12, angewandt auf π und die Umkehrabbildung π^{-1}, folgt schließlich, dass π sogar eine Isometrie ist. Es sind also

$$C(\mathbb{T}) \cong \mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+)) \qquad \text{isometrisch } ^*\text{-isomorph.}$$

Damit ist auch klar, dass $M(\mathcal{T}(C)/K(l^2(\mathbb{Z}^+)))$ homöomorph zu $M(C(\mathbb{T})) \cong \mathbb{T}$ ist und dass bei dieser Identifizierung die Gelfandtransformation von $T(a) + K(l^2(\mathbb{Z}^+))$ gerade die Funktion $a \in C(\mathbb{T})$ ist. Fazit:

Theorem 2.4.6 *Ein Operator $T(f) + K \in \mathcal{T}(C)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn $f(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$.*

Darüberhinaus hat man für Fredholmsche Toeplitzoperatoren mit stetiger Erzeugerfunktion auch eine bequeme Möglichkeit, den Index

$$\operatorname{ind} T(a) := \dim \ker T(a) - \dim(l^2(\mathbb{Z}^+)/\operatorname{Im} T(a))$$

zu bestimmen. Dazu benötigen wir ein Resultat über stetige Funktionen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{C}$.

Theorem 2.4.7 *Sei $f \in C(\mathbb{T})$ und $f(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{T})$ so, dass $f(t) = t^n e^{\varphi(t)}$ für alle $t \in \mathbb{T}$.*

Die Zahl n heisst die *Windungszahl* von f. Sie beschreibt anschaulich, wie oft sich die Kurve $t \mapsto a(t)$ um den Nullpunkt windet, wenn man sie mit der durch $\mathbb{T}$ induzierten Orientierung versieht und Windungen im Gegenuhrzeigersinn zählt.

Theorem 2.4.8 (*a*) *Ist $T(f) + K \in \mathcal{T}(C)$ ein Fredholmoperator, so ist*

$$\operatorname{ind}(T(f) + K) = -\operatorname{wind} f.$$

(*b*) *Ein Toeplitzoperator $T(f)$ ist genau dann invertierbar auf $l^2(\mathbb{Z}^+)$, wenn er Fredholmsch ist und* $\operatorname{ind} T(f) = 0$ *ist.*

Beweise findet man in den bereits zitierten Büchern von Böttcher/Silbermann und Douglas. Aussage (*b*) von Satz 2.4.8 gilt sogar für beliebiges $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Die Tatsache, dass $\operatorname{ind} T(f) = 0$ bereits die Invertierbarkeit von $T(f)$ impliziert, ist eine Besonderheit bei Toeplitzoperatoren.

Kapitel 3

Darstellungstheorie für C^*-Algebren

Wir beginnen nun mit einer systematischen Untersuchung von nicht notwendig kommutativen C^*-Algebren.

3.1 Positive Elemente und Ordnung

Ein selbstadjungiertes Element a einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ heisst *positiv* (in Zeichen $a \geq 0$), wenn $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Die Menge aller positiven Elemente aus $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_+$.

Lemma 3.1.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Einselement e. Folgende Aussagen für $a \in \mathcal{A}$ sind äquivalent:*
(a) a ist positiv;
(b) $a = b^2$ mit einem selbstadjungierten Element $b \in \mathcal{A}$;
(c) $a = a^*$ und $\|\mu e - a\| \leq \mu$ für alle $\mu \geq \|a\|$;
(d) $a = a^*$ und $\|\mu e - a\| \leq \mu$ für ein $\mu \geq \|a\|$.

Beweis. $(a) \Leftrightarrow (b)$: Ist a positiv, so kann man $b := a^{1/2}$ setzen (stetiger Funktionalkalkül) und erhält $a = b^2$ mit einem selbstadjungierten b. Ist umgekehrt $a = b^2$ mit $b = b^*$, so ist $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}$ nach Satz 1.5.7 (b). Folglich ist $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2 \subseteq \mathbb{R}^+$. Da $a = a^*$, folgt $a \geq 0$.

$(a) \Rightarrow (c)$: Nach Satz 1.4.9 ist $r(b) = \|b\|$ für alle normalen Elemente $b \in \mathcal{A}$. Insbesondere gilt für $b := \mu e - a$ mit $\mu \geq \|a\|$

$$\|\mu e - a\| = r(\mu e - a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mu e - a)\} = \sup\{|\mu - \lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \leq \mu.$$

Die Implikation $(c) \Rightarrow (d)$ ist offensichtlich. Wir zeigen noch $(d) \Rightarrow (a)$: Sei μ wie in (d). Für alle $\lambda \in \sigma(a)$ ist $\mu - \lambda \in \sigma(\mu e - a)$ und daher

$$|\mu - \lambda| \leq \|\mu e - a\| \leq \mu.$$

Wegen $|\lambda| \leq \|a\| \leq \mu$ folgt hieraus $\lambda \geq 0$; es ist also $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$. ∎

Theorem 3.1.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Dann ist*
(a) die Menge $\mathcal{A}_+$ abgeschlossen und

$$\lambda\mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}_+ \text{ für } \lambda \geq 0, \quad \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}_+ \text{ und } \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\};$$

(b) ein Element $a \in \mathcal{A}$ genau dann positiv, wenn $a = b^*b$ mit einem $b \in \mathcal{A}$.

Wegen Aussage (a) spricht man auch vom *Kegel der positiven Elemente.*
Aussage (b) kennt man erst seit den Arbeiten von Kaplansky und Kelley/Vaught von 1953. In den frühen Arbeiten von Gelfand tritt die Forderung

$$b^*b \geq 0 \quad \text{für alle } b \in \mathcal{A}$$

noch als (nunmehr überflüssiges) Axiom auf.

Beweis. (a) Zeigen die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_+$: Sei (a_n) eine Folge in $\mathcal{A}_+$ mit Grenzwert $a \in \mathcal{A}$. Da die Involution stetig ist, ist a selbstadjungiert. Aus Lemma 3.1.1 (c) wissen wir, dass in $\tilde{\mathcal{A}}$ gilt

$$\big\|\|a_n\|e - a_n\big\| \leq \|a_n\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang liefert $\big\|\|a\|e - a\big\| \leq \|a\|$, woraus mit Lemma 3.1.1 (d) die Positivität von a folgt.

Die Inklusion $\lambda\mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}_+$ für alle $\lambda \geq 0$ ist klar. Seien nun $a, b \in \mathcal{A}_+$. Nach Lemma 3.1.1 (c) ist

$$\begin{aligned}
\big\|(\|a\| + \|b\|)e - (a+b)\big\| &= \big\|(\|a\|e - a) + (\|b\|e - b)\big\| \\
&\leq \big\|(\|a\|e - a)\big\| + \big\|(\|b\|e - b)\big\| \\
&\leq \|a\| + \|b\|,
\end{aligned}$$

woraus mit Lemma 3.1.1 (d) folgt $a + b \in \mathcal{A}_+$. Ist schließlich $a \in \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+)$, so liegt $\sigma(a)$ in $[0, \infty) \cap [0, -\infty) = \{0\}$. Aus $r(a) = 0$ und $a = a^*$ folgt aber $\|a\| = 0$, also $a = 0$.

(b) Die Richtung $\Rightarrow$ ist im wesentlichen die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) in Lemma 3.1.1. Da wir in diesem Lemma aber die Existenz eines Einselementes angenommen haben, schauen wir uns die Details genauer an. Das Spektrum von a liegt im Intervall $[0, \|a\|]$. Auf diesem Intervall ist die Wurzelfunktion $s : x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge (p_n) reeller Polynome. Offenbar gilt dann $p_n(0) \to s(0) = 0$, d.h. auch die Polynome $q_n := p_n - p_n(0)$ konvergieren auf $[0, \|a\|]$ gleichmäßig gegen s. Wegen $q_n(0) = 0$ gibt es Polynome r_n so, dass $q_n(x) = xr_n(x)$ für alle x. Mit dem Funktionalkalkül folgt $q_n(a) = ar_n(a)$ und damit $q_n(a) \in \mathcal{A}$ (es ist ja $\mathcal{A}$ ein Ideal in der Unitalisierung dieser Algebra). Aus

$\|q_n(a) - s(a)\| = \|q_n(a) - a^{1/2}\| \to 0$ folgt somit $a^{1/2} \in \mathcal{A}$.

Sei umgekehrt $a = b^*b$. Dann ist $a = a^*$. Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, gibt es positive Elemente $a_+, a_- \in \mathcal{A}$ so, dass $a = a_+ - a_-$. Wir wollen zeigen, dass $a_- = 0$. Für $c := ba_-^{1/2}$ ist zunächst

$$c^*c = a_-^{1/2} b^* b a_-^{1/2} = a_-^{1/2}(a_+ - a_-)a_-^{1/2} = -a_-^2 \in -\mathcal{A}_+.$$

Mit $c = x + iy$, wobei x, y selbstadjungiert sind, rechnet man leicht nach, dass

$$cc^* = 2(x^2 + y^2) - c^*c.$$

Dieses Element liegt in $\mathcal{A}_+$ nach Aussage (a) dieses Satzes. Nun wissen wir aber, dass sich die Spektren von c^*c und cc^* höchstens um $\{0\}$ unterscheiden können (Übung 2). Aus $\sigma(c^*c) \subseteq (-\infty, 0]$ und $\sigma(cc^*) \subseteq [0, \infty)$ folgt daher $\sigma(c^*c) = \{0\}$. Also ist $\sigma(-a_-^2) = \{0\}$. Da a_- selbstadjungiert ist, folgt schließlich $a_- = 0$ und $a = a_+$. ■

Beispiel 3.1.3 Ist X ein kompakter Hausdorffraum, so ist $f \in C(X)$ genau dann positiv, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in X$. Ist H ein komplexer Hilbertraum, so ist $A \in L(H)$ genau dann positiv, wenn $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in X$. In diesem Fall ist A selbstadjungiert (Übung). ■

Für selbstadjungierte Elemente a, b von $\mathcal{A}$ schreiben wir $a \geq b$ falls $a - b \geq 0$. Da $\mathcal{A}_+$ ein Kegel ist und $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$, ist $\geq$ eine partielle Ordnung auf der Menge der selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$, und es gilt für alle selbstadjungierten Elemente a, b, c von $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} &a \geq a, \\ a \geq b,\ b \geq a \quad &\Rightarrow \quad a = b, \\ a \geq b,\ b \geq c \quad &\Rightarrow \quad a \geq c. \end{aligned}$$

Wir fassen einige Eigenschaften dieser Relation zusammen.

Theorem 3.1.4 *Seien a und b selbstadjungierte Elemente einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit $a \geq b \geq 0$. Dann gilt*

(a) $\|a\| \geq \|b\|$;

(b) $c^*ac \geq c^*bc \geq 0$ für alle $c \in \mathcal{A}$;

(c) Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement und ist b invertierbar, so ist a invertierbar und $b^{-1} \geq a^{-1} \geq 0$.

Beweis. Falls $\mathcal{A}$ kein Einselement besitzt, so erweitern wir $\mathcal{A}$ zu einer C^*-Algebra mit Eins e wie in Abschnitt 1.3.

(a) Aus dem Satz von Gelfand-Naimark folgt $\|a\|e \geq a$ und damit $\|a\|e \geq b$. Erneute Anwendung des Satzes von Gelfand-Naimark liefert $\|a\|e \geq \|b\|e$ bzw.

$\|a\| \geq \|b\|$.

(b) Sei $d \in \mathcal{A}$ ein Element mit $a - b = d^*d$ (vgl. Satz 3.1.2 (b)). Dann ist

$$c^*ac - c^*bc = c^*d^*dc = (dc)^*(dc).$$

Wieder nach Satz 3.1.2 (b) ist $c^*ac - c^*bc \geq 0$. (Hier haben wir offenbar nicht benötigt, dass $b \geq 0$ ist.)

(c) Wir zeigen zuerst, dass a invertierbar ist. Aus $b \geq 0$ und der Invertierbarkeit von b folgt, dass $\sigma(b) \subseteq [\mu, \infty)$ mit einem $\mu > 0$. Dann ist $b - \mu e \geq 0$ und folglich $a - \mu e \geq 0$. Damit ist $\sigma(a - \mu e) \subseteq [0, \infty)$ bzw. $\sigma(a) \subseteq [\mu, \infty)$, d.h. a ist invertierbar.

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir vorab, dass mit Gelfand-Naimark aus $c \geq e$ sofort $c^{-1} \leq e$ folgt. Wir wenden diese Überlegung auf das Element $c := b^{-1/2}ab^{-1/2}$ an (dieses ist positiv nach Aussage (b) dieses Satzes) und erhalten

$$c^{-1} = b^{1/2}a^{-1}b^{1/2} \leq e.$$

Multiplikation von beiden Seiten mit $b^{-1/2}$ liefert schließlich (wieder nach Aussage (b)), dass $a^{-1} \leq b^{-1}$. ∎

Als Anwendung zeigen wir ein Resultat über die *Polarzerlegung* invertierbarer Elemente in C^*-Algebren.

Theorem 3.1.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins. Dann kann jedes invertierbare Element $a \in \mathcal{A}$ eindeutig geschrieben werden als $a = ur$ mit u unitär und $r \geq 0$.*

Beweis. Mit a ist auch a^*a invertierbar. Außerdem ist $a^*a \geq 0$. Nach Satz 3.1.4 (c) ist dann auch $(a^*a)^{-1} \geq 0$. Hieraus folgt die Invertierbarkeit von $|a| = (a^*a)^{1/2}$ sowie die Beziehung $|a|^{-1} = ((a^*a)^{-1})^{1/2}$. Sei $u := a|a|^{-1}$. Dann ist

$$uu^* = a|a|^{-1}|a|^{-1}a^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^{-1}(a^*)^{-1}a^* = e$$

sowie

$$u^*u = |a|^{-1}a^*a|a|^{-1} = |a|^{-1}|a|^2|a|^{-1} = e.$$

Somit ist u unitär und $r := u^{-1}a = |a| \geq 0$.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit der Polardarstellung. Aus $a = ur$ folgt notwendig $a^*a = r^*u^*ur = r^*r = r^2$, also $r = (a^*a)^{1/2}$. Damit sind r und wegen der Invertierbarkeit von r auch u eindeutig bestimmt. ∎

3.2 Homomorphismen, Ideale und Quotienten von C^*-Algebren

Wir sehen uns nun Homomorphismen und Ideale von C^*-Algebren genauer an und lernen Resultate kennen, die das Arbeiten mit C^*-Algebren so angenehm machen. Auch haben wir noch einige Lücken zu schließen (und z.B. die Frage zu klären, ob $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ wieder eine C^*-Algebra ist). Zunächst benötigen wir eine Definition.

Definition 3.2.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $(T, \prec)$ eine gerichtete Menge. Ein Netz $\{e_t\}_{t\in T} \subset \mathcal{A}_+$ heißt* approximative Eins, *wenn gilt*
(a) $\|e_t\| \leq 1$ für alle $t \in T$,
(b) für $s \prec t$ ist $e_s \leq e_t$,
(c) $\lim_{t\in T} \|a - ae_t\| = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Offensichtlich gilt dann auch $\lim_{t\in T} \|a - e_t a\| = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Beispiel 3.2.2 (*a*) Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement e, so ist die konstante Folge $(e)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Eins in $\mathcal{A}$.

(*b*) Sei $\mathcal{A} = K(H)$ die C^*-Algebra der kompakten Operatoren auf einem separablen unendlichdimensionalen Hilbertraum H. Ist $e_1, e_2, \ldots$ eine Orthonormalbasis von H und P_n der Orthoprojektor von H auf die lineare Hülle von $\{e_1, \ldots, e_n\}$, so ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Eins in $K(H)$.

(*c*) Algebren wie $K(H)$, die eine abzählbare approximative Eins besitzen, heißen *σ-unital*. Separable C^*-Algebren sind σ-unital. Für einen lokalkompakten topologischen Raum X ist $C_0(X)$ σ-unital genau dann, wenn X σ-kompakt ist, d.h. wenn X eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. ■

Theorem 3.2.3 (Segal) *Jede C^*-Algebra besitzt eine approximative Eins.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement, so ist die Behauptung klar (Beispiel 3.2.2 (*a*)). Andernfalls adjungieren wir ein Einselement e zu $\mathcal{A}$ und müssen garantieren, dass die approximative Eins in der ursprünglichen Algebra gefunden werden kann.

Die Menge $T := \{a \in \mathcal{A}_+ : \|a\| < 1\}$ ist gerichtet bzgl. der Relation $\leq$. Wir wissen nämlich bereits, dass $\leq$ eine partielle Ordnung ist und müssen noch die Induktivität von $\leq$ zeigen. Seien $u, v \in T$. Nach Gelfand-Naimark sind dann $a := (e-u)^{-1}u$ sowie $b := (e-v)^{-1}v$ positive Elemente. Nach Satz 3.1.2 (*a*) ist $a + b \geq 0$, und erneute Anwendung von Gelfand-Naimark zeigt, dass

$$w := (e + a + b)^{-1}(a + b) \in T.$$

(Man beachte: mit der Neumann-Reihe folgt $a, b \in \mathcal{A}$. Dann ist $a + b \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ ein Ideal in der Erweiterung $\tilde{\mathcal{A}}$ ist, folgt auch $w = (e + a + b)^{-1}(a + b) \in \mathcal{A}$.)

Nach Satz 3.1.4 (*c*) ist nun

$$\begin{aligned} w &= (e+a+b)^{-1}(a+b) = (e+a+b)^{-1}(e+a+b) - (e+a+b)^{-1} \\ &= e - (e+a+b)^{-1} \geq e - (e+a)^{-1} = e - (e + (e-u)^{-1}u)^{-1} \\ &= e - ((e-u)^{-1})^{-1} = u, \end{aligned}$$

und genauso erhält man $v \leq w$. Daher ist $(T, \leq)$ eine gerichtete Menge in $\mathcal{A}_+$.

Wir betrachten nun die identische Abbildung (oder Einbettung) von T nach $\mathcal{A}$ und zeigen, dass dieses Netz eine approximative Eins ist. Die Eigenschaften (a), (b) sind offenbar erfüllt; wir zeigen noch (c). Da jedes $a \in \mathcal{A}$ eine Linearkombination positiver Elemente ist, genügt es, $\lim_{u \in T} \|a - ua\| = 0$ für alle $a \geq 0$ zu zeigen. Weiter gilt nach Satz 3.1.4 für alle $a \geq 0$ und alle $u \in T$

$$\|(e-u)a\|^2 \overset{C^*\text{-Axiom}}{=} \|a(e-u)^2 a\| \leq \|a(e-u)a\|,$$

so dass es genügt, $\lim_{u \in T} \|a(e-u)a\| = 0$ zu zeigen. Nun ist nach Satz 3.1.4 für jedes feste $a \geq 0$ die Funktion

$$T \to \mathbb{R}^+, \; u \mapsto \|a(e-u)a\|$$

monoton fallend. Es genügt daher, für jedes $\varepsilon > 0$ ein $u_\varepsilon \in T$ mit

$$\|a(e-u_\varepsilon)a\| \leq \varepsilon \|a\|$$

zu finden. Dies ist leicht möglich: Für alle $a \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ ist $e + \frac{1}{\varepsilon}a$ invertierbar. Daher ist das Element

$$u_\varepsilon := (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1}\frac{1}{\varepsilon}a = e - (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1}$$

wohldefiniert und liegt in T (es ist ja $e < e + \frac{1}{\varepsilon}a$, also $0 \leq (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1} < e$). Für dieses Element ist

$$\begin{aligned} a(e-u_\varepsilon)a &= a(e - (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1}\frac{1}{\varepsilon}a)a = (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1}a^2 \\ &= (e + \frac{1}{\varepsilon}a)^{-1}\frac{1}{\varepsilon}a \cdot \varepsilon a \leq \varepsilon a, \end{aligned}$$

woraus, wie gewünscht, $\|a(e-u_\varepsilon)a\| \leq \varepsilon\|a\|$ folgt. ■

Theorem 3.2.4 *Jedes abgeschlossene Ideal einer C^*-Algebra ist symmetrisch.*

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{B} := \mathcal{J} \cap \mathcal{J}^*$ eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{A}$ (beachte, dass $\mathcal{J}\mathcal{J}^*$, $\mathcal{J}^*\mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}$). Nach Satz 3.2.3 gibt es eine approximative Eins $\{e_t\}_{t \in T}$ in $\mathcal{B}$. Für jedes $j \in \mathcal{J}$ ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{t \in T} \|j^* - j^* e_t\|^2 &= \lim_{t \in T} \|(j - e_t j)(j^* - j^* e_t)\| \\ &= \lim_{t \in T} \|(jj^* - jj^* e_t) - e_t(jj^* - jj^* e_t)\| = 0. \end{aligned}$$

Da e_t zu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ gehört und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$ ist, folgt $j^* \in \mathcal{J}$. ■

Theorem 3.2.5 *Sei $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Wir definieren auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ Operationen und eine Norm wie oben sowie eine Involution durch $(a+\mathcal{J})^* := a^* + \mathcal{J}$. Dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine C^*-Algebra.*

Beweis. Wegen Satz 3.2.4 ist die Involution korrekt definiert, und aus $\|a^*+j\| = \|a+j^*\|$ und der Symmetrie von $\mathcal{J}$ folgt $\|a^*+\mathcal{J}\| = \|a+\mathcal{J}\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Wir zeigen zuerst: Ist $\{e_t\}_{t\in T}$ eine approximative Eins in $\mathcal{J}$, so gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$

$$\Big(\|a+\mathcal{J}\| \stackrel{\text{Def.}}{=} \Big) \quad \inf_{j\in\mathcal{J}} \|a+j\| = \lim_{t\in T} \|a - ae_t\| \tag{3.2.1}$$

(die Existenz des Grenzwertes ist Teil der Behauptung).

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $j \in \mathcal{J}$ mit $\|a+j\| \le \|a+\mathcal{J}\| + \varepsilon/2$. Mit diesem j erhalten wir für alle $t \in T$

$$\begin{aligned}
\|a+\mathcal{J}\| &\le \|a - ae_t\| \qquad (\text{da } ae_t \in \mathcal{J}) \\
&\le \|a + j - (a+j)e_t\| + \|j - je_t\| \\
&= \|(a+j)(e-e_t)\| + \|j - je_t\| \\
&\le \|a+j\| + \|j - je_t\| \\
&\le \|a+\mathcal{J}\| + \varepsilon/2 + \|j - je_t\|.
\end{aligned}$$

Wir wählen $t_0 \in T$ so, dass $\|j - je_t\| < \varepsilon/2$ für alle $t \succ t_0$. Für diese t ist dann

$$\|a+\mathcal{J}\| \le \|a - ae_t\| \le \|a+\mathcal{J}\| + \varepsilon.$$

Damit ist (3.2.1) gezeigt. Aus (3.2.1) folgt nun für alle $a \in \mathcal{A}$ und $j \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned}
\|a^*a+\mathcal{J}\| &= \lim_{t\in T} \|a^*a(e-e_t)\| \\
&\ge \lim_{t\in T} \|(e-e_t)a^*a(e-e_t)\| \\
&= \lim_{t\in T} \|a(e-e_t)\|^2 = \|a+\mathcal{J}\|^2,
\end{aligned}$$

also $\|(a^*+\mathcal{J})(a+\mathcal{J})\| \ge \|a+\mathcal{J}\|^2$. Die umgekehrte Ungleichung ist klar. ■

Theorem 3.2.6 *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus. Dann gilt*
(a) W ist stetig und $\|W\| \le 1$.
(b) Ist W injektiv, so ist W eine Isometrie.
(c) $W(\mathcal{A})$ ist abgeschlossen in $\mathcal{B}$ und folglich eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}$.

Beweis. (a) Dies ist Satz 1.4.12.

(b) Angenommen, W ist keine Isometrie. Dann gibt es ein $b \in \mathcal{A}$ mit $\|b\| = 1$ und $\|W(b)\| < 1$ (beachte Teil (a)). Für $a := b^*b$ ist dann $\|a\| = 1$ und $\|W(a)\| = 1-\varepsilon$ mit einem $\varepsilon \in (0,1]$. Wir wählen eine Funktion $f \in C[0,1]$ mit $f(1) = 1$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1-\varepsilon]$. Mit dem stetigen Funktionalkalkül definieren wir

$f(a)$ als Element der kleinsten abgeschlossenen Unteralgebra $\tilde{\mathcal{A}}_a$ von $\tilde{\mathcal{A}}$, welche a und e enthält. Wegen $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ und $1 \in \sigma(a)$ ist $1 \in \sigma(f(a))$ und daher insbesondere $f(a) \neq 0$.

Nun liegt wegen $f(0) = 0$ das Element $f(a)$ aber bereits in $\mathcal{A}$ (Übung). Es ist daher $W(f(a)) \neq 0$ (sonst wäre W nicht injektiv). Folglich enthält $\sigma(W(f(a)))$ wenigstens einen Punkt ungleich 0. Nun ist aber andererseits $W(p(a)) = p(W(a))$ für jedes Polynom und daher $W(f(a)) = f(W(a))$ (streng genommen müssen wir hierfür W auf $\tilde{\mathcal{A}}$ oder wenigstens auf $\tilde{\mathcal{A}}_a$ fortsetzen. Dies kann wie im Beweis von Satz 1.4.12 geschehen). Hieraus und aus dem Spektralsatz erhalten wir

$$\sigma(W(f(a))) = \sigma(f(W(a))) = f(\sigma(W(a))) \subseteq f([0,\, 1-\varepsilon]) = \{0\},$$

ein Widerspruch.

(c) Der Kern von W ist ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$, und $\mathcal{A}/\ker W$ ist eine C^*-Algebra. Der Homomorphismus W induziert einen *-Homomorphismus

$$W^\pi : \mathcal{A}/\ker W \to \mathcal{B},\ a + \ker W \mapsto W(a),$$

dessen Bild mit dem von W übereinstimmt und der injektiv ist. Nach (b) ist W^π eine Isometrie. Hieraus folgt die Abgeschlossenheit von $\operatorname{Im} W = \operatorname{Im} W^\pi$. Die übrigen Aussagen sind leicht zu sehen. ■

Theorem 3.2.7 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$. Dann ist die kleinste C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{B}$ und $\mathcal{J}$ umfasst, gleich der algebraischen Summe $\mathcal{B} + \mathcal{J}$.*

Beweis. Offenbar ist $\mathcal{B}+\mathcal{J}$ die kleinste symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die $\mathcal{B}$ und $\mathcal{J}$ enthält. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}+\mathcal{J}$ erhalten wir so: Sei $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ der kanonische Homomorphismus. Nach Satz 3.2.6 ist $\pi(\mathcal{B})$ in $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ abgeschlossen. Dann ist aber auch $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{B})) = \mathcal{B} + \mathcal{J}$ abgeschlossen. ■

3.3 Positive Funktionale und Zustände

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Ein lineares Funktional $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ heißt *positiv*, wenn $f(a) \geq 0$ für alle positiven $a \in \mathcal{A}$. Ein stetiges (vgl. Satz 3.3.2 unten) positives Funktional f auf $\mathcal{A}$ heißt ein *Zustand*, wenn $\|f\| = 1$.

Beispiel 3.3.1 (a) Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine symmetrische und abgeschlossene Unteralgebra von $L(H)$. Für jedes $x \in H$ ist dann

$$f_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}, \quad A \mapsto \langle Ax,\, x\rangle \tag{3.3.1}$$

ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Jeder positive Operator $A \in \mathcal{A}$ ist nämlich das Quadrat eines selbstadjungierten Operator B (Lemma 3.1.1). Folglich ist

$$\langle Ax,\, x\rangle = \langle B^2x,\, x\rangle = \langle Bx,\, Bx\rangle \geq 0.$$

Gehört der identische Operator I zu $\mathcal{A}$ und ist $\|x\| = 1$, so ist f_x sogar ein Zustand von $\mathcal{A}$. Zustände dieser Gestalt heißen *Vektorzustände*.

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra, so ist jeder Charakter von $\mathcal{A}$ ein positives Funktional und, falls $\mathcal{A}$ ein Einslement besitzt, sogar ein Zustand. ■

Die positiven Funktionale in diesen Beispielen sind stetig. Dies ist kein Zufall.

Theorem 3.3.2 *Positive Funktionale auf C^*-Algebren sind stetig.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und f ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement, so bezeichnen wir es mit e. Andernfalls sei e das Einselement von $\tilde{\mathcal{A}}$. Wir zeigen zuerst, dass f auf der Menge $M := \{a \in \mathcal{A}_+ : 0 \le a \le e\}$ beschränkt ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge (x_n) in M mit $f(x_n) \to \infty$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ so, dass $f(x_n) \ge 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}'$.

Wir definieren eine Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $\alpha_n = 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}'$ und $\alpha_n = 0$ für alle übrigen n und betrachten das Element $x := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$ (beachte: die Reihe konvergiert absolut). Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{n=1}^m \alpha_n x_n \le x$$

und daher (Monotonie von f)

$$f\Big(\sum_{n=1}^m \alpha_n x_n\Big) = \sum_{n=1}^m \alpha_n f(x_n) \le f(x).$$

Wegen $f(x_n) \ge 0$ folgt hieraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n f(x_n)$. Nun ist aber

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n f(x_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}'} \alpha_n f(x_n) \ge \sum_{n \in \mathbb{N}'} 2^{-n} 2^n = \infty;$$

ein Widerspruch. Also ist f beschränkt auf M, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $f(x) \le C$ für alle $x \in M$.

Sei nun x ein selbstadjungiertes Element mit $\|x\| \le 1$. Dann ist $x = x_+ - x_-$ mit positiven Elementen x_+ und x_-. Aus $x_+ \le |x| \le e$ und $x_- \le |x| \le e$ (Gelfand/Naimark) folgt $x_\pm \in M$ und somit

$$|f(x)| \le |f(x_+)| + |f(x_-)| \le 2C.$$

Ist schließlich $x \in \mathcal{A}$ ein beliebiges Element mit $\|x\| \le 1$, so haben wir wegen $\|\frac{1}{2}(x \pm x^*)\| \le 1$

$$|f(x)| \le \Big|f(\frac{1}{2}(x + x^*))\Big| + \Big|f(\frac{1}{2i}(x - x^*))\Big| \le 4C.$$

Somit ist f stetig (mit $\|f\| \le 4C$). ■

Theorem 3.3.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und f ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Dann ist*

(a) $|f(a^*b)|^2 \le f(a^*a)f(b^*b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ (Cauchy-Schwarz Ungleichung),

(b) f symmetrisch, d.h. $f(a^*) = \overline{f(a)}$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Beweis. (a) Für beliebige $a, b \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $(a + \lambda b)^*(a + \lambda b) \ge 0$ (Satz 3.1.2 (b)) und daher

$$f((a + \lambda b)^*(a + \lambda b)) = |\lambda|^2 f(b^*b) + \overline{\lambda} f(b^*a) + \lambda f(a^*b) + f(a^*a) \ge 0. \qquad (3.3.2)$$

Für $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = i$ erhält man insbesondere

$$f(a^*b) + f(b^*a) \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad i(f(a^*b) - f(b^*a)) \in \mathbb{R}.$$

Hieraus folgt sofort (Nachrechnen!), dass

$$f(a^*b) = \overline{f(b^*a)}. \qquad (3.3.3)$$

Im Falle $f(a^*b) = 0$ gilt die zu beweisende Ungleichung offenbar. Sei also $f(a^*b) \neq 0$. Wir ersetzen λ in (3.3.2) durch $\mu f(b^*a)/|f(b^*a)|$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Dann geht (3.3.2) über in

$$\mu^2 f(b^*b) + 2\mu |f(a^*b)| + f(a^*a) \ge 0.$$

Da dies für beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$ gilt, muss $|f(a^*b)|^2 \le f(a^*a)f(b^*b)$ sein.

(b) Sei $(e_t)_{t\in T}$ eine approximative Eins für $\mathcal{A}$. Aus (3.3.3) folgt für alle $a \in \mathcal{A}$

$$f(a^*e_t) = \overline{f(e_t^*a)} = \overline{f(e_t a)}.$$

Wir bilden auf beiden Seiten den Limes $\lim_{t\in T}$ und beachten, dass f nach Satz 3.3.2 stetig ist. Dann folgt $f(a^*) = \overline{f(a)}$ für alle $a \in \mathcal{A}$. ■

Theorem 3.3.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und f ein lineares Funktional auf $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) f ist positiv.

(b) f ist stetig, und für jede approximative Eins $(e_t)_{t\in T}$ von $\mathcal{A}$ gilt $f(e_t) \to \|f\|$.

(c) f ist stetig, und es gibt eine approximative Eins $(e_t)_{t\in T}$ von $\mathcal{A}$ mit $f(e_t) \to \|f\|$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Positive Funktionale sind stetig (Satz 3.3.2). Sei $(e_t)_{t\in T}$ eine approximative Eins von $\mathcal{A}$. Dann ist $T \to \mathbb{R}^+,\ t \mapsto f(e_t)$ ein monoton wachsendes Netz, welches wegen $f(e_t) = |f(e_t)| \le \|f\|$ nach oben beschränkt ist. Folglich existiert der Grenzwert $\alpha := \lim_{t\in T} f(e_t)$, und es ist $0 \le \alpha \le \|f\|$. Falls $\|f\| = 0$, so ist auch $\alpha = 0$, und es ist nichts mehr zu zeigen.

Sei also $\|f\| > 0$. Nach Cauchy-Schwarz ist für alle $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| \le 1$

$$|f(e_t a)|^2 \le f(e_t^2)f(a^*a) \le f(e_t)\|f\| \qquad (3.3.4)$$

(beachte, dass $e_t^2 \leq e_t$, da $e_t \geq 0$ und $\|e_t\| \leq 1$). Grenzübergang bezüglich $t \in T$ in (3.3.4) liefert

$$|f(a)|^2 \leq \alpha \|f\| \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A} \text{ mit } \|a\| \leq 1$$

und damit

$$\|f\|^2 = \sup_{\|a\| \leq 1} |f(a)|^2 \leq \alpha \|f\| \quad \text{bzw.} \quad \|f\| \leq \alpha.$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Diese Implikation ist offensichtlich.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei f stetig und $(e_t)_{t \in T}$ eine approximative Eins mit $f(e_t) \to \|f\|$. Für $f = 0$ ist nichts weiter zu zeigen. Sei also $f \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass f symmetrisch ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass f selbstadjungierte Elemente in reelle Zahlen überführt.

Sei also $a \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert und $\|a\| = 1$. Wir schreiben $f(a)$ als $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und nehmen o.E.d.A. an, dass $\beta \geq 0$ (andernfalls ersetzen wir a durch $-a$). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein $t_n \in T$ so, dass

$$\|e_t a - a e_t\| < 1/n \quad \text{für alle } t \succ t_n.$$

Für alle $t \succ t_n$ ist dann

$$\begin{aligned} \|ne_t - ia\|^2 &= \|(ne_t - ia)^*(ne_t - ia)\| = \|(ne_t + ia)(ne_t - ia)\| \\ &= \|n^2 e_t^2 + a^2 - in(e_t a - a e_t)\| \leq n^2 + 2. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Weiter haben wir nach Voraussetzung

$$\lim_{t \in T} |f(ne_t - ia)|^2 = \lim_{t \in T} \left| nf(e_t) - i(\alpha + \beta i) \right|^2 = \left| n\|f\| + \beta - i\alpha \right|^2 = (n\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ findet man daher ein t_ε so, dass

$$(n\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 - \varepsilon \leq |f(ne_t - ia)|^2 \quad \text{für alle } t \succ t_\varepsilon. \tag{3.3.6}$$

Wir wählen nun zu gegebenen $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ein $t \in T$, welches sowohl größer als t_n als auch größer als t_ε ist. Für dieses t gilt nach (3.3.5) und (3.3.6)

$$\begin{aligned} (n\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 - \varepsilon &\leq |f(ne_t - ia)|^2 \\ &\leq \|f\|^2 \|ne_t - ia\|^2 \leq (n^2 + 2)\|f\|^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gültigen Ungleichungen

$$(n\|f\| + \beta)^2 + \alpha^2 - \varepsilon \leq (n^2 + 2)\|f\|^2$$

bzw.

$$2\beta n\|f\| + \beta^2 + \alpha^2 - \varepsilon \leq 2\|f\|^2.$$

Wegen $\|f\| > 0$ und $\beta \geq 0$ impliziert dies $\beta = 0$. Das Funktional f ist also symmetrisch.

Sei nun $a \in \mathcal{A}$ ein positives Element mit $\|a\| = 1$. Dann ist für jedes $t \in T$ das Element $e_t - a$ selbstadjungiert und daher (wie soeben gezeigt) $f(e_t - a)$ reell. Folglich ist

$$f(e_t - a) \leq \|f\| \, \|e_t - a\|$$

bzw.

$$f(e_t - a) \leq \|e_t - e_t a + e_t a - a\| \, \|f\| \leq \big(\|e_t - e_t a\| + \|e_t a - a\|\big) \|f\|. \tag{3.3.7}$$

Nun ist $\|e_t - e_t a\| \leq 1$ für alle $t \in T$. Um dies einzusehen, betten wir nötigenfalls $\mathcal{A}$ in eine C^*-Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ mit Einselement e isometrisch ein. Dann ist

$$\begin{aligned} \|e_t - e_t a\|_{\mathcal{A}} &= \|e_t - e_t a\|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \|e_t e - e_t a\|_{\tilde{\mathcal{A}}} \\ &\leq \|e_t\|_{\tilde{\mathcal{A}}} \, \|e - a\|_{\tilde{\mathcal{A}}} \leq \|e_t\|_{\mathcal{A}} \leq 1. \end{aligned}$$

Wir können also (3.3.7) weiter abschätzen durch

$$f(e_t) - f(a) \leq \big(1 + \|e_t a - a\|\big) \|f\|.$$

Ein Grenzübergang bzgl. $t \in T$ liefert schließlich $\|f\| - f(a) \leq \|f\|$, d.h. $f(a) \geq 0$.
■

Das folgende Korollar ist u.a. nützlich, weil es die Fortsetzbarkeit von positiven Funktionalen und Zuständen mit Hahn/Banach liefert.

Korollar 3.3.5 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e. Dann sind folgende Aussagen äquivalent für ein lineares Funktional f auf $\mathcal{A}$:*

(a) f ist positiv,

(b) f ist stetig und $\|f\| = f(e)$.

Auch die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(c) f ist Zustand,

(d) f ist stetig und $\|f\| = f(e) = 1$.

Beweis. Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt sofort aus Satz 3.3.4, wenn wir als approximative Eins die konstante Folge $(e)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen. Die Äquivalenz von (c) und (d) ist eine unmittelbare Folge von $(a) \Leftrightarrow (b)$. ■

Korollar 3.3.6 *Die Menge $S(\mathcal{A})$ der Zustände einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins ist konvex und *-schwach kompakt.*

Die Menge $S(\mathcal{A})$ heißt auch der *Zustandsraum* von $\mathcal{A}$.

Beweis. Seien $f, g \in S(\mathcal{A})$ und $\mu \in [0, 1]$. Dann ist $\mu f + (1-\mu)g$ ein stetiges Funktional mit $(\mu f + (1-\mu)g)(e) = \mu + (1-\mu) = 1$ sowie

$$\|\mu f + (1-\mu)g\| \leq \mu\|f\| + (1-\mu)\|g\| = 1.$$

Wegen $(\mu f + (1-\mu)g)(e) = 1$ und $\|e\| = 1$ folgt schließlich $\|\mu f + (1-\mu)g\| \geq 1$. Nach Korollar 3.3.5 ist $\mu f + (1-\mu)g$ ein Zustand.

Wir zeigen die Kompaktheit. Da $S(\mathcal{A})$ in der Einheitskugel $\{f \in \mathcal{A}' : \|f\| \leq 1\}$ von $\mathcal{A}'$ enthalten ist und diese Menge nach Banach-Alaoglu ein Hausdorffscher Kompakt bzgl. der *-schwachen Topologie ist, genügt es zu zeigen, dass $S(\mathcal{A})$ *-schwach abgeschlossen in $\{f \in \mathcal{A}' : \|f\| \leq 1\}$ ist.

Sei also $(f_t)_{t\in T}$ ein Netz von Zuständen, welches *-schwach gegen ein Funktional $f \in \mathcal{A}'$ mit $\|f\| \leq 1$ konvergiert. Dann ist f offenbar stetig und $\|f\| \leq 1$. Weiter ist $1 = f_t(e) \to f(e)$ nach Definition der *-schwachen Topologie. Es ist daher $f(e) = 1$ und folglich $\|f\| = 1$. Also ist $f \in S(\mathcal{A})$, und $S(\mathcal{A})$ ist abgeschlossen.
■

3.4 Darstellungen

Wir beginnen mit einigen wichtigen Definitionen. Eine *Darstellung* einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Paar (H, π), bestehend aus einem Hilbertraum H und einem *-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to L(H)$.

Eine Darstellung (H, π) von $\mathcal{A}$ heißt *treu* (faithful), wenn $\ker \pi = \{0\}$ ist (d.h. wenn π injektiv ist). Ist (H, π) eine treue Darstellung, so ist $\mathcal{A}$ *-isomorph zu einer C^*-Unteralgebra von $L(H)$. Für jede C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist

$$\pi : \mathcal{A} \to L(H),\ a \mapsto 0$$

eine Darstellung, die sogenannte *triviale Darstellung*. Der *triviale Teil* einer Darstellung wird durch den Unterraum

$$H_0 := \{x \in H : \pi(a)x = 0 \text{ für alle } a \in \mathcal{A}\}$$

von H charakterisiert. Darstellungen mit $H_0 = \{0\}$ heißen *nicht-entartet*. Schließlich nennen wir eine Darstellung (H, π) von $\mathcal{A}$ *zyklisch* (genauer: *topologisch zyklisch*), wenn es einen Vektor $x \in H$ gibt, so dass die Menge $\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}$ dicht in H bzgl. der Normkonvergenz liegt. Der Vektor x heißt dann auch (*topologisch*) *zyklisch*.

Lemma 3.4.1 *Zyklische Darstellungen sind nicht entartet.*

Beweis. Sei $y \in H$ und $\pi(a)y = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Weiter sei $x \in H$ ein zyklischer Vektor der Darstellung (H, π). Dann gibt es eine Folge (a_n) in $\mathcal{A}$, so dass $\lim \pi(a_n)x = y$. Schließlich sei $(e_t)_{t\in T}$ eine approximative Eins in $\mathcal{A}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in T$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|y\| &\leq \|y - \pi(a_n)x\| + \|\pi(a_n)x - \pi(e_t a_n)x\| + \|\pi(e_t a_n)x - \pi(e_t)y\| \\ &\leq \|y - \pi(a_n)x\| + \|\pi\|\,\|a_n - e_t a_n\|\,\|x\| + \|\pi(e_t)\|\,\|\pi(a_n)x - y\| \\ &\leq 2\|y - \pi(a_n)x\| + \|a_n - e_t a_n\|\,\|x\|. \end{aligned}$$

Für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\|y - \pi(a_n)x\| < \varepsilon/4$ und dann $t \in T$ so, dass $\|a_n - e_t a_n\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$. Dann ist $\|y\| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. es ist $y = 0$. ■

Ist (H_1, π_1) eine Darstellung von $\mathcal{A}$ und H_2 ein weiterer Hilbertraum, für den eine bijektive Isometrie U von H_1 auf H_2 existiert, so ist (H_2, π_2) mit

$$\pi_2(a) := U\pi_1(a)U^* \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A} \tag{3.4.1}$$

ebenfalls eine Darstellung von $\mathcal{A}$. Zwei Darstellungen (H_1, π_1), (H_2, π_2) von $\mathcal{A}$ werden *unitär äquivalent* genannt, wenn es eine bijektive Isometrie $U : H_1 \to H_2$ gibt, so dass (3.4.1) erfüllt ist. Unitäre Äquivalenz ist, wie der Name schon andeutet, eine Äquivalenzrelation. Unitär äquivalente Darstellungen werden in der Regel nicht voneinander unterschieden.

3.5 Die GNS-Konstruktion

Die folgende Konstruktion geht auf Gelfand/Naimark (1943) und Segal (1947) zurück.

Theorem 3.5.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und f ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine zyklische Darstellung (H_f, π_f) mit einem zyklischen Vektor $\xi_f \in H_f$, so dass $\|\xi_f\|^2 = \|f\|$ und*

$$f(a) = \langle \pi_f(a)\xi_f, \xi_f \rangle_{H_f} \quad \textit{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz.

Beweis. Im ersten Schritt zeigen wir, dass die Menge

$$\mathcal{J}_f := \{j \in \mathcal{A} : f(j^*j) = 0\}$$

ein Linksideal von $\mathcal{A}$ ist. Seien zunächst $j, k \in \mathcal{J}_f$. Dann ist $(j+k)^*(j+k) = j^*j + k^*k + j^*k + k^*j$. Nach Definition ist $f(j^*j) = f(k^*k) = 0$. Mit Cauchy-Schwarz folgt weiter

$$|f(j^*k)|^2 \leq f(j^*j)f(k^*k) = 0,$$

also $f(j^*k) = 0$. Analog ist $f(k^*j) = 0$ und somit $j + k \in \mathcal{J}_f$.

Seien nun $j \in \mathcal{J}_f$ und $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $a^*a \leq \|a^*a\|e$ (hier ist e das Einselement in $\tilde{\mathcal{A}}$). Mit Satz 3.1.4 (b) folgt $j^*a^*aj \leq \|a^*a\|j^*j$. Da f positiv ist, folgt weiter

$$0 \leq f((aj)^*(aj)) = f(j^*a^*aj) \leq f(\|a^*a\|j^*j) \leq \|a\|^2 f(j^*j) = 0,$$

d.h. es ist $aj \in \mathcal{J}_f$.

Wir bilden den (linearen) Faktorraum $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$, dessen Elemente die Nebenklassen $x_a := a + \mathcal{J}_f$ der Elemente aus $\mathcal{A}$ sind. Auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$ definieren wir

$$\langle x_a,\, x_b\rangle := f(b^*a) \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}. \tag{3.5.1}$$

Wir zeigen im nächsten Schritt, dass diese Definition korrekt ist und eine positiv-definite Sesquilinearform auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$ liefert. Für beliebige $a,\, b \in \mathcal{A}$ und $j,\, k \in \mathcal{J}_f$ ist

$$f((b+k)^*(a+j)) = f(b^*a) + f(b^*j) + f(k^*a) + f(k^*j).$$

Mit Cauchy-Schwarz sieht man wie oben, dass die letzten drei Summanden verschwinden. Somit ist

$$f((b+k)^*(a+j)) = f(b^*a),$$

d.h. die rechte Seite von (3.5.1) ist tatsächlich von der konkreten Wahl der Repräsentanten der Nebenklassen $x_a,\, x_b$ unabhängig.

Die Sesquilinearität von (3.5.1) ist nun offensichtlich, ebenso die positive Definitheit: Aus $f(a^*a) = 0$ folgt nämlich laut Definition $a \in \mathcal{J}_f$, d.h. $x_a = 0$. Wegen der Positivität von f ist schließlich $f(a^*a) \geq 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

Sei H_f die Vervollständigung von $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$ bezüglich der durch das Skalarprodukt (3.5.1) definierten Norm. H_f wird auf natürliche Weise zu einem Hilbertraum, dessen Skalarprodukt wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oder $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_f}$ bezeichnen.

Wir erklären nun für jedes $a \in \mathcal{A}$ einen Operator $\pi_f(a)$ auf dem dichten Teilraum $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$ von H_f durch $\pi_f(a)x_b := x_{ab}$. Für jedes $j \in \mathcal{J}_f$ ist offenbar $x_{a(b+j)} = x_{ab+aj} = x_{ab}$. Damit ist die Definition korrekt, und sie liefert einen linearen Operator auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$. Weiter ist

$$\|\pi_f(a)x_b\|^2 = \langle x_{ab},\, x_{ab}\rangle = f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b) = \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \|x_b\|_{H_f}^2,$$

d.h. der Operator $\pi_f(a)$ ist auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}_f$ stetig und $\|\pi_f(a)\| \leq \|a\|$. Wir können daher $\pi_f(a)$ stetig zu einem auf ganz H_f definierten und beschränkten Operator fortsetzen, den wir wieder mit $\pi_f(a)$ bezeichnen. Die so erklärte Abbildung $\pi_f : \mathcal{A} \to L(H_f)$ ist sogar ein *-Homomorphismus. Es ist nämlich

$$\pi_f(a)\pi_f(b)x_c = x_{a(bc)} = x_{(ab)c} = \pi_f(ab)x_c \quad \text{für alle } a,\, b,\, c \in \mathcal{A}.$$

Somit stimmen $\pi_f(a)\pi_f(b)$ und $\pi_f(ab)$ auf einem dichten Teilraum von H_f überein, woraus die Multiplikativität von π_f folgt. Die Symmetrie erhält man ähnlich aus der für alle $a,\, b,\, c \in \mathcal{A}$ gültigen Identität

$$\begin{aligned}\langle \pi_f(a)x_b,\, x_c\rangle &= \langle x_{ab},\, x_c\rangle = f(c^*ab) = f((a^*c)^*b) \\ &= \langle x_b,\, x_{a^*c}\rangle = \langle x_b,\, \pi_f(a^*)x_c\rangle,\end{aligned}$$

woraus $\pi_f(a)^* = \pi_f(a^*)$ folgt.

Also ist $(H_f,\, \pi_f)$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$. Wir zeigen nun, dass diese zyklisch ist. Sei $(e_t)_{t\in T}$ eine approximative Eins in $\mathcal{A}$. Für alle $s, t \in T$ mit $s \prec t$ ist

$$\|x_{e_t} - x_{e_s}\|^2 = f((e_t - e_s)^2) \leq f(e_t - e_s).$$

Daher und wegen $\lim_{t\in T} f(e_t) = \|f\|$ (Satz 3.3.4) konvergiert das Netz $(x_{e_t})_{t\in T}$ in H_f. Sein Grenzwert sei ξ_f. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist dann

$$\pi_f(a)\xi_f = \lim_{t\in T} \pi_f(a)x_{e_t} = \lim_{t\in T} x_{ae_t} = x_a \tag{3.5.2}$$

wegen der Stetigkeit des Operators $\pi_f(a)$ sowie des kanonischen Homomorphismus $a \mapsto x_a$. Da die Menge $\{x_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ nach Konstruktion dicht in H_f liegt, ist ξ_f ein zyklischer Vektor und (H_f, π_f) eine zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$.

Wir zeigen als nächstes, dass f ein Vektorzustand ist. Für alle $a \in \mathcal{A}$ ist

$$\langle \pi_f(a^*a)\xi_f,\, \xi_f\rangle = \langle \pi_f(a)\xi_f,\, \pi_f(a)\xi_f\rangle \overset{(3.5.2)}{=} \langle x_a,\, x_a\rangle = f(a^*a),$$

woraus wegen der Linearität von π_f und f sowie aus der Tatsache, dass jedes $b \in \mathcal{A}$ eine Linearkombination (maximal 4) positiver Elemente aus $\mathcal{A}$ ist, folgt:

$$f(b) = \langle \pi_f(b)\xi_f,\, \xi_f\rangle \quad \text{für alle } b \in \mathcal{A}.$$

Setzen wir hierin $b = e_t$ und beachten (3.5.2), folgt

$$f(e_t) = \langle x_{e_t},\, \xi_f\rangle \quad \text{für alle } t \in T.$$

Grenzübergang bzgl. $t \in T$ liefert mit Satz 3.3.4

$$\|f\| = \langle \xi_f,\, \xi_f\rangle = \|\xi_f\|^2.$$

Es verbleibt noch, die Eindeutigkeit der gefundenen Darstellung nachzuweisen. Seien $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, f ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$ und $(H_1,\, \pi_1)$ bzw. $(H_2,\, \pi_2)$ zyklische Darstellungen von $\mathcal{A}$ mit zyklischen Vektoren $\xi_1 \in H_1$ bzw. $\xi_2 \in H_2$ mit

$$f(a) = \langle \pi_1(a)\xi_1,\, \xi_1\rangle_{H_1} = \langle \pi_2(a)\xi_2,\, \xi_2\rangle_{H_2} \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Für alle $a \in \mathcal{A}$ ist dann

$$\|\pi_1(a)\xi_1\|_{H_1}^2 = \langle \pi_1(a)\xi_1,\, \pi_1(a)\xi_1\rangle_{H_1} = \langle \pi_1(a^*a)\xi_1,\, \xi_1\rangle_{H_1} = f(a^*a)$$

und analog $\|\pi_2(a)\xi_2\|_{H_2}^2 = f(a^*a)$. Falls also $\pi_1(a)\xi_1 = \pi_1(b)\xi_1$ für zwei Elemente $a,\, b \in \mathcal{A}$ gilt, so ist auch $\pi_2(a)\xi_2 = \pi_2(b)\xi_2$. Es ist daher korrekt, auf der in H_1 dichten Menge $\{\pi_1(a)\xi_1 : a \in \mathcal{A}\}$ einen Operator U durch

$$U : \pi_1(a)\xi_1 \mapsto \pi_2(a)\xi_2$$

zu erklären. Dieser Operator erhält Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}\langle U\pi_1(a)\xi_1,\, U\pi_1(b)\xi_1\rangle_{H_2} &= \langle \pi_2(a)\xi_2,\, \pi_2(b)\xi_2\rangle_{H_2} = \langle \pi_2(b^*a)\xi_2,\, \xi_2\rangle_{H_2} \\ &= f(b^*a) = \langle \pi_1(b^*a)\xi_1,\, \xi_1\rangle_{H_1} = \langle \pi_1(a)\xi_1,\, \pi_1(b)\xi_1\rangle_{H_1}.\end{aligned}$$

Der Operator U kann daher zu einem unitären Operator von H_1 auf H_2 fortgesetzt werden. Da für beliebige $a,\, b \in \mathcal{A}$ gilt

$$\pi_2(a)U\pi_1(b)\xi_1 = \pi_2(a)\pi_2(b)\xi_2 = \pi_2(ab)\xi_2 = U\pi_1(ab)\xi_1 = U\pi_1(a)\pi_1(b)\xi_1$$

und da die $\pi_1(b)\xi_1$ dicht in H_1 liegen, folgt $\pi_2(a)Uz = U\pi_1(a)z$ für alle $z \in H_1$ bzw. $\pi_2(a)U = U\pi_1(a)$. Daher vermittelt U die unitäre Äquivalenz der Darstellungen $(H_1,\, \pi_1)$ und $(H_2,\, \pi_2)$. ∎

Das nächste Resultat zeigt, dass C^*-Algebren stets "genügend viele" positive Funktionale und zugehörige zyklische Darstellungen besitzen.

Theorem 3.5.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $a \in \mathcal{A}$. Dann gibt es einen Zustand g von $\mathcal{A}$, so dass*

$$g(a^*a) = \|a\|^2,$$

und für die dem Zustand g vermöge Satz 3.5.1 *zugeordnete Darstellung $(H_g,\, \pi_g)$ gilt*

$$\|\pi_g(a)\| = \|a\|.$$

Beweis. Wir betrachten den linearen Teilraum $L := \{\lambda e + \mu a^*a : \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}\}$ der Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ und definieren auf L ein Funktional f durch

$$f(\lambda e + \mu a^*a) := \lambda + \mu\|a^*a\|.$$

Diese Definition ist natürlich nur korrekt, wenn e und a^*a linear unabhängig sind. Andernfalls vereinfacht sich der Beweis nur (Hausaufgabe).

Wegen $a^*a \geq 0$ ist $\|a^*a\| \in \sigma(a^*a)$, und aus dem Satz von Gelfand-Naimark für kommutative C^*-Algebren folgt für alle $\lambda,\, \mu \in \mathbb{C}$

$$\big|\lambda + \mu\|a^*a\|\big| \leq \sup\{|\lambda + \mu t| : t \in \sigma(a^*a)\} = \|\lambda e + \mu a^*a\|.$$

Somit ist f auf L stetig und $\|f\| \leq 1$. Weiter ist offenbar $f(e) = 1$ und daher $\|f\| = f(e) = 1$.

Mit Hahn-Banach kann das Funktional f unter Beibehaltung seiner Norm zu einem stetigen Funktional $\tilde{f}$ auf ganz $\tilde{\mathcal{A}}$ fortgesetzt werden, welches dann ein Zustand von $\tilde{\mathcal{A}}$ ist. Sei g die Einschränkung von $\tilde{f}$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist g ein positives Funktional auf $\mathcal{A}$ mit Norm höchstens 1. Aus

$$g(a^*a) = \tilde{f}(a^*a) = f(a^*a) = \|a^*a\|$$

folgt, dass $\|g\| = 1$ und $g(a^*a) = \|a\|^2$. Damit ist g ein Zustand auf $\mathcal{A}$ und hat die gewünschten Eigenschaften.

Für die zu g gehörende zyklische Darstellung (H_g, π_g) mit zyklischem Vektor ξ_g gilt $\|\xi_g\|^2 = \|g\|$ nach Satz 3.5.1. Daher ist

$$\begin{aligned}\|a\|^2 = g(a^*a) &= \langle \pi_g(a^*a)\xi_g, \xi_g\rangle = \langle \pi_g(a)\xi_g, \pi_g(a)\xi_g\rangle \\ &= \|\pi_g(a)\xi_g\|^2 \leq \|\pi_g(a)\|^2\|g\| = \|\pi_g(a)\|^2.\end{aligned}$$

Es ist somit $\|a\| \leq \|\pi_g(a)\|$. Die umgekehrte Ungleichung $\|\pi_g(a)\| \leq \|a\|$ folgt aus $\|\pi_g\| \leq 1$ nach Satz 3.2.6 (a). ∎

Familien $\big((H_t, \pi_t)\big)_{t\in T}$ von Darstellungen einer Algebra $\mathcal{A}$ können zu einer einzigen Darstellung von $\mathcal{A}$ "verklebt" werden. Dazu erinnern wir an den Begriff der *direkten Summe* $\bigoplus_{t\in T} H_t$ einer Familie $(H_t)_{t\in T}$ von Hilberträumen H_t über einer beliebigen Indexmenge T. Die direkte Summe besteht aus allen Funktionen $f : T \to \bigcup_{t\in T} H_t$, welche im Punkt $t \in T$ einen Wert in H_t annehmen und für die

$$\|f\|^2 := \sum_{t\in T} \|f(t)\|^2_{H_t} < \infty. \tag{3.5.3}$$

Diese Bedingung kann man wie folgt verstehen: Die endlichen Teilmengen von T bilden bezüglich der Inklusion $\subseteq$ eine gerichtete Menge $\mathcal{F}$. Forderung (3.5.3) bedeutet, dass das Netz

$$\mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad F \mapsto \sum_{t\in F} \|f(t)\|^2_{H_t}$$

gegen die endliche Zahl $\sum_{t\in T} \|f(t)\|^2_{H_t}$ konvergiert. Für $f, g \in \bigoplus_{t\in T} H_t$ wird durch

$$\langle f, g\rangle := \lim_{F\in\mathcal{F}} \sum_{t\in F} \big\langle f(t), g(t)\big\rangle_{H_t}$$

ein Skalarprodukt definiert, welches $\bigoplus_{t\in T} H_t$ zu einem Hilbertraum macht. Ist nun $\big((H_t, \pi_t)\big)_{t\in T}$ eine Familie von Darstellungen einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, so kann man eine neue Darstellung (H, π) von $\mathcal{A}$ definieren, indem man $H := \bigoplus_{t\in T} H_t$ wählt und für jedes $a \in \mathcal{A}$ den Operator $\pi(a)$ auf H durch

$$\big(\pi(a)f\big)(t) := \pi_t(a)f(t), \quad t \in T,$$

erklärt. Man schreibt dann auch $(H, \pi) = \bigoplus_{t\in T}(H_t, \pi_t)$ und nennt (H, π) die *direkte Summe* der Darstellungen $\big((H_t, \pi_t)\big)_{t\in T}$.

Wir erhalten nun leicht den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes von Gelfand und Naimark, welcher aussagt, dass es für jede C^*-Algebra eine treue Darstellung gibt.

Theorem 3.5.3 *Jede C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist *-isomorph zu einer C^*-Algebra von linearen stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum H.*

Beweis. Für jeden Zustand f von $\mathcal{A}$ sei $(H_f,\, \pi_f)$ die nach Satz 3.5.1 konstruierte zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$, und es sei $(H,\, \pi) = \bigoplus_{f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}(H_f,\, \pi_f)$ die direkte Summe dieser Darstellungen. Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gibt es nach Satz 3.5.2 einen Zustand $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ mit $\|a\| = \|\pi_f(a)\|$. Folglich ist

$$\|\pi(a)\| \geq \|\pi_f(a)\| = \|a\|.$$

Andererseits wissen wir aus Satz 3.2.6(a), dass $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist. Somit ist π eine Isometrie. ■

Anmerkung 3.5.4 (a) Ist die Algebra $\mathcal{A}$ separabel, so kann H als separabler Hilbertraum gewählt werden. Wegen der Separabilität von $\mathcal{A}$ ist nämlich jeder der Hilberträume

$$H_f = \operatorname{clos}\{\pi_f(a)\xi_f : a \in \mathcal{A}\}$$

separabel. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dichte Teilfolge aus $\mathcal{A}$, so wählt man für jedes n eine Darstellung $(H_n,\, \pi_n)$ mit $\|\pi_n(a_n)\| = \|a_n\|$ gemäß Satz 3.5.2. Dann ist $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ separabel, und $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(H_n,\, \pi_n)$ ist eine treue Darstellung von $\mathcal{A}$.

(b) Man beachte, dass auch nichtseparable C^*-Algebren treue Darstellungen auf *separablen* Hilberträumen besitzen können. ■

Beispiel 3.5.5 Was liefert die GNS-Konstruktion für die Algebra $C(X)$ der stetigen Funktionen auf einem Hausdorffschen Kompakt X? Die positiven Funktionale auf $C(X)$ werden durch einen Satz von Riesz und Markov identifiziert.

Zur Erinnerung: Eine Teilmenge von X heißt G_δ-*Menge*, wenn sie ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen ist. Eine Teilmenge von X heißt eine *Bairemenge* (bzw. eine *Borelmenge*), wenn sie ein Element der kleinsten σ-Algebra über X ist, die alle kompakten G_δ-Mengen (bzw. alle offenen Mengen) enthält. Ein *Bairemaß* (bzw. ein *Borelmaß*) ist dann ein Maß μ auf der Menge aller Baire- (bzw. Borel-)mengen mit $\mu(X) < \infty$. Bairemengen sind Borelmengen, und man kann Bairesche Maße auf die Menge der Borelmengen fortsetzen. Von solchen Fortsetzungen kann es mehrere geben; es gibt jedoch genau eine Fortsetzung zu einem regulären Borelmaß. Dabei heißt ein Borelmaß μ *regulär*, wenn für jede Borelmenge Y gilt

$$\begin{aligned} \mu(Y) &= \inf\{\mu(O) : Y \subseteq O,\ O \text{ offen}\} \\ &= \sup\{\mu(C) : C \subseteq Y,\ C \text{ kompakt}\}. \end{aligned}$$

Es gibt also eine eindeutige Zuordnung zwischen Baireschen und regulären Borelmaßen. Wir können nun den Satz von Riesz/Markov formulieren:

Theorem 3.5.6 *Für jedes positive lineare Funktional φ auf $C(X)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Baire-Maß μ auf X, so dass*

$$\varphi(f) = \int_X f\, d\mu \quad \textit{für alle } f \in C(X).$$

Ein Beweis ist in [Reed/Simon I], Theorem IV. 14.

Ist nun φ ein positives Funktional auf $C(X)$ und μ das entsprechende Bairesche (oder reguläre Borel-)Maß, so liefert die GNS-Konstruktion für H_φ gerade den Raum $L^2(X, \mu)$, und π_φ liefert die Darstellung einer Funktion $f \in C(X)$ als Multiplikationsoperator

$$fI : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu), \quad a \mapsto fa.$$

Als zyklischer Vektor kann die Funktion $\xi_\varphi : X \to \mathbb{C},\ x \mapsto 1$ dienen. Umgekehrt imitiert die abstrakte GNS-Konstruktion gerade die Konstruktion des Lebesgueraumes $L^2(X, \mu)$ für ein konkretes Maß μ. ■

3.6 Irreduzible Darstellungen

Sei H ein Hilbertraum und $M \subseteq L(H)$. Ein linearer (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum H_1 von H heißt *invariant bezüglich* M, wenn

$$AH_1 \subseteq H_1 \quad \text{für alle } A \in M.$$

Ist H_1 ein abgeschlossener Teilraum von H und P_{H_1} der Orthoprojektor von H auf H_1, so ist H_1 genau dann invariant für M, wenn

$$P_{H_1} A P_{H_1} = A P_{H_1} \quad \text{für alle } A \in M. \tag{3.6.1}$$

Falls M symmetrisch ist, so ist H_1 genau dann invariant bezüglich M, falls

$$P_{H_1} A = A P_{H_1} \quad \text{für alle } A \in M. \tag{3.6.2}$$

Aus (3.6.1) folgt nämlich für alle $A \in M$

$$P_{H_1} A = (A^* P_{H_1})^* = (P_{H_1} A^* P_{H_1})^* = P_{H_1} A P_{H_1} = A P_{H_1},$$

während umgekehrt (3.6.2) offenbar (3.6.1) impliziert.

Für $H_2 := H_1^\perp$ ist $P_{H_2} = I - P_{H_1}$. Das Invarianzkriterium (3.6.2) zeigt dann, dass für symmetrisches M mit H_1 auch H_2 invarianter Teilraum ist und dass

$$A = P_{H_1} A P_{H_1} + P_{H_2} A P_{H_2} \quad \text{für alle } A \in M.$$

Ist nun (H, π) eine Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, H_1 ein abgeschlossener Teilraum von H der invariant bzgl. $\pi(\mathcal{A})$ ist und $H_2 := H_1^\perp$, so sind

$$\pi_1 : \mathcal{A} \to L(H_1),\ a \mapsto \pi(a)|_{H_1}, \qquad \pi_2 : \mathcal{A} \to L(H_2),\ a \mapsto \pi(a)|_{H_2}$$

zwei Darstellungen (H_1, π_1) und (H_2, π_2) von $\mathcal{A}$, deren direkte Summe gerade (H, π) ist. Wir betrachten nun Darstellungen, die *nicht* auf diese Weise zerlegt werden können.

Definition 3.6.1 *Eine Darstellung* (H, π) *einer* C^**-Algebra* $\mathcal{A}$ *mit* $\pi(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ *heißt* topologisch irreduzibel*, wenn* $\{0\}$ *und* H *die einzigen abgeschlossenen und bzgl.* $\pi(\mathcal{A})$ *invarianten Teilräume von* H *sind. Die Darstellung heißt* algebraisch irreduzibel*, wenn* $\{0\}$ *und* H *die einzigen bzgl.* $\pi(\mathcal{A})$ *invarianten Teilräume von* H *sind.*

Theorem 3.6.2 (Lemma von Schur) *Folgende Aussagen sind äquivalent für eine nichttriviale Darstellung* (H, π) *einer* C^**-Algebra* $\mathcal{A}$:
(a) (H, π) *ist topologisch irreduzibel;*
(b) der Kommutant $\pi(\mathcal{A})' := \{B \in L(H) : B\pi(a) = \pi(a)B$ *für alle* $a \in \mathcal{A}\}$ *stimmt mit* $\mathbb{C}I$ *überein;*
(c) jeder Vektor $x \in H \setminus \{0\}$ *ist topologisch zyklisch bzgl.* $\pi(\mathcal{A})$*, d.h.* $\operatorname{clos}\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\} = H$.

Beweis. Wir vermerken vorab, dass der Kommutant $\pi(\mathcal{A})'$ eine symmetrische (wegen $\pi(a)^* = \pi(a^*)$ für alle $a \in \mathcal{A}$) und abgeschlossene Unteralgebra von $L(H)$ ist und I enthält.

$(a) \Rightarrow (b)$: Sei (H, π) topologisch irreduzibel und $B \in \pi(\mathcal{A})'$. Wir schreiben B als $C + iD$ mit selbstadjungierten Operatoren $C, D \in \pi(\mathcal{A})'$ und zeigen, dass $C \in \mathbb{R}I$.

Angenommen, $\sigma(C)$ enthält zwei verschiedene Punkte $\lambda \neq \mu$. Mit dem Lemma von Urysohn (oder durch explizite Konstruktion) finden wir zwei auf $\sigma(C)$ stetige Funktionen f und g mit $f(\lambda) = 1$, $g(\mu) = 1$ und $f(x)g(x) = 0$ für alle $x \in \sigma(C)$. Dann ist auch

$$f(C)g(C) = 0. \tag{3.6.3}$$

Mit C liegen natürlich auch $f(C)$ und $g(C)$ in $\pi(\mathcal{A})'$. Somit ist $\operatorname{clos}(g(C)H)$ ein bzgl. $\pi(\mathcal{A})$ invarianter abgeschlossener Teilraum von H. Wegen $g(\mu) = 1$ ist $g(C) \neq 0$ und folglich $\operatorname{clos}(g(C)H) \neq \{0\}$. Da (H, π) topologisch irreduzibel ist, muss $\operatorname{clos}(g(C)H) = H$ sein, d.h. $g(C)H$ liegt dicht in H. Aus (3.6.3) folgt dann sofort $f(C) = 0$; im Widerspruch zu $f(\lambda) = 1$.

Damit ist klar, dass das Spektrum von C aus genau einem Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ besteht. Das Spektrum von $C - \lambda I$ ist daher $\{0\}$. Da für selbstadjungierte Elemente Norm und Spektralradius übereinstimmen, ist schließlich

$$0 = r(C - \lambda I) = \|C - \lambda I\| \quad \text{bzw.} \quad C = \lambda I.$$

Analog gilt $D \in \mathbb{R}I$ und mithin $B \in \mathbb{C}I$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $x \in H \setminus \{0\}$. Dann ist $H_1 := \operatorname{clos}\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}$ ein bezüglich $\pi(\mathcal{A})$ invarianter abgeschlossener Teilraum von H. Wegen (3.6.2) liegt der Orthoprojektor P_{H_1} von H auf H_1 in $\pi(\mathcal{A})'$. Nach Annahme (b) ist also $P_{H_1} = \alpha I$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Die einzigen Orthoprojektoren der Gestalt αI sind die mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$.

Angenommen, es wäre $P_{H_1} = 0$, d.h. $\pi(a)x = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Sei P der Orthoprojektor von H auf $\mathbb{C}x$. Dann ist $\pi(a)P = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$, und durch Adjungieren und wegen der Symmetrie von $\mathcal{A}$ folgt $P\pi(a) = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Dann liegt aber P in $\pi(\mathcal{A})'$, und wie oben folgt, dass $P = 0$ oder $P = I$ ist. Wegen $x \neq 0$ kann $P = 0$ ausgeschlossen werden, und für $P = I$ wäre $H = \mathbb{C}x$ und π die Nulldarstellung, was wir ebenfalls ausgeschlossen hatten. Also ist $P_{H_1} = I$, d.h. $H_1 = H$, und x ist zyklisch.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $M \neq \{0\}$ ein bzgl. $\pi(\mathcal{A})$ invarianter und abgeschlossener Teilraum von H und sei $x \in M \setminus \{0\}$. Aus der Invarianz folgt $\pi(a)x \in M$ für jedes $a \in \mathcal{A}$, und aus der Abgeschlossenheit von M folgt

$$\operatorname{clos}\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\} \subseteq M.$$

Nach Annahme (c) ist die linke Seite dieser Inklusion gleich H, woraus $M = H$ folgt. ∎

Offenbar ist jede algebraische irreduzible Darstellung auch topologisch irreduzibel. Es ist höchst bemerkenswert, dass auch die Umkehrung gilt.

Theorem 3.6.3 *Jede topologisch irreduzible Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist algebraisch irreduzibel.*

Für den Beweis dieser Aussage müssen wir uns mit Dichtheitsaussagen bzgl. verschiedener Topologien auf $L(H)$ befassen. Die folgenden Dichtesätze sind auch darüber hinaus von Interesse (Zitat aus Pedersen, 2.3.4: *The density theorem is Kaplansky's great gift to mankind. It can be used every day, and twice on Sundays.*)

Sei H ein Hilbertraum. Für jede Teilmenge M von $L(H)$ definieren wir ihren *Kommutanten* M' durch

$$M' = \{B \in L(H) : AB = BA \text{ für alle } A \in M\}.$$

Wie oben folgt, dass M' eine unitale C^*-Unteralgebra von $L(H)$ ist. Für $M_1 \subseteq M_2$ ist offenbar $M_2' \subseteq M_1'$. Wegen $M \subseteq M'' := (M')'$ impliziert diese Beobachtung, dass

$$M \subseteq M'' = M^{(4)} = M^{(6)} = \dots \quad \text{und} \quad M' = M''' = M^{(5)} = M^{(7)} = \dots .$$

Weiter zur Erinnerung: Die *schwache Operatortopologie* ist die schwächste Topologie auf $L(H)$, für die alle Mengen

$$W_{A,x,y} := \big\{B \in L(H) : \big\langle (A - B)x, y \big\rangle < 1\big\}$$

offen sind. Die Mengen der Gestalt $\bigcap_{i=1}^n W_{A_i, x_i, y_i}$ bilden eine Basis der schwachen Topologie. Ein Netz $(A_t)_{t \in T}$ konvergiert genau dann schwach gegen $A \in L(H)$, wenn

$$\langle A_t x, y \rangle \to \langle Ax, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Analog wird die *starke Operatortopologie* durch die Mengen

$$W_{A,x} := \left\{B \in L(H) : \|(A-B)x\| < 1\right\}$$

definiert. Ein Netz $(A_t)_{t\in T}$ konvergiert genau dann stark gegen $A \in L(H)$, wenn

$$A_t \to Ax \quad \text{für alle } x \in H.$$

Wir bezeichnen die schwache bzw. starke Abschließung einer Menge $M \subseteq L(H)$ mit weak-clos M bzw. strong-clos M. Die Abschließung von M in der Normtopologie bezeichnen wir weiterhin mit clos M.

Theorem 3.6.4 (von Neumann, Satz über den Bikommutanten) *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra von $L(H)$ mit $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \ker A = \{0\}$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}'' = \text{weak-clos}\,\mathcal{A} = \text{strong-clos}\,\mathcal{A}.$$

Beweis. Die starke Topologie ist stärker als die schwache. Folglich ist

$$\text{strong-clos}\,\mathcal{A} \subseteq \text{weak-clos}\,\mathcal{A}.$$

Außerdem ist jeder Kommutant schwach abgeschlossen. Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$ folgt daher weak-clos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$. Zu zeigen ist somit nur noch, dass $\mathcal{A}'' \subseteq$ strong-clos $\mathcal{A}$. Dazu zeigen wir, dass es in jeder starken Umgebung eines Operators $T \in \mathcal{A}''$ einen Operator $A \in \mathcal{A}$ gibt. Dazu wiederum zeigen wir, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in H$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\sum_{i=1}^n \|(T-A)x_i\|^2 < 1$ gibt (die Mengen $\{B \in L(H) : \sum_{i=1}^n \|(B-A)x_i\|^2 < 1\}$ bilden ja eine Umgebungsbasis für die starke Topologie).

Sei zunächst $n = 1$ und $x_1 \in H$ gegeben. P sei der Orthoprojektor von H auf clos$(\mathcal{A}x_1)$. Da clos$(\mathcal{A}x_1)$ ein invarianter Teilraum für $\mathcal{A}$ ist, gilt $PA = AP$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (vgl. (3.6.2)), d.h. $P \in \mathcal{A}'$. Für den Vektor $y := (I-P)x_1$ und für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt nun

$$Ay = A(I-P)x_1 = (I-P)Ax_1 = (I-P)PAx_1 = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $y = 0$, d.h. $x_1 = Px_1$, also $x_1 \in$ clos$(\mathcal{A}x_1)$. Sei nun $T \in \mathcal{A}''$. Dann ist $PT = TP$, woraus folgt

$$Tx_1 = TPx_1 = PTx_1 \in \text{clos}\,(\mathcal{A}x_1).$$

Folglich gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\|(T-A)x_1\| < 1$.

Sei nun $n \geq 2$ und $x_1, \ldots, x_n \in H$ gegeben. Wir bezeichnen mit H_n die direkte Summe von n Exemplaren des Hilbertraumes H. Jedem Operator $A \in L(H_n)$ kann man sich auf natürliche Weise als $n \times n$-Matrix mit Einträgen in $L(H)$ vorstellen. Mit π bezeichnen wir die Abbildung

$$\pi : L(H) \to L(H_n), \quad A \mapsto \text{diag}\,(A, \ldots, A).$$

Offenbar ist π ein injektiver *-Homomorphismus. Man rechnet leicht nach, dass

$$\pi(\mathcal{A})' = \{(B_{ij})_{i,j=1}^n \in L(H_n) : B_{ij} \in \mathcal{A}'\} = (\mathcal{A}')^{n\times n}. \tag{3.6.4}$$

Sei nun $T \in \mathcal{A}''$. Wegen (3.6.4) liegt $\pi(T)$ in $\pi(\mathcal{A})''$. Wir sind nun in der gleichen Situation wie im Fall $n = 1$ und wenden die obigen Resultate an auf $\pi(\mathcal{A})$, $\pi(T)$, H_n und $x := (x_1, \ldots, x_n)$ an Stelle von $\mathcal{A}$, T, H und x_1. Was folgt, ist die Existenz eines Operators $\pi(A) \in \pi(\mathcal{A})$ so, dass

$$\left\|(\pi(T) - \pi(A))x\right\|^2 < 1$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^n \left\|(T - A)x_k\right\|^2 < 1.$$

Das ist die Behauptung. ∎

C^*-Unteralgebren von $L(H)$, die mit ihren Bikommutatoren übereinstimmen, heißen *W^*-Algebren*.

Insbesondere ist jede C^*-Algebra, die den Voraussetzungen von Satz 3.6.4 genügt, dicht in ihrem Bikommutanten sowohl bzgl. der starken als auch der schwachen Topologie. Man kann also z.B. jeden Operator $T \in \mathcal{A}''$ durch ein stark konvergentes Netz von Operatoren aus $\mathcal{A}$ annähern. Dieses Netz kann aber unbeschränkt sein (im Gegensatz zu Folgen müssen konvergente Netze nicht beschränkt sein). Diese “Schwäche“ des von Neumannschen Bikommutantensatzes wird im folgenden Resultat behoben.

Theorem 3.6.5 (Dichtesatz von Kaplansky) *Es sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra von $L(H)$ mit $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \ker A = \{0\}$. Dann ist die Einheitskugel von $\mathcal{A}_{sa}$ (= Menge der selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$) stark-dicht in der Einheitskugel von $\mathcal{A}''_{sa} := (\mathcal{A}'')_{sa}$, und die Einheitskugel von $\mathcal{A}$ ist stark-dicht in der Einheitskugel von $\mathcal{A}''$. Ferner liegen die positiven Kontraktionen aus $\mathcal{A}$ stark-dicht in der Menge der positiven Kontraktionen von $\mathcal{A}''$ und, falls $\mathcal{A}$ den identischen Operator enthält, liegen die unitären Elemente aus $\mathcal{A}$ stark-dicht in der Menge der unitären Elemente aus $\mathcal{A}''$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten beiden Behauptungen. Als Vorüberlegung betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Diese ist stetig auf $\mathbb{R}$, ihre Werte liegen in $[-1, 1]$, und sie bildet das Intervall $[-1, 1]$ bijektiv auf sich selbst ab. Für jeden selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ kann daher $f(A)$ gebildet werden. Aus dem Spektralsatz folgt: Für *jede* C^*-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $L(H)$ bildet f die Menge $\mathcal{A}_{sa}$ in die Einheitskugel von

$\mathcal{A}_{sa}$ ab, und f bildet die Einheitskugel von $\mathcal{A}_{sa}$ sogar bijektiv auf sich selbst ab. Weiter haben wir für alle $A, B \in L(H)_{sa}$ die Identität

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(f(A) - f(B)\big) \;&=\; (I + A^2)^{-1}A - B(I + B^2)^{-1} \\
&= (I + A^2)^{-1}\big(A(I + B^2) - (I + A^2)B\big)(I + B^2)^{-1} \\
&= (I + A^2)^{-1}(A - B)(I + B^2)^{-1} + (I + A^2)^{-1}A(B - A)B(I + B^2)^{-1} \\
&= (I + A^2)^{-1}(A - B)(I + B^2)^{-1} + \frac{1}{4}f(A)(B - A)f(B).
\end{aligned}$$

Die Faktoren $(I + A^2)^{-1}$ und $f(A)$ sind in der Norm durch 1 beschränkt. Für jedes $x \in H$ ist daher

$$\|f(A)x - f(B)x\| \leq 2\|(A - B)(I + B^2)^{-1}x\| + \frac{1}{2}\|(A - B)f(B)x\|.$$

Dies zeigt, dass f eine *stark stetige* Funktion auf $L(H)_{sa}$ ist, d.h. wenn ein Netz $(A_t)_{t\in T} \subseteq L(H)_{sa}$ stark gegen $B \in L(H)_{sa}$ konvergiert, so konvergiert $f(A_t)$ stark gegen $f(B)$.

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir wollen zeigen, dass die Einheitskugel von $\mathcal{A}_{sa}$ stark dicht in der Einheitskugel von $\mathcal{A}''_{sa}$ ist. Sei $T \in \mathcal{A}''_{sa}$ und $\|T\| \leq 1$. Wie wir oben gesehen haben, gibt es einen (eindeutig bestimmten) Operator $R \in \mathcal{A}''_{sa}$ mit $\|R\| \leq 1$, für den $f(R) = T$ ist.

Nach Satz 3.6.4 gibt es nun ein Netz $(A_t)_{t\in T}$ in $\mathcal{A}$, welches schwach gegen R konvergiert. Da die Abbildung $B \mapsto B^*$ schwach stetig ist (aber eben *nicht* stark stetig, was uns viel Mühe bereitet) und da R selbstadjungiert ist, folgt:

$$R = \text{weak-}\lim_{t\in T} \frac{1}{2}(A_t + A_t^*). \tag{3.6.5}$$

Wir benötigen aber ein Netz selbstadjungierter Operatoren, welches *stark* gegen R konvergiert. Um dieses Problem zu lösen, müssen wir einige Anleihen in der Funktionalanalysis tätigen. Den Beweis der folgenden Aussage findet man z.B. in [Davidson, C^*-Algebras by Example, Prop. 1.6.1].

Theorem 3.6.6 *Sei H ein Hilbertraum. Ein lineares Funktional auf $L(H)$ ist genau dann stark-stetig, wenn es schwach-stetig ist. Jedes derartige Funktional ist von der Gestalt*

$$A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle Ax_i,\, y_i\rangle$$

mit gewissen (endlich vielen) Vektoren $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in H$.

Bekanntlich sind abgeschlossene konvexe Mengen gleich dem Durchschnitt der abgeschlossenen Halbräume, die diese Menge enthalten. Da Halbräume Funktionalen entsprechen, und da schwach-stetige und stark-stetige Funktionale und damit auch schwach abgeschlossene und stark abgeschlossene Halbräume zusammenfallen, haben wir:

Theorem 3.6.7 *Eine konvexe Teilmenge von $L(H)$ ist genau dann stark abgeschlossen, wenn sie schwach abgeschlossen ist.*

Nun ist $\mathcal{A}_{sa}$ sicher konvex, und mit $\mathcal{A}_{sa}$ sind auch die schwache und die starke Abschließung von $\mathcal{A}_{sa}$ konvex. Wie wir soeben gesehen haben, ist also

$$\text{weak-clos}\,\mathcal{A}_{sa} = \text{strong-clos}\,\mathcal{A}_{sa}. \tag{3.6.6}$$

Nun folgt aus (3.6.5), dass $R \in \text{weak-clos}\,\mathcal{A}_{sa}$. Wegen (3.6.6) gibt es daher ein Netz $(B_s)_{s\in S}$ in $\mathcal{A}_{sa}$, welches *stark* gegen R konvergiert. Da f eine stark-stetige Funktion ist, ist dann $(f(B_s))_{s\in S}$ ein Netz in der Einheitskugel von $\mathcal{A}_{sa}$, welches stark gegen $f(R) = T$ konvergiert. Damit ist die Aussage des Dichtesatzes für die Einheitskugel von $\mathcal{A}_{sa}$ gezeigt.

Nun zeigen wir noch die Dichtheit der kompletten Einheitskugel von $\mathcal{A}$ in der von $\mathcal{A}''$. Sei $T \in \mathcal{A}''$ mit $\|T\| \leq 1$. Wir bilden die orthogonale Summe $H \oplus H$ und fassen jeden Operator aus $L(H \oplus H)$ auf als 2×2-Matrix mit Einträgen aus $L(H)$. Mit $M_2(\mathcal{A})$ bzw. $M_2(\mathcal{A}'')$ bezeichnen wir die Mengen aller 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}''$. Man macht sich leicht klar, dass $M_2(\mathcal{A})$ und $M_2(\mathcal{A}'')$ C^*-Unteralgebren von $L(H \oplus H)$ sind und dass

$$M_2(\mathcal{A})'' = M_2(\mathcal{A}'')$$

(vgl. den Beweis von Satz 3.6.4). Der Operator $\begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$ ist dann ein Element der Einheitskugel von $M_2(\mathcal{A}'')_{sa}$. Er kann, wie wir oben gesehen haben, durch ein Netz aus der Einheitskugel von $M_2(\mathcal{A})_{sa}$ stark approximiert werden:

$$\text{strong-}\lim \begin{pmatrix} B_t & C_t \\ D_t & E_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\left\| \begin{pmatrix} B_t & C_t \\ D_t & E_t \end{pmatrix} \right\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} B_t & C_t \\ D_t & E_t \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B_t & C_t \\ D_t & E_t \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist dann $\|C_t\| \leq 1$ und $\text{strong-}\lim C_t = T$. ∎

Eine bemerkenswerte Folgerung, die uns auch unserem Ziel – dem Beweis von Satz 3.6.3 – ganz nahe bringt, ist der folgende

Theorem 3.6.8 (Transitivitätssatz von Kadison) *Es sei (H, π) eine nichttriviale topologisch irreduzible Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Weiter seien gegeben ein Operator $T \in L(H)$, ein endlich-dimensionaler Teilraum K von H und ein $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $a \in \mathcal{A}$ so, dass*

$$\pi(a)|_K = T|_K \quad \textit{und} \quad \|a\| \leq \|T\| + \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es unter den Voraussetzungen des Satzes ein Element $a \in \mathcal{A}$ gibt mit

$$\|a\| \leq \|T|_K\| \quad \text{und} \quad \|\pi(a)|_K - T|_K\| < \varepsilon. \tag{3.6.7}$$

Da (H, π) topologisch irreduzibel ist, folgt aus dem Lemma von Schur, dass $\pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$ und damit $\pi(\mathcal{A})'' = L(H)$. Nach dem Bikommutantensatz ist also strong-clos $\pi(\mathcal{A}) = L(H)$.

Sei o.E.d.A. $\|T|_K\| = 1$ und $S := TP_K$, wobei P_K für den Orthoprojektor von H auf K steht. Der Operator P_K ist kompakt, da K endlich-dimensional ist. Mit dem Dichtesatz von Kaplansky finden wir ein $a_1 \in \mathcal{A}$ mit $\|\pi(a_1)\| \leq 1$ so, dass

$$\|(\pi(a_1) - S)P_K\| < \varepsilon/2$$

(man beachte die Kompaktheit von P_K). Dann findet man aber auch ein $a_2 \in \mathcal{A}$ mit $\pi(a_1) = \pi(a_2)$ und $\|a_2\| \leq (1 - \varepsilon/2)^{-1}$. Sei $a := (1 - \varepsilon/2)a_2$. Dann ist $\|a\| \leq 1 = \|T|_K\|$ und

$$\|(\pi(a) - T)|_K\| \leq \|(\pi(a_2) - S)P_K\| + \varepsilon/2\|\pi(a_2)\| < \varepsilon.$$

Dies beweist (3.6.7).

Mit Hilfe von (3.6.7) wählen wir nun ein $a_0 \in \mathcal{A}$ mit

$$\|a_0\| \leq \|T\| \quad \text{und} \quad \|(\pi(a_0) - T)P_K\| < \varepsilon/2, \tag{3.6.8}$$

und für alle $n \geq 1$ gewinnen wir rekursiv eine Folge von Elementen $a_n \in \mathcal{A}$ mit

$$\|a_n\| \leq 2^{-n}\varepsilon \quad \text{und} \quad \left\| \left(\sum_{m=0}^{n} \pi(a_m) - T \right) P_K \right\| < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{3.6.9}$$

Dies kann wie folgt geschehen. Angenommen, wir haben bereits $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ so bestimmt, dass (3.6.8) und (3.6.9) gilt. Dann wenden wir das Resultat aus (3.6.7) an auf den Operator $S := -(\sum_{m=0}^{n} \pi(a_m) + T)P_K$, auf den Raum K und auf $2^{-n-2}\varepsilon > 0$. Das Resultat aus (3.6.7) zeigt dann, dass es ein $a_{n+1} \in \mathcal{A}$ gibt mit

$$\|a_{n+1}\| \leq \|S|_K\| = \|SP_K\| < 2^{-n-1}\varepsilon$$

(wegen (3.6.9)) sowie

$$\left\|(\pi(a_{n+1}) - S)P_K\right\| = \left\| \left(\sum_{m=0}^{n+1} \pi(a_m) - T \right) P_K \right\| < 2^{-n-2}\varepsilon.$$

Damit ist die Folge $(a_n) \subseteq \mathcal{A}$ konstruiert. Wir definieren $a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (die Konvergenz der Reihe ist wegen (3.6.9) gesichert). Nach Konstruktion ist dann $\pi(a)|_K = T|_K$, und es ist

$$\|a\| \leq \|a_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \leq \|T\| + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \|T\| + \varepsilon.$$

Somit hat a die gewünschten Eigenschaften. ■

Beweis von Satz 3.6.3. Sei (H, π) eine topologisch irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$, und $H_0 \neq \{0\}$ sei ein (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum von H, der invariant bezüglich $\pi(\mathcal{A})$ ist. Weiter sei $x \in H_0 \setminus \{0\}$, und $y \in H$ sei beliebig. Sei $K = \operatorname{span}\{x, y\}$. Dieser Raum ist höchstens zweidimensional. Auf K definieren wir einen linearen Operator T mit $Tx = y$. Diesen setzen wir durch 0 (d.h. $T|_{K^\perp} = 0$) auf ganz H fort. Nach dem Transitivitätssatz von Kadison gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit

$$\pi(a)|_K = T|_K.$$

Insbesondere ist $\pi(a)x = y$. Da $x \in H_0$ und H_0 invariant bzgl. $\pi(\mathcal{A})$ ist, folgt $y \in H_0$, d.h. $H_0 = H$. ■

3.7 Irreduzible Darstellungen, reine Zustände

Wir wenden uns nun der Frage zu, für welche positiven Funktionale die GNS-Konstruktion eine irreduzible Darstellung ergibt. Dazu vereinbaren wir:

Definition 3.7.1 *Ein Zustand $f \in S(\mathcal{A})$ einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* rein *(pure state), wenn er ein Extremalpunkt von $S(\mathcal{A})$ ist, d.h. wenn aus $f = tg_1 + (1-t)g_2$ mit $g_1, g_2 \in S(\mathcal{A})$ und $t \in (0, 1)$ folgt, dass $g_1 = g_2\,(= f)$.*

Theorem 3.7.2 *Sei (H, π) eine zyklische Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins e und $x \in H$ ein zyklischer Vektor der Länge 1. Dann ist der durch*

$$f(a) := \langle \pi(a)x, x \rangle, \quad a \in \mathcal{A},$$

definierte Zustand f genau dann rein, wenn (H, π) irreduzibel ist.

Dass f überhaupt ein Zustand ist und dass $\pi(e) = I$ ist, werden wir uns in der Übung ansehen.

Beweis. Wir zeigen zuerst: Ist (H, π) nicht irreduzibel, so ist f nicht rein. Ist (H, π) nicht irreduzibel, so gibt es einen nichttrivialen invarianten abgeschlossenen Teilraum für $\pi(\mathcal{A})$. Den Orthoprojektor von H auf diesen Teilraum bezeichnen wir mit P. Insbesondere ist also $P \neq 0$ und $P \neq I$. Außerdem wissen wir aus (3.6.2), dass $P \in \pi(\mathcal{A})'$. Sei $t := \|Px\|^2$. Wäre $t = 1$, so wäre $Px = x$ (Pythagoras) und folglich

$$P\pi(a)x = \pi(a)Px = \pi(a)x \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Da x ein zyklischer Vektor ist, liegen diese Vektoren dicht in H. Dann muss aber $P = I$ sein, was wir oben ausgeschlossen hatten. Ganz ähnlich folgt aus der Annahme $t = 0$, dass $I - P = I$, d.h. $P = 0$ wäre. Also ist $0 < t < 1$.

Sei $Q := I - P$. Wir definieren für $a \in \mathcal{A}$

$$g_1(a) := t^{-1}\langle \pi(a)Px,\, Px\rangle, \quad g_2(a) := (1-t)^{-1}\langle \pi(a)Qx,\, Qx\rangle.$$

Die Funktionale g_1 und g_2 sind Zustände von $\mathcal{A}$, denn es ist

$$g_1(e) = t^{-1}\langle Px,\, Px\rangle = t^{-1}\|Px\|^2 = 1 \quad \text{und analog} \quad g_2(e) = 1$$

sowie

$$\|g_1(a)\| \le t^{-1}\|\pi(a)\|\|Px\|^2 \le \|a\| \quad \text{und analog} \quad \|g_2(a)\| \le \|a\|.$$

Weiter ist f eine konvexe Linearkombination aus g_1 und g_2:

$$\begin{aligned}
(tg_1 + (1-t)g_2)(a) &= \langle \pi(a)Px,\, Px\rangle + \langle \pi(a)Qx,\, Qx\rangle \\
&= \langle \pi(a)Px,\, x\rangle + \langle \pi(a)Qx,\, x\rangle \\
&= \langle \pi(a)x,\, x\rangle = f(a)
\end{aligned}$$

(man beachte, dass $P, Q \in \pi(\mathcal{A})'$). Schließlich ist $g_1 \ne g_2$. Wäre nämlich $g_1 = g_2$, so wäre für alle $a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
0 = g_1(a) - g_2(a) &= t^{-1}\langle \pi(a)Px,\, Px\rangle - (1-t)^{-1}\langle \pi(a)Qx,\, Qx\rangle \\
&= \langle \pi(a)x,\, t^{-1}Px - (1-t)^{-1}Qx\rangle,
\end{aligned}$$

d.h. der Vektor $y := t^{-1}Px - (1-t)^{-1}Qx$ wäre senkrecht zu allen $\pi(a)x$ und damit zu ganz H. Dann müsste aber $y = 0$, also $Px = Qx = 0$ und damit $x = 0$ sein, was unmöglich ist. Somit ist $g_1 \ne g_2$, und f ist nicht rein.

Sei umgekehrt (H, π) irreduzibel. Wir zeigen, dass dann f rein ist. Gegeben seien Zustände g_1, g_2 von $\mathcal{A}$ und ein $t \in (0, 1)$ so, dass $f = tg_1 + (1-t)g_2$. Wir definieren eine Sesquilinearform $[.,.]$ auf $\pi(\mathcal{A})x$ durch

$$[\pi(a)x,\, \pi(b)x] := tg_1(b^*a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathcal{A}.$$

Mit Cauchy-Schwarz erhalten wir für das positive Funktional tg_1

$$|tg_1(b^*a)|^2 \le tg_1(a^*a) \cdot tg_1(b^*b) \le f(a^*a)f(b^*b) = \|\pi(a)x\|^2\|\pi(b)x\|^2.$$

Ist also einer der Vektoren $\pi(a)x$ und $\pi(b)x$ gleich 0, so ist auch $g_1(b^*a) = 0$. Also ist $[.,.]$ korrekt definiert. Da tg_1 ein positives Funktional ist, folgt weiter

$$0 \le [\pi(a)x,\, \pi(a)x] = tg_1(a^*a) \le f(a^*a) = \|\pi(a)x\|^2$$

für alle $a \in \mathcal{A}$. Die Sesquilinearform $[.,.]$ ist somit positiv semidefinit und hat eine Norm ≤ 1. Man kann daher $[.,.]$ zu einer Sesquilinearform auf H fortgesetzen, die ebenfalls positiv semidefinit und stetig mit Norm ≤ 1 ist. Dann (vgl. [Reed/Simon

I], Corollary zu Theorem II.4) gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $B \in L(H)$ so, dass

$$[\pi(a)x,\, \pi(b)x] = \langle B\pi(a)x,\, \pi(b)x\rangle \quad \text{für alle } a,\, b \in \mathcal{A}.$$

Seien a, b, $c \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\langle B\pi(c)\pi(a)x,\, \pi(b)x\rangle &= \langle B\pi(ca)x,\, \pi(b)x\rangle = [\pi(ca)x,\, \pi(b)x] = tg_1(b^*ca) \\
&= tg_1((c^*b)^*a) = [\pi(a)x,\, \pi(c^*b)x] \\
&= \langle B\pi(a)x,\, \pi(c)^*\pi(b)x\rangle = \langle \pi(c)B\pi(a)x,\, \pi(b)x\rangle.
\end{aligned}$$

Da $\pi(\mathcal{A})x$ in H dicht liegt, folgt hieraus $\langle B\pi(c)y,\, z\rangle = \langle \pi(c)By,\, z\rangle$ für alle y, $z \in H$, woraus schließlich $B\pi(c) = \pi(c)B$ für alle $c \in \mathcal{A}$ folgt. Da $(H,\, \pi)$ irreduzibel ist, muss nach dem Lemma von Schur $B = \beta I$ mit einem $\beta \in \mathbb{C}$ sein. Dann ist für alle a, $b \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
tg_1(b^*a) &= [\pi(a)x,\, \pi(b)x] = \langle \beta\pi(a)x,\, \pi(b)x\rangle \\
&= \beta\langle \pi(b^*a)x,\, x\rangle = \beta f(b^*a).
\end{aligned}$$

Nun sind f und g_1 Zustände. Durch Einsetzen von $a = b = e$ folgt daher $\beta = t$ und dann wegen $t \neq 0$ auch $g_1(b^*a) = f(b^*a)$ für alle a, $b \in \mathcal{A}$. Dann ist aber $f = g_1$ (setze $b = e$). Dies impliziert schließlich $f = tf + (1-t)g_2$ bzw. $f = g_2$, d.h. $g_1 = g_2$. Also ist f ein reiner Zustand. ■

Das folgende Resultat ist ein Analogon zu Satz 3.5.2 und besagt, dass jede C^*-Algebra genügend viele *reine* Zustände besitzt.

Theorem 3.7.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins und $a \in \mathcal{A}$. Dann gibt es*
(a) einen reinen Zustand f von $\mathcal{A}$ mit $f(a^*a) = \|a\|^2$.
(b) eine irreduzible zyklische Darstellung $(H,\, \pi)$ von $\mathcal{A}$ mit $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Beweis. (*a*) Für $a \in \mathcal{A}$ sei $Z(a)$ die Menge aller Zustände f von $\mathcal{A}$ mit $f(a^*a) = \|a\|^2$. Aus Satz 3.5.2 wissen wir, dass $Z(a)$ nicht leer ist. Außerdem überzeugt man sich leicht davon, dass $Z(a)$ eine konvexe und *-schwach kompakte Menge ist. Nach dem Satz von Krein/Milman (vgl. [Kadison/Ringrose], Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I, Theorem 1.4.3) ist daher $Z(a)$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge der Extrempunkte von $Z(a)$. Insbesondere gibt es also Extrempunkte von $Z(a)$. Wir zeigen, dass jeder Extrempunkt φ von $Z(a)$ auch ein Extrempunkt von $S(\mathcal{A})$, d.h. ein reiner Zustand ist.

Sei $\varphi = tg_1 + (1-t)g_2$ mit $t \in (0,\, 1)$ und mit Zuständen g_1 und g_2. Wäre $g_1(a^*a) < \|a\|^2$ oder $g_2(a^*a) < \|a\|^2$, so wäre auch $\varphi(a^*a) < \|a\|^2$ (beachte, dass $|h(a^*a)| \leq \|h\|\,\|a^*a\| = \|a\|^2$ für jeden Zustand h). Dies ist nicht möglich. Also gehören g_1 und g_2 bereits zu $Z(a)$. Da φ ein Extrempunkt von $Z(a)$ ist, folgt $g_1 = g_2 = \varphi$.

(b) Sei (H_f, π_f) die vermöge GNS dem Zustand f aus Teil (a) entsprechende Darstellung. Diese Darstellung ist irreduzibel nach Satz 3.7.2 (nach 3.5.1 ist nämlich

$$f(b) = \langle \pi_f(b)\xi_f, \xi_f \rangle \quad \text{mit} \quad \|\xi_f\|^2 = \|f\| = 1,$$

für alle $b \in \mathcal{A}$). Nach Satz 3.5.2 ist $\|\pi_f(a)\| = \|a\|$. ■

Ebenso wie Satz 3.5.3 beweist man nun:

Korollar 3.7.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins. Dann ist die direkte Summe $\oplus(H_f, \pi_f)$, wobei über alle* reinen *Zustände f von $\mathcal{A}$ summiert wird, ein *-Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $L(\oplus H_f)$.*

Beispiel 3.7.5 Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra und (H, π) eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ kommutativ ist, gilt $\pi(\mathcal{A}) \subseteq \pi(\mathcal{A})'$, und $\pi(\mathcal{A})'$ ist $\mathbb{C}I$ nach dem Lemma von Schur. Für jeden zyklischen Vektor $x \in H$ gilt also

$$\operatorname{clos}\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\} = \operatorname{clos}\{\mathbb{C}x\} = H,$$

d.h. der Hilbertraum H ist *eindimensional*. Insbesondere gibt es einen unitären Operator $U : H \to \mathbb{C}$, und die Abbildung

$$\mathcal{A} \to L(\mathbb{C}), \quad a \mapsto U\pi(a)U^{-1}$$

ist ein Charakter von $\mathcal{A}$. Fazit: *Jede irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ ist unitär äquivalent zu einem Charakter von $\mathcal{A}$.*

Natürlich ist umgekehrt für jeden Charakter $f(a)$ die Abbildung $\mathcal{A} \to L(\mathbb{C})$, $a \mapsto f(a)I$, eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$.

Sind für zwei Charaktere f_1, f_2 von $\mathcal{A}$ die Darstellungen

$$\pi_1 : \mathcal{A} \to L(H_1),\ a \mapsto f_1(a)I \quad \text{und} \quad \pi_2 : \mathcal{A} \to L(H_2),\ a \mapsto f_2(a)I$$

mit eindimensionalen Hilberträumen H_1 und H_2 unitär äquivalent, so ist offenbar $\ker f_1 = \ker f_2$. Da es eine Bijektion zwischen den Charakteren und ihren Kernen (den maximalen Idealen von $\mathcal{A}$) gibt, folgt umgekehrt aus $\ker f_1 = \ker f_2$, dass $f_1 = f_2$ und dass folglich f_1 und f_2 unitär äquivalente Darstellungen erzeugen. ■

Definition 3.7.6 *Die Menge aller unitären Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt das* Spektrum *von $\mathcal{A}$. Wir bezeichnen diese Menge mit* $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ *und schreiben* $\operatorname{Irr}\mathcal{A}$ *für die Menge der irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$.*

3.8 Primitive Ideale

Wie wir soeben gesehen haben, kann man für kommutative C^*-Algebren $\mathcal{A}$ mit Eins $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ mit der Menge $M(\mathcal{A})$ der Charaktere bzw. mit der Menge $M(\mathcal{A})$ der maximalen Ideale von $\mathcal{A}$ identifizieren. Wir wissen ferner, dass man $M(\mathcal{A})$ mit einer Topologie versehen kann, so dass jedem Element $a \in \mathcal{A}$ eine stetige Funktion auf $M(\mathcal{A})$ umkehrbar eindeutig entspricht. Lässt sich etwas ähnliches auch im nichtkommutativen Fall erreichen?

Definition 3.8.1 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Ein Ideal von $\mathcal{A}$ heißt* primitiv*, wenn es der Kern einer irreduziblen Darstellung von $\mathcal{A}$ ist. Die Menge aller primitiven Ideale von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit* $\operatorname{Prim}\mathcal{A}$.

Falls $\mathcal{A}$ kommutativ ist, fällt $\operatorname{Prim}\mathcal{A}$ mit der Menge aller maximalen Ideale von $\mathcal{A}$ zusammen.

Wir schreiben $(H, \pi)^\sim$ für die Äquivalenzklasse der Darstellung (H, π) bezüglich unitärer Äquivalenz. Sind zwei Darstellungen von $\mathcal{A}$ unitär äquivalent, so stimmen ihre Kerne überein. Die Abbildung

$$\operatorname{Spec}\mathcal{A} \to \operatorname{Prim}\mathcal{A}, \quad (H, \pi)^\sim \mapsto \ker\pi \tag{3.8.1}$$

ist daher wohldefiniert. Diese Abbildung ist offenbar surjektiv, im allgemeinen jedoch nicht injektiv. In der Regel ist $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ nur dann einer Untersuchung zugänglich, wenn die Abbildung (3.8.1) eine Bijektion ist.

Für den nächsten Satz benötigen wir eine Vorüberlegung.

Lemma 3.8.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra (mit Eins) und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$. Weiter sei (H, π) eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$, die auf $\mathcal{J}$ verschwindet. Dann ist die Abbildung*

$$\pi_{\mathcal{J}} : \mathcal{A}/\mathcal{J} \to L(H),\ a + \mathcal{J} \mapsto \pi(a)$$

wohldefiniert, und

(a) die Abbildung $(H, \pi) \mapsto (H, \pi_{\mathcal{J}})$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$, die auf $\mathcal{J}$ verschwinden, und $\operatorname{Irr}\mathcal{A}/\mathcal{J}$.

(b) die Abbildung $(H, \pi)^\sim \mapsto (H, \pi_{\mathcal{J}})^\sim$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$, die auf $\mathcal{J}$ verschwinden, und $\operatorname{Spec}\mathcal{A}/\mathcal{J}$.

(c) die Abbildung $\ker\pi \mapsto \ker\pi_{\mathcal{J}}$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der primitiven Ideale von $\mathcal{A}$, die $\mathcal{J}$ enthalten, und $\operatorname{Prim}\mathcal{A}/\mathcal{J}$.

Beweis. Exemplarisch zeigen wir (a). Wegen $\pi(\mathcal{J}) = \{0\}$ ist die Abbildung $\pi_{\mathcal{J}}$ korrekt definiert, und $(H, \pi_{\mathcal{J}})$ ist eine Darstellung von $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Diese Darstellung ist wieder irreduzibel: Da die Bilder von π und $\pi_{\mathcal{J}}$ übereinstimmen, besitzen sie den gleichen Kommutanten. Aus $\pi_{\mathcal{J}}(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I_H$ folgt aber die Irreduzibilität von

$(H, \pi_{\mathcal{J}})$ nach dem Lemma von Schur. Ist umgekehrt $(H, \pi_{\mathcal{J}})$ eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ und φ der kanonische Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{J}$, so ist $(H, \pi_{\mathcal{J}} \circ \varphi)$ eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ (Beweis wie oben). ∎

Theorem 3.8.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra (mit Eins). Dann gilt:*
(a) Für alle $a \in \mathcal{A}$ ist $\|a\| = \max\{\|\pi(a)\| : (H, \pi) \in \operatorname{Irr} \mathcal{A}\}$.
(b) Der Durchschnitt aller primitiven Ideale von $\mathcal{A}$ ist $\{0\}$.
(c) Jedes echte abgeschlossene Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$ ist gleich dem Durchschnitt aller primitiven Ideale von $\mathcal{A}$, welche $\mathcal{J}$ enthalten.

Beweis. Aussage (a) folgt sofort aus Satz 3.7.3, und (b) ist eine unmittelbare Folgerung von (a). Wir zeigen noch (c). Sei dazu $\pi_{\mathcal{J}}$ erklärt wie in Lemma 3.8.2. Da $x \in \ker \pi$ genau dann, wenn $x + \mathcal{J} \in \ker \pi_{\mathcal{J}}$, folgt

$$x \in \bigcap_{(H,\pi) \in \operatorname{Irr} \mathcal{A} \,:\, \mathcal{J} \subseteq \ker \pi} \ker \pi \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathcal{J} \in \bigcap_{(H, \pi_{\mathcal{J}}) \,\in\, \operatorname{Irr} \mathcal{A}/\mathcal{J}} \ker \pi_{\mathcal{J}}.$$

Nach Aussage (b) ist der Durchschnitt auf der rechten Seite aber gleich $\{0\} \subseteq \mathcal{A}/\mathcal{J}$. Folglich ist $x \in \mathcal{J}$. ∎

Auf $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ lässt sich eine natürliche Topologie einführen. Grundlage dafür ist der folgende Satz, für den wir zunächst wieder eine Vorüberlegung anstellen.

Lemma 3.8.4 *Sei (H, π) eine irreduzible Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, und $\mathcal{J}$ sei ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$ mit $\pi(\mathcal{J}) \neq \{0\}$. Dann ist $(H, \pi|_{\mathcal{J}})$ eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{J}$.*

Beweis. Offenbar ist $(H, \pi|_{\mathcal{J}})$ eine Darstellung von $\mathcal{J}$. Wäre $(H, \pi|_{\mathcal{J}})$ nicht irreduzibel, so gäbe es einen nichttrivialen abgeschlossenen Teilraum H' von H, der bzgl. $\pi|_{\mathcal{J}}(\mathcal{J}) = \pi(\mathcal{J})$ invariant ist. Sei $x \in H' \setminus \{0\}$. Angenommen, es wäre

$$\operatorname{clos}\{\pi(j)x : j \in \mathcal{J}\} = \{0\}.$$

Dann ist $\pi(j)\pi(a)x = \pi(ja)x = 0$ für alle $a \in \mathcal{A}$ und alle $j \in \mathcal{J}$ und folglich $\pi(j) = 0$ auf $\pi(\mathcal{A})x$. Da $\pi(\mathcal{A})x$ dicht in H liegt (π ist ja irreduzibel), folgt $\pi(\mathcal{J}) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist also

$$\{0\} \neq \operatorname{clos}\{\pi(j)x : j \in \mathcal{J}\} \subseteq H' \neq H.$$

Wie oben sieht man aber sofort, dass $\operatorname{clos}\{\pi(j)x : j \in \mathcal{J}\}$ invariant für $\pi(\mathcal{A})$ ist. Damit wäre (H, π) keine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$. Widerspruch. ∎

Theorem 3.8.5 *Jedes primitive Ideal $\mathcal{J}$ einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein* Primideal, *d.h. sind $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ Ideale von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$, so ist $\mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{J}$ oder $\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{J}$ ein primitives Ideal von $\mathcal{A}$, d.h. es ist $\mathcal{J} = \ker \pi$ für eine irreduzible Darstellung (H, π) von $\mathcal{A}$. Weiter seien $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ Ideale von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{J}$ ist dann auch $(\operatorname{clos} \mathcal{J}_1)(\operatorname{clos} \mathcal{J}_2) \subseteq \mathcal{J}$. Es genügt daher, Satz 3.8.5 für abgeschlossene Ideale $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ zu beweisen.

Seien also $\mathcal{J}_1$ und $\mathcal{J}_2$ abgeschlossen. Angenommen, es ist $\pi(\mathcal{J}_1) \neq \{0\}$ und $\pi(\mathcal{J}_2) \neq \{0\}$. Dann sind nach Lemma 3.8.4 $\pi|_{\mathcal{J}_1}$ bzw. $\pi|_{\mathcal{J}_2}$ irreduzible Darstellungen von $\mathcal{J}_1$ bzw. $\mathcal{J}_2$. Jeder Vektor $x \in H \setminus \{0\}$ ist dann zyklisch für $(H, \pi|_{\mathcal{J}_2})$. Insbesondere gibt es also ein $j_2 \in \mathcal{J}_2$ mit $y := \pi(j_2)x \neq 0$. Der Vektor y ist dann zyklisch für $(H, \pi|_{\mathcal{J}_1})$. Es gibt also insbesondere ein $j_1 \in \mathcal{J}_1$ so, dass $\pi(j_1)y \neq 0$. Damit ist einerseits

$$0 \neq \pi(j_1)y = \pi(j_1)\pi(j_2)x = \pi(j_1 j_2)x;$$

andererseits ist aber $j_1 j_2 \in \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}$ und folglich $\pi(j_1 j_2) = 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war. ■

Wir definieren für jede Teilmenge M von $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ ihren *Kern*

$$\ker M := \bigcap_{m \in M} m$$

und ihre *Hülle*

$$\operatorname{hull} M := \{p \in \operatorname{Prim} \mathcal{A} : \ker M \subseteq p\}.$$

Theorem 3.8.6 *Die auf den Teilmengen von* $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ *definierte Abbildung* $M \mapsto \operatorname{hull} M$ *erfüllt die Kuratovskischen Axiome der Abschließung*
(a) $\operatorname{hull} \emptyset = \emptyset$,
(b) $M \subseteq \operatorname{hull}(M)$,
(c) $\operatorname{hull}(\operatorname{hull} M) = \operatorname{hull} M$,
(d) $\operatorname{hull}(M_1 \cup M_2) = \operatorname{hull} M_1 \cup \operatorname{hull} M_2$ *für alle* M_1, $M_2 \subseteq \operatorname{Prim} \mathcal{A}$.

Beweis. (a) Es ist $\ker \emptyset = \mathcal{A}$, und $\mathcal{A}$ liegt in keinem primitiven Ideal, da ja sonst $\mathcal{A}$ selbst primitiv wäre und die zugehörige irreduzible Darstellung die Null-Darstellung sein müsste. Dies hatten wir jedoch per Definition ausgeschlossen.

(b) Aus $m \in M$ folgt $\ker M \subseteq m$, woraus sofort $m \in \operatorname{hull} M$ folgt.

(c) Nach Satz 3.8.3 (c) ist $\ker(\operatorname{hull} M) = \ker M$ für jede Teilmenge M von $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$. Hieraus folgt sofort, dass $\operatorname{hull}(\operatorname{hull} M) = \operatorname{hull} M$.

(d) Die Abbildung $M \mapsto \operatorname{hull} M$ ist monoton: aus $M \subseteq N$ folgt $\ker N \subseteq \ker M$ und somit $\operatorname{hull} M \subseteq \operatorname{hull} N$. Aus $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ folgt daher $\operatorname{hull} M_1 \subseteq \operatorname{hull}(M_1 \cup M_2)$. Analog ist $\operatorname{hull} M_2 \subseteq \operatorname{hull}(M_1 \cup M_2)$ und folglich

$$\operatorname{hull} M_1 \cup \operatorname{hull} M_2 \subseteq \operatorname{hull}(M_1 \cup M_2).$$

Sei umgekehrt $m \in \operatorname{hull}(M_1 \cup M_2)$. Dann ist

$$\ker M_1 \cap \ker M_2 = \ker(M_1 \cup M_2) \subseteq m.$$

Dann ist natürlich erst recht $\ker M_1 \cdot \ker M_2 \subseteq m$. Da m nach Satz 3.8.5 ein Primideal ist, folgt $\ker M_1 \subseteq m$ oder $\ker M_2 \subseteq m$, d.h. $m \in \operatorname{hull} M_1$ oder $m \in \operatorname{hull} M_2$. Also ist $m \in \operatorname{hull} M_1 \cup \operatorname{hull} M_2$. ■

Die Mengen $\operatorname{hull} M$, wobei M die Teilmengen von $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ durchläuft, bilden also die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$, die sogenannte *Hülle-Kern-Topologie* oder *Jacobson-Topologie*. Sie wurde ursprünglich von Zariski in der Algebra eingeführt. Wir vermerken – ohne Beweis – noch einige Eigenschaften des topologischen Raums $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ mit der Jacobson-Topologie.

- Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement, so ist $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ kompakt.

- Der Raum $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ ist i. allg. nicht Hausdorffsch. Er ist jedoch ein T_0-Raum, d.h. für zwei beliebige Punkte aus $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ besitzt wenigstens einer eine Umgebung, die den anderen Punkt nicht enthält.

- Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung $\operatorname{Prim} \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+,\ p \mapsto \|a + p\|$ unterhalbstetig. (Dies ist ein schwacher Ersatz dafür, dass bei kommutativen C^*-Algebren die Abbildung $p \mapsto a + p$ stetig ist).

- Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra, so ist $\operatorname{Prim} \mathcal{A} = M(\mathcal{A})$, und die Jacobson-Topologie stimmt mit der Gelfand-Topologie überein. (Dies ist wieder ein typischer C^*-Effekt. Für beliebige kommutative Banachalgebren gilt dies i. allg. nicht mehr.)

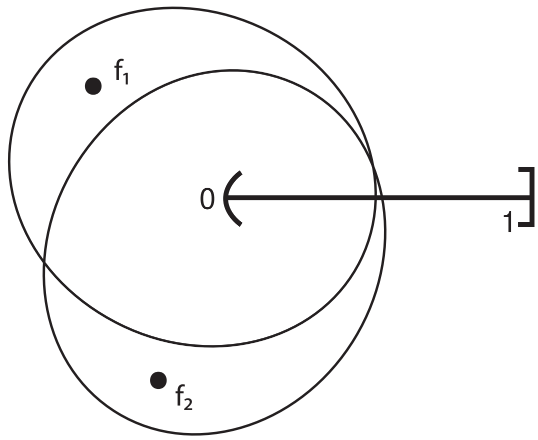
Beispiel 3.8.7 Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach $\mathbb{C}^{2\times 2}$, deren Wert im Punkt 0 eine Diagonalmatrix ist. Versehen mit punktweisen Operationen, einer punktweisen Involution und der Supremumsnorm wird $\mathcal{A}$ zu einer (nichtkommutativen) C^*-Algebra. Fassen wir $\mathbb{C}^{2\times 2}$ als $L(\mathbb{C}^2)$ auf, so haben wir für jedes $t \in (0, 1]$ eine zweidimensionale Darstellung $f \mapsto f(t)$ von $\mathcal{A}$, und diese ist irreduzibel, da

$$\{f(t) : f \in \mathcal{A}\}' = (\mathbb{C}^{2\times 2})' = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist weiter $f(0) = \operatorname{diag}(f_1(0),\ f_2(0))$, so haben wir zwei eindimensionale Darstellungen (oder Charaktere)

$$\delta_1 : f \mapsto f_1(0) \quad \text{und} \quad \delta_2 : f \mapsto f_2(0),$$

welche ebenfalls irreduzibel sind. Man kann sich überlegen, dass damit alle irreduziblen Darstellungen (bis auf unitäre Äquivalenz) von $\mathcal{A}$ beschrieben sind. Man kann also $\operatorname{Prim} \mathcal{A}$ identifizieren mit der Vereinigung $\{\delta_1,\ \delta_2\} \cup (0, 1]$ des Intervalls $(0, 1]$ mit zwei zusätzlichen Punkten δ_1, δ_2 an Stelle der Null. Die Einschränkung der Hülle-Kern-Topologie auf $(0, 1]$ fällt zusammen mit der üblichen (Euklidischen) Topologie auf $(0, 1]$. Ein Umgebungssystem des Punktes δ_1 (bzw. δ_2) wird dagegen durch die Mengen $\{\delta_1\} \cup (0, \varepsilon)$ (bzw. $\{\delta_2\} \cup (0, \varepsilon)$) mit $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Insbesondere hat *jede* Umgebung von δ_1 mit *jeder* Umgebung von δ_2 einen nichtleeren Durchschnitt. Prim $\mathcal{A}$ ist also kein Hausdorff-Raum. ■



Wir hatten in Lemmas 3.8.2 und 3.8.4 bereits einige Beziehungen zwischen irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}$ festgehalten. Lemma 3.8.4 können wir noch wie folgt ergänzen. Ähnliche Relationen gelten auch zwischen den Spektren und den Räumen der primitiven Ideale von $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}$.

Theorem 3.8.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$. Sei (H, π) eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{J}$. Dann gibt es genau eine Darstellung $(H, \tilde{\pi})$ von $\mathcal{A}$ mit $\tilde{\pi}|_{\mathcal{J}} = \pi$, und diese Darstellung ist irreduzibel.*

Beweisidee. Sei x ein zyklischer Vektor von (H, π). Wir definieren für $a \in \mathcal{A}$ einen Operator $\tilde{\pi}(a)$ auf dem in H dichten Teilraum $\{\pi(j)x : j \in \mathcal{J}\}$ durch

$$\tilde{\pi}(a)(\pi(j)x) := \pi(aj)x. \tag{3.8.2}$$

Man kann zeigen, dass diese Definition korrekt ist und einen auf einem dichten Teilraum von H stetigen Operator erklärt. Dieser wird zu einem auf ganz H stetigen Operator fortgesetzt. Die so gewonnene Darstellung $(H, \tilde{\pi})$ von $\mathcal{A}$ ist irreduzibel, da

$$\tilde{\pi}(\mathcal{A})' \subseteq \pi(\mathcal{J})' = \mathbb{C}I.$$

Die Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt daraus, dass jede Fortsetzung $\tilde{\pi}$ von π die Beziehung (3.8.2) erfüllen muss, weswegen $\tilde{\pi}$ auf einer dichten Menge in H festgelegt ist. ■

3.9 Irreduzible Darstellungen der Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C)$

In einem etwas längeren Beispiel sehen wir uns die irreduziblen Darstellungen der Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C) = \{T(c) + K : c \in C(\mathbb{T}),\ K \in K(l^2)\}$ an. Wir wissen bereits, das $K(l^2)$ in $\mathcal{T}(C)$ enthalten und damit ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{T}(C)$ ist. Folglich gibt es genau zwei Sorten irreduzibler Darstellungen (H, π) von $\mathcal{T}(C)$: solche mit $K(l^2) \subseteq \ker \pi$ und solche mit $\pi(K(l^2)) \neq \{0\}$. Wir sehen uns diese genauer an.

Fall 1: $K(l^2) \subseteq \ker \pi$**.** Aus Lemma 3.8.2 wissen wir, dass es eine Bijektion gibt zwischen der Menge der irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ und den irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{T}(C)$, die auf $K(l^2)$ verschwinden. Die irreduziblen Darstellungen der kommutativen C^*-Algebra $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ sind – bis auf unitäre Äquivalenz – gerade ihre Charaktere. Diese kennen wir aber aus Abschnitt 2.4, wo wir gezeigt haben, dass die Charaktere von $\mathcal{T}(C)/K(l^2)$ genau die Abbildungen

$$T(c) + K(l^2) \mapsto c(t) \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{T}$$

sind, so dass wir $M(\mathcal{T}(C)/K(l^2))$ mit $\mathbb{T}$ identifizieren können.

Fall 2: $\pi(K(l^2)) \neq \{0\}$**.** Aus Lemma 3.8.4 und Theorem 3.8.8 wissen wir, dass es eine Bijektion gibt zwischen der Menge der irreduziblen Darstellungen von $K(l^2)$ und der Menge der irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{T}(C)$, welche auf $K(l^2)$ nicht verschwinden. Wir benötigen also Kenntnisse über die irreduziblen Darstellungen von $K(l^2)$.

Theorem 3.9.1 *Jede irreduzible Darstellung von $K(l^2)$ ist unitär äquivalent zur identischen Darstellung (l^2, Id).*

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass die identische Darstellung von $K(l^2)$ irreduzibel ist (Übung). Sei nun (H, π) eine beliebige irreduzible Darstellung von $K(l^2)$. Weiter bezeichne $(e_0, e_1, \ldots)$ die Standardbasis von l^2, und S_i sei der Orthoprojektor von l^2 auf $\mathbb{C}e_i$. Dann ist $\dim \operatorname{Im} S_i = 1$ und S_i kompakt. Offenbar ist auch $\pi(S_i)$ für jedes i ein Orthoprojektor. Wir überlegen uns, dass

$$\dim \operatorname{Im} \pi(S_i) = 1 \quad \text{für jedes } i \in \mathbb{N}. \tag{3.9.1}$$

Ganz ähnlich wie im Beweis von Satz 2.4.4 kann man zeigen, dass $K(l^2)$ das kleinste abgeschlossene Ideal von $K(l^2)$ ist, welches den Operator S_i enthält. Wäre nun $\pi(S_i) = 0$, so wäre folglich auch $\pi(K(l^2)) = 0$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass irreduzible Darstellungen per Definition nicht trivial sind. Somit ist

$$\dim \operatorname{Im} \pi(S_i) \geq 1 \quad \text{für jedes } i \in \mathbb{N}.$$

Für die umgekehrte Ungleichung nehmen wir an, dass x und $\tilde{x}$ Vektoren in $\operatorname{Im} \pi(S_i)$ mit $x \neq 0$ sind. Wir wählen Vektoren $y (\neq 0)$ und $\tilde{y}$ in H mit $\pi(S_i)y = x$ und $\pi(S_i)\tilde{y} = \tilde{x}$. Wegen $x \neq 0$ liegt $\{\pi(K)x : K \in K(l^2)\}$ dicht in H. Es gibt also eine Folge $(K_n) \subseteq K(l^2)$ mit $\lim_{n\to\infty} \pi(K_n)\pi(S_i)y = \pi(S_i)\tilde{y}$. Multiplikation von links mit $\pi(S_i)$ liefert $\lim_{n\to\infty} \pi(S_iK_nS_i)y = \pi(S_i)\tilde{y}$. Nun ist aber offenbar $S_iK_nS_i = k_nS_i$ mit komplexen Zahlen k_n. Folglich ist $\lim k_n\pi(S_i)y = \pi(S_i)\tilde{y}$ bzw. $\lim k_nx = \tilde{x}$. Dies zeigt, dass $\tilde{x} \in \mathbb{C}x$ und folglich $\dim \operatorname{Im} \pi(S_i) = 1$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist.

Wir wählen für jedes $i \in \mathbb{N}$ einen Einheitsvektor E_i aus $\operatorname{Im} \pi(S_i)$. Dann ist

$$\langle E_i,\, E_j\rangle = \langle \pi(S_i)E_i,\, \pi(S_j)E_j\rangle = \langle \pi(S_jS_i)E_i,\, E_j\rangle = \delta_{ij},$$

d.h. die Menge $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ bildet ein Orthonormalsystem in H. Wir zeigen, dass dieses vollständig ist. Sei $x \in H$ und $x\perp E_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\pi(S_i)x = 0$ (denn $\pi(S_i)$ ist der Orthoprojektor von H auf $\operatorname{span}\{E_i\}$). Sei $S_{ij} \in K(l^2)$ der Operator mit einer 1 an der ij. Stelle der Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis (e_i) von l^2 und mit Nullen an allen übrigen Stellen. Aus $S_{ij} = S_{ij}S_j$ folgt dann

$$\pi(S_{ij})x = \pi(S_{ij})\pi(S_j)x = 0 \quad \text{für alle } i,\, j \in \mathbb{N}.$$

Da die Linearkombinationen der Operatoren S_{ij} dicht in $K(l^2)$ liegen, erhalten wir hieraus

$$\pi(K)x = 0 \quad \text{für alle } K \in K(l^2).$$

Jeder Nichtnull-Vektor von H ist aber zyklisch. Also ist $x = 0$. Somit ist $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Orthonormalbasis von H, und H ist unendlichdimensional und separabel.

Aus $S_{i0} = S_iS_{i0}S_0$ und $(S_{i0})^*S_{i0} = S_{0i}S_{i0} = S_0$ folgt $\pi(S_{i0}) = \pi(S_i)\pi(S_{i0})\pi(S_0)$ und $\|\pi(S_{i0})\|^2 = \|\pi(S_{i0})^*\pi(S_{i0})\| = \|\pi(S_0)\| = 1$. Somit ist $\pi(S_{i0})$ ein Operator mit eindimensionalem Bildraum und Norm 1. Dieser Operator überführt E_0 in α_iE_i mit einer Zahl α_i, und wegen $\|\pi(S_{i0})\| = 1$ muss $|\alpha_i| = 1$ sein. Sei $F_0 := E_0$ und $F_i := \alpha_iE_i$ für $i \geq 1$. Dann ist offenbar $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Orthonormalbasis von H. Nunmehr ist klar (Satz von Riesz/Fischer), dass

$$U : H \to l^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_iF_i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x_ie_i$$

ein unitärer Operator von H auf l^2 ist. Da nach Konstruktion $\pi(S_{i0})$ den Vektor F_0 auf F_i abbildet, bildet $\pi(S_{ij}) = \pi(S_{i0})\pi(S_{0j})$ den Vektor F_j auf F_i ab. Hieraus erhält man sofort, dass

$$U\pi(S_{ij})U^* = S_{ij} \quad \text{für alle } i,\, j \in \mathbb{N},$$

woraus

$$U\pi(K)U^* = K \quad \text{für alle } K \in K(l^2)$$

folgt, da die Linearkombinationen der S_{ij} ja dicht in $K(l^2)$ sind. ∎

Da sich nach Satz 3.8.8 die irreduzible Darstellung $(H,\, Id)$ von $K(l^2)$ eindeutig zu einer irreduziblen Darstellung von $\mathcal{T}(C)$ fortsetzen lässt und da $(H,\, Id)$ offenbar eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{T}(C)$ ist, ist dies die gesuchte Fortsetzung. Die (bis auf unitäre Äquivalenz) einzige irreduzible Darstellung von $\mathcal{T}(C)$, die auf $K(l^2)$ nicht verschwindet, ist also die identische Darstellung!

Damit ist klar, dass $\operatorname{Prim}\mathcal{T}(C)$ genau die folgenden Ideale enthält:

- $\{0\} = \ker Id$ und
- $\mathcal{J}_t := \{T(c) + K : c(t) = 0,\ K \in K(l^2)\}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$.

Wir können also $\operatorname{Prim}\mathcal{T}(C)$ als Menge identifizieren mit $\mathbb{T}\cup\{0\}$. Die Abschließung von $\{0\}$ in der Hülle-Kern-Topologie ist ganz $\operatorname{Prim}\mathcal{T}(C)$, da offenbar jedes Primideal das Ideal $\{0\}$ enthält. (Man beachte: wir haben eine *einelementige* Menge, deren Abschluss der gesamte Raum ist!) Dagegen ist $\mathbb{T}$ abgeschlossen, und die Einschränkung der Hülle-Kern-Topologie auf $\mathbb{T}$ fällt mit der üblichen (Euklidschen) Topologie auf $\mathbb{T}$ zusammen. Für jede Teilmenge S von $\mathbb{T}$ ist nämlich

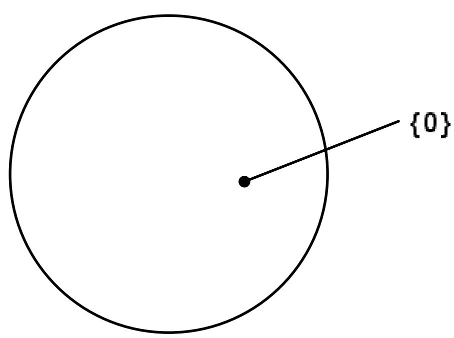
$$\ker\{\mathcal{J}_s : s \in S\} = \bigcap_{s\in S} \mathcal{J}_s = \{T(f) + K : f|_S = 0,\ K \in K(l^2)\}.$$

Folglich ist

$$\operatorname{hull}\{\mathcal{J}_s : s \in S\} = \{\mathcal{J}_s : s \in \bar{S}\},$$

wobei $\bar{S}$ den Abschluss von S in der üblichen (Euklidschen) Topologie bezeichnet.

Der Raum $\operatorname{Prim}\mathcal{T}(C)$ ist nicht Hausdorffsch. Mehr noch: Die konstante Folge $\{0\}$ konvergiert gegen *jeden* Punkt von $\mathbb{T}$. Anschaulich kann man sich $\operatorname{Prim}\mathcal{T}(C)$ vorstellen als Kreisscheibe, deren Rand man mit $\mathbb{T}$ und deren komplettes Inneres man mit $\{0\}$ identifiziert.



Kapitel 4

Nichtkommutative Gelfandtheorien und ihre Anwendungen

Im letzten Abschnitt wollen wir noch einige konkrete Invertierbarkeitsprobleme lösen und müssen uns dazu mit Verallgemeinerungen der Gelfandtheorie für kommutative Banachalgebren befassen.

4.1 Die Fredholmeigenschaft von Toeplitzoperatoren mit stückweise stetigen Erzeugerfunktionen

Wir sehen uns nun die Fredholmtheorie für Toeplitzoperatoren mit stückweise stetigen Erzeugerfunktionen an. Eine Funktion $a : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie in jedem Punkt $t = e^{ix_0}$ des Einheitskreises einseitige Grenzwerte von beiden Seiten besitzt, d.h. wenn die Grenzwerte

$$\lim_{x \searrow x_0} a(e^{ix}) =: a(t+0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow x_0} a(e^{ix}) =: a(t-0)$$

für alle $t = e^{ix_0}$ existieren und endlich sind. Da wir a als Element von $L^\infty(\mathbb{T})$ betrachten, ist der Funktionswert von a an den Sprungstellen unwesentlich. Möchte man jedoch eine vernünftige Algebra von *Funktionen* haben, verlangt man z.B., dass $a(t+0) = a(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Die Menge PC der stückweise stetigen Funktionen bildet dann eine C^*-Algebra bezüglich punktweiser Operationen und der Supremumsnorm.

Sei $\mathcal{T}(PC)$ die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L(l^2)$, welche alle Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in PC$ enthält. Wegen $C \subseteq PC$ ist natürlich die bereits untersuchte Algebra $\mathcal{T}(C)$ eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{T}(PC)$. Insbesondere ist also $K(l^2) \subseteq \mathcal{T}(PC)$ nach Satz 2.4.4. Genau wie in Abschnitt 2.4 erhält man daher: Ein Toeplitzoperator $T(a)$ mit $a \in PC$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn die Nebenklasse $T(a) + K(l^2)$ in der Faktoralgebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ invertierbar ist. Wir bezeichnen den kanonischen Homomorphismus $A \mapsto A + K(l^2)$ von $\mathcal{T}(PC)$ auf $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ mit π.

Leider können wir nicht mehr so einfach wie in Abschnitt 2.4 schließen, dass die Algebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ kommutativ ist. Auch zu Satz 2.4.5, der die Algebra $\mathcal{T}(C)$ beschreibt, gibt es kein Analogon. Der Hauptgrund für diese Schwierigkeiten ist, dass Hankeloperatoren mit stückweise stetigen Erzeugerfunktionen nicht mehr kompakt sein müssen. Was man jedoch unmittelbar einsieht ist, dass für beliebige Funktionen $a \in PC$ und $f \in C$ der Operator

$$\begin{aligned} T(a)T(f) - T(f)T(a) &= T(af) - H(a)H(\tilde{f}) - T(fa) + H(f)H(\tilde{a}) \\ &= H(f)H(\tilde{a}) - H(a)H(\tilde{f}) \end{aligned}$$

kompakt ist (beachte: f und $\tilde{f}$ sind stetig; also sind $H(f)$ und $H(\tilde{f})$ kompakt). Die Nebenklasse $\pi(T(f))$ liegt für $f \in C$ also im Zentrum der Algebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$. Zur Erinnerung: Das *Zentrum* einer Algebra $\mathcal{A}$ ist die Menge aller $c \in \mathcal{A}$ mit $ca = ac$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Mit $\pi(T(f))$ liegt dann natürlich die komplette Algebra $\pi(T(C)) = \mathcal{T}(C)/K(l^2)$ im Zentrum von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$.

Banachalgebren, die mit ihrem Zentrum übereinstimmen, sind kommutativ, und für kommutative Banachalgebren haben wir die Gelfandtheorie kennengelernt. Wir werden nun sehen, dass sich für Algebren mit nichttrivialem Zentrum eine Verallgemeinerung der (kommutativen) Gelfandtheorie herleiten lässt. Solche Verallgemeinerungen sind auch als „lokale Prinzipien“ bekannt. Wir schauen uns das lokale Prinzip von Allan/Douglas näher an.

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement e, und es sei $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}$ eine kommutative Banachalgebra. Wir bezeichnen wir früher mit $M(\mathcal{C})$ die Menge ihrer maximalen Ideale. Für jedes maximale Ideal x von $\mathcal{C}$ sei I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{A}$, welches x umfasst. Weiter bezeichnen wir mit Φ_x den kanonischen Homomorphismus

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}/I_x, \quad a \mapsto a + I_x.$$

Man beachte, dass die Algebren $\mathcal{A}/I_x$ i. allg. vom Punkt x abhängen können. Insbesondere kann $I_x = \mathcal{A}$ für einige der $x \in M(\mathcal{C})$ sein. In diesem Fall definieren wir: $\Phi_x(a)$ ist invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$, und $\|\Phi_x(a)\| = 0$.

Theorem 4.1.1 (Allan/Douglas) *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, x und Φ_x wie oben. Dann gilt: Ein Element $a \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar in $\mathcal{A}$, wenn $\Phi_x(a)$ invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$ ist für jedes $x \in M(\mathcal{C})$. Weiter ist für jedes $a \in \mathcal{A}$ die Abbildung $M(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|\Phi_x(a)\|$ oberhalbstetig.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, sehen wir uns an, wie er in zwei einfachen Beispielen und in den Situationen, die uns im Moment interessieren, wirkt.

Beispiel 4.1.2 Das kleinstmögliche $\mathcal{C}$, welches wir wählen können, ist $\mathcal{C} = \mathbb{C}e$. Dann ist offenbar $\{0\}$ das einzige echte Ideal von $\mathcal{C}$. $M(\mathcal{C})$ besteht also nur aus einem Element (dem Nullideal), und das durch $\{0\}$ erzeugte Ideal von $\mathcal{A}$ ist natürlich ebenfalls $\{0\}$. Die Aussage von Satz 4.1.1 reduziert sich also auf die Trivialität

$$a \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A} \Longleftrightarrow a + \{0\} \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A}/\{0\}.$$

Beispiel 4.1.3 Ist $\mathcal{A}$ kommutativ, so können wir $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ wählen. Für $x \in M(\mathcal{C})$ ist dann offenbar $I_x = x$. Nach Lemma 2.1.2 ist $\mathcal{A}/I_x \cong \mathbb{C}$ für jedes $x \in M(\mathcal{C})$, und $\Phi_x(a)$ ist gerade der Wert der Gelfandtransformierten $\hat{a}$ von a an der Stelle x. Die Aussage von Satz 4.1.1 reduziert sich also auf

$$a \text{ ist invertierbar in } \mathcal{A} \Longleftrightarrow \hat{a}(x) \text{ ist invertierbar für alle } x \in M(\mathcal{C}),$$

was im wesentlichen die Aussage von Satz 2.1.3 ist. ∎

Zurück zur Fredholmtheorie für Operatoren in $\mathcal{T}(PC)$. Wir haben oben bereits eine Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2) \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{A}$ gefunden: die Algebra $\mathcal{T}(C)/K(l^2) \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{C}$. Ihren Raum der maximalen Ideale haben wir bereits in Abschnitt 2.4 bestimmt: er ist homöomorph zu $\mathbb{T}$, und das dem Punkt $x \in \mathbb{T}$ entprechende maximale Ideal von $\mathcal{C}$ ist

$$\{\pi(T(f)) : f \in C(\mathbb{T}),\, f(x) = 0\}. \tag{4.1.1}$$

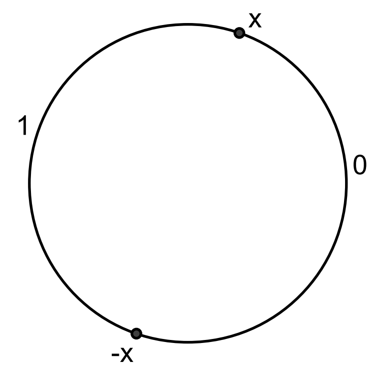
Dem lokalen Prinzip von Allan/Douglas entsprechend bezeichnen wir mit I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$, welches die Menge 4.1.1 enthält. Weiter bezeichnen wir den Homomorphismus

$$\mathcal{T}(PC) \to (\mathcal{T}(PC)/K(l^2))/I_x, \quad A \mapsto \pi(A) + I_x$$

mit π_x. Satz 4.1.1 liefert:

Korollar 4.1.4 *Ein Operator $A \in \mathcal{T}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn für jedes $x \in \mathbb{T}$ die Nebenklasse $\pi_x(A)$ in $\mathcal{T}_x(PC) := (\mathcal{T}(PC)/K(l^2))/I_x$ invertierbar ist.*

Um dieses Resultat ausnutzen zu können, benötigen wir genauere Kenntnisse über die Faktoralgebra $\mathcal{T}_x(PC)$. Da die Algebra $\mathcal{T}_x(PC)$ von den Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit $a \in PC$ erzeugt wird, wird die Algebra $\mathcal{T}_x(PC)$ offenbar von den Nebenklassen $\pi_x(T(a))$ mit $a \in PC$ erzeugt. Für jedes $x \in \mathbb{T}$ sei χ_x die stückweise konstante Funktion, die auf dem Bogen von x zu $-x$ (bzgl. der üblichen Orientierung) den Wert $+1$ und auf dem Bogen von $-x$ bis x den Wert 0 annimmt.

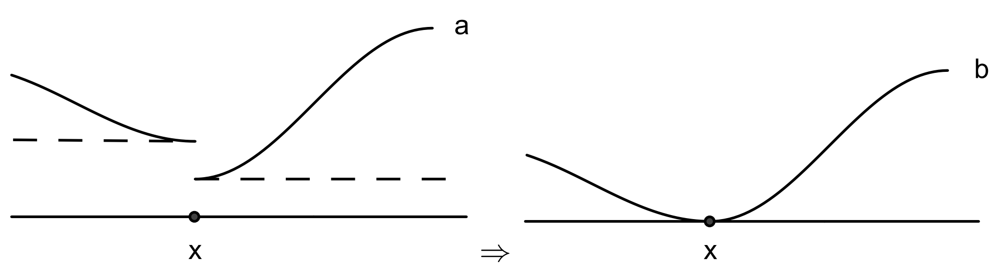


Theorem 4.1.5 *Jede der Algebren $\mathcal{T}_x(PC)$ ist einfach erzeugt, und die Nebenklasse $\pi_x(T(\chi_x))$ ist ein Erzeuger von $\mathcal{T}_x(PC)$.*

Beweis. Wir zeigen, dass für jede stückweise stetige Funktion a die Nebenklasse $\pi_x(T(a))$ eine Linearkombination der Nebenklassen $\pi_x(I)$ und $\pi_x(T(\chi_x))$ ist. Dazu seien $a(x \pm 0)$ die einseitigen Grenzwerte von a an der Stelle x, und es sei

$$a_x := a(x+0)\chi_x + a(x-0)(1-\chi_x).$$

Die Funktion $b := a - a_x$ ist stetig im Punkt x und nimmt dort den Wert 0 an:



Ist $f \in C(\mathbb{T})$ eine Funktion mit $f(x) = 1$, so ist $(1-f)(x) = 0$, d.h. die Nebenklasse $\pi(T(1-f))$ liegt im Ideal x und damit erst recht im Ideal I_x. Es ist also $\pi_x(T(1-f)) = 0$ bzw. $\pi_x(T(f)) = \pi_x(T(1)) = \pi_x(I)$. Wir erhalten daher

$$\pi_x(T(b)) = \pi_x(I)\,\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(f))\,\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(f)T(b)).$$

Da der Operator $T(f)T(b) - T(fb) = -H(f)H(\tilde{b})$ kompakt ist, folgt $\pi_x(T(b)) = \pi_x(T(fb))$. Schließlich haben wir mit Satz 2.4.2 (und mit der Definition der Norm in Faktoralgebren)

$$\|\pi_x(T(b))\| = \|\pi_x(T(fb))\| \leq \|fb\|_\infty. \tag{4.1.2}$$

Durch Verkleinern des Trägers von f können wir erreichen, dass die rechte Seite von (4.1.2) kleiner als jede positive Zahl wird. Folglich ist $\pi_x(T(b)) = 0$ bzw. $\pi_x(T(a)) = \pi_x(T(a_x))$, d.h.

$$\pi_x(T(a)) = a(x+0)\pi_x(T(\chi_x)) + a(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(T(\chi_x))). \tag{4.1.3}$$

Dies beweist die Aussage des Satzes. ■

Die Identität (4.1.3) zeigt, dass wir modulo I_x die Funktion a durch die Funktion a_x, welche sich lokal im Punkt x genauso verhält wie die Funktion a, ersetzen können. Dies erklärt die Bezeichnung "lokales Prinzip" oder "lokales Ideal" für I_x. Den Übergang von A zu $\pi_x(A)$ nennt man „lokalisieren“.

Da $\mathcal{T}_x(PC)$ einfach erzeugt ist, wissen wir alles über die Invertierbarkeit in dieser Algebra, wenn wir das Spektrum des Erzeugers $\pi_x(T(\chi_x))$ beschreiben können (vgl. Satz 2.1.13). Dieses werden wir in Satz 4.1.7 erreichen unter Zuhilfenahme eines allgemeinen Resultates von Hartmann und Wintner.

Theorem 4.1.6 (Hartmann, Wintner) *Sei $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ reellwertig. Dann fallen sowohl das Spektrum von $T(a)$ als auch das Spektrum von $T(a) + K(l^2)$ zusammen mit dem Intervall* $[\operatorname{ess\,inf} a(t), \operatorname{ess\,sup} a(t)]$.

Ein Beweis steht in Böttcher/Silbermann, Analysis of Toeplitz operators, Abschnitt 2.36.

Theorem 4.1.7 *Für jedes $x \in \mathbb{T}$ ist das Spektrum von $\pi_x(T(\chi_x))$ gleich* $[0,\, 1]$.

Beweis. O.E.d.A. nehmen wir $x = 1$ an und schreiben χ für χ_1. Nach dem Satz von Hartmann/Wintner ist das Spektrum der Nebenklasse $T(\chi) + K(l^2)$ gleich $[0,\, 1]$. Aus dem lokalen Prinzip folgt daher

$$[0,\, 1] = \sigma_{\mathcal{T}(PC)/K(l^2)}(T(\chi) + K(l^2)) = \bigcup_{y \in \mathbb{T}} \sigma_{\mathcal{T}_y(PC)}(\pi_y(T(\chi))). \tag{4.1.4}$$

Für $y \in \mathbb{T} \setminus \{-1,\, 1\}$ ist $\pi_y(T(\chi))$ entweder gleich $\pi_y(0)$ oder gleich $\pi_y(I)$, wie aus (4.1.3) sofort folgt. In diesem Fall ist also $\sigma_{\mathcal{T}_y(PC)}(\pi_y(T(\chi)))$ entweder $\{0\}$ oder $\{1\}$. Aus (4.1.4) schließen wir also unmittelbar auf

$$(0,\, 1) \subseteq \sigma(\pi_1(T(\chi))) \cup \sigma(\pi_{-1}(T(\chi))) \subseteq [0,\, 1].$$

Da Spektren abgeschlossen sind, folgt hieraus

$$\sigma(\pi_1(T(\chi))) \cup \sigma(\pi_{-1}(T(\chi))) = [0,\, 1]. \tag{4.1.5}$$

Wir zeigen nun, dass $\sigma(\pi_1(T(\chi))) = \sigma(\pi_{-1}(T(\chi)))$, woraus sich mit (4.1.5) die Behauptung ergibt. Dazu definieren wir Operatoren J und C von l^2 auf l^2 durch

$$J : (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto ((-1)^k x_k)_{k=0}^\infty \quad \text{und} \quad C : (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto (\overline{x_k})_{k=0}^\infty.$$

Der Operator J ist linear, C ist antilinear und es gilt $J^2 = C^2 = I$. Daher definieren die Abbildungen

$$V : A \mapsto JAJ \quad \text{bzw.} \quad W : A \mapsto CA^*C$$

einen Isomorphismus bzw. einen „Antiisomorphismus“ von $L(l^2)$ auf $L(l^2)$. Letzteres soll heißen, dass $W(AB) = W(B)W(A)$ für alle A, $B \in L(l^2)$; man beachte aber, dass W linear ist: $W(\alpha A) = C(\alpha A)^* C = C\bar{\alpha} A^* C = \alpha C A^* C = \alpha W(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $A \in L(l^2)$.

Man rechnet leicht nach, dass für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt

$$V(T(a)) = T(\hat{a}) \quad \text{bzw.} \quad W(T(a)) = T(\tilde{a}) \tag{4.1.6}$$

mit $\hat{a}(t) := a(-t)$ und $\tilde{a}(t) := a(1/t)$. Für $a \in PC$ liegen $\hat{a}$ und $\tilde{a}$ wieder in PC. Aus (4.1.6) folgt daher, dass sowohl V als auch W die Algebra $\mathcal{T}(PC)$ und auch das Ideal $K(l^2)$ jeweils auf sich abbilden. Folglich sind die beiden Abbildungen

$$A + K(l^2) \mapsto V(A) + K(l^2) \quad \text{bzw.} \quad A + K(l^2) \mapsto W(A) + K(l^2)$$

wohldefinierte Isomorphismen bzw. Antiisomorphismen von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ auf sich. Wir bezeichnen diese Abbildungen wieder mit V bzw. W.

Schließlich seien f, $g \in C(\mathbb{T})$ mit $f(1) = 0$ und $g(-1) = 0$. Aus (4.1.6) folgt dann

$$V(T(f) + K(l^2)) = T(\hat{f}) + K(l^2) \quad \text{bzw.} \quad W(T(g) + K(l^2)) = T(\tilde{g}) + K(l^2),$$

wobei $\hat{f}$ und $\tilde{g}$ stetige Funktionen mit $\hat{f}(-1) = 0$ und $\tilde{g}(-1) = 0$ sind. Hieraus erhalten wir schließlich, dass die Abbildungen

$$\pi_1(A) \mapsto \pi_{-1}(V(A)) \quad \text{bzw.} \quad \pi_{-1}(A) \mapsto \pi_{-1}(W(A))$$

einen korrekt definierten Isomorphismus von $\mathcal{T}_1(PC)$ auf $\mathcal{T}_{-1}(PC)$ bzw. einen Antiisomorphismus von $\mathcal{T}_{-1}(PC)$ auf sich darstellen. Diese Abbildungen überführen

$$\pi_1(T(\chi)) \quad \text{in} \quad \pi_{-1}(V(T(\chi))) = \pi_{-1}(T(\hat{\chi})) = \pi_{-1}(T(1-\chi))$$

bzw.

$$\pi_{-1}(T(1-\chi)) \quad \text{in} \quad \pi_{-1}(W(T(1-\chi))) = \pi_{-1}(T(\tilde{1} - \tilde{\chi})) = \pi_{-1}(T(\chi)).$$

Da sowohl Isomorphismen als auch Antiisomorphismen Spektren erhalten, folgt schließlich

$$\sigma_{\mathcal{T}_1(PC)}(\pi_1(T(\chi))) = \sigma_{\mathcal{T}_{-1}(PC)}(\pi_{-1}(T(1-\chi))) = \sigma_{\mathcal{T}_{-1}(PC)}(\pi_{-1}(T(\chi))).$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

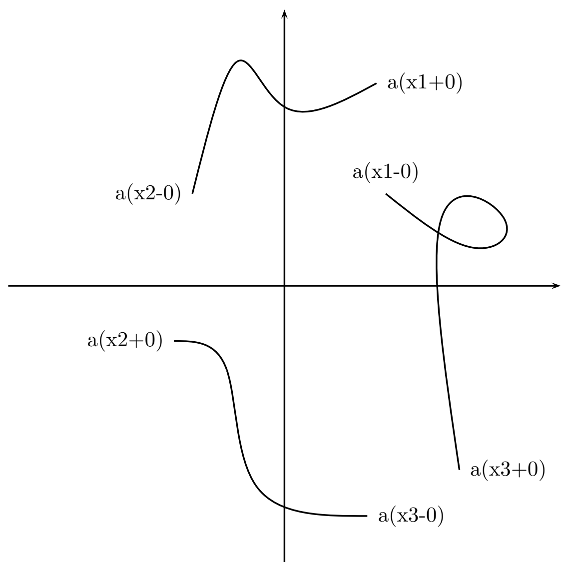
Wir können somit den Raum der maximalen Ideale jeder Algebra $\mathcal{T}_x(PC)$ mit $[0,\,1] = \sigma(\pi_x(T(\chi_x)))$ identifizieren. Mit dieser Identifikation folgt aus (4.1.3) sofort, dass die Gelfand-Transformierte von $\pi_x(T(a))$ die Funktion

$$[0,\,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto a(x+0)t + a(x-0)(1-t) \tag{4.1.7}$$

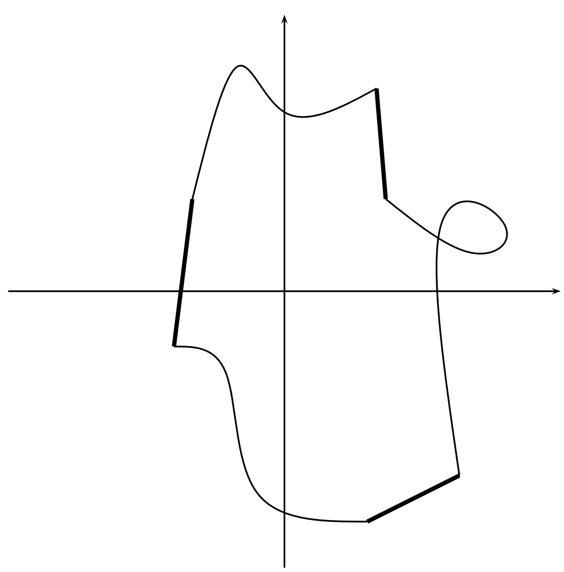
ist. Kombinieren wir dies mit dem lokalen Prinzip, erhalten wir, dass ein Toeplitzoperator mit stückweise stetiger Erzeugerfunktion a genau dann Fredholmsch ist, wenn für jedes $x \in \mathbb{T}$ die Funktion (4.1.7) keine Nullstellen besitzt. Allgemeiner ist der Operator $\sum_i \prod_j T(a_{ij})$ mit $a_{ij} \in PC$ genau dann Fredholmsch, wenn für kein $x \in \mathbb{T}$ die Funktion

$$t \mapsto \sum_i \prod_j (a_{ij}(x+0)t + a_{ij}(x-0)(1-t)) \tag{4.1.8}$$

eine Nullstelle auf $[0,1]$ hat. Zumindest die Funktion (4.1.7) lässt sich sehr schön geometrisch interpretieren. Falls a etwa den Einheitskreis $\mathbb{T}$ abbildet auf



so besagt (4.1.7) gerade, dass die 0 nicht auf $a(\mathbb{T})$ oder auf einer der Strecken $[a(x_i-0),\, a(x_i+0)]$ liegen darf.



Der Operator $T(a)$ ist also genau dann Fredholmsch, wenn 0 nicht auf der durch die Strecken $[a(x-0),\, a(x+0)]$ vervollständigten Kurve $a(\mathbb{T})$ liegt.

Wir können diese Resultate noch wesentlich ergänzen. Dazu bemerken wir, dass in den Bezeichungen des lokalen Prinzips (Satz 4.1.1) gilt:

Lemma 4.1.8 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e und $\mathcal{C}$ eine C^*-Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{C}$. Dann gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$*

$$\|a\| = \max_{x \in M(\mathcal{C})} \|\Phi_x(a)\|.$$

Beweis. Es bezeichne Π die Algebra aller beschränkten Funktionen auf $M(\mathcal{C})$ mit Werten in $\bigcup_{x \in M(\mathcal{C})} \mathcal{A}/I_x$, die im Punkt x einen Wert in $\mathcal{A}/I_x$ annehmen. Das lokale Prinzip sagt dann, dass die Abbildung von $\mathcal{A}$ in Π, die dem Element $a \in \mathcal{A}$ die Funktion

$$x \mapsto \Phi_x(a)$$

zuordnet, Spektren erhält. Nun ist aber im C^*-Kontext jeder *-Homomorphismus, der Spektren erhält, eine Isometrie. Daher gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$

$$\|a\| = \sup_{x \in M(\mathcal{C})} \|\Phi_x(a)\|.$$

Dass das Supremum ein Maximum ist, folgt mit Satz 4.1.1: Jede oberhalbstetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt nämlich ihr Maximum an. ■

Sind nun $a,\, b \in PC$, so wird den Operatoren $T(a)T(b)$ und $T(b)T(a)$ durch (4.1.8) die *gleiche* Funktion zugeordnet. Es ist also $\pi_x(T(a)T(b)) = \pi_x(T(b)T(a))$ und somit nach Lemma 4.1.8

$$\|(T(a)T(b) - T(b)T(a)) + K(l^2)\| = \max_{x \in \mathbb{T}} \|\pi_x(T(a)T(b)) - \pi_x(T(b)T(a))\| = 0.$$

Fazit: Der Kommutator $T(a)T(b) - T(b)T(a)$ ist kompakt! Wir fassen zusammen.

Theorem 4.1.9 *Die Algebra $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ ist kommutativ. Ihr Raum der maximalen Ideale kann mengenmäßig mit dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0,\, 1]$ identifiziert werden. Bei dieser Identifikation ist die Gelfandtransformierte von $T(a) + K(l^2)$ die Funktion*

$$\mathbb{T} \times [0,\, 1] \to \mathbb{C}, \quad (x,\, t) \mapsto a(x+0)t + a(x-0)(1-t).$$

Schließlich ist ein Operator $A \in \mathcal{T}(PC)$ ist genau dann Fredholmsch, wenn die Gelfandtransformierte von $A + K(l^2)$ keine Nullstellen besitzt.

Einige Anmerkungen zu diesem Resultat:

- Natürlich hätten wir auch damit beginnen können, die Kommutativität von $\mathcal{T}(PC)/K(l^2)$ zu zeigen. Unsere weiteren Aufgaben hätten dann darin bestanden, den Raum der maximalen Ideale dieser kommutativen C^*-Algebra zu identifizieren. Ein „Frontalangriff“ auf diesen Raum der maximalen Ideale ist aber keineswegs einfacher. Der Nutzen des lokalen Prinzips in diesem Beispiel besteht gerade darin, dass es die getrennte Bestimmung der beiden „Faktoren“ $\mathbb{T}$ und $[0, 1]$ des Raumes der maximalen Ideale in $\mathbb{T} \times [0, 1]$ ermöglicht.

- Wir haben $M(\mathcal{T}(PC)/K(l^2))$ als Menge mit dem Zylinder $\mathbb{T} \times [0, 1]$ identifiziert. Die Gelfandtopologie auf diesem Zylinder fällt jedoch *nicht* mit der üblichen euklidischen Topologie zusammen. Vielmehr wird eine Umgebungsbasis des Punktes $(x, t) \in \mathbb{T} \times [0, 1]$ mit $0 < t < 1$ durch die Mengen

$$\{x\} \times (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < \min\{t, 1 - t\}$$

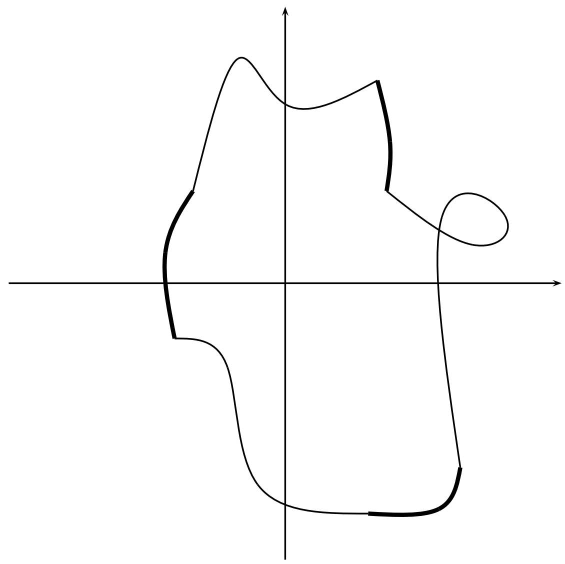
gegeben. Eine Umgebungsbasis des Punktes $(x, 1)$ wird geliefert durch die Mengen

$$([x, xe^{i\varepsilon}) \times (1 - \varepsilon, 1]) \cup ((x, xe^{i\varepsilon}) \times [0, 1 - \varepsilon]) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1,$$

und schließlich eine Umgebungsbasis von $(x, 0)$ durch

$$((xe^{i\varepsilon}, x] \times [0, \varepsilon)) \cup ((xe^{i\varepsilon}, x) \times [\varepsilon, 1]) \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1.$$

- Man kann Toeplitzoperatoren auch auf l^p-Räumen studieren, muss allerdings beachten, dass nicht mehr jede stückweise stetige (oder gar jede beschränkte Funktion) einen beschränkten Toeplitzoperator definiert. Beschränkt man sich auf geeignete PC-Funktionen (sog. Multiplikatoren), kann man die entsprechende Algebra $\mathcal{T}_{l^p}(PC)$ ganz analog studieren. Das Spektrum des erzeugenden Elementes ist allerdings i. allg. nicht mehr das Intervall $[0, 1]$, sondern ein von p abhängender Kreisbogen von 0 nach 1. Demzufolge hat man die Kurve $a(\mathbb{T})$ statt mit Strecken mit gewissen Kreisbögen zu einer geschlossenen Kurve zu ergänzen. Lemma 4.1.8 und seine Folgerungen gelten jedoch im $p \neq 2$-Fall nicht mehr. Die Kommutativität von $\mathcal{T}_{l^p}(PC)/K(l^p)$ muss also anders bewiesen werden.



Wir haben nun an einigen Beispielen gesehen, wie das lokale Prinzip arbeitet, und müssen noch seinen Beweis nachtragen. Dazu benötigen wir

Lemma 4.1.10 *Die Voraussetzungen seien wie in Satz* 4.1.1. *Ist L ein maximales Links-, Rechts- oder zweiseitiges Ideal von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{C} \cap L$ ein maximales Ideal von $\mathcal{C}$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für den Fall eines maximalen Linksideals L. Es ist klar, dass $L \cap \mathcal{C}$ ein echtes (da $e \notin L$) abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{C}$ ist. Wir zeigen noch dessen Maximalität.

Sei $z \in \mathcal{C} \setminus L$. Dann ist $J_z := \{l + az : l \in L,\, a \in \mathcal{A}\}$ ein Linksideal von $\mathcal{A}$, welches L echt (da $z \in J_z \setminus L$) enthält. Wegen der Maximalität von L ist also $J_z = \mathcal{A}$. Insbesondere liegt e in J_z, und das Element z besitzt ein Inverses modulo L (beachte: Aus $l + az = e$ folgt $l + za = e$, da z im Zentrum von $\mathcal{A}$ liegt).

Weiter: $K_z := \{a \in \mathcal{A} : az \in L\}$ ist echtes (da $e \notin K_z$) Linksideal von $\mathcal{A}$, welches L enthält. Da L maximal ist, folgt $K_z = L$. Sind insbesondere y_1, y_2 Inverse modulo L von z, so ist $y_1 - y_2 \in L$. Die Inversen modulo L von z sind also eindeutig bestimmt.

Angenommen, es wäre $z - \lambda e \notin L$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Es bezeichne $y^\pi(\lambda)$ das (wie wir soeben gesehen haben) eindeutig bestimmte Element von $\mathcal{A}/L$, welches die Inversen modulo L von $z - \lambda e$ enthält. Wir zeigen, dass $y^\pi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}/L$ eine analytische Funktion ist.

Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $y_0 \in y^\pi(\lambda_0)$ eine Inverse modulo L von $z - \lambda_0 e$. Für $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|y_0\|$ ist $e - (\lambda - \lambda_0)y_0$ invertierbar in $\mathcal{A}$ (Neumann-Reihe), und man überzeugt sich leicht davon, dass $y_0[e - (\lambda - \lambda_0)y_0]^{-1}$ eine Inverse modulo L von $z - \lambda e$ ist. Für $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|y_0\|$ ist also

$$y^\pi(\lambda) = y_0[e - (\lambda - \lambda_0)y_0]^{-1} + L.$$

Dies zeigt die Analytizität von y^π. Außerdem ist diese Funktion beschränkt. Für $|\lambda| > \|z\|$ ist nämlich $z - \lambda e$ invertierbar (Neumann-Reihe) und

$$\|y^\pi(\lambda)\| \le \|(z - \lambda e)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} z^n \right\| \le \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|z/\lambda\|}.$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung geht für $\lambda \to \infty$ gegen 0. Nach dem Satz von Liouville ist y^π also eine konstante Funktion, die wegen $\lim_{\lambda \to \infty} y^\pi(\lambda) = 0$ sogar konstant 0 sein muss.

Aus $y^\pi(0) = 0$ folgt aber: Es gibt ein $y_0 \in L$ mit $y_0 z - e \in L$. Dann ist $e \in L - z y_0 = L$, und dies ist unmöglich, da L eine echtes Ideal von $\mathcal{A}$ ist. Der erhaltene Widerspruch zeigt, dass es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so gibt, dass $z - \lambda e \in L$. Da $z \in \mathcal{C} \setminus L$ beliebig war, folgt $\mathcal{C} = (L \cap \mathcal{C}) + \mathbb{C}e$. Damit ist $L \cap \mathcal{C}$ maximal. ■

Beweis von Satz 4.1.1. Wir beschränken uns auf den Beweis von Aussage (a). Die Aussage (b) und einige ihrer Konsequenzen werden wir uns in der Übung ansehen. Außerdem beschränken wir uns auf den Beweis der Aussage, dass ein Element $a \in \mathcal{A}$ genau dann von links invertierbar ist, wenn die Nebenklasse $\Phi_x(a)$ für jedes $x \in M(\mathcal{C})$ von links invertierbar sind. Die Invertierbarkeit von rechts untersucht man analog.

Ist $a \in \mathcal{A}$ von links invertierbar, so sind sicher alle Nebenklassen $\Phi_x(a)$ von links invertierbar. Sei umgekehrt $a \in \mathcal{A}$ ein Element, für das alle $\Phi_x(a)$ von links invertierbar sind. Wir zeigen, dass a von links invertierbar ist.

Angenommen, a wäre nicht von links invertierbar. Dann ist $\{ba : b \in \mathcal{A}\}$ ein echtes Linksideal von $\mathcal{A}$ (da diese Menge e nicht enthält), welches nach dem Lemma von Krull in einem maximalen Linksideal L von $\mathcal{A}$ liegt. Nach Lemma 4.1.10 ist $x := L \cap \mathcal{C}$ ein maximales Ideal von $\mathcal{C}$. Wir zeigen nun, dass $I_x \subseteq L$. Dies folgt so: Die Elemente der Gestalt $\sum_k a_k x_k b_k$ mit $x_k \in x$ und $a_k, b_k \in \mathcal{A}$ liegen dicht in I_x. Da $x_k \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}$ im Zentrum von $\mathcal{A}$ liegt, ist aber $\sum_k a_k x_k b_k = \sum_k a_k b_k x_k \in L$ und folglich $I_x \subseteq L$ (beachte, dass L abgeschlossen ist).

Auf Grund unserer Annahme ist $\Phi_x(a)$ von links invertierbar in $\mathcal{A}/I_x$. Es gibt somit ein $b \in \mathcal{A}$ so, dass $ba - e \in I_x$. Aus $I_x \subseteq L$ folgt $ba - e \in L$. Andererseits ist $ba \in \{ba : b \in \mathcal{A}\} \subseteq L$, woraus $e \in L$ folgt. Die widerspricht der Maximalität von L und widerlegt unsere Annahme. ■

4.2 Singuläre Integraloperatoren

Auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ betrachten wir einen Operator der Gestalt

$$(Au)(t) = a(t)u(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{u(s)}{s - t}\, ds, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{4.2.1}$$

der sich zusammensetzt aus den Operatoren der Multiplikation mit den Funktionen a und b, die wir als stückweise stetig auf $\mathbb{T}$ voraussetzen wollen, und aus dem

Operator der singulären Integration über $\mathbb{T}$,

$$(Su)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{u(s)}{s-t}\, ds, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dieses Integral existiert selbst für gutartige (z.B. hölderstetige) Funktionen nur im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes. Für solche Funktionen hat man also mit $s = e^{ix}$ und $t = e^{iy}$

$$(Su)(e^{iy}) = \frac{1}{\pi i} \int_y^{y+2\pi} \frac{u(e^{ix})}{e^{ix} - e^{iy}} ie^{ix}\, dx := \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{y+\varepsilon}^{y+2\pi-\varepsilon} \frac{u(e^{ix})}{1 - e^{i(y-x)}}\, dx.$$

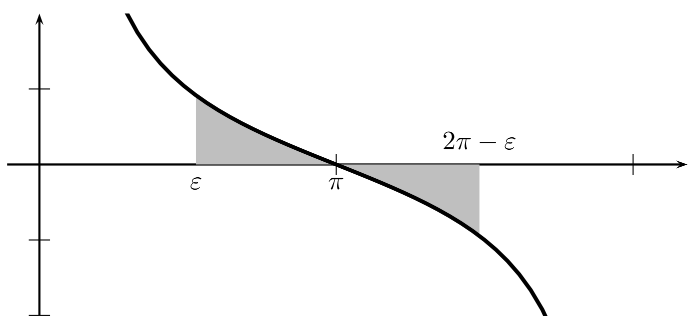
Um eine Vorstellung vom Wirken von S zu bekommen, berechnen wir Se_n für $e_n(t) := t^n$ mit $t \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 4.2.1 *Für $n \geq 0$ ist $Se_n = e_n$; für $n < 0$ ist $Se_n = -e_n$.*

Beweis. Für $n = 0$ erhalten wir mit der Substitution $x := x - y$ im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
(Se_0)(e^{iy}) &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{y+\varepsilon}^{y+2\pi-\varepsilon} \frac{1}{1 - e^{-i(x-y)}}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{1}{1 - e^{-ix}}\, dx = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left(\cot \frac{x}{2} + i \right) dx = 1,
\end{aligned}$$

da $x \mapsto \cot \frac{x}{2}$ auf $(0,\, 2\pi)$ eine bezüglich des Punktes π ungerade Funktion ist.



Für $n > 0$ folgt aus diesem Ergebnis leicht

$$\begin{aligned}
(Se_n)(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{s^n}{s-t}\, ds \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{s^n - t^n}{s-t}\, ds + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{t^n}{s-t}\, ds \\
&= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} s^k t^{n-1-k} \right) ds + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{t^n}{s-t}\, ds \\
&= \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1-k} \int_{\mathbb{T}} s^k\, ds + t^n (Se_0)(t) = t^n = e_n(t).
\end{aligned}$$

Schließlich ist für $n > 0$

$$\begin{aligned}(Se_{-n})(t) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{s^{-n}}{s-t}\,ds = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{s^{-n}-t^{-n}}{s-t}\,ds + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{t^{-n}}{s-t}\,ds \\ &= \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \left(-\sum_{k=0}^{n-1} t^{k-n}s^{-k-1}\right) ds + t^{-n} \\ &= -2t^{-n} + t^{-n} = -t^{-n} = -e_{-n}(t),\end{aligned}$$

da

$$\int_{\mathbb{T}} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{falls } n = -1, \end{cases}$$

wie wir aus der Funktionentheorie wissen. ■

Diese einfache Rechnung hat eine Reihe bemerkenswerter Konsequenzen, wenn man beachtet, dass die Funktionen e_n für $n \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2(\mathbb{T})$ bilden, wobei das Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{T})$ gegeben ist durch

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})\overline{g(e^{ix})}\,dx.$$

Diese Tatsache ist im wesentlichen äquivalent dazu, dass die Funktionen $\sin(2\pi nt)$ und $\cos(2\pi nt)$ (für $n > 0$) zusammen mit der konstanten Funktion 1 eine Orthonormalbasis von $L^2[0,\, 1]$ bilden.

Korollar 4.2.2 *Der singuläre Integraloperator S lässt sich stetig fortsetzten zu einer Isometrie von $L^2(\mathbb{T})$ auf sich.*

Beweis. Der Operator S ist zunächst erklärt auf dem Teilraum von $L^2(\mathbb{T})$, der alle endlichen Summen $\sum_{n=-k}^{k} a_n e_n$ enthält. Auf diesem Raum gilt mit Lemma 4.2.1

$$S\left(\sum_{n=-k}^{k} a_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{k} a_n e_n - \sum_{n=-k}^{-1} a_n e_n$$

und folglich $\|Su\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$ für alle u aus diesem Teilraum. Auf dem betrachteten Teilraum wirkt S also als Isometrie. Da dieser Teilraum dicht in $L^2(\mathbb{T})$ liegt, kann S stetig fortgesetzt werden zu einer Isometrie auf ganz $L^2(\mathbb{T})$. ■

Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit S. Aus dem Beweis von Folgerung 4.2.2 ist klar, dass S die Funktion mit der Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ in die Funktion mit der Fourierreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n - \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e_n$ überführt.

Korollar 4.2.3 *(a) $S^2 = I$, $S^* = S$.*
(b) $P := \frac{1}{2}(I+S)$ und $Q := \frac{1}{2}(I-S)$ sind komplementäre Orthoprojektoren.

Dies ist offensichtlich, wenn man sich überlegt, wie S wirkt (oder folgt durch einfaches Nachrechnen). ■

Der Operator A in (4.2.1) lässt sich schreiben als $aI + bS$. Offenbar ist nun

$$aI + bS = a(P + Q) + b(P - Q) = (a + b)P + (a - b)Q.$$

Mit $c := a + b$ und $d := a - b$ können wir A also auch als $cP + dQ$ schreiben, was für viele Überlegungen zweckmäßig ist. So gilt beispielsweise folgendes Resultat, was wir uns in der Übung ansehen werden.

Korollar 4.2.4 *Seien c, $d \in \mathbb{C}$. Dann ist $cP + dQ$ genau dann invertierbar, wenn $c \neq 0$ und $d \neq 0$. In diesem Fall ist $(cP + dQ)^{-1} = \frac{1}{c}P + \frac{1}{d}Q$.*

Wir sehen uns noch die Matrixdarstellung des Operators $A = cP + dQ$ bezüglich der Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von $L^2(\mathbb{T})$ an. Die Matrixdarstellung der Multiplikationsoperatoren cI kennen wir bereits: sie wird gerade durch den Laurentoperator $L(c)$ beschrieben. Aus Lemma 4.2.1 können wir unmittelbar die Matrixdarstellung der Projektoren P und Q ablesen: Es sind die Diagonalmatrizen

$$P \,\widehat{=}\, \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right), \quad Q \,\widehat{=}\, \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \end{array}\right) \tag{4.2.2}$$

Wir werden diese Matrixdarstellung benutzen, um auf bequeme Weise Resultate über singuläre Integrale aus Aussagen über Toeplitz- und Hankeloperatoren herzuleiten. Die meisten der folgenden Resultate gelten auch für singuläre Integraloperatoren über wesentlich komplizierteren Kurven als der Einheitskreislinie, die etwa Ecken, Endpunkte oder Überschneidungen aufweisen dürfen. Eine komplette Übersicht über die Kurven Γ und die Gewichtsfunktionen α, für die der singuläre Integraloperator S im Raum $L^p(\Gamma, \alpha)$ für $1 < p < \infty$ mit der Norm $\|f\|^p := \int_\Gamma |f(s)|^p |\alpha(s)|^p \, ds$ beschränkt ist, sowie eine Fredholmtheorie in diesem allgemeinen Fall finden Sie in Böttcher/Karlovich: Carleson Curves, Muckenhoupt weights, Toeplitz operators, Birkhäuser 1997. Wir werden uns die Resultate nun für den Raum $L^2(\mathbb{T})$ ansehen.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L(L^2(\mathbb{T}))$, die alle Operatoren $aP + bQ$ mit a, $b \in PC$ enthält. Insbesondere liegen alle Multiplikationsoperatoren $aI = aP + aQ$ sowie die Projektoren $P = 1P + 0Q$ und Q in $\mathcal{A}$. Daraus folgt, dass mit jedem Operator $aP + bQ$ auch dessen Adjungierter $(aP + bQ)^* = P\bar{a}I + Q\bar{b}I$ wieder in $\mathcal{A}$ liegt. $\mathcal{A}$ ist also eine C^*-Algebra.

Lemma 4.2.5 *$\mathcal{A}$ enthält das Ideal $K(L^2(\mathbb{T}))$ der kompakten Operatoren.*

Beweis. Ein Operator $K \in L(L^2(\mathbb{T}))$ ist genau dann kompakt, wenn seine Matrixdarstellung einen kompakten Operator auf $l^2(\mathbb{Z})$ liefert. Es genügt daher, wenn wir folgendes zeigen:

- Jeder kompakte Operator $K \in L(l^2(\mathbb{Z}))$ liegt in der kleinsten abgeschlossenen Unteralgebra von $L(l^2(\mathbb{Z}))$, die alle Laurentoperatoren $L(c)$ mit stetiger Erzeugerfunktion c sowie die beiden Projektoren (Diagonalmatrizen) aus (4.2.2) enthält.

Dies kann in völliger Analogie zu Satz 2.4.4 gezeigt werden. An die Stelle der dort benutzten Projektoren treten dabei die Projektoren

$$P_n : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z}), \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\ldots, 0, 0, x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{n-1}, 0, 0, \ldots)$$

auf. Die Ausführung der Details dieses Beweises ist eine Hausaufgabe. ∎

Wir können also die Faktoralgebra $\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))$ bilden. Diese ist invers abgeschlossen in der Calkinalgebra $L(L^2(\mathbb{T}))/K(L^2(\mathbb{T}))$. Somit gilt:

- Ein Operator $A \in \mathcal{A}$ ist genau dann Fredholmsch, wenn seine Nebenklasse $A + K(L^2(\mathbb{T}))$ in $\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))$ invertierbar ist.

Die Invertierbarkeit von $A+K(L^2(\mathbb{T}))$ kann wieder mit Hilfe des lokalen Prinzips von Allan/Douglas studiert werden. Grundlage dafür ist

Lemma 4.2.6 *Für jedes $f \in C(\mathbb{T})$ liegt die Nebenklasse $fI + K(L^2(\mathbb{T}))$ im Zentrum von $\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))$.*

Beweis. Die Algebra $\mathcal{A}$ wird erzeugt von den Multiplikationsoperatoren aI mit $a \in PC$ und vom singulären Projektor P. Offenbar kommutiert fI mit jedem der Operatoren aI. Es verbleibt daher zu zeigen, dass $fP - PfI$ für jedes $f \in C(\mathbb{T})$ kompakt ist. Wegen

$$fP - PfI = (P+Q)fP - Pf(P+Q) = QfP - PfQ$$

genügt es zu zeigen, dass jeder der Operatoren QfP und PfQ kompakt ist. Die Matrixdarstellung des Operators PfQ ist

$$PfQ \mathrel{\widehat{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{0} & 0 \\ \hline f_3 & f_2 & f_1 & \\ \ddots & f_3 & f_2 & 0 \\ & \ddots & f_3 & \end{array}\right),$$

was wir mit Hilfe der im Beweis von Lemma 2.4.1 eingeführten Isometrie J auch als

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H(f) & 0 \end{pmatrix}.$$

schreiben können. Nach Satz 2.4.3 ist der Hankeloperator $H(f)$ und folglich auch der Operator PfQ kompakt. Die Kompaktheit von QfP folgt analog. ∎

Die Menge $\mathcal{C} := \{fI + K(L^2(\mathbb{T})) : f \in C(\mathbb{T})\}$ bildet also eine Unteralgebra im Zentrum von $\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))$, die offenbar das Einselement $I + K(L^2(\mathbb{T}))$ enthält. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}$ eine abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra ist und bestimmen ihren Raum der maximalen Ideale. Dazu benötigen wir

Lemma 4.2.7 *Für alle $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ und alle $K \in K(L^2(\mathbb{T}))$ ist*

$$\|aI\|_{L(L^2(\mathbb{T}))} \leq \|aI + K\|_{L(L^2(\mathbb{T}))}.$$

Beweis. Nach Übergang zur Matrixdarstellung haben wir zu zeigen, dass

$$\|L(a)\| \leq \|L(a) + K\| \quad \text{für alle } K \in K(l^2(\mathbb{Z})).$$

Sei $U : (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $y_k := x_{k-1}$ der Verschiebungsoperator auf $l^2(\mathbb{Z})$, und für $n \in \mathbb{Z}$ sei $U_n := U^n$ falls $n \geq 0$ und $U_n := (U^*)^{-n}$ falls $n < 0$. Für diese Operatoren gilt $U_n \to 0$ schwach für $n \to \infty$ und demzufolge $KU_n \to 0$ stark für jeden kompakten Operator K. Hieraus folgt die starke Konvergenz von $U_{-n}KU_n$ gegen 0 für jeden kompakten Operator K:

$$\|U_{-n}KU_nx\| \leq \|U_{-n}\| \cdot \|KU_nx\| = \|KU_nx\| \to 0.$$

Da außerdem $U_{-n}L(a)U_n = L(a)$ ist, konvergieren die $U_{-n}(L(a) + K)U_n$ stark gegen $L(a)$. Es ist daher

$$\|L(a)\| \leq \liminf \|U_{-n}(L(a) + K)U_n\| \leq \|L(a) + K\|$$

nach dem Satz von Banach-Steinhaus. ∎

Nun ist offenbar $\pi : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))),\ f \mapsto fI + K(L^2(\mathbb{T}))$ ein *-Homomorphismus. Also ist $\mathcal{C} = \operatorname{Im} \pi$ eine symmetrische und abgeschlossene Algebra nach Satz 3.2.6. Weiter ist π injektiv, denn aus Lemma 4.2.7 folgt

$$\|f\|_\infty = \|fI\| = \|fI + K(L^2(\mathbb{T}))\|.$$

Wieder nach Satz 3.2.6 (b) ist π also ein *-Isomorphismus von $C(\mathbb{T})$ auf $\mathcal{C}$. Damit ist klar, dass $M(\mathcal{C}) \cong \mathbb{T}$ und dass

$$\{fI + K(L^2(\mathbb{T})) : f \in C(\mathbb{T}),\ f(x) = 0\} \tag{4.2.3}$$

das dem Punkt $x \in \mathbb{T}$ zugehörige maximale Ideal von $\mathcal{C}$ ist.

Wir können also mit Allan/Douglas über $\mathcal{C}$ lokalisieren. Für $x \in \mathbb{T}$ sei I_x das kleinste abgeschlossene Ideal von $\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T}))$, welches das maximale Ideal

(4.2.3) von $\mathcal{C}$ enthält. Die Algebra $(\mathcal{A}/K(L^2(\mathbb{T})))/I_x$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_x$ und den kanonischen Homomorphismus

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}_x, \quad A \mapsto (A + K(L^2(\mathbb{T}))) + I_x$$

mit π_x. Nach dem lokalen Prinzip von Allan/Douglas ist dann ein Operator $A \in \mathcal{A}$ genau dann Fredholmsch, wenn für jedes $x \in \mathbb{T}$ die Nebenklasse $\pi_x(A)$ in der "lokalen Algebra" $\mathcal{A}_x$ invertierbar ist.

Wir sehen uns die lokalen Algebren $\mathcal{A}_x$ genauer an. Sei wieder χ_x die im vorigen Abschnitt eingeführte Funktion. Dann haben wir für jedes $a \in PC$

$$\pi_x(aI) = a(x+0)\pi_x(\chi_x I) + a(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(\chi_x I)).$$

Da $\mathcal{A}$ von allen Multiplikationsoperatoren aI mit $a \in PC$ und von P erzeugt wird, wird die lokale Algebra $\mathcal{A}_x$ von den Elementen $\pi_x(\chi_x I)$, $\pi_x(P)$ und vom Einselement $\pi_x(I)$ erzeugt.

C^*-Algebren, die durch zwei selbstadjungierte Elemente erzeugt werden, kann man i. allg. nicht beschreiben. Wir haben hier jedoch den glücklichen Umstand, dass die Algebra $\mathcal{A}_x$ durch zwei *Projektoren* (und das Einselement) erzeugt wird, nämlich durch $\pi_x(\chi_x I)$ und $\pi_x(P)$. Und *derartige* Algebren kann man beschreiben! Uns genügt hier folgendes Resultat:

Theorem 4.2.8 (Halmos) *Sei $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra mit Eins e, und p, q seien Projektoren in $\mathcal{B}$ so, dass die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{B}$, welche e, p, q enthält, mit $\mathcal{B}$ zusammenfällt. Weiter nehmen wir an, dass $\sigma(pqp) = [0, 1]$. Dann ist $\mathcal{B}$ *-isomorph zur C^*-Algebra aller stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, deren Werte an den Stellen 0 und 1 Diagonalmatrizen sind. Der Isomorphismus kann so gewählt werden, dass er die Elemente e, p bzw. q in die Funktionen*

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } x \mapsto \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix}$$

überführt.

Einige Worte zum Beweis folgen im nächsten Abschnitt. Man beachte, dass aus $\sigma(pqp) = [0, 1]$ auch $\sigma(qpq) = [0, 1]$ folgt (Übung).

Um dieses als *2-Projektoren-Satz von Halmos* bekannte Resultat für die Algebra $\mathcal{B} \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{A}_x$ mit $p \mathrel{\widehat{=}} \pi_x(P)$ und $q \mathrel{\widehat{=}} \pi_x(\chi_x I)$ ausnutzen zu können, benötigen wir das Spektrum von $pqp \mathrel{\widehat{=}} \pi_x(P)\pi_x(\chi_x I)\pi_x(P) = \pi_x(P\chi_x P)$. Nun ist die Matrixdarstellung des Operators $P\chi_x P$ gerade

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T(\chi_x) \end{pmatrix},$$

und es ist nicht schwer einzusehen, dass das lokale Spektrum von $P\chi_x P$ im Punkt x genau mit dem bereits bestimmten lokalen Spektrum des Toeplitzoperators

$T(\chi_x)$ in x übereinstimmt, also mit $[0,1]$. Damit ist Satz 4.2.8 in unserem Kontext anwendbar.

Es hat sich eingebürgert, diesen Satz so zu benutzen, dass dem Projektor $\pi_x(\chi_x I)$ die konstante Funktion

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entspricht (nach oben gemachter Bemerkung können wir ja die Rollen von p und q vertauschen). Der Nebenklasse $\pi_x(aP + bQ)$ mit $a, b \in PC$ ordnen wir dann wegen

$$\begin{aligned}
&\pi_x(aP + bQ) \\
&\quad = (a(x+0)\pi_x(\chi_x) + a(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(\chi_x)))\pi_x(P) \\
&\quad\ + (b(x+0)\pi_x(\chi_x) + (b(x-0)(\pi_x(I) - \pi_x(\chi_x)))(\pi_x(I) - \pi_x(P))
\end{aligned}$$

die Matrixfunktion zu, deren Wert an der Stelle $t \in [0,\, 1]$ gleich

$$\begin{aligned}
& \left(a(x+0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a(x-0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & 1-t \end{pmatrix} \\
+ \quad & \left(b(x+0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b(x-0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1-t & -\sqrt{t(1-t)} \\ -\sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} a(x+0)t + b(x+0)(1-t) & (a(x+0) - b(x+0))\sqrt{t(1-t)} \\ (a(x-0) - b(x-0))\sqrt{t(1-t)} & a(x-0)(1-t) + b(x-0)t \end{pmatrix} \quad (4.2.4)
\end{aligned}$$

ist. Die lokale Nebenklasse $\pi_x(aP + bQ)$ ist genau dann invertierbar, wenn diese Matrixfunktion für jedes $t \in [0,1]$ invertierbar ist, und nach dem lokalen Prinzip von Allan/Douglas gilt:

Theorem 4.2.9 *Seien $a, b \in PC$. Der Operator $aP + bQ$ genau dann Fredholmsch auf $L^2(\mathbb{T})$, wenn die Matrix* (4.2.4) *für jedes $x \in \mathbb{T}$ und jedes $t \in [0,\, 1]$ invertierbar ist.*

4.3 Banachalgebren mit polynomialer Identität

Der Beweis des Halmos'schen 2-Projektoren-Satzes und einer Reihe weiterer Resultate beruht auf einer Verallgemeinerung der Gelfandtheorie für kommutative Banachalgebren, welche auf einer anderen Idee als die lokalen Prinzipien beruht. Eine *kommutative* Algebra ist offensichtlich dadurch ausgezeichnet, dass das Polynom $P(x,\, y) := xy - yx$ in zwei *nicht* kommutierenden Variablen $x,\, y$ zu 0 wird, wenn man für x und y beliebige Elemente der Algebra einsetzt. Allgemein nennt man eine Algebra $\mathcal{A}$ eine *Algebra mit polynomialer Identität* (oder kurz eine *PI-Algebra*), wenn es ein nichttriviales Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ in n nicht kommutierenden Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gibt, so dass

$$P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{für alle } a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}.$$

Als besonders nützlich haben sich die sogenannten *Standardpolynome* F_n erwiesen, die durch

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

definiert sind. Hier ist S_n die Menge der Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ und $\operatorname{sgn} \sigma$ das Vorzeichen der Permutation σ. Erfüllt eine Algebra $\mathcal{A}$ das Standardpolynom F_n, so heißt sie auch eine F_n-Algebra.

Offenbar ist $F_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$. Die F_2-Algebren sind also gerade die kommutativen Algebren.

Theorem 4.3.1 (Amitsur/Levitzki) *Die Algebra $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist eine F_{2n}-Algebra, jedoch keine F_{2k}- Algebra für ein $k < n$.*

Der Beweis ist nicht ganz einfach. Man findet ihn z.B. in Naum Krupnik: Banach algebras with symbol and singular integral operators, Birkhäuser.

Das Resultat von Amitsur und Levitzki legt bereits nahe, dass für PI-Algebren Darstellungen als Matrixalgebren wichtig sein könnten. Tatsächlich hat man für F_{2n}-Banachalgebren die folgende Verallgemeinerung der Gelfandtheorie für kommutative Banachalgebren.

Theorem 4.3.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins e, die das Standardpolynom F_{2n} erfüllt. Dann*
(a) ist für jedes maximale Ideal I von $\mathcal{A}$ der Quotient $\mathcal{A}/I$ isomorph zu $\mathbb{C}^{l \times l}$ mit einem $l \le n$,
(b) ist ein Element $a \in \mathcal{A}$ genau dann invertierbar, wenn für jedes maximale Ideal I die Matrix $f_I(a) := \varphi_I(a)\pi_I(a)$ invertierbar ist, wobei $\pi_I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ der kanonische Homomorphismus und $\varphi_I : \mathcal{A}/I \to \mathbb{C}^{l \times l}$ ein nach (a) existierender Isomorphismus ist.

Den Beweis findet man im zitierten Buch von Krupnik. Für uns ist dieser Satz besonders aus folgendem Grund interessant:

Theorem 4.3.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, die durch zwei Idempotente p und q (d.h. es ist $p^2 = p$ und $q^2 = q$) und durch das Einselement erzeugt wird. Dann ist $\mathcal{A}$ eine F_4-Algebra.*

Dies kann man durch direktes Nachrechnen überprüfen. Satz 4.3.2 ist also prinzipiell anwendbar, und es gelingt in diesem Fall, die Homomorphismen $f_I : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^{l \times l}$ mit $l = 1$ oder $l = 2$ komplett zu beschreiben.

Theorem 4.3.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, die durch zwei Idempotente p, q und durch das Einselement e erzeugt wird. Dann gilt:*
(a) Für jedes $x \in \sigma(pqp + (e-p)(e-q)(e-p)) \setminus \{0, 1\}$ lässt sich die Abbildung $F_x : \{e, p, q\} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, die gegeben wird durch

$$F_x(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_x(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_x(q) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix},$$

wobei $\sqrt{x(1-x)}$ irgendeine Zahl ist, deren Quadrat gleich $x(1-x)$ ist, zu einem stetigen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}^{2\times 2}$ fortsetzen.
(b) Für jedes $m \in \sigma(p+2q) \cap \{0, 1, 2, 3\}$ lässt sich die Abbildung $G_m : \{e, p, q\} \to \mathbb{C}^{1\times 1}$, die gegeben ist durch

$$G_0(e) = 1,\ G_0(p) = G_0(q) = 0, \quad G_1(e) = G_1(p) = 1,\ G_1(q) = 0,$$

$$G_2(e) = G_2(q) = 1,\ G_2(p) = 0, \quad G_3(e) = G_3(p) = G_3(q) = 1$$

zu einem stetigen Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}^{1\times 1}$ fortsetzen.
(c) Ein Element $a \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Matrizen $F_x(a)$ für alle $x \in \sigma(pqp + (e-p)(e-q)(e-p)) \setminus \{0, 1\}$ invertierbar und die Zahlen $G_m(a)$ für alle $m \in \sigma(p + 2q) \cap \{0, 1, 2, 3\}$ ungleich 0 sind.

Im C^*-Fall kann man $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ als *stetige* Funktion auf (einer Teilmenge von) $[0, 1]$ wählen (vgl. den 2-Projektoren-Satz von Halmos).

Kapitel 5

Universelle C^*-Algebren

Wir haben in dieser Vorlesung bereits einige C^*-Algebren kennengelernt, die (als C^*-Algebren) durch endlich viele Elemente mit speziellen Eigenschaften erzeugt werden:

- die Algebra $C(\mathbb{T})$ wird nach Stone-Weierstraß durch die Funktion $\chi : z \mapsto z$ erzeugt, d.h. durch ein unitäres Element;
- die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C)$ wird durch den Operator V der Verschiebung nach rechts erzeugt, d.h. durch eine Isometrie;
- in Satz 4.2.8 haben wir unitale C^*-Algebren beschrieben, die durch zwei Projektoren erzeugt werden.

In allen diesen Fällen kann man sich fragen, ob es eine Art größte C^*-Algebra gibt, die durch Elemente mit den genannten Eigenschaften, also z.B. durch ein unitäres Element, erzeugt wird. Als *größte* C^*-Algebra $\mathcal{A}$, die durch ein unitäres Element u erzeugt wird, würde man eine C^*-Algebra betrachten mit folgender Eigenschaft: für *jede* C^*-Algebra $\mathcal{B}$, die durch ein unitäres Element v erzeugt wird, gibt es einen *-Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, der u in v überführt. In diesem Sinn größte C^*-Algebren heißen *universell*. In diesem Abschnitt werden wir sehen, unter welchen Umständen solche universellen C^*-Algebren existieren, und wir werden überblicksartig einige dieser Algebren kennenlernen.

Folgende Konstruktion werden wir mehrfach nutzen: Ist T eine nichtleere Menge und $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ eine Familie von C^*-Algebren, so besteht ihr *direktes Produkt* $\Pi_{t\in T}\mathcal{A}_t$ aus allen beschränkten Funktionen $a : T \to \cup_{t\in T}\mathcal{A}_t$, die an der Stelle $t \in T$ einen Wert in $\mathcal{A}_t$ annehmen. Anstelle von a schreiben wir in Anlehnung an Folgen auch $(a_t)_{t\in T}$. Mit den Operationen

$$(a_t) + (b_t) := (a_t + b_t), \quad (a_t)(b_t) := (a_t b_t), \quad (a_t)^* := (a_t^*)$$

und der Norm $\|(a_t)\| := \sup_{t\in T} \|a_t\|$ wird $\Pi_{t\in T}\mathcal{A}_t$ zu einer C^*-Algebra. Hat jede C^*-Algebra $\mathcal{A}_t$ eine Eins e_t, so ist $(e_t)_{t\in T}$ das Einselement von $\Pi_{t\in T}\mathcal{A}_t$.

5.1 Existenz universeller C^*-Algebren

Wir betrachten unitale C^*-Algebren, die durch endlich viele Elemente mit speziellen Eigenschaften oder Relationen erzeugt werden. Die Beschränkung auf unitale Algebren und endlich viele Erzeuger ist nicht zwingend; auch Algebren mit abzählbar vielen Erzeugern werden betrachtet.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede C^*-Algebra $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^n$ das direkte Produkt von n Kopien von $\mathcal{A}$. Offenbar induziert jeder *-Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen C^*-Algebren einen *-Homomorphismus

$$W^n : \mathcal{A}^n \to \mathcal{B}^n, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto (Wa_1, \ldots, Wa_n).$$

Definition 5.1.1 *Let $n \in \mathbb{N}$. Eine n-*Relation *ist eine Abbildung* Rel, *die jeder unitalen C^*-Algebra eine (eventuell leere) Teilmenge* $\mathrm{Rel}\,\mathcal{A}$ *von $\mathcal{A}^n$ zuordnet, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *es gibt eine unitale C^*-Algebra $\mathcal{A}$, für die* $\mathrm{Rel}\,\mathcal{A}$ *nicht leer ist;*

(b) *für jeden unitalen *-Homomorphismus $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von C^*-Algebren bildet W^n die Menge* $\mathrm{Rel}\,\mathcal{A}$ *in* $\mathrm{Rel}\,\mathcal{B}$ *ab;*

(c) *ist $(\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ eine Familie unitaler C^*-Algebren und ist $(a_1^t, \ldots, a_n^t) \in \mathrm{Rel}\,\mathcal{A}_t$ für jedes $t \in T$, dann ist*

$$\big((a_1^t)_{t\in T}, \ldots, (a_n^t)_{t\in T}\big) \in \mathrm{Rel}\,\Pi_{t\in T}\mathcal{A}_t.$$

Bedingung (a) verlangt, dass es überhaupt C^*-Algebren mit der gewünschten Relation gibt, während Bedingungen (b) and (c) verlangen, dass Relationen verträglich mit der Wirkung von *-Homomorphismen und bzgl. der Bildung beliebiger direkter Produkte sind. Ist $\mathrm{Rel}\,\mathcal{A} \neq \emptyset$ aber $\mathrm{Rel}\,\mathcal{B} = \emptyset$, dann schließt Bedingung (b) aus, dass es einen unitalen *-Homomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

Beispiel 5.1.2 Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit Eins e. Wir betrachten die Mengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rel}_1\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : \|a\| \leq 1\}, \\
\mathrm{Rel}_2\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : a^*a = aa^* = e\}, \\
\mathrm{Rel}_3\mathcal{A} &:= \{(p, q) \in \mathcal{A}^2 : p^2 = p = p^*, q^2 = q = q^*\}, \\
\mathrm{Rel}_4\mathcal{A} &:= \{(u, v) \in \mathcal{A}^2 : u, v \text{ unitär und } uv = e^{2\pi i\theta}vu\}, \\
\mathrm{Rel}_5\mathcal{A} &:= \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{A}^n : s_i \text{ Isometrien und } s_1s_1^* + \ldots + s_ns_n^* = e\}, \\
\mathrm{Rel}_6\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : a^*a = e, aa^* \neq e\}, \\
\mathrm{Rel}_7\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : \|a\| < 1\}, \\
\mathrm{Rel}_8\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : \sigma(a) = \{0\}\}, \\
\mathrm{Rel}_9\mathcal{A} &:= \{a \in \mathcal{A} : aa^* = a^*a, \sigma(a) \subseteq [0, 1]\}.
\end{aligned}$$

Rel_1 – Rel_5 sind Relationen im Sinne von Definition 5.1.1 (konkrete Algebren, für die Rel_4 und Rel_5 nicht leer sind, sehen wir uns später an). Rel_6 ist keine

Relation, da diese Menge nicht invariant unter *-Homomorphismen ist. Dagegen erfüllt Rel_7 Bedingung (b), ist aber nicht invariant bzgl. der Bildung direkter Produkte. Das Gleiche gilt für Rel_8: Kakutani hat einen Operator A angegeben, der Normgrenzwert einer Folge von Operatoren A_n mit $\sigma(A_n) = \{0\}$ ist, dessen Spektrum $\sigma(A)$ aber echt größer als $\{0\}$ ist. Nimmt man die Bedingung der Normalität hinzu, ändert sich das Bild wieder: Rel_9 ist eine Relation. ∎

Sei $n \in \mathbb{N}$ and Rel eine n-Relation. Für jedes n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \text{Rel}\,\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ die kleinste abgeschlossene und symmetrische Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ und das Einselement von $\mathcal{A}$ enthält. Wir sagen dann auch, dass $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *die Relation* Rel *erfüllt*.

Seien $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ C^*-Algebren, die die gleiche Relation erfüllen. Ein unitaler *-Homomorphismus $W : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) \to \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ heißt *natürlich*, wenn $Wa_i = b_i$ für alle $1 \le i \le n$ ist. Jeder natürliche *-Homomorphismus ist surjektiv. Ist $W : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein unitaler *-Homomorphismus von einer C^*-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$, die eine Relation Rel erfüllt, in eine unitale C^*-Algebra $\mathcal{B}$, so ist $(Wa_1, \ldots, Wa_n) \in \text{Rel}\,\mathcal{B}$, und W ist ein natürlicher *-Homomorphismus von $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ nach $\mathcal{B}(Wa_1, \ldots, Wa_n)$.

Definition 5.1.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$ und* Rel *eine n-Relation, und sei $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ eine C^*-Algebra, die* Rel *erfüllt. Dann heißt $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$* universell *bezüglich dieser Relation, wenn es für jede C^*-Algebra $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$, die* Rel *erfüllt, einen natürlichen *-Homomorphismus $W : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) \to \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ gibt.*

Die universelle Algebra bzgl. einer gegebenen Relation ist eindeutig bis auf *-Isomorphie. Sind nämlich $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ and $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ universelle Algebren bzgl. der gleichen Relation und sind

$$W : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) \to \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n) \quad \text{und} \quad S : \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n) \to \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$$

die zugehörigen natürlichen *-Homomorphismen, dann ist SW die Identität auf $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ und WS die Identität auf $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$.

Der folgende Satz klärt die Frage der Existenz universeller Algebren.

Theorem 5.1.4 *Für jede n-Relation gibt es eine universelle C^*-Algebra.*

Der nachstehende Beweis folgt Abschnitt VI.I im Buch von Davidson.

Beweisskizze. Sei Rel eine n-Relation. Bedingung (a) in Definition 5.1.1 garantiert, dass es wenigstens eine separable C^*-Algebra gibt, die diese Relation erfüllt. Die GNS-Konstruktion liefert eine irreduzible Darstellung dieser Algebra auf einem separablen Hilbertraum H. Insbesondere ist $\text{Rel}\,L(H)$ nicht leer, und es gibt eine irreduzible C^*-Unteralgebra von $L(H)$, welche die Relation Rel erfüllt.

Wir betrachten die Menge $\{a^t\}_{t \in T}$ aller n-Tupel $a^t = (a_1^t, \ldots, a_n^t) \in \text{Rel}\,L(H_t)$ mit einem separablen Hilbertraum H_t, für den $\mathcal{A}_t := L(H_t)(a_1^t, \ldots, a_n^t)$ eine irreduzible C^*-Unteralgebra von $L(H_t)$ ist, bilden das direkte Produkt $\mathcal{A} := \Pi_{t \in T} \mathcal{A}_t$

und schreiben $a_i := (a_i^t)_{t\in T}$ für $1 \le i \le n$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ die universelle C^*-Algebra bzgl. der Relation Rel ist.

Sei $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ eine C^*-Algebra, die ebenfalls die Relation Rel erfüllt. Die Einselemente von $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n)$ bzw. $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$ bezeichnen wir mit e bzw. f. Die Existenz eines natürlichen *-Homomorphismus

$$W : \mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) \to \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n). \tag{5.1.1}$$

folgt leicht, wenn wir gezeigt haben, dass

$$\|P(f, b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*)\| \le \|P(e, a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^*)\| \tag{5.1.2}$$

für jedes Polynom P in $2n + 1$ nicht kommutierenden Variablen.

Sei P ein solches Polynom, und sei $a := P(f, b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*)$. Mit der GNS-Konstruktion finden wir einen separablen Hilbertraum H und eine irreduzible Darstellung

$$\pi : \mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n) \to L(H)$$

mit $\|a\| = \|\pi(a)\|$. Wir betrachten das n-Tupel $(\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n))$. Die Algebra $L(H)(\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n))$ ist einer der Faktoren im direkten Produkt $\mathcal{A}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
&\|P(e, a_1, \ldots, a_n, a_1^*, \ldots, a_n^*)\| \\
&\quad \ge \|P(\pi(f), \pi(b_1), \ldots, \pi(b_n), \pi(b_1)^*, \ldots, \pi(b_n)^*)\| \\
&\quad = \|P(e, b_1, \ldots, b_n, b_1^*, \ldots, b_n^*)\|,
\end{aligned}$$

womit wir (5.1.2) erhalten. Es gibt also einen wohldefinierten, kontraktiven und unitalen *-Homomorphismus von der unitalen (nicht notwendig abgeschlossenen) *-Algebra, die durch $a_1, \ldots, a_n$ erzeugt wird, nach $\mathcal{B}(b_1, \ldots, b_n)$, der jedes a_i auf das entsprechende b_i abbildet. Diesen Homomorphismus setzen wir per Stetigkeit fort und erhalten den gewünschten natürlichen Homomorphismus (5.1.1). ∎

5.2 Beispiele universeller C^*-Algebren

Universelle Algebren können recht komplizierte Objekte sein. In einigen Fällen lassen sie sich aber mit vertrauten Algebren identifizieren.

In diesem Abschnitt folgen wir dem bereits zitierten Text von Davidson sowie dem Buch von Loring, Lifting Solutions to Perturbation Problems in C^*-Algebras, Fields Institute Monographs Vol. 8, Providence, R. I., 1997. Dort finden Sie neben hier ausgelassenen Details auch Hinweise auf Originalarbeiten und weiterführende Literatur.

Beispiel 5.2.1 $C(\mathbb{T})$ is die universelle duch ein unitäres Element erzeugte C^*-Algebra.

Beispiel 5.2.2 Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C)$ ist die universelle durch eine Isometrie erzeugte C^*-Algebra.

Beispiel 5.2.3 (Zwei-Projektoren-Algebren.) Es gibt eine universelle Algebra für die Relation

$$\operatorname{Rel}\mathcal{A} := \{(p,\, q) \in \mathcal{A}^2 : p^2 = p^* = p,\, q^2 = q^* = q\}, \tag{5.2.1}$$

die universelle Algebra, die durch zwei Projektoren erzeugt wird. Ist $\mathcal{A}(p,\, q)$ die universelle Algebra, die (5.2.1) erfüllt, dann ist das Spektrum von $r := pqp + (e-p)(e-q)(e-p)$ das Intervall $[0,\, 1]$. Umgekehrt ist jede C^*-Algebra, die durch zwei Projektoren und die Eins erzeugt wird und für die diese spektrale Bedingung erfüllt ist, *-isomorph zu $\mathcal{A}(p,\, q)$. Da das Spektrum von r stets in $[0,\, 1]$ enthalten ist, ist die universelle C^*-Algebra, die durch zwei Projektoren erzeugt wird, durch die Maximalität des Spektrums von r ausgezeichnet.

Eine konkrete Realisierung der universellen Algebra $\mathcal{A}(p,\, q)$ ist die Unteralgebra von $C([0,\, 1],\, \mathbb{C}^{2\times 2})$, die aus allen Funktionen besteht, deren Werte in 0 und 1 durch Diagonalmatrizen beschrieben werden. Dabei ist

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad q(x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & 1-x \end{pmatrix},$$

(Satz von Halmos). ∎

Beispiel 5.2.4 (Irrationale Rotationsalgebren.) Sei $\theta \in \mathbb{R}$ irrational. Die *irrationale Rotationsalgebra* $\mathcal{A}_\theta$ ist die universelle C^*-Algebra der Relation

$$\operatorname{Rel}\mathcal{A} := \{(u,\, v) \in \mathcal{A}^2 : u,\, v \text{ sind unitär und } uv = e^{2\pi i\theta} vu\}. \tag{5.2.2}$$

Jede irrationale Rotationsalgebra ist einfach (Theorem VI.1.4 in Davidson). Folglich ist jede C^*-Algebra $\mathcal{B}(b,\, c)$, die die Relation (5.2.2) erfüllt, natürlich *-isomorph zu $\mathcal{A}_\theta$. Für eine konkrete Realisierung kann man die unitären Operatoren

$$U : (x_n) \mapsto (x_{n-1}) \quad \text{und} \quad V : (x_n) \mapsto (e^{-2\pi i n\theta} x_n)$$

auf $l^2(\mathbb{Z})$ wählen. Man rechnet leicht nach, dass tatsächlich $UV = e^{2\pi i\theta} VU$. Somit ist $\mathcal{A}_\theta$ natürlich *-isomorph zur kleinsten C^*-Unteralgebra von $L(l^2(\mathbb{Z}))$, die U und V enthält. ∎

Beispiel 5.2.5 (Cuntzalgebren.) Sei $N \geq 2$. Die *Cuntzalgebra* $\mathcal{O}_N$ ist die universelle Algebra für die Relation

$$\operatorname{Rel}\mathcal{A} := \Big\{(s_0,\, \ldots,\, s_{N-1}) \in \mathcal{A}^N : s_0^* s_0 = \ldots = s_{N-1}^* s_{N-1} = e \text{ und } \sum s_i s_i^* = e\Big\}.$$

Cuntzalgebren $\mathcal{O}_N$ sind einfach (Corollary V.4.7 in Davidson). Sind also S_0, ..., S_{N-1} Isometrien auf einem Hilbertraum H mit $S_0 S_0^* + \ldots + S_{N-1} S_{N-1}^* = I$, so ist die kleinste C^*-Unteralgebra von $L(H)$, die diese Isometrien enthält, *-isomorph zu $\mathcal{O}_N$. Für $H = l^2(\mathbb{Z}^+)$ und $i = 0, \ldots, N-1$ kann man beispielsweise

$$S_i : (x_k)_{k\geq 0} \mapsto (y_k)_{k\geq 0} \quad \text{mit} \quad y_k := \begin{cases} x_r & \text{falls } k = rN + i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wählen. Das so-definierte N-Tupel von Isometrien erfüllt die oben definierte Cuntz-Relation. ■

Beispiel 5.2.6 (Graphalgebren.) Unter einem gerichteten Graph verstehen wir ein Quadrupel (E^0, E^1, r, s), bestehend aus zwei (endlichen) Mengen E^0, E^1 und zwei Abbildungen $r, s : E^1 \to E^0$. Anschaulich stellt man sich unter E^0 die Menge der Knoten und unter E^1 die Menge der Kanten eines Graphen vor, und die Abbildungen r bzw. s ordnen jeder Kante ihren Endpunkt (range) bzw. ihren Anfangspunkt (source) zu.

Eine *Cuntz-Krieger-Familie* für einen Graphen (E^0, E^1, r, s) ist eine Familie $\{s_e, p_v : e \in E^1, v \in E^0\}$ von partiellen Isometrien s_e (d.h. $s_e s_e^* s_e = s_e$) und paarweise orthogonalen Projektoren p_v, die die *Cuntz-Krieger-Relationen*

(CK_1) $s_e^* s_e = p_{r(e)}$ für alle $e \in E^1$,

(CK_2) $p_v = \sum_{e\in E^1 : s(e)=v} s_e s_e^*$ für alle $v \in E^0$ mit $s^{-1}(v) \neq \emptyset$,

(CK_3) $s_e s_e^* \leq p_{s(e)}$ für alle $e \in E^1$

erfüllen.

Die *Graphalgebra* des Graphen (E^0, E^1, r, s) ist die universelle C^*-Algebra der zugehörigen Cuntz-Krieger-Relationen. Die schon genannten Algebren $\mathbb{C}$, $C(\mathbb{T})$, $\mathcal{T}(C)$ und $\mathcal{O}_N$ mit $N \geq 2$ sind Graphalgebren in diesem Sinn. Daneben gibt es viele weitere, und es gibt zahlreiche Resultate, die Eigenschaften eines Graphen und seiner Graphalgebra in Beziehung setzen. Slogan: Graphalgebren sind C^*-Algebren, *die man sehen kann.*

Für eine weitere Beschäftigung mit dem Thema kann ich Ian Raeburns Buch *Graph Algebras* empfehlen. ■